الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY
Faculté des sciences
Département de mathématiques

جامعة باجي مختار – عنابـــــــــة

Polycopié de Travaux dirigés

Pour l'usage des étudiants de (1 ère Année licence sciences de la matière**)**

Recueil d'exercices mathématiques pour les sciences de la matière

Présenté par :
Dr. **Bousseba Fatma Zohra**

Année Universitaire : 2025/2026

Préface

Ce support pédagogique correspond aux modules Mathématiques 1 et 2 du socle commun en première année, dans le domaine des Sciences de la matière. Il vise à accompagner les étudiants dans l'acquisition des fondamentaux en mathématiques, à travers une progression organisée en chapitres comprenant des rappels théoriques, des exercices corrigés et des exercices d'autoévaluation. Ce guide a pour vocation de faciliter la structuration des connaissances et la transition vers des apprentissages plus complexes. Vos suggestions sont précieuses pour l'enrichissement continu de ce document.

L'auteur.

Table des matières

Partie I

Maths 1

CHAPITRE 1

Structures algébriques, groupe, anneau et corps

1.1 Groupe

Définition 1.1.1 *un groupe $(G, *)$ est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ qui vérifie les propériétés suivantes:*

1- pour tout x, $y \in G$, $\quad x * y \in G \quad$ ($*$ est une loi de composition interne)

2-Associativité : pour tout $x, y \in G$, $\quad x * (y * x) = (x * y) * z$

3-Elément neutre :il existe $e \in G$ tel que $\; x \in G, x * e = e * x = x \;$ i.e$(G \neq \phi)$

4-Elément symétrique :pour tout $x \in G$ il existe $x^{'} \in G$ tel que $x * x^{'} = x^{'} * x = e$ ($x^{'}$est l'inverse de x est noté x^{-1})

5-Commutativité :pour tout $x * y \in G$, $\quad x * y = y * x$,

un groupe $commutatif$ est également appelé un groupe abélien.

1.2 Sous-groupes

Définition 1.2.1 *Soit $(G, *)$ un groupe. Une partie $H \subset G$ est un $sous-groupe$ de G si :*

1) $e_G \in H$.

2) pour tout $x, y \in H$, on a $x * y \in H$, *3) pour tout $x \in H$, on a $x^{-1} \in H$.*

1.3 Morphisme de groupe

Définition 1.3.1 *Soient deux ensembles E et F.*

On appelle application de E dans F toute relation qui à chaque élément x de E associe un unique élément y de F.

On écrit :

$$f : E \to F \text{ avec } y = f(x)$$

Définition 1.3.2 *soient $(G, *)$ et $(G^{'}, o)$ deux groupes*

une application $f : G \to G^{'}$est un morphisme de groupe si et seulement si :

pour tout $x, x^{'} \in G$, $f(x * x^{'}) = f(x) o f(x^{'})$

1.4 Structure d'anneau et corps

Définition 1.4.1 ***(structure d'anneau):****un anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $(A, *, o)$ telles que :*

a) $(A, *)$ est un groupe commutatif d'élement neutre noté o_A.

b) 1) La loi $*$ est distributive à gauche et à droite par rapport à la loi o pour tout $x, y, z \in A$, $xo(y * z) = (xoy) * (xoz)$ $et(x * y)oz = (xoz) * (yoz)$

2) la loi o admet un élement neutre distinct de o_A noté 1_A

c) La loi o est associative pour tout $x, y, z \in A, (xoy)oz = xo(yoz)$

*Si la loi o est commutative, l'anneau est dit **commutatif** ou **abélien.***

1.5 Exercices résolus

Exercice 1

Répondre par Vrai ou Faux

1- Il existe des lois de composition interne qui sont commutatives sans pour autant être associatives.

2- Soit g un élément d'un groupe G. L'ensemble $\{x : xg = gx\}$ est un sous-groupe ablélien de G

3- Soient G et G' deux groupes et φ un morphisme entre G et G'. Le groupe G peut etre abélien sans que G' le soit.

Solution

1- Vrai . On considère la loi $*$ définie sur $\mathbb{N}$ par $x * y = |x - y|$, alors elle est commutative sans être associative. En effet, $(3 * 2) * 5 = 4$ alors que $3 * (2 * 5) = 0$

2- Faux. L'ensemble en question est bien un sous-groupe de G mais il n'est pas forcément abélien. Prendre par exemple $g = e$ et $G =$Ç$_3$

3- Vrai. Prendre par exemple $G = \{e\}$ et $G' =$Ç$_3$.

Exercice 2

Soit $(G; \cdot)$ un groupe noté multiplicativement et e l'élément neutre de G tel que: $(a; b) \in G^2$ $(ab)^2 = a^2b^2$

1) Montrer que ce si :$\forall (a; b) \in G^2 : (ab)^2 = a^2b^2$ alors le groupe G est commutatif

2) Montrer que ce si :$\forall x \in G : x^2 = e$ alors le groupe G est commutatif

solution :

1) Soit $(a; b) \in G^2$

Par hypothése on a: $(ab)^2 = a^2b^2$

Alors : $a.b.a.b = a.a.b.b$ puisque G un groupe tout élément de G est regulier

Donc : $b.a = a.b$

Par suite ce groupe est commutatif

2) Soient les éléments $(x; y) \in G^2$ par hypothése on a : $xyxy = e$

On multipliant à gauche par x et à droite par y

Donc : $xxyxyy = xey \Longrightarrow x^2yxy^2 = xey \Longrightarrow eyxe = xy$

$\Longrightarrow yx = xy$ Par suite ce groupe est commutatif

Exercice 3

On pose $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall (x, y) \in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y)$$

Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif

Solution :

1) Soit $(x; y) \in I^2$

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y) = \arctan(-1 + \tan y + \tan x)$$

Donc $x * y = y * x$ et par suite $*$ est commutatif

2) Soit $(x, y, z) \in I^3$

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) * z \\ &= \arctan(-1 + \tan((\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) + \tan z)) \\ &= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * (ar\tan(-1 + \tan y + \tan z)) \\ &= ar\tan(-1 + \tan x + \tan((\arctan(-1 + \tan y + \tan z)))) \\ &= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)\end{aligned}$$

Donc : $(x * y) * z = x * (y * z)$

Par suite $*$ est associative

3) $\forall x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} x * \frac{\pi}{4} &= \arctan\left(-1 + \tan x + \tan\frac{\pi}{4}\right) = \arctan(-1 + \tan x + 1) \\ &= \arctan(\tan x) = x \end{aligned}$$

Et puisque $*$ est commutatif on a aussi :$\frac{\pi}{4} * x = x$

Et puisque : $\frac{\pi}{4} \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

alors : $*$ posséde un élément neutre $e = \frac{\pi}{4}$

4) soit : $x \in I$ on cherche $x^{'} \in I$ tel que :

$$\begin{aligned} x * x^{'} &= \frac{\pi}{4} \\ x * x^{'} &= \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \arctan(-1 + \tan x + \tan x^{'}) = \frac{\pi}{4} \\ &\Longleftrightarrow -1 + \tan x + \tan x^{'} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow \tan x + \tan x^{'} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \tan x^{'} = 2 - \tan x \Longleftrightarrow x^{'} = \arctan(2 - \tan x) \in I \end{aligned}$$

Donc : tout élément de I possède un symétrique pour $*$ dans I.

Finalement: $(I; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 4 :

Soit $G =]-1, 1[$. Pour $x, y \in G$, on définit la loi $*$ par : $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$

1-Montrer que la loi $*$ est interne.

2-Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

La solution :

1)$G =]-1, 1[$, $*$ est interne si : $\forall x, y \in G$, $x * y \in G$

On a

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy} \in G \Longleftrightarrow -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$$

a) On montre que

$$\Longrightarrow \frac{x+y}{1+xy} < 1$$

on suppose que

$$\Longrightarrow \frac{x+y}{1+xy} - 1 < 0$$

$$\Longrightarrow \frac{x+y-1-xy}{1+xy} = \frac{x(1-y)+y-1}{1+xy} = \frac{(y-1)(1-x)}{1+xy} \qquad (**)$$

On a:

$$\begin{cases} -1 < y < 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 1+xy > 0 \text{ et } y-1 < 0 \text{ et } 1-x > 0$$

$$\Longrightarrow (**) \quad \tfrac{(y-1)(1-x)}{1+xy} < 0 \Longleftrightarrow \tfrac{x+y}{1+xy} < 1$$

b)

$$\Longrightarrow \tfrac{x+y}{1+xy} + 1 > 0 \Longleftrightarrow \tfrac{x+y+xy+1}{1+xy} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \tfrac{x(1+y)+(1+y)}{1+xy} > 0 \Longleftrightarrow \tfrac{(1+y)(1+x)}{1+xy} > 0$$

Donc

$$\tfrac{x+y}{1+xy} + 1 > 0$$

Finalement on obtient $x * y \in G$,donc $*$ est une loi interne.

2) $(G, *)$ est un groupe si :

a)

$$\forall x, y, z \in G,\ x*(y*z) = (x*y)*z$$

$$x*(y*z) = x*(\frac{y+z}{1+yz}) = \frac{x+(\frac{y+z}{1+yz})}{1+x(\frac{y+z}{1+yz})} = \frac{\frac{x+xyz+y+z}{1+yz}}{\frac{xz+xy+yz+1}{1+yz}} = \frac{x+y+z+xyz}{xy+yz+xz+1}$$

$$(x*y)*z = (\frac{x+y}{1+xy})*z = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{\left(\frac{x+y+xyz+z}{1+xy}\right)}{\left(\frac{xy+xz+yz}{1+xy}\right)} = \frac{x+y+z+xyz}{xy+yz+xz+1}$$

Donc $*$ est une loi associative

b) $\forall x \in G$, $\exists e \in G$ tq :

$$\begin{aligned} x * e &= e * x = x \Longrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = x \\ &\Longrightarrow x + e = x + x^2 e \\ &\Longrightarrow x + e - x - x^2 e = e(1 - x^2) = 0 \\ &\Longrightarrow e = 0 \text{ élement neutre} \end{aligned}$$

c) $\forall x \in G$, $\exists x^{'} \in G$ $tq : x * x^{'} = x^{'} * x = e$
$\Longrightarrow x * x^{'} = \dfrac{x + x^{'}}{1 + xx^{'}} = 0 \Longrightarrow x^{'} = -x$ élèment symétrique
Donc $(G, *)$ est un groupe .

Exercice 5:

Soit G un groupe et H une partie non vide de G.finie et stable. Montrer que H est un sous-groupe de G.

La solution :

Il suffit de montrer que l'inverse d'un élément x de H appartient aussi à H. Puisque H est stable alors la suite des puissances $(x^n)_{n \geq 0}$ est incluse dans H.Mais puisque H est fini, l'application $n \longrightarrow x^n$ ne peut pas étre injective. il existe donc deux entiers n, p avec $p > n$, tels que $x^n = x^p$.On simplifie par x^n(dans le groupe G) et on trouve $x^{p-n} = e$.il en découle que e est dans H et que x^{n-p-1}(qui est lui aussi dans H) est l'inverse de x.

Conclusion: H est un $sous - groupe$ de G.

Exercice 6 :

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$

La solution:

Il est évident que si $H \subset K$ ou $K \subset H$, alors $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Réciproquement, on suppose que $H \cup K$ est un sous-groupe de G.Supposons de plus $H \cup K$ .Alors on doit montrer $K \subset H$.Par hypothése il existe un élement a telque $a \in H, a \notin K$.Soit x un élément quelconque de K.puisque x et a sont dans le sous-groupe $H \cup K$, il en est de méme de xa.

on $xa \in K$ impliquerait $a = x^{-1}(xa) \in K$, ce qui n'est pas.

Ainsi $xa \in H$,ce qui prouve $x = (xa)a^{-1} \in H$.

On a donc $K \subset H$,ce qui achève la démonstration.

Exercice 7

On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$$(x + y) + (x^{'}, y^{'}) = (x + x^{'}, y + y^{'}) \text{ et } (x, y) * (x^{'}, y^{'}) = (xx^{'}, xy^{'} + x^{'}y)$$

1- Montrer que $(A, +)$ est un groupe commutatif

2- Montrer que la loi $*$ est commutative

3- Déterminer l'élément neutre de A pour la loi $*$

4- Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif.

La solution

1. La loi est interne car

$$(x + y) + (x^{'}, y^{'}) = (x + x^{'}, y + y^{'}) \in A$$

la loi $+$ est associative car

$$\begin{aligned}
(x + y) + [(x^{'}, y^{'}) + (x^{''}, y^{''})] &= (x, y) + (x^{'} + x^{''}, y^{'} + y^{"}) \\
&= (x + (x^{'} + x^{"}), y + (y^{'} + y^{"})) \\
&= [(x, y) + (x^{'}, y^{'})] + (x^{"}, y^{"})
\end{aligned}$$

et par suite

$$(x+y)+(x^{'},y^{'})=(x+x^{'},y+y^{'})=(x^{'}+x,y^{'}+y)=(x^{'}+y^{'})+(x,y)$$

Donc la loi + est commutative

Soit (a,b) tel que $(x,y)+(a,b)=(x,y)$, il est clair que $(a,b)=(0,0)$ est l'unique élément neutre.

Soit $(x^{'},y^{'})$ tel que $(x+y)+(x^{'},y^{'})=(0,0)$ cela équivaut à

$$(x+x^{'},y+y^{'})=(0,0)\Longleftrightarrow\begin{cases}x+x^{'}=0\\ y+y^{'}=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^{'}=x\\ y^{'}=-y\end{cases}$$

Donc le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$

Donc $(A,+)$ est un groupe commutatif .

2)a

$(x,y)*(x^{'},y^{'})=(xx^{'},xy^{'}+x^{'}y)=\left(x^{'}x,x^{'}y+xy^{'}\right)=(x^{'},y^{'})*(x,y)$ donc $*$ est commutative.

b)

$$\begin{aligned}\left[(x,y)*(x^{'},y^{'})\right]*\left(x^{"},y^{"}\right) &= (xx^{'},xy^{'}+x^{'}y)*(x^{"},y^{"})\\ &= (xx^{'}x,xx^{'}y^{"}+x^{"}xy^{'}+x^{"}x^{'}y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x^{'},y^{'})*(x^{"},y^{"})] &= (x,y)*(x^{'}x^{"},x^{'}y^{"}+x^{"}y^{'})\\ &= (xx^{'}x^{"},xx^{'}y^{"}+xx^{"}y^{'}+x^{'}x^{"}y)\end{aligned}$$

Donc

$$\left[(x,y)*(x^{'},y^{'})\right]*(x^{"},y^{"})=(x,y)*\left[(x^{'},y^{'})*(x^{"},y^{"})\right]$$

La loi $*$ est associative.

c) Soit (e,f) tel que pour tout $(x,y)\in A,(x,y)*(e,f)=(x,y),e$ et f véfifient:

$$\begin{cases}xe=x\\ xf+ye=y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}e=1\\ xf+y=y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}e=1\\ f=0\end{cases}$$

$(1,0)\in A$ est l'élément neutre de A pour la loi $*$

d) Toutes les propriétés pour qu'un ensemble muni de deux lois soit un anneau sont dans les questions précédentes sauf la distributivité de $*$ par rapport à l'addition (à gauche ou à droite puisque la loi $*$ est commutative, c'est d'ailleurs cette commutativité qui l'anneau commutatif).

$$\begin{aligned}
(x,y) * \left[(x^{'},y^{'}) + (x^{"} + y^{"})\right] &= (x,y) * (x^{'} + x^{"}, y^{'} + y^{"}) \\
(x(x^{'} + x^{"}), x(y^{'} + y^{"}) + (x^{'} + x^{"})y) &= (xx^{'} + xx^{"}, xy^{'} + xy^{"} + x^{'}y + x^{"}y) \\
&= (xx^{'} + xx^{"}, xy^{'} + x^{'}y + xy^{"} + x^{"}y) \\
&= (x,y) * (x^{'}, y^{'}) + (x,y) * (x^{"}, y^{"})
\end{aligned}$$

Et voila $(A, +, *)$ est un anneau commutatif.

Exercice 8:

Démontrer que les fonctions suivantes sont des morphismes de groupes.

1. $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$, $n \longmapsto (-1)^n$
2. $(\mathbb{C}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$, $z \longmapsto z \diagup |z|$
3. $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right) \times (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times), (r, \theta) \longmapsto re^{i\theta}$.

La solution :

Dans chacun des cas, on notera $\emptyset$ la fonction donnée.

1. soit $n, m \in \mathbb{Z}$, Alors

$$\emptyset(n+m) = (-1)^{n+m} = (-1)^n(-1)^m = \emptyset(n)\emptyset(m).$$

Ainsi, $\emptyset$ est bien un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^*$.

2. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.Alors

$$\emptyset(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \times \frac{|z_2|}{z_2} = \emptyset(z_1)\emptyset(z_2).$$

Ainsi, $\emptyset$ est bien un morphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$.

3. Il faut faire un peu plus attention pour cet exemple, car on part d'un groupe produit et de plus, pour un des éléments du produit, la loi est notée multiplicativement, et pour

l'autre, la loi est notée additivement. Soit (r_1, θ_1) et (r_2, θ_2) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors

$$\emptyset((r_1, \theta_1).(r_2, \theta_2)) = \emptyset(r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = \emptyset(r_1, \theta_1) \cdot \emptyset(r_2, \theta_2).$$

$\emptyset$ est donc bien un morphisme de groupes.

1.6 Exercices à résoudre

Exercice 1:

Montrer que $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(x, y) * (x^{'}, y^{'}) = (xx^{'}, \frac{y}{x^{'}} + xy^{'})$$

est un groupe.

Exercice 2:

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

vérifier que cette loi est commutative, non associative et admet un élément neutre

Exercice 3 :

Démontrer pour chaque question que H est un sous-groupe de G.

1- $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ et $H = \{z \in \mathbb{C}^* : \exists n \in \mathbb{N},\ z^n = 1\}$;

2- $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q},\ (a, b) \neq (0, 0)\right\}$.

Exercice 4 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et A, B deux sous-groupes de G.

On note $AB = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 5:

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de composition internes $+$ et $*$ par :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d) \text{ et } (a, b) * (c, d) = (ac, ad + bd).$$

montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.

Exercice 6:

Soient o et $*$ deux lois de compositions internes définies par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y - 2 \text{ et } xoy = x + y - xy$$

est ce que $(\mathbb{R}, o, *)$ est un anneau ?

Exercice 7:

Soit $\mathbb{R}^2$ muni des opération binaires suivantes. $\forall (x, y), (x^{'}, y^{'}) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (x, y) + (x^{'}, y^{'}) &= (x + x^{'}, y + y^{'}) \\ (x, y) \cdot (x^{'}, y^{'}) &= (xx^{'} - yy^{'}, xy^{'} + x^{'}y) \end{aligned}$$

monter que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

Exercice 8 :

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

CHAPITRE 2

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

2.1 Les espaces verctoriels

$\Bbbk$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1 *On appelle espace vectoriel sur $\Bbbk$ (ou $\Bbbk-$ espace vectoriel) un ensemble E muni de deux lois:*

une loi interne, notée $+$, telle que $(E,+)$ soit un groupe commutatif. L'élément nul est noté $0_{E.}$

une loi externe, notée, qui est une application de $\Bbbk \times E$ dans E vérifiant :

1) $\forall(\alpha,\beta) \in \Bbbk^2, \forall x \in E,\ (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

2) $\forall \alpha \in \Bbbk,\ \forall(x,y) \in E^2, \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

3) $\forall(\alpha,\beta) \in \Bbbk^2, \forall x \in E,\ \alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$

4) $\forall x \in E,\ 1.x = x$

2.2 Familles dans un espace vectoriel

On considère dans toute la suite E un espace vectoriel. Soit $(V_1, ...V_n)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel. On dit que la famille $(V_1, ...V_n)$ est:

- *liée* s'il existe des scalaires $a_1, ...a_n$, qui ne sont pas tous nuls, tels que

$$a_1 V_1 + ... + a_n V_n = 0$$

- *libre* si elle n'est pas liée. Autrement dit, ma famille $(V_1, ...V_n)$ est libre si, dès qu'on a une égalité $a_1 V_1 + ... + a_n V_n = 0$,alors nécessairement $a_1 = ... = a_n = 0$. On dit encore que les vecteurs $V_1, ...V_n$ sont *linéairement indépendants.*

- *génératrice* si tout vecteur V de l'espace E est une combinaison linéaire des vecteurs $V_1, ...V_n$: il existe des scalaires $a_1..., a_n$ tels que $V = a_1 V_1 + ... + a_n V_n$.

- une *base* si elle est à la fois une famille libre et génératrice. Ceci entraine que l'écriture de V comme combinaison linéaire de $V_1, ...V_n$ est unique.

2.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.3.1 *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées:*

1) $0_E \in F$; $(F \neq \emptyset)$.
2) *pour tout* $(x, y) \in F^2 \implies x + y \in F$
3) *pour tout* $x \in F$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda.x \in F$

2.4 Application linéaires

Définition 2.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est linéaire si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1)Pour tout $x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2) Pour tout $x \in E$ *et* $\lambda \in \Bbbk$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

2.5 Noyau et image

Définition 2.5.1 *On appelle noyau de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ le sous-espace vectoriel de E*

$$\ker(f) = \{x \in E;\ f(x) = 0\}.$$

Définition 2.5.2 *Soit E, F deux ensembles et $f : E \to f$ une application.*

f est *injective* si

$$\forall x, x' \in E \qquad \Big(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\Big)$$

f est *surjective* si

$$\forall y \in F \ \ \exists x \in E \qquad (y = f(x))$$

Théorème 2.5.1 *$f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0\}$.

On appelle image de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ le sous-espace vectoriel de F

$$im(f) = \{f(x);\ x \in E\}.$$

Proposition 2.5.1 *: Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$. soit f une application linéaire de E vers F.*

1. *f est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im}(f) = F$.

2.6 Le rang d'une application linéaire

Théorème 2.6.1 ***du rang*** *: Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, si $f : E \to F$ est une application linéaire alors :*

$$\dim(E) = \dim(im(f)) + \dim(\ker(f)).$$

2.7 Exercices résolus

Exercice 1 :

Les ensembles suivants, possèdent-ils une structure d'espace vectoriel

1-$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$ 2-$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y \ = 2z = 4t\}$

3-$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 1\}$ 4- $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$

La solution :

1-$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$

On a $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1 \Longrightarrow E_1 \neq \emptyset$

Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ élément de E_1. Alors, $u+v = (x+x', y+y', z+z')$ est aussi élément de E_1.

En effet,

$$(x + x') + (y + y') + 3(z + z') = (x + y + 3z) + (x' + y' + 3z') = 0.$$

De même ,pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ est élément de E_1

Puisque

$$\lambda x + \lambda y + 3\lambda z = \lambda(x + y + 3z) = 0.$$

E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2-$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y \ = 2z = 4t\}$

On a $0_{\mathbb{R}^4} \in E_2 \Longrightarrow E_2 \neq \emptyset$

Soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ deux élément de E_2.

Alors, $u + v = (x + x', y + y', z + z', t + t')$ est aussi élément de E_2.

En effet, $x + x' = y + y' = 2(z + z') = 4t + 4t' = 4(t + t')$.

De même , on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λu est un élément de E_2

Donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3- E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel $(0, 0, 0) \notin E_3$.

4- E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition.

En effet, $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ sont tout les deux éléments de E_4 mais $u + v = (1, 1)$ n'est pas élément de E_4.

Exercice 2 :

Etudier l'indépendance linéaire des vecteurs suivants:

1- $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La solution :

1-Ecrivons $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Si on traduit cette égalité coordonnée , on obtient le système :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Longrightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sont libres .}$$

2- Ecrivons $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Si on traduit cette égalité coordonnée , on obtient le système :

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ 4\alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Longrightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sont libres}$$

Exercice 3 :

On considère $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$

Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La solution :

Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = Card(B)$, il suffit de montrer que B est libre. Soit a, b et c des réels tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$.Alors,

$$\begin{cases} a + b = 0......(1) \\ a + b + c = 0.......(2) \\ a + c = 0.......(3) \end{cases}$$

Des deux premiéres égalités, on déduit que $c = 0$ puis grace à la dernière que $a = 0$ et enfin $a = b = c = 0$

Donc $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En raison des dimensions, on conclut que B est une base $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4:

1- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, rapporté à sa base canonique, $B^c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, vérifier que les vecteurs:

$$a = (1, 2, -1, -2),\ b = (2, 3, 0, -1),\ c = (1, 3, -1, 0),\ d = (1, 2, 1, 4)$$

sont libres.

2- Calculer les coordonnées du vecteur $V = (7, 14, -1, 2)_{B^c}$ dans la base $B = \{a, b, c, d\}$.

La solution

On vérifie que $B = \{a, b, c, d\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ avec

$$a = (1, 2, -1, -2),\ b = (2, 3, 0, -1),\ c = (1, 3, -1, 0),\ d = (1, 2, 1, 4)$$

En effet, B est libre car pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 d = 0$$

alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ et puisque $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = rang(B)$ donc $B = \{a, b, c, d\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2- On a $V = 7e_1 + 14e_2 - e_3 + 2e_4 = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 d$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Ainsi, par identification, nous avons un système à résoudre:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, +\alpha_4 &= 7 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, +2\alpha_4 &= 14 \\ -\alpha_1 - \alpha_3, +\alpha_4 &= -1 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_4 &= 2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 1$. D'ou,

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercices 5 :

Soit la famille des vecteurs suivante $B = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,1,0)\}$

1- Montrer que la famille B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2- Trouver les composantes du vecteur $\omega = (1,1,1)$ dans cette base.

La solution:

Puisque (v_1, v_2, v_3) est une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, à savoir $\mathbb{R}^3$, il suffit de prouver qu'elle est libre. L'équation $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ est équivalente successivement aux systèmes:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \ (L_3) - (L_1) \longrightarrow (L_3) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha = 0 \ (L_3) + (L_2) \longrightarrow (L_3) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Donc la famille est libre

2- Pour trouver les composantes du vecteur $\omega = (1,1,1)$, on doit résoudre l'équation $(1,1,1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, qui est successivement équivalente à

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha - \gamma = 0 \ (L_3) - (L_1) \longrightarrow (L_3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ 2\alpha = 1 \ (L_3) + (L_2) \longrightarrow (L_3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

On a donc $(1,1,1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$.

On aurait pu aller un peu vite en remarquant que, par symétrie des trois coordonnées, on savait que $\alpha = \beta = \gamma$.

Exercice 6 :

Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y + z = 0\} \\ E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \ \ et \ z = 0\} \end{aligned}$$

La solution :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y + z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = -3y - z\} \\ &= \{(-3y - z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-3,1,0) + z(-1,0,1), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Donc, $\{u_1 = (-3,1,0)\,,\ u_2 = (-1,0,1)\}$ est une famille génératirce. La famille $\{u_1, u_2\}$ est bien libre. D'ou, u_1 et u_2 forment une base de $\mathbb{R}^3$ et $\dim E_1 = 2$

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0 \ \ et\ z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x=-y-z \ \ et\ z=0\} \\ &= \{(y,-y,0), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle u=(1,-1,0)\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $u=(1,-1,0) \neq (0,0,0)$ donc, u forme une base de $\mathbb{R}^3$ et $\dim E_2 = 1$.

Exercice 7: Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires:

1-$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x,y) \longmapsto (x+y,\ x-2y,\ 0)$

2-$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x,y) \longmapsto (x+y,\ x-2y,\ 1)$

3-$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto x^2-y^2$

La solution:

f une application linéaire. Prenons $u=(x,y)$ et $v=(x^{'},y^{'})$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x^{'})+(y+y^{'}),\ (x+x^{'})-2(y+y^{'}),0) \\ &= (x+y,\ x-2y,\ 0)+(x^{'}+y^{'},\ x^{'}-2y^{'},\ 0) \\ &= f(u)+f(v). \end{aligned}$$

De même ,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x+\lambda y,\ \lambda x-2\lambda y,\ 0) \\ &= \lambda(x+y,\ x-2y,\ 0) \\ & \lambda f(u). \end{aligned}$$

2- f n'est pas une application linéaire car $f((0,0)) \neq (0,0,0)$.

3-f n'est pas une application linéaire. En effet, $f((1,0)) = 1, f((-1,0)) = 1$ et $f((0,0)) = 0 \neq f((1,0)) + f((-1,0))$.

Exercice 8:

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4, -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4).$$

1- Montrer que f est linéaire.

2- Donner une base du noyau de f. En déduire le rang de f.

3- Soit $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ou

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + \alpha e_4, \alpha \in \mathbb{R}; \\ u_2 &= e_1 + e_2; \\ u_3 &= e_1 + e_2 + e_3; \\ u_4 &= \lambda e_1 + e_4, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) A quelles conditions sur α et λ, B est une base de $\mathbb{R}^4$

b) Trouver les coordonnées du vecteur $V = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ dans la base B.

La solution :

1- Soient $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} f(X + Y) &= f((x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4)) \\ &= f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda X) &= f(\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)) \\ &= \lambda f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \lambda f(X). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

2-

$$\begin{aligned}
K\,\text{erf} &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4/f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\}\\
&= \left\{x_1\left(1,-\frac{5}{8},-\frac{1}{8},-\frac{5}{8}\right)/x_1\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\langle\left(1,-\frac{5}{8},-\frac{1}{8},-\frac{5}{8}\right)\right\rangle.
\end{aligned}$$

D'ou, $B_{\ker f}=\{(1,-\frac{5}{8},-\frac{1}{8},-\frac{5}{8})\}$ est une base du noyau de f et $\dim\ker f=1$.

Ainsi, d'après le théorème des dimensions, on a

$$rang(f)=\dim\operatorname{Im} f=\dim E-\dim\ker f=4-1=3.$$

3- Soit $B=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ ou

$$\begin{aligned}
u_1 &= e_1+\alpha e_4, \alpha\in\mathbb{R}\\
u_2 &= e_1+e_2\\
u_3 &= e_1+e_2+e_3\\
u_4 &= \lambda e_1+e_4, \lambda\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

a) B est une base de $\mathbb{R}^4$ c'est-à-dire B est libre (si $\sum_{i=1}^{4}\beta_i u_i=0$ alors $\beta_i=0$ pour tout $i=1,....,4$). Ainsi, il suffit de résoudre lineaire suivant pour récupérer des conditions sur α et λ :

$$\begin{aligned}
\beta_1+\beta_2+\beta_3 &= 0\\
\beta_2+\beta_3 &= 0\\
\beta_3+\lambda\beta_4 &= 0\\
\alpha\beta_1+\beta_4 &= 0
\end{aligned}$$

Ceci étant vérifié pour tout α et λ dans $\mathbb{R}$.

b) $V=-u_1+(4+\alpha)u_2+(3-\lambda(4+\alpha))u_3+(-1+\lambda(4+\alpha))u_4$.

Exercice 9 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ l'application définie par: $f(x,y)=(x+y,\,x-y,\,x+y)$.

1- justifier que f est linéaire

2-Déterminier le noyau de f, son image. f est-elle injective? surjective?

La solution :

f une application linéaire. Prenons $u = (x, y)$ et $v = (x^{'}, y^{'})$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x^{'}) + (y+y^{'}),\ (x+x^{'}) - (y+y^{'}), (x+x^{'}) + (y+y^{'})) \\ &= ((x+y,\ x-y,\ x+y) + (x^{'}+y^{'},\ x^{'}-y^{'},\ x^{'}+y^{'})) \\ & f(u)+f(v). \end{aligned}$$

De même ,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y,\ \lambda x - \lambda y,\ \lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x+y,\ x-y,\ x+y) \\ & \lambda f(u). \end{aligned}$$

2- Commençons par déterminer le noyau de f.

$(x, y) \in \ker f$ si seulement si $f(x, y) = (0, 0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \end{cases}$$

On en déduit que $\ker f = \{(0, 0)\}$, et en particulier que f est injective.

Déterminons maintenant l'image de f. un vecteur (u, v, w) est dans l'image de f si et seulemnt si

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (u, v, w) = f(x, y) \Longleftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = x + y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u = x + y \\ u + v = 2x \\ w - u = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{u-v}{2} = y \\ \frac{u+v}{2} = x \\ w - u = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u - w = 0\}$. En particulier, $(1, 1, 0)$ n'est pas dans $\mathrm{Im}(f)$,

et donc f n'est pas *surjective*

Exercice 10:

Soient les ensembles suivants:

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\} \text{ et } E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = x + z = 0\}$$

1- Montrer que E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2- Donner une base de E_1et une base de E_2, et en déduire $\dim(E_1)$ et $\dim(E_2)$.

La solution :

1- On a $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$

Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ élément de E_1.

Alors, $u + v = (x + x', y + y', z + z')$ est aussi élément de E_1.

En effet,

$$(x+x^{'})+(y+y^{'})+(z+z^{'})=0.$$

De même ,pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ est élément de E_1

Puisque

$$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = 0.$$

E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, E_2 est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2- La base de E_1,

On a

$$x+y+z=0 \Longrightarrow x=-y-z$$

$\Longrightarrow (x,y,z)=(-y-z,y,z)=(-y,y,0)+(-z,0,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$

$B_{E_1=}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\} \Longrightarrow \dim E_1 = 2$

La base de E_2,

On a

$$x-y=x+z=0 \Longrightarrow x=yetz=-x$$

donc $(x,y,z)=(x,x,-x)=x(1,1,-1)$

$B_{E_2=}\{(1,1,-1)\} \Longrightarrow \dim E_2 = 1.$

2.8 Exercices à résoudre

Exercice 1 :

Parmi les ensembles suivants, reconnaitre ceux qui sont des sous espaces vectoriels:

1-$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x=z\}$ 2-$E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x-z=0; y+x=0$ et $x-y+z=0\}$

3-$E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y+3z=2\}$ 4- $E_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+xy\geq 0\}$

Exercice 2 :

Soit $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par: $f(x,y)=(x-y,\ y+x,\ y)$.

1- Montrer que f est linéaire

2-Déterminer le noyau de f, son image. f admet-elle une inverse ?.

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ou f définie par :$f(x,y) = (x+y,\ y+z)$.

1- vérifier que f est une application linéaire.

2-Déterminier le ker f, une base de ker f, et déduire $\dim(\ker f)$

3- f est elle injective

4- Donner $\dim(\operatorname{Im} f)$, puis donner une base de $\operatorname{Im} f$, f est elle surjective.

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ou f définie par :

$$f(x,y,z) = (x+2y+z,\ 2x+y+3z,\ \ -x-y-z\ )$$

1- justifier que f est linéaire.

2-Déterminier une base de la dimension de ker f

3- l'application f est-elle injective

4- Donner le rang de f puis est une base de $\operatorname{Im} f$,

5-f est-elle surjective.

Exercice 5:

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x+z,\ y-x,\ z+y, x+y+2z\ ).$$

1-Déterminier une base de ker (f)

2-Déterminier une base de $\operatorname{Im}(f)$

3- l'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 6:

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (-3x - y + z,\ 8x + 3y - 2z,\ \ -4x - y + 2z\ ).$$

1-Déterminier une base du noyau de f et sa dimension.

2- l'application f est-elle injective ?

3- Donner le rang de f . L'application f est-elle surjective ?

4- Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7 :

Soit dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs : $u = (0,1,1)$; $v = (2,0,-1)$; $w = (2,1,1)$

1-Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$

2- Déterminer les coordonnées de $(4,-1,1)$ dans cette base.

CHAPITRE 3

Fonctions numériques d'une variable réelle

3.1 Limite d'une fonction

Définition 3.1.1 *A Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il contient un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0 c'est-à-dire*

$$V \in V(x_0) \Longleftrightarrow \underline{\exists \eta > 0},]x_0 - \eta,\ x_0 + \eta[\subset V.$$

Définition 3.1.2 *On dit qu'une fonction f définie au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$ saut peut être au point x_0,*

admet une limite l en x_0 si :

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V \text{ ,tel que } |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit dans ce cas $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$.

Proposition 3.1.1 *Si f admet une limite au point x_0 cette limite est unique*

Proposition 3.1.2 *si $f \in F(I, \mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = b$.si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I on a:*

$$x_0 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = b.$$

3.2 Continuité d'une fonction

Définition 3.2.1 *On en déduit que la fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue*

à gauche et à droite du point x_0.

f est continue en $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Définition 3.2.2 *Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in I$ et qu'lle admet en ce point une limite finie notée l.*

la fonction définie par $\begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I - \{x_0\} \\ l \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Est dite prolongement par continuité de f au point x_0.

Définition 3.2.3 *On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.*

Théorème 3.2.1 *(**Valeurs Intermédiaires**) si f :$[a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f atteint toutes*

les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$

$$\forall c \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in]a,b[: f(x_0) = c.$$

Intuitivement, le graphe de la fonction f ne présente aucune diecontinuité entre les points

$$A = (a, f(a))\, et B = (b, f(b))$$

Théorème 3.2.2 *Si la fonction f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$,il existe alors au moins un point $x_0 \in]a,b[$*

tel que $f(x_0) = 0$.

3.3 Fonction dérivable :

Définition 3.3.1 *Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable au point x_0 si son taux d'accroissement au point x_0*

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tend vers une limite finie quand x tend vers x_0 et $x \neq x_0$.

Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f^{'}(x_0)$.

3.4 Théorèmes de Rolle et des Accroissements finis

Théorème 3.4.1 ***(Rolle)*** *Soient $I = [a, b]$ et $f \in F(I, \mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Il existe alors un nombre $x_0 \in \,]a, b[$ tel que $f^{'}(c) = 0$*

Théorème 3.4.2 ***(Accroissement finis)*** *Soient $I = [a, b]$ et $f \in F(I, \mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a, b]$*

et dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors un nombre $x_0 \in \,]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f^{'}(x_0).$$

Théorème 3.4.3 *(**Incréments finis généralisés**) Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$*

et dérivables sur $]a, b[$, telles que $g^{'}(x) \neq 0$ sur cet intervalle et $g(a) \neq g(b)$. Il existe $x_0 \in \,]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(x_0)}{g^{'}(x_0)}.$$

3.5 Etude des fonctions usuelles

3.5.1 1- Fonctions trigonomètriques

- **Fonction** $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$

Les application $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$ sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \text{et } |\cos x| \le 1 \text{ et } |\sin x| \le 1. \\
\cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x). \\
\cos(-x) &= \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x). \\
\sin^{'}(x) &= \cos(x) \text{ et } \cos^{'}(x) = -\sin(x).
\end{aligned}$$

- **Fonction** $x \to \tan x$

l'application $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x : x \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi\}$

$$\tan^{'} x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

En posant $t = \tan \frac{\pi}{2}$,on peut exprimer les trois application suivantes sous la forme

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

3.5.2 2- Fonctions trigonomètriques inverses

- **Fonction** $x \to \arcsin(x)$

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
(\arcsin(x))^{'} &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > 0 \ \ |x| \le 1.
\end{aligned}$$

- **Fonction** $x \to \arccos(x)$

$$\begin{aligned}
y &= \arccos(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ -\pi \le y \le 0 \end{cases} \\
(\arccos(x))^{'} &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} < 0, \ \ |x| \le 1. \\
\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

• **Fonction** $x \rightarrow \arctan x$

$$\begin{aligned} y &= \arctan(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ (\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

• **Fonction** $x \rightarrow sh(x)$ *et* $x \rightarrow ch(x)$

Posons , pour $x \in \mathbb{R}$,

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et } ch = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Leurs dérivées successives sont

$$\begin{aligned} (sh(x))' &= ch(x) \text{ et } (ch(x))' = sh(x). \\ ch^2(x) - sh^2(x) &= 1. \end{aligned}$$

3.6 Exercices résolus

Exercice 1 :

1-Calucler les limites suivantes:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} \quad ; \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$$

2- En utilisant le fait que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,$$

trouver les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x; \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$

La solution :

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{3}{1+x+x^2}\right)\right)\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{1-x}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{1+x+x^2}\right)\right)=-1.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 5x}{x}\frac{x}{\sin 2x}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{\pi-3\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1-2(\cos\frac{\pi}{3}\cos h+\sin\frac{\pi}{3}\sinh)}{3h}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2- En utilisant le fait que, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x\\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}}{1-\frac{2}{x+1}}=\frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{-x}\right)^x}=e^a\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x+\frac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0\langle\ x\ \langle 1\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$$

1- Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

2- Montrer qu'il existe $c\in\,]0,1[$ telle que $f^{'}(c)=0$ (on ne demande pas la valeur de c).

La solution

1- Si $x \in]0,1[$ alors f est continue.

En $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

C'est une forme indéterminée dont la limite est connue.

Donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(x + \frac{x \ln(x)}{1-x} \right) = 0$$

On prolonge f en 0 par $f(0) = 0$

En $x = 1$, on pose $h = 1 - x$, c'est mieux que $h = x - 1$ parce qu'alors $h \longrightarrow 0^+$ lorsque $x \to -1$

$x = 1 - h$

$$f(x) = 1 - h + \frac{(1-h)\ln(1-h)}{h} = 1 - h + (1-h)\frac{\ln(1-h)}{h}$$

Comme

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1-h)}{h} = -1$$

Soit parce que c'est la limite du taux de variable de la fonction $h \longrightarrow \ln(1-h)$, soit en appliquant la régle de L'hospital, soit parce que la limite est connue

Donc

$$\lim_{x \longrightarrow -1} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left(1 - h + (1-h)\frac{\ln(1-h)}{h} \right) = 1 - 1 = 0$$

On prolonge f en $x = 1$ par $f(1) = 0$.

2- f ainsi prolongée est continue sur $[0,1]$ et manifestement dérivable sur $]0,1[$, de plus $f(0) = f(1)$, on peut appliquer le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f^{'}(c) = 0$

Exercice 3

Déterminer si f est continue sur $\mathbb{R}$.

f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9 & si \quad x \succ 2 \\ -1 & si \quad x \leq 2 \end{cases}$$

La solution :

La fonction f est clairement continue en tout point $a \neq 2$ car elle est alors définie par une expression polynomiale au voisinage de a (c'est-à-dire, sur un petit intervalle ouvert contenant a).

Examinons la continuité en $a = 2$: On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{\succ} 2} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{\succ} 2} x^3 - 9 = 8 - 9 = -1 \\ \lim_{x \xrightarrow{\prec} 2} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{\prec} 2} -1 = -1 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \xrightarrow{\neq} 2} f(x) = -1$. Par ailleurs, on a $f(2) = -1$. Donc la fonction f est continue en 2.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4:

Soit a, b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si \ x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & si \quad x \succ 0 \end{cases}$$

1- Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

La solution :

1) f est *continue* si $\Longleftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{\prec} 0} f(x) = f(0)$

$\lim_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{\succ} 0} \frac{1}{1+x} = 1$

$\lim_{x \xrightarrow{\prec} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{\prec} 0} ax + b = b$

$\Longrightarrow b = 1.$

Donc f est continue si $b = 1$.

2) f est *dérivable* si f est *continue* et $\lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \stackrel{\prec}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

- $\lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x-0} = \lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{x} = \lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} \frac{-1}{1+x} = -1$
- $\lim\limits_{x \stackrel{\prec}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \stackrel{\prec}{\to} 0} \frac{(ax+1)-1}{x} = a$

$\Longrightarrow a = -1$

Donc f est dérivable si $a = -1$ et $b = 1$.

Exercice 5 :

Soit la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & si \quad x \prec 0 \\ \frac{\ln(1+2x)}{x} & si \quad x \succ 0 \\ 2 & \quad x = 0 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a, la fonction f est continue en $x_0 = 0$

La solution :

$\lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim\limits_{x \stackrel{\succ}{\to} 0} \frac{2\ln(1+2x)}{2x} = 2$

$\lim\limits_{x \stackrel{\prec}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \stackrel{\prec}{\to} 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim\limits_{x \stackrel{\prec}{\to} 0} \frac{a\sin(ax)}{(ax)} = a$

Donc f est *continue* en $x_0 = 0$ si $a = 2$.

Exercice 6 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f dans chacun des cas suivants:

1- $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-4}} & \text{si } |x| \prec 2; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2- $f(x) = \cos\sqrt{x}$

3- $f(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$.(on commence par prolonger f en 1).

La solution:

1- comme f est pair, le domaine d'étude est $\mathbb{R}^+$.

- Continuité en 2 :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0 = f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$$

Donc, f est continue en 2. D'ou la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

- Dérivabilité en 2 :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$$

Donc, f est dérivable en 2. D'ou la dérivabilité de f sur tout $\mathbb{R}$.

2- $f(x) = \cos\sqrt{x}$. $Df = \mathbb{R}_+$. f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Dérivabilité en 0^+ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} \\
\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - 1}{y^2} &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0^+.D'ou, la dérivabilité de de f sur tout $\mathbb{R}_+$.

3- $f(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$ $Df = \mathbb{R}\diagdown\{1\}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2-1)(x+1) = 4.$$

Donc f admet un prolongement par continuité en 1 définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Dérivabilité de g en 1 :

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^4-1}{x-1}-4}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+2x+3) = 6$$

Donc, g est dérivable en 1. D'ou, la dérivable de g sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 7:

Calculer les dérivées des fonction suivantes :

1) $f(x) = (x^4 + e^{2x} + 3)^3$ 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

3) $f(x) = \sin(\cos(x^3 + 1))$ 4) $f(x) = \arctan(2x - 1)$

5) $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$ 6) $f(x) = 2^{\ln x}$

La solution :

1) $f'(x) = 3(4x^3 + 2e^{2x})(x^4 + e^{2x} + 3)^2 = 6(2x^3 + e^{2x})(x^4 + e^{2x} + 3)^2$

2) $f'(x) = (x^2 + x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(2x + 1)(x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3(2x+1)}{2\sqrt{x(x+1)}}$

3) $f'(x) = -3x^2 \sin(x^3 + 1)\cos(\cos(x^3 + 1))$.

4) $f'(x) = \frac{2}{1+(2x-1)^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$

5) $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{2|\cos x|}$

6) Appliquer la règle de l'exposant: $a^b = e^{b\ln(a)}$

$f'(x) = \frac{\ln(2)2^{\ln(x)}}{x}$

Exercice 8 :

1.Résoudre les équations suivantes :

a) $\arcsin x + \arcsin 2x = \arccos x + \arccos 2x$;

b) $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$.

2. $\tan(\arcsin(\tanh x)) = \sinh x, \forall x \in \mathbb{R}$;

La solution :

1. a) $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

b) $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

2.

$$\begin{aligned}
\tan(\arcsin(\tanh x)) &= \frac{\sin(\arcsin(\tanh x))}{\cos(\arcsin(\tanh x))} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(\tanh x))}} \\
&= \frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} = \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{\frac{1}{|\cosh x|}} \\
&= \sinh x.(car\ \ \cosh\ \ x \succeq 1, \forall x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

1) Soit $f \ \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définié par $f(x) = \sqrt{x^2}$

peut-on appliquer le théoèrme de *Rolle* sur $[-1, 1]$?

2) Calculer, en utilisant le théorème des accroisements finis, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right) x^2;$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n}\right).$

La solution :

1) $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

Théoréme de Rolle:

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors $\exists\ c \in\ ]a, b[\ tq$ $f'(c) = 0$

f est continue sur $[-1, 1]$ (car elle n'est pas dérivable au point 0) et $0 \in [-1, 1]$.

donc on peut pas appliquer le *théoréme de Rolle* sur la fonction $f(x)$ sur $[-1, 1]$.

2) Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Soit $x \succ 0$, f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$.

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in\ ]x, x+1[, \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c) = -\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$$

Ainsi, en réalisant cet encadrement :

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} \prec \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right) x^2 \prec 1$$

On peut conclure que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right) x^2 = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p\ln p}\right)$.On applique le théorème des accroissements finis pour $f(x)=\ln(\ln x)$ sur $[p,p+1]$. On obtient ainsi un minorant de $\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p\ln p}$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$:

$$\ln(\ln(n+1)-\ln(\ln 2)\leq\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p\ln p}.$$

D'ou $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}\right)=+\infty$

3.7 Exercices à résoudre:

Exercice 1 :

Calucler les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x+1}{2x+2}\right]^{5x+1}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x+\sin x}\right)$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

Exercice 2:

Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ ax^2+bx+1 & si\quad x\succ 1\end{cases}$$

soit dérivable sur 1.

Exercice 3:

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ sur l'intervalle $[a,b]$, préciser le nombre c de $]a,b[$.

Exercice 4:

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :$f(x)=\arcsin(x)+\arcsin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$

L'équation $f(x)=0$ admet-elle une solution dans l'intervalle $[0,1]$

Exercice 5 :

Soit la fonction: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \quad si \;\; x \neq 1 \quad et \quad f(1) = 2$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice 6 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $h_1(x) = (x^2 - e^{-x} + 2)^4$,b) $h_2(x) = \cos^2(x^3 + 5x^2)$,c) $g_2(x) = \ln(sh^2(x) + 1) - Arc\tan(x)$, d) $f_2(x) = \cos(\sin(x^2 + 1))$.

Exercice 7:

Etudier la continuité et la dérivabilité en $x_0 = 1$ de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & si \quad x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x \prec 1 \end{cases}$$

Exercice 8 :

En appliquant la règle de l'Hopital, déterminer les limités suivantes:

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4}$

Exercice 9 :

a) Dire si les hypothéses du théorème de Rolle sont satisfaites pour les fonctions suivantes, si oui déterminer la valeur intermédiaire correspondante de c.

i) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \; x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

ii) $f(x) = x - x^3$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) On demande de vérifier si les hypothèses du théorème des accroissements finis sont satisfaites pour

la fonction $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et trouver la valeur intermédiaire correspondante de c.

CHAPITRE 4

Développements Limitès et Formule de Taylor

4.1 Formule de Taylor-Young et développemnts limités

Définition 4.1.1 *Soit $f \in F(I, \mathbb{R})$ une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0.La fonction f admet un développement limité d'ordre n $(n \in \mathbb{N})$ au voisinage de 0.Si et seulement si il existe un réel strictement positif h, une fonction polynôme de degré n,*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Et une fonction de limite nulle 0 tels que $\forall x \in \mathbb{R}, [0 < |x| < h] \Longrightarrow [f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)]$ Ou, $P_n(x)$ est la partie réguliére du dévelloppement limité et $x^n \epsilon(x)$ le terme complémentaire.

Théorème 4.1.1 *Soit $f \in F(I, \mathbb{R})$ une fonction de classe C^n sur l'intervalle I (c-à-d f est une fonction dérivable continue sur I jusqu'à l'ordre n) et que $f^n(x_0)$ existe en $x_0 \in I$. Alors f admet au voisinage de x_0 le développement limité d'ordre n suivant :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x). \\ \textit{Ou } \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) &= 0, \ \textit{Au lieu de } x^n\epsilon(x), \text{ on écrit souvent } o(x^n). \end{aligned}$$

4.2 Développements limités au voisinage de 0 des fonction usuelles

Exemple 4.2.1 *La fonction $f(x) = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $f^n(x) = e^x$ et alors $f^n(0) =$* 1.

D'ou

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$

Exemple 4.2.2 *La fonction $\phi(x) = \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\phi^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2}) \text{ et } \phi^{(k)}(0) = \sin(k\frac{\pi}{2}).$$

Ce qui nous donne

$$\phi^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & si\ k = 2n. \\ (-1)^n & si\ k = 2n+1\ , \end{cases}$$

Donc

$$\sin x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x).$$

Est le développement limité d'ordre $2n+2$ au voisinage de 0.

Exemple 4.2.3 *La fonction $\psi(x) = \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\psi^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2}) \text{ et } \psi^{(k)}(0) = \cos(k\frac{\pi}{2}).$$

Ce qui nous donne

$$\psi^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^n\ si\ k = 2n \\ 0\ si\ k = 2n+1 \end{cases}$$

Par suite

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x).$$

Est le développement limité d'ordre $2n+1$ au voisinage de 0.

4.3 Propriétés des développements limités

Proposition 4.3.1 ***(unicité)*** *Pour un ordre donné , si f admet au voisinage de 0 un dévoloppement limité, celui-ci est unique.*

Proposition 4.3.2 ***(Parité)*** *Si f admet au voisinage de 0, un développement limité et si f est paire (resp impaire), la fonction polynôme $x \to P(x)$ est paire (resp, impaire)*

4.4 Opérations sur les développements limités

Définition 4.4.1 *Soient f et g deux fonctions qui admettent au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n*

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \quad \text{et } g(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x)$$

$$\text{avec} \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0$$

Proposition 4.4.1 ***(développement limité de la somme)*** *La fonction $f + g$ admet au voisinage de 0 le développement*

limité d'ordre n :

$$[f + g](x) = [P_n(x) + Q_n(x)] + x^n \epsilon(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

Proposition 4.4.2 ***(développement limité du produit)*** *La fonction $f.g$ admet au voisinage de 0 le développement*

limité d'ordre n :

$$[f.g](x) = H_n(x) + x^n \epsilon(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

ou H_n, désignant le polynôme obtenu en ne prenant que les termes de degré inférieur ou égal à n

du polynôme $P_n(x).Q_n(x)$.

Proposition 4.4.3 ***(développement limité du quotient)*** *Si $Q_n(x) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n :*

$$\left[\frac{f}{g}\right](x) = \mathbb{Z}_n(x) + x^n \epsilon(x), \quad avec \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

$\mathbb{Z}_n$ désignant le quotient de la division puissances croissantes de P_n par Q_n.

4.5 Exercices résolus

Exercice 1 :

Donner un développement limité des fonctions suivantes au voisinage de 0 à l'ordre n :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), n = 4; \\
f_2(x) &= \frac{x}{\sin x}, n = 5; \\
f_3(x) &= e^x - \sqrt{1+2x}, n = 2; \\
f_4(x) &= \frac{x}{e^x - 1}, n = 4; \\
f_5(x) &= \sqrt{e^x - x - 1}, , n = 3; \\
f_6(x) &= \arcsin\left(e^{-x^2}\right), n = 5;
\end{aligned}$$

La solution:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + O\left(x^4\right); \\
f_2(x) &= 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + O\left(x^5\right); \\
f_3(x) &= x^2 + O(x^2); \\
f_4(x) &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + O(x^4); \\
f_5(x) &= \frac{signe(x)}{\sqrt{2}}\left[x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{36}x^3\right] + O(x^3); \\
f_6(x) &= \frac{1}{2}\pi - \sqrt{2} signe(x)\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\right] + O(x^5).
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Donner un développement limité des fonctions suivantes au voisinage du point x_0 à l'ordre n :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (\sin x)^x, x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 4;\\
f_2(x) &= \arctan(2\sin x), x_0 = \frac{\pi}{3}, n = 3;\\
f_3(x) &= \frac{\ln x}{x^2}, x_0 = 1, n = 4.
\end{aligned}$$

La solution :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (\sin x)^x = 1 - \frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{24}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right)\\
f_2(x) &= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{3}{16}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)\\
f_3(x) &= (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + O\left((x-1)^4\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Donner un développement limité des fonctions suivantes au voisinage du l'∞ à l'ordre n :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right), n = 4;\\
f_2(x) &= \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}, n = 2;\\
f_3(x) &= \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}, n = 3
\end{aligned}$$

La solution :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + \frac{7}{90}\frac{1}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^4}\right);\\
f_2(x) &= 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{9}\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right);\\
f_3(x) &= \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\frac{1}{x^2} - \frac{55}{96}\frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x}\qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-cox\frac{1}{x}}{x-\ln(1+x)}\quad ;$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{2}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

La solution :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x} = \frac{1}{2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-cox\frac{1}{x}}{x-\ln(1+x)}=2$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{2}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right) = 1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=+\infty$$

Exercice 5 :

Déterminer $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{\ln(1+x)}+\frac{\alpha}{x}+\beta\right)=0.$$

La solution :

On a $\frac{e^x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{3}{2}+\frac{11}{12}x+O(x)$. Donc,

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{\ln(1+x)}+\frac{\alpha}{x}+\beta &= \frac{1}{x}+\frac{3}{2}+\frac{11}{12}x+\frac{\alpha}{x}+\beta+O(x)\\ &= \left(\frac{3}{2}+\beta\right)+\frac{(\alpha+1)}{x}+\frac{11}{12}x+O(x).\end{aligned}$$

Or, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{\ln(1+x)}+\frac{\alpha}{x}+\beta\right)=0$ Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}+\beta &= 0\Longrightarrow\beta=-\frac{3}{2}\\ \alpha+1 &= 0\Longrightarrow\alpha=-1.\end{aligned}$$

4.6 Exercices à résoudre:

Exercice 1 :

Développer au voisinage de 0, à l'ordre demandé, les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$ (ordre 3)

2) $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$ (ordre 4)

3) $f(x) = \sin x \, \cos(2x)$ (ordre 6)

4) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\cos x$ (ordre 4)

5) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{1-x}$ (ordre 3)

Exercice 2

Développer au voisinage de 0, à l'ordre demandé, les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ (ordre 4)

2) $f(x) = \tan(x)$ (ordre 5)

3) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ (ordre 2)

4) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ (ordre 3)

Exercice 3

1) Développer au voisinage de 2 à l'ordre 3 la fonction f définié par

$f(x) = \frac{1}{x}$

2)Développer au voisinage de 1 à l'ordre 3 la fonction f définié par

$f(x) = e^x$

3)Développer au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3 la fonction f définié par

$f(x) = \cos(x)$

Exercice 4

Calculer en utilisant les développements limités, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})\right)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x(1+x)^\alpha}{x^2}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin(x))^4}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4}$

Partie II

Maths 2

CHAPITRE 5

Matrices et déterminants

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des systèmes linéaires. Dans ce chapitre, $\mathbb{k}$ désigne un corps. On peut penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Définitions

Définition 5.1.1 *Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de* $\mathbb{k}$

Elle est dite de taille $n\times\ p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes

Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A

Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$. Par exemple

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *est une matrice* 2×3 *avec exemple* $a_{1,1} = 1$ *et* $a_{2,3} = 7$.

5.1.1 Matrices particulières

1- **Les matrices colonnes**, sont les matrices à une colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m_1} \end{pmatrix}$, donc de taille $m \times 1$. Par exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2- **Les matrices lignes** , sont les matrices à une ligne $(a_{11}\ a_{12}...a_{1n})$, donc de taille $1 \times n$. Par exemple:$(2 \quad 4 \quad -1)$

3-**La matrice nulle**, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note :0_{mn} si elle a m lignes et n colonnes 0

S'il n'y a pas d'ambiguïté.

4-**Les matrices carrées**, sont les matrices dont les nombres de lignes et de colonnes sont égaux.

Ce nombre de lignes et de colonnes s'appelle l'ordre de la matrice.

Exemple 5.1.1 *Les coefficients ayant même indice de ligne et de colonne s'appellent les coefficients diagonaux.*

Exemple : a_{11}, a_{22}, a_{33}...

5-**Les matrices triangulaires inférieures**, sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $j > i$) sont nuls.

$$Exemple : \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

.

6-**Les matrices triangulaires supérieures**, sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement

au dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $j < i$) sont nuls.

$$Exemple : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

7-**Les matrices diagonales**, sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures

Les seuls coefficients non nuls sont donc, ceux de la diagonale.

$$Exemple : \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

.

8-**La matrice identité**, est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1.

On note : I_n la matrice identité d'ordre n. Exemple: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

9-**Une matrice carrée** d'ordre n telle que $a_{ii} = a \in \mathbb{k}$, $1 \leq i \leq n$ et $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ est dite **matrice scalaire**. Exemple $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10- **Une matrice transposéé** de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

5.2 Opération sur les matrices :

- Addition des matrices

Somme de deux matrices: Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ deux matrices ayant la même taille $m \times n$ Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $m \times n$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

- Produit d'une matrice par un élément de $\Bbbk$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et $\lambda \in \Bbbk$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$.

- **Produit de deux matrices**

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Soient $A = (a_{ij})_{m,n}$ et $B= (b_{ij})_{n,p}$. Le produit de A et B est une matrice de type (m, p)

$A \times B = (c_{ij})_{m,p}$ tel que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

- **La matrice identité**

La matrice carrée suivante s'appelle **la matrice identité** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

5.2.1 Inverse d'une matrice

Définition 5.2.1 (*matrice inverse*)

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \quad \text{et } BA = I$$

A est *inversible*. Son inverse est note A^{-1}.

5.3 Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I.

On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I.

On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}. A côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A|I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I|B)$. Et alors $B = A^{-1}$

5.4 Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

5.4.1 Matrices et systèmes linéaires

le systéme linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{k})$ est le vecteur du second membre.

Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{k})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Si la matrice A est inversible, alors la solution du systéme $AX = B$ est unique et est :$X = A^{-1}B$.

5.5 Matrices et application linéaires

5.5.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 5.5.1 *Soit E un $\mathbb{k}-$ espace vectoriel et soit $(v_1, ..., v_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Le rang de la famille $\{v_1, ..., v_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $Vect\,(v_1, ..., v_p)$ engendré par les vecteurs $v_1, ..., v_p$.*

Autrement dit :$rg\,(v_1, ..., v_p) = \dim Vect\,(v_1, ..., v_p)$

5.5.2 Rang d'une matrice

une matrice peut être vue comme une juxtaposition de vecteurs colonnes.

Définition 5.5.2 *On définit le rang d'une matrice comme le rang de ses vecteurs colonnes.*

5.5.3 Rang et matrice inversible

Nous anticipons sur la suite, pour énoncer un résultat important :

Théorème 5.5.1 *(Matrice inversible et rang).*

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

La matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases B et $B^{'}$est la matrice $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $B^{'} = (f_1, f_2, ..., f_n)$:

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

5.6 Déterminants

5.6.1 Déterminant en dimension 2 et 3

Matrice 2×2 En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Matrice 3×3 Soit $A \in M_3(\mathbb{k})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Voici la formule pour le déterminant:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Il existe un moyen facile de rentenir cette formule, c'est **la règle de Sarrus** .

5.6.2 Dèterminants de matrices particulières

Calculer des déterminants n'est pas toujours facile. Cependant il est facile de calculer le déterminant de matrices triangulaires.

Le déterminant d'une matrice triangulaires supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.

Autrement dit, pour une matrice triangulaires $A = (a_{ij})$ on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Comme cas particulièrement imporatant on obtient :

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

5.6.3 Déterminant d'un produit

Théorème 5.6.1 :$\det(AB) = \det A.\det B$

5.6.4 Déterminant des matrices inversibles

Comment savoir si une matrice est inversible ? Il suffit de calculer son déterminant !

Corollaire 5.6.1 *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Corollaire 5.6.2 *Retrouvons la formule des déterminants 3×3, déjà présentée par la règle de Sarrus , en développement par rapport à la première ligne.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{11}C_{11} + a_{11}C_{11}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

5.6.5 Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée.

Nous lui associons la matrice C des cofacteurs,appelée *comatrice*, et notée $Com(A)$:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n_1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 5.6.2 *Soit A une matrice inversible, et C sa comatirce. On a alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

5.7 Application des déterminants

Nous allons voir plusieurs application des déterminants.

5.7.1 Méthode de Cramer

Le théorème suivant, appelé *règle de cramer*, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ ou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{k}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{k})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit A, est la matrice obtenue en remplaçant la j-éme colonne de A par le second membre B. La règle de cramer va nous permettre de calculer la solution du systéme dans le cas ou $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 5.7.1 *(Régle de Cramer)*

soit $AX = B$

Un systéme de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *du systéme est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

5.8 Théorie des systèmes linéaires

5.8.1 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est une méthode pour transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est échelonné et est donc facile à résoudre. Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :

- échange de deux lignes
- multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

5.9 Changement de base dans la matrice associée à une application linéaire

Soit $f : u \to v$ une application linéaire et soient A et B des bases de u et de v respectivement. Ces données induisent la matrice associée $Mat_{B,A}(f)$. On se donne maintenant deux nouvelles bases $A^{'}$ et $B^{'}$ de u *et* v respectivement. Quelle est la nouvelle matrice $Mat_{B^{'},A^{'}}(f)$ représentant l'application linéaire f en fonction de l'ancienne $Mat_{B,A}(f)$?

$$\begin{array}{ccccccc} u & \overset{idu}{\to} & u & \overset{f}{\to} & v & \overset{idv}{\to} & v \\ A^{'} & & A & & B & & B^{'} \end{array}$$

n'est rien d'autre que la fonction f mais dans les nouvelles bases. Donc la réponse est donnée en passant aux différentes matrices associées.

Proposition 5.9.1 *La matrice représentant l'application linéaire $f : u \to v$ dans les nouvelles bases $A^{'}$ et $B^{'}$ est donnée par*

$$Mat_{B^{'},A^{'}}(f) = \left(Mat_{B,B^{'}}(id)\right)^{-1} Mat_{A,A}(f)\, Mat_{A,A^{'}}(id)$$

Corollaire 5.9.1 *Dans le cas d'un endormorphisme $f\colon u \to u$, si on note $P := Mat_{B,B'}(id)$ la matrice de passage entre deux bases et $A := Mat_{B,B}(f)$ la matrice de f dans la base B, alors la matrice de f dans la base B' est*

$$Mat_{B',A'}(f) = P^{-1}AP$$

5.10 Exercices résolus

Exercice 1

Éffectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Si non, dire pourquoi.

$a)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $b)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$c)\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $d)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$e)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $f)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

La solution :

$a)$ Les matrices étant respectivement de format $3 \times \underline{2}$ et $\underline{2}\times 2$, leur produit est bien défini et est une matrice 3×2:

On a alors,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}$$

$b)$ Les matrices étant respectivement de format $2\times \underline{2}$ *et* $\underline{3}\times 2$, leur produit est impossible à définir

c) Les matrices étant respectivement de format $1\times \underline{3}$ *et* $\underline{3}\times 3$, leur produit est bien défini et est une matrice 1×3. On a alors,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (23 \quad 42 \quad 1)\,.$$

d) Les matrices étant respectivement de format 3×3 et 3×2, leur produit est bien défini et est une matrice 3×2 :

On a alors,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

e) Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{2}$ et $\underline{3}\times 2$, leur produit est impossible à définir.

f) Les matrices étant respectivement de format 3×3 et 3×3, leur produit est bien défini et est une matrice 3×3.

On a alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 32 & 38 \\ 28 & 42 & 49 \\ 34 & 64 & 78 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 :

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer : $AB,\ BA,\ CD,\ 2A+B\ ,\ A-4B\ ,\ (AB)^t$

La solution

$$AB = \begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 17 & 3 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 9 & 31 \end{pmatrix} \quad CD = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -12 & -11 \\ 11 & 43 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} A - 4B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -26 & -1 \end{pmatrix} (AB)^t = B^t \times A^t = \begin{pmatrix} 26 & 17 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 :

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, \ 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ 5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution :

(Nous allons voir différentes méthodes pour calculer les déterminants.)

$$1) \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 11(-8) = 116.$$

2) Règle de Sarrus **Attention** ! La règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices 3×3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 15 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 21 & 5 & 6 \end{array} \right|$$

$$= 1 \times 4 \times 2 \times 1 + 0 \times 15 \times 5 + 6 \times 3 \times 6 - 6 \times 4 \times 5 - 1 \times 15 \times 6 - 0 \times 3 \times 21 = -18$$

3) Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Nous allons développer par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -0 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

4) On fait apparaître des 0 sur la première colonne puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ L_4 - 3L_2 \to L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

Pour calculer le déterminant 3×3 on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on la développe.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 + 6L_1 \to L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = -96.$$

Exercice 4 :

Résoudre par la méthode de **Gauss** les systèmes suivantes :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 3x + 3y + y = 6 \\ 3x - 2y + z = 11 \end{cases}$$

La solution :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \iff 2L_2 - 3L_1 \to L_2 \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7 \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire, ou en déduit $y = \frac{-7}{11}$.

Et la première ligne : $x = \frac{9}{11}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 3x + 3y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 11 \end{cases} \iff \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array} \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 4y + 8z = 20 \\ -4y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underset{L_3+L_2\to L_3}{} \left\{\begin{array}{c} 3x+2y-z=1 \\ 4y+8z=20 \\ -4y+2z=10 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x+2y-z=1 \\ 4y+8z=20 \\ 10z=30 \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire, ou en déduit $z = 3$.

la deuxiéme ligne : $y = -1$ et la premier :$x = 2$.

Exercice 5 :

Calculer les inverses des matrices suivantes par la méthode de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La solution :

$$(A, I_2) = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \to L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} \\ \frac{1}{4}L_2 \to L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \\ L_1 + 2L_2 \to L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$(B, I_3) = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} L_1 + 2L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 - L_2 \to L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_3 + L_2 \to L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

La Solution :

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $3A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$

Donc

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0$$

On réécrit ceci en :

$$A(A - 3I_3) = -2I_3 \iff A\left(\frac{-1}{2}(A - 3I_3)\right) = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est :

$A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Exercice 7 :

Soit $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$

Trouver x et y tels que $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

La solution :

$2A - 4B = \begin{pmatrix} 2x - 4y & -18 \\ 4 & 4x - 12y \end{pmatrix}$

Alors

$$\begin{cases} 2x - 4y = -5 & (1) \\ 4x - 12y = -16 & (2) \end{cases}$$

$\mathbf{-2(1) + (2)} \Longrightarrow -4y = -6 \Longrightarrow y = \frac{3}{2}$

Et $2x - 4(\frac{3}{2}) = -5 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$

Exercice 8 :

Déterminer l'inverse des matrices suivantes par la méthode des cofacteurs:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

La solution :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = -1$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Donc

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A)^t = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad det(B) = 1$ $\quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc

$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ det(C)=-16 \qquad C^t=\begin{pmatrix}-4&-4&0\\-4&4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$$

Donc

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}(C)^t=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-4&-4&0\\-4&4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac14&\frac14&0\\\frac14&-\frac14&0\\0&0&\frac12\end{pmatrix}$$

Exercice 9:

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\\5&6&7&8&9\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\\alpha&1&1&1\\1&-1&3&3\\4&2&0&\alpha\end{pmatrix},\alpha\in\mathbb{R}.$$

La solution :

-Par définition, le rang$(A)\leq 3$. Puisque, det $A=1\neq 0$, alors rang$(A)=3$.De meme

- Pour B:rang$(B)\leq 4$. En effectuant des transformations sur les colonnes: $C_i\longleftarrow C_i-C_{i-1}, i=2,...,5$

$$\det B=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\\5&6&7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&1&1&1&1\\3&1&1&1&1\\4&1&1&1&1\\5&1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

Donc, $rang(B) \leq 4$ et puisque les mineurs d'ordre 4 et d'ordre 3 sont tous nuls alors :rang$(B) \leq 2$. On constate que le mineur d'ordre 2: $\left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = -1 \neq 0\right|$

alors rang $(B) = 2$.

- Pour C: le $rang(C) \leq 4$.On a det $C = 2(a-9)(-a+3)$ donc il faut distinguer trois cas :

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{3, 9\}$ alors $rang(C) = 4$

- Si $a = 3$ alors $rang(C) = 3$ puisque $\det C = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$

-Si $a = 9$ alors $rang(C) = 3$ puisque $\det C = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 \neq 0.$

Exercice 10:

Soient $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ définie par :$f(x, y) = (x + y, x - y, y - x)$

Ecrire la matrice $M(f)$ relativement aux bases canoniques de E et F.

La solution :

On a $f(1, 0) = (1, 1, -1)$ et $f(0, 1) = (1, -1, 1)$. Donc la matrice de f relativement aux bases canoniques de E et F :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 :

$\mathbb{R}^3$muni de la base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$,

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad &\to \quad (2x - y, y + 2z, x + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice de f relativement à la base B.

2 Soient $u = (1,2,3) \quad v = (2,0,1)$ et $w = (0,-1,2)$

Vérifier que $B' = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer alors la matrice de passage P de B à B' et calculer l'inverse de P.

3- Déterminer la matrice de f relativement à la base B'.

La solution :

$$Mat_{B,B}(f) = M_f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

est la matrice de f relativement à la base B.

2- Soient

$$u = (1,2,3) \quad v = (2,0,1) \text{ et } w = (0,-1,2)$$

Vérifier que $B' = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer alors la matrice de passage P de B à B'

$$P = P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

3- D'apres le thèorème de changement de base : On vérifie

(a) i. f est une application linéraire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

ii. $B = \{e_1 = (1,0,0), e_1 = (0,1,0), e_1 = (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

iii. $B = \{u = (1,2,3), v = (2,0,1), w = (0,-1,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

iv. P est la matrice de passage de B $\grave{a}$ B'.

Alors

$Mat_{B'}(f) = P^{-1}Mat_B(f)P$

$$= \begin{pmatrix} \frac{40}{13} & \frac{10}{13} & \frac{15}{13} \\ -\frac{20}{13} & \frac{21}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{24}{13} & -\frac{6}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 :

Soit le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1- Ecrire le systéme (S) sous la forme matricielle $AX = B$.

2- Démonter que (S) admet une solution

3- Résoudre le système par la méthode de Gramer.

La solution :

Le systéme $(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B.$

2) $\det|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \det|A| \neq 0$ donc (S) admet une solution

3) la méthode de **Gramer** :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 0 & -1 \\ \mathbf{-3} & 3 & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 2(-1) + (-1)(-3) = 1.$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & -1 \\ -2 & \mathbf{-3} & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1.$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ -2 & 3 & \mathbf{-3} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{1} = -1.$$

5.11 Exercices à résidoure:

Exercice 1 :

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer (si est possible) AB, BA, AC, CA, A^2, B^2

Exercice 2:

Résoudre par la méthode de Gauss les systéme suivantes :

$$(S_1) : \begin{cases} -y + 2z + 13t = 5 \\ x - 2y + 3z + 17t = 4 \\ -x + 3y - 3z - 20t = -1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + 2y - z + t = 4 \\ x - y + z + 2t = 4 \\ 3x - y + 2z - t = 6 \\ x - y - z + 3t = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Calculer les déterminats suivantes :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

Exercice 4:

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 5:

Calculer les inverses des matrices suivantes par la méthode de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1- vérifiez que $A^2 = 2I_3 - A$ et déduire A^{-1}.

Exercice 7 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1- trouver la matrice C tel que $C = A - B$

2-vérifiez que $C^2 = C + 2I_3$ et déduire C^{-1}

Exercice 8 :

Soit les deux matrices données par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

1- Calculer $M.N$

2- a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculer $\det(A)$ par deux méthode différentes.

b) Calculer A^{-1} par la méthode de cofacteur.

c) En déduire la solution du sytème suivant:

$$(S) = \begin{cases} 2x - y = 12 \\ -x + 2y - z = -4 \\ -y + 2z = -16 \end{cases}$$

Exercice 9 :

Soit le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ x - y + z = 1 \\ -2x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

1- Ecrire le systéme (S) sous la forme matricielle $AX = B$.

2- Démonter que (S) admet une solution

3- Résoudre le système par la méthode de Gramer.

Exercice 10 :

Soit $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\quad B' = \{(1,0,2), (4,1,0), (0,5,1)\}$ la base de $\mathbb{R}^3$

Donner les matrices de transiton : $P_{BB'}$, $P_{B'B}$.

CHAPITRE 6

Valeurs propres, vecteur propres et diagonalisation

6.1 Définitions

Définition 6.1.1 (*vecteur et valeur propres*) : *Soient un vecteur non nul $v \neq 0$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation $Av = \lambda v$*

Alors le vecteur v est un vecteur propre de valeur propre λ

Définition 6.1.2 (*sous-espace propre*) : *Un sous-espace vectoriel est l'union de l'ensemble des vecteurs propres de valeur propre λ avec le vecteur nul*

$$E_\lambda := \{v \setminus Av = \lambda v\}$$

Donc v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Définition 6.1.3 (*Spectre*) : *Le spectre d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres, on la note*

$$specf = \{\lambda_1, ...\lambda_k\}$$

Définition 6.1.4 (*Polynôme caractéristique*) *Le Polynôme caractéristique d'un endomorphisme f est le déterminant de $f - Xid$*

(respectivement de $A - \lambda I$): $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

6.2 Diagonalisable

Définition 6.2.1 *(Endomorphisme et Diagonalisable)*

Un Endomorphisme f: est diagonalisble s'il existe une base B et U telle que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale, c'est-à-dire

$$Mat_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Une matrice carré est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que la conjugaison de A par P est une matrice diagonale, c'est-à-dire

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6.2.1 Méthode pour diagonaliser

1-On calcule d'abord son polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$

2-On cherche les racines de $P_A(\lambda)$: ce sont des valeurs propres de A

On suppose ici que l'on a trouvé n valeurs propres distinctes: $\lambda_1, ...\lambda_n$

3-Pour chaque valeur propre λ_i de A, on cherche un vecteur propre X_i

4-Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $(x_1, ...x_n)$ Alors $D = P^{-1}AP$. est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6.3 Exercices résolus:

Exercice 1 :

On considère la matrice $A \in A_3(\mathbb{R})$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

2- Déterminer le spectre de A.

3- Déterminer le sous-espace propre E_9 associé à la valeur propre 9.

4 - La matrice A est-elle diagonalisable ?

La solution:

1-le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 & -2 \\ -2 & 7-\lambda & -8 \\ -5 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (13-\lambda)\left(\lambda^2 - 14\lambda + 81\right) + 2(5\lambda - 27) - 5(54 - 2\lambda) \\ &\Leftrightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda - 9)^3 \end{aligned}$$

2- On a $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{9\}$

3- On étudie le sous-espace propre E_9 associé à la valeur propre 9 : $AV = 9V$

$$\begin{cases} 13x - 5y - 2z = 9x \\ -2x + 7y - 8z = 9y \\ -5x + 4y + 7z = 9z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = -2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a : $E_9 = Vect(u_1)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4- E_9 étant de dimension 1, cette matrice n'est pas diagonalisable .

Exercice 2 :

Soit M la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.

2- Démonter que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$

3- Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

La solution :

1. On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de A:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right) \\ &= (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-2) \\ &\Leftrightarrow P_A(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)^2 \end{aligned}$$

2. On démontre que A est diagonalisable et on détermine une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$

Le polynôme P_A admet deux racines, donc la matrice A admet deux valeurs propres, $\lambda_1 = 2$ valeur simple , $\lambda_2 = 4$, valeur propre double. Déterminons les sous-espaces propres associés.

E_1 associé à la valeur propre 2 : $AV = 2V$

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

$E_1 = Vect(u_1)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

E_2 associé à la valeur propre 4 : $AV = 4V$

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \Longleftrightarrow \{z = -x$$

$E_2 = Vect(u_2, u_3)$ avec $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, par conséquent l'espace $\mathbb{R}^3$ admet une base de vecteurs propres et la matrice A est diagonalisable.

Notons P la matrice de passage, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et,si D est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On a la relation

$$A = PDP^{-1}.$$

3- On calcule A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vu, dans la question 2), que $A = PDP^{-1}$, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}, A^n = P^{-1}D^nP, or$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

il nous reste à calculer P^{-1}.On sait que $P^{-1}=\frac{1}{\det p}p^{t}$ d'ou

$$P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}A^{n} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n} & 0 & 0\\ 0 & 4^{n} & 0\\ 0 & 0 & 4^{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^{n}+4^{n} & 0 & 2^{n}-4^{n}\\ 2\left(4^{n}-2^{n}\right) & 2.4^{n} & 2\left(4^{n}-2^{n}\right)\\ 2^{n}-4^{n} & 0 & 2^{n}+4^{n}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) Montrer que la matrice $P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ est inversible et calculer P^{-1}.

2) Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$,

Trouver une matrice diagonale D telle que $A=PDP^{-1}$

La solution :

1) $\det P=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\left(-1\right)-1\times 1=-3\neq 0$, donc P est inversible et son inverse:

$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\left(comP\right)^{T}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{pmatrix}$

2) On a , $A=PDP^{-1}\Longrightarrow D=P^{-1}AP$.

Ainsi

$D=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5} & \frac{1}{10}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

Exercice 4 :

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer le polynôme caractéristique de A et les valeurs propres.

2- A est-elle diagonalisable ?

La solution :

1- le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$

2- Les valeurs propres sont distinctes donc la matrice A est diagonalisable.

Exercice 5 :

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de A et les valeurs propres, les vecteurs propres.

2- A est-elle diagonalisable ?

La solution :

1-le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left[-\lambda^2-4\lambda+4\right] \\ &\Leftrightarrow P_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 \end{aligned}$$

Valeurs propre $\lambda = 2$ de multiplicité $m = 3$

Les vecteurs propres : $AV = 2V$

$$\begin{cases} y = 2x \\ -4x+4y = 2y \\ -2x+y+2z = 2z \end{cases} \Longleftrightarrow \{y = 2x$$

$E_2 = Vect(u_2, u_3)$ avec $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2- E_2 étant de dimension 2, cette matrice n'est pas diagonalisable .

Exercice 6 :

Soient a et b deux réels non nuls. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

La solution :

Soient a et b deux réels non nuls. Le polynome caractéristique de M est :

$$P_M(x) = \det(M - xI) = \det \begin{vmatrix} -x & a & b \\ a & -x & b \\ b & a & -x \end{vmatrix} = (b+x)(a+x)(a+b-x)$$

Ainsi, les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = a+b, \lambda_2 = -a$ et $\lambda_3 = -b$.

- $1^{er} cas$: Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ alors M est diagonalisable et semblable à

$$D = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

De plus, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ -a-b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle E_{\lambda_3} = \left\langle \begin{pmatrix} b \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} \right\rangle.$$

-$2^e cas$:Si $\lambda_1 = \lambda_2 \; et \; \lambda_2 \neq \lambda_3$ alors $b = -2a$ et $a \neq b$. Dans ce cas, $(-a)$ est une valeur propre double donc $\dim E_{-a} \leq 2$ et $(2a)$ est une valeur propre simple donc $\dim E_{2a} = 1$. Or $rg(M + aI) = 2 \Longrightarrow \dim\ker(M + aI) = 3 - 2 = 1 \prec 2$.

Donc, M n'est pas diagonalisable.

-$3^e cas$:Si $\lambda_1 = \lambda_3 \; et \; \lambda_2 \neq \lambda_3$ alors $a = -2b$ et $a \neq b$. Dans ce cas, $(-b)$ est une valeur propre double donc $\dim E_{-b} \leq 2$ et $(2b)$ est une valeur propre simple donc $\dim E_{2b} = 1$. Or $rg(M + aI) = 2 \Longrightarrow \dim\ker(M + aI) = 3 - 2 = 1 \prec 2$.

Donc, M n'est pas diagonalisable.

-$4^e cas$:Si $\lambda_2 = \lambda_3 \; et \; \lambda_1 = a + b = 2a$ Dans ce cas, $(2a)$ est une valeur propre simple et (a)est une valeur propre double. Or $rg(M + aI) = 1$ donc $\dim E_{-a} = 2$ alors M est pas diagonalisable est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

De plus, les sous-espaces propres associés aux valeurs sont:

$$E_{2a} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle et\ E_{-a} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Exerccie 7 :

Soit les matrices:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1- Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2- Soit la matrice $A = PDP^{-1}$. Calculer A.

3-Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que:

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

b. Montrer par récurrence que $A^n = PDP^{-1}$.

c. En déduire que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 0 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2-2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.$$

La solution :

1- $\det(P) = 1$, donc P est inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $A = PDP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour $n = 0, D^0 = I_n$ vrai. Supposons que la propriété

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

est vraie à l'ordre n. Montrer par récurrence que:

$$D^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$D^{n+1} = D \times D^n$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

(b) Pour $n = 0, A^0 = I_n = PD^0P^{-1}$ vrai. Supposons que la propriété

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

est vrai à l'ordre n.Montrer par récurrence que

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PD^{n+1}P^{-1} \\ A^n &= A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2^n & 0 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2-2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 8 :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+3 & 1 & 4 \\ 1 & \alpha+3 & 4 \\ 2 & -2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1- Monter que A_α est diagonalisable, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2- On choisit $\alpha = 2$.

a. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que: $A = PDP^{-1}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n. En déduire pour, $n \in \mathbb{N}$, la valeur de A^n.

La solution :

$$P_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I_3) = \det \begin{vmatrix} \alpha+3-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & \alpha+3-\lambda & 4 \\ 2 & -2 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(a-\lambda+2)(a-\lambda+4).$$

Alors, A_α admet des valeurs propres distincts. Ainsi, A_α est diagonalisable, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. On choisit $\alpha = 2$.

a. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)$. Puisque A est diagonalisable alors

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Chercher les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre:

$$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$E_4 = \ker(A - 4I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

telles que : $A = PDP^{-1}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
D^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \\
A^n &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)...\left(PDP^{-1}\right) = PD^nP^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - \frac{3}{2}4^n + \frac{3}{2}6^n & \frac{3}{2}4^n - 2^n - \frac{1}{2}6^n & 6^n - 2^n \\ 2^n - \frac{5}{2}4^n + \frac{3}{2}6^n & \frac{5}{2}4^n - 2^n - \frac{1}{2}6^n & 6^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 2^n - 4^n & 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Soit la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Calculer le polynome caractéristique de A.

2- A est-elle diagonalisable ?

La solution

1-le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda - 2\right] \\
&\Leftrightarrow P_A(\lambda) = (1+\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)
\end{aligned}$$

2- Les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ sont distinctes, donc A est diagonalisable.

6.4 Exercices à résoudre:

Exercice 1 :

Soit la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les valeurs propres de M

2- Montrer que M est diagonalisable.

3- déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

4- On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Exercice 2 :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 4 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Parmi les vecteurs suivants lesquels sont des vecteurs propres de A Trouver les valeurs propres correspondantes.

$$v_1\,(1,1,0)\,,v_2\,(0,1,1)\,,v_3\,(0,0,1)\,,v_4\,(0,2,1)$$

Exercice 5 :

1- la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$?

2- On considére la matrice circulante

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})\,.$$

a- Vérifier que $A = aI + bJ + cJ^2$ avec $J^3 = I$.

b- Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $aI + bJ + cJ^2 = A$.

c- En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6 :

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f relative à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A.

2. Déterminer une base $B^{'}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale D.

3. Donner la matrice de passage P de B à $B^{'}$ et exprimer D en fonction de A.

CHAPITRE 7

Les intégrales

7.1 Intégrale indéfinie

7.1.1 Primitives d'une fonction

Définition 7.1.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F est* **une primitive** *de f sur I, si et seulement si, elle est dérivable sur I et pour tout x de I, $F^{'}(x) = f(x)$.*

Théorème 7.1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I ,et F est une primitive de f sur I.*

Toute primitive de f sur I est de la forme : $F(x) + C$; où C est une constante réelle (La primitive d'une fonction s'il existe n'est pas unique).

Définition 7.1.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une de ces primitives sur I. On prend alors l'habitude de noter toute primitive de f sous forme*

$$F(x) = \int f(x)dx,$$

Et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f

Proposition 7.1.1 *Soit f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{aligned} \int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ \int \lambda f(x)dx &= \lambda \int f(x)dx. \end{aligned}$$

7.2 Intégration par parties

Théorème 7.2.1 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a*

$$\int u(x)v^{'}(x)dx = u(x)v(x) - \int u^{'}(x)v(x)dx$$

7.3 Changement de variable

Théorème 7.3.1 *Soient u une fonction dérivable, f une fonction continue et $F(x) = \int f(x)dx$. On a*

$$\int u^{'}f(u)dx = \int f(u)du = F(u).$$

7.4 Intégration des fonctions rationnelles

Définition 7.4.1 *Une fonction f est dite une fonction rationnelle si :$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$où $P(x)$, $Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels.*

7.4.1 Intégration des éléments simples

Définition 7.4.2 *La fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'ècrit comme suit:*

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= E(x) + \frac{\gamma}{(x-x_0)^n}, \quad ou \\ \frac{P(x)}{Q(x)} &= E(x) + \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^m} \qquad avec \;\; a^2-4b \prec 0, \end{aligned}$$

où $E(x)$ un polynôme de $R\left[x\right]$, et $\alpha, \beta, \gamma, a, b \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 7.4.1 *Soit* $I_n = \frac{1}{(x^2+1)^n}dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

1)$I_1 = \frac{1}{(x^2+1)}dx = arctg(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

2)$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n, \quad n \geq 1.$

7.4.2 Décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, par la dévision euclidien on obtient :

$$P(x) = Q(x)q(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \text{ tel que } \deg R \leq \deg Q.$$

7.5 Intégration des fonctions expo et trigonométriques

7.5.1 Intégration des fonctions exponentielles

Pour calculer les primitives de la forme $\int f(e^x)\,dx$, on peut choisir le changement de variable $t = e^x \Longrightarrow \frac{1}{t}dt = dx$

7.5.2 Intégration des fonctions trigonométriques

- Pour calculer les primitives de la forme $\int \sin^n x \cos^m x dx$; $n, m \in \mathbb{N}$,on peut choisir le changement de variable:

$t = sinx$; *ou* $t = cosx$

- Pour calculer les primitives de la forme $\int f(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx$; on peut choisir le changement de variable : $t = tan\frac{x}{2}$;et on a

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \; dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

7.6 Intégration définie

Définition 7.6.1 *On appelle subdivision (d'ordre n) de l'intervalle* $I = [a, b]$ *l'ensemble fini* $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *tel que,* $a = x_0 \prec \cdots \prec x_k = a + k\frac{b-a}{n} \prec \cdots \prec x_n = b, \; k \in \mathbb{N}.$

Le pas $\delta(S)$ *de la subdivision est le plus grand des nombres* $(x_i - x_{i-1})$, *où* $i = \{0, 1, ..., n\}$.

Pour tout choix de n *points* $h_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, ..., n\}$ *on appelle somme de Riemann de* f *le nombre*

$$R(f, S, \{h_1, ...h_n\}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(h_i).$$

- Dans cette somme, chaque terme $(x_i - x_{i-1}) f(h_i)$ représente l'aire algébrique du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.

Théorème 7.6.1 *Si* $\lim_{\delta(S) \longrightarrow 0} R(f, S, \{h_i\})$ *existe, alors elle est indépendante du choix des points* $h_i \in I_i$, *on la note*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(S) \longrightarrow 0} R(f, S, \{h_{ij}\}).$$

Définition 7.6.2 *Lorsque'elle existe, on appelle cette limite l'intégrale de* f *sur* $[a, b]$ *et on dit que* f *est intégrable au sens de Riemann*

Proposition 7.6.1 *1- Toute fonction continue* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Riemann.*

2- Toute fonnction monotone sur $[a, b]$ *est intégrable au sens de Riemann.*

Définition 7.6.3 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $I = [a, b]$ *et* F *une de ces primitives. L'intégrale définie de* f *entre* a *et* b *est le nombre réel défini par :*

$$\int_a^b [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

L'ordre de a *et de* b *est important.*

Le nombre a *est appelé borne inférieure, et* b *la borne supérieure de l'intégrale.*

Proposition 7.6.2 *Soient* f *et* g *deux fonctions continues.*

$$1) \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \text{tel que } a \prec c \prec b. (\text{relation de chasles})$$

$$2) \text{ Si } a \leq b, \text{ on a } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_c^b |f(x)| \, dx.$$

$$3) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

7.7 Exercices résolus

Exercice 1 :

Calculer à l'aide d'intégrations par partie les intégrales suivantes :

1) $\int x^3 e^x dx$. 2) $\int x^2 \sin(2x) dx$. 3) $\int x \ln(x)\, dx$.

4) $\int x \cos(4x) dx$ 5) $\int x \arctan(x)\, dx$ 6) $\int x \arcsin(x) dx$

La solution

1) $\int x^3 e^x dx$

$$\begin{aligned} u &= x^3 \Longrightarrow u^{'} = 3x^2, \\ v^{'} &= e^x \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

Donc

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^3 e^x dx,$$

On note, $I_1 = \int x^3 e^x dx$, on choisit:

$$\begin{aligned} u &= x^2 \Longrightarrow u^{'} = 2x, \\ v^{'} &= e^x \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

$I_1 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$,

on note, $I_2 = \int x e^x dx$, on choisit:

$$\begin{aligned} u &= x \Longrightarrow u^{'} = 1, \\ v^{'} &= e^x \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

$I_2 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x\,(x-1)$.

Donc

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3e^x - 3I_1 = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2I_2\right) = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2e^x\left(x-1\right)\right).\\ &= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2)$\int x^2 \sin(2x)dx$

on choisit :

$$\begin{aligned}u &= x^2 \Longrightarrow u^{'} = 2x,\\ v^{'} &= \sin 2x \Longrightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(2x)dx &= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \int x\cos 2x dx\\ &= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \frac{-x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx\\ &= \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

3) $\int x\ln(x)\,dx.$

on choisit :

$$\begin{aligned}u &= \ln(x) \Longrightarrow u^{'} = \frac{1}{x},\\ v^{'} &= x \Longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

Obtient

$$\begin{aligned}\int x\ln(x)\,dx. &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C.\end{aligned}$$

4) $\int x\cos(4x)dx$

on choisit :

$$\begin{aligned} u &= x \Longrightarrow u^{'} = 1, \\ v^{'} &= \cos 4x \Longrightarrow v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{aligned}$$

Obtient

$$\begin{aligned} \int x\cos(4x)dx &= \frac{x}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\int \sin 4x dx \\ &= \frac{x}{4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C. \end{aligned}$$

5) $\int x \arctan(x)\, dx$

on choisit :

$$\begin{aligned} u &= \arctan(x) \Longrightarrow u^{'} = \frac{1}{1+x^2} \\ v^{'} &= x \qquad\qquad \Longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Obtient

$$\begin{aligned} \int x\arctan(x)\, dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + C \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan(x) - \frac{1}{2}x + C. \end{aligned}$$

5) $\int x \arcsin(x) dx$.

on choisit :

$$\begin{aligned} u &= \arcsin(x) \Longrightarrow u^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v^{'} &= x \qquad\qquad \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Obtient

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)dx. &= \frac{x^2}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{4}\arcsin(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C \\ &= \frac{1}{4}\left(2x^2-1\right)\arcsin(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Calculer

1) $\int_0^1 e^x.\sqrt{1+e^x}dx$ 3) $\int_{-1}^0 3x^2e^xdx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^4 x dx$ 4) $\int_7^8 \frac{-4x+14}{\sqrt{x^2-7x+6}}dx$

La solution :

1) $\int_0^1 e^x.\sqrt{1+e^x}dx$

On a

$$\int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}du}$$

Obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x.\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{2}}dx &= \left[\frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\left(1+e\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(1+1\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\left(\left(1+e\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^4 x dx$

Posons $u = \sin(x) \quad du = \cos(x)$

Nous devons également changer les bornes

$$\begin{aligned}lorsque\ x &= 0, u = \sin(0) = 0 \\ lorsque\ x &= \frac{\pi}{2}, u = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.\end{aligned}$$

l'intégrale définie devient alors:

$$\int_0^1 u^4 du = \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

3) $\int_{-1}^0 3x^2 e^x dx$

On utilise l'integration par parties, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= 3x^2 \Longrightarrow u' = 6x, \\ v' &= e^x \Longrightarrow v = e^x \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 3x^2 e^x dx &= \left[3x^2 e^x\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x (6x)\, dx \\ &= -\frac{3}{e} - 6\int_{-1}^0 x e^x dx \\ &= 6 - \frac{15}{e} \end{aligned}$$

4) $\int_7^8 \frac{-4x+14}{\sqrt{x^2-7x+6}} dx$

On a

$$\begin{aligned} \int \frac{u'}{u} &= 2\sqrt{u} \\ \int_7^8 \frac{-4x+14}{\sqrt{x^2-7x+6}} dx &= \int_7^8 \frac{-2(x-7)}{\sqrt{x^2-7x+6}} dx \\ &= \left[-4\sqrt{x^2-7x+6}\right]_8^7 \\ &= 4\sqrt{14} - 4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

A l'aide d'un changement de variables calculer les intégrales suivantes

1) $\int \frac{\ln^3(x)}{x} dx$ 2) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$ 3) $\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$

4) $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$ 5) $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1} dx$ 6) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2} dx$

La solution :

1)$\int \frac{\ln^3(x)}{x} dx$

On pose $u(x) = \ln x$ alors $du = \frac{1}{x} dx$

donc $\int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + c = \frac{1}{4} (\ln(x))^4 + c.$

2) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$

On pose $t = e^x$ alors $dt = e^x dt$ donc $dx = e^{-x} dt$, c'est à dire $dx = \frac{dt}{t}$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x e^x}{e^x + 1} dx &= \int \frac{t}{t+1} dt \\
&= \int \frac{t+1-1}{t+1} dt \\
&= \int 1 - \frac{1}{1+t} dt \\
&= t - \ln(1+t) + c \\
&= e^x - \ln(e^x + 1) + c
\end{aligned}$$

3) $\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \arctan \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \pi \right)$

$$= \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 2} dx = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 2} dx = \int \frac{1}{2 \left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)} dx$$

On pose $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ alors $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$, ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C$$

4)$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$

$$\begin{cases}
\textit{On pose } t = \cos(x) \\
dt = -\sin(x) dx \\
\text{Quand } x = 0, t = 1 \\
\text{Quand } x = \pi, t = -1
\end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&= \int_{1}^{-1} \frac{-1}{1+t^2}dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= [\arctan(t)]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

5) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

$$\begin{cases}
\text{On pose } t=\sqrt{e^x-1} \quad \text{Alors } t^2=e^x-1 \text{ et donc } e^x=t^2+1 \\
dt=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx \text{ donc } dx=\frac{2\sqrt{e^x-1}}{e^x}dt, \text{ c'est à dire } dx=\frac{2t}{t^2+1}dt \\
\text{Quand } x=0 \qquad , \quad t=0 \\
\text{Quand } x=\ln(2) \qquad , \quad t=1
\end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{2t^2+2-2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 2-\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= [2t-2\arctan(t)]_0^1 \\
&= 2-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

6) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$

$$\begin{cases}
\text{On pose } t=x^3 \text{ alors } dt=3x^2dx \\
\text{Quand } x=0, t=0 \\
\text{Quand } x=1, t=1
\end{cases}$$

Ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}}{3}dt = \frac{1}{3}\left[\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{9}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Exercice 4 :

Calculer ce qui suit

1) $\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3}dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$

3) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$

La solution :

1) $\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3}dx$

$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c$,donc $\int \frac{2(2x-2)}{x^2-2x+3}dx = 2\ln|x^2-2x+3| + C.$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$

$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$, donc $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x} + c.$

3) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$

Posons : $u = 1 + x^2 \Longleftrightarrow du = 2xdx$, d'ou :

$\int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = \int -\frac{1}{5}\frac{-5dx}{\sqrt{2-5x}} = \frac{-2}{5}\sqrt{2-5x} + c.$

Exercice 5 :

$I_1 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ $I_2 = \int \frac{1}{\sin x}dx$

$I_3 = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $I_4 = \int \frac{1}{\tan x}dx$

La solution :

$I_1 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ d'ou

$x = 2\arctan t \Longleftrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ avec $\sin t = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

et

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2t}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{2}{1+t^2}dt = \ln\left(1+t^2\right) + c \\ I_1 &= \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

$I_2 = \int \frac{1}{\sin x} dx$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\,\frac{2dt}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \end{aligned}$$

$I_3 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$n = 2$ est pair:

Posons

$$\begin{aligned} t &= \tan x \Longleftrightarrow dt = \left(1+\tan^2 x\right) dx = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ d'ou \quad I_3 &= \int dt = t + C = \tan x + C. \end{aligned}$$

$I_4 = \int \frac{1}{\tan x} dx$

$n = -1$ est impair et négatif:

Posons

$$\begin{aligned} t &= \sin x \Longleftrightarrow dt = \cos x dx \\ d'ou \quad I_4 &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\tan x| + C \end{aligned}$$

Exercice 6 :

Calculer ce qui suit

1) $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$, 2) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$, 3) $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$,

4) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx$, 5) $\int \frac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{(1+x)^2} dx$, 6) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

La solution

1) $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{10} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{10} \ln\left(x^2+2x+5\right) + \frac{1}{5} \ln(x+2) + C.$

2) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \ln x^2 - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + C$

3) $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx = -\frac{1}{3(x^3+1)} + C$

4) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx = \frac{9}{2} \ln\left(2x-5+\sqrt{x^2-5x+6} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-5x+6}\right) + C$

5) $\int \frac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{(1+x)^2} dx = \arctan(x+2) - \frac{1}{2} \ln\left|x^2+4x+5\right| + \ln|x+1| + \frac{\ln\left|x^2+4x+5\right|}{x+1} + C.$

6) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \arctan(e^x) + C.$

7.8 Exercices à résoudre:

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int x^3 \ln(3x)\, dx$ $\qquad$ $I_2 = \int (2x+1)\, e^x dx$

$I_3 = \int (x^2-1) \sin x dx$ $\qquad$ $I_4 = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

Exercice 2 :

Utiliser un changement de variables pour calculer ce qui suit :

$I_1 = \int \frac{e^{2x}}{2+5e^{2x}}$ $\qquad$ $I_2 = \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$

$I_3 = \int \frac{\cos x}{2-\cos^2(x)} dx$ $\qquad$ $I_4 = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Exercice 3 :

Caculer ce qui suit

$I_1 = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$ $\qquad$ $I_2 = \int \frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} dx$

$I_3 = \int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} dx$ $\qquad$ $I_4 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3} dx$

Exercice 4 :

Calculer ce qui suit

$I_1 = \int \frac{1}{2-3\sin(x)} dx$ $\qquad$ $I_3 = \int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} dx$

$I_2 = \int \sin(3x)\cos(4x)\, dx$ $\qquad$ $I_4 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx$

CHAPITRE 8

Équations différentielles

Définition 8.0.1 *(Équation différentielle du premier ordre)*

Une équation différentielle ordinaire (EDO) *du premier ordre est une équation qui a pour inconnue une fonction* y *d'une variable rélle* x, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$,*qui s'écrit sous la forme suivante :*

$$y^{'}(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in I \qquad\qquad (E)$$

où I *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et f une fonction continue de* $I \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui est connue on cherche alors les fonctions* y *de classe* C^1 *qui vérifient l'equation.*

Définition 8.0.2 *(**Équation différentielle ordinaire**)Une équation différentielle ordinaire notée* EDO *d'ordre* n *est une relation entre la variable réelle* $x \in I \subset \mathbb{R}$,*une fonction inconnue* $x \to y(x)$ *et ses dérivées* $y^{'}, ..., y^{(n)}$ *au point* x *définie par*

$$f\left(x, y(x), y^{'}(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Définition 8.0.3 *(**Équation différentielle normle**)*

On appelle équation différentielle normale d'ordre n *toute équation de la forme*

$$y^{(n)}(x) = f\left(x,\ y(x),\ y^{'}(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right).$$

Définition 8.0.4 ***(Equation différentielle autonome)***

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$y^{(n)}(x) = \left(fy(x), y^{'}(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right)$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de x.

8.1 Équations différentielles d'ordre 1

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1, une équation de la forme

$$y^{'} + a(x) y = b(x),$$

où l'inconnue y est une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$, a et b sont deux fonctions continue sur un intervalle I.

Lorsque la fonction $b(x)$ est nulle, on dit que l'équation est **homogène du 1er ordre**. Elle s'écrit

$$y^{'} + a(x) y = 0.$$

Les solutions de cette équation diérentielle sont les fonctions définies par :$y_0(x) = ke^{-\int a(x)dx}, où\ k \in \mathbb{R}$.

Un cas particulier important est celui où la fonction $a(x)$ est constante, dans ce cas l'équation est dit équation **différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constantes** et on écrit :$y^{'} + ay = 0$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$y_h(x) = ke^{-ax}, où\ k \in \mathbb{R}.$$

- Résolution d'une équation différentielle linéaire $y^{'} + a(x)y = b(x)$

Si yp est une **solution particulière** de cette équation alors, sa solution générale est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

8.2 Équations à variables séparées

Définition 8.2.1 *Une équation différentielle de 1ier ordre est dite* ***à variables séparées*** *si on peut l'écrire sous la forme* $y^{'} = f(y)\, g(x)$ *où,* f *et* g *sont des fonctions donneés*

8.3 Équation de Bernoulli

Définition 8.3.1 *Une équation différentielle du premier ordre est dite de Bernoulli si elle a la forme*

$$y^{'}(x) + g(x)\, y(x) + h(x)\, y^{\alpha}(x) = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

où g *et* h *sont des fonctions continues de* $I \subset \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution :

On pose, $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, d'où $z^{'}(x) = (1-\alpha)\, y^{'}(x)\, y^{-\alpha}(x)$.

En divisant l'équation de Bernoulli par y^{α}, on obtient:

$$\frac{y^{'}(x)}{y^{\alpha}} + g(x)\, y^{1-\alpha}(x) + h(x) = \frac{z^{'}(x)}{1-\alpha} + g(x)\, z(x) + h(x) = 0.$$

Donc, on obtient (une équation différentielle en z) une équation linéaire de 1^{er} ordre non homogène. On la résout par la méthode de la variation de la constante.

8.4 Équations différentielles d'ordre 2

Les équations différentielles linéaires du second ordre sont de la forme

$$a(x)\, y^{''} + b(x)\, y^{'} + c(x)\, y = f(x).$$

où, f est une fonction donneé et, a, b et c sont des fonctions continue sur un intervalle I

Définition 8.4.1 *Une équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constante*

est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad (E)$$

où a, b et c des constantes et $a \neq 0$ et f une fonction continue sur I (I un ouvert de $\mathbb{R}$)

L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- La méthode de résolution de (E) se décompose en deux points

1. On résout l'équation homogène (EH). On obtient la solution : y_h.
2. On recherche une solution particulière de l'équation avec second membre : $y_{p.}$

La solution générale de l'équation (E) est alors : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Résolution de l'équation homogène

On cherche la solution de l'équation homogène (EH) sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$.

On a donc,$y' = re^{rx} = ry$ et $y'' = r^2 e^{rx} = r^2 y$,alors l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \Longleftrightarrow y\left(ar^2 + br + c\right) = 0.$$

L'équation

$$ar^2 + br + c = 0,$$

se nomme **équation caractéristique** de (EH) , et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 8.4.1 *Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$ on a les résultats suivants*

a) $\Delta > 0 : (EC)$ admet 2 racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

est une solution de (EH)

b) $\Delta = 0 : (EC)$ *admet 1 racine double* $r \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{rx}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

c) $\Delta < 0 : (EC)$ *admet 2 racines complexes conjuguées* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \neq 0)$ *et*

$$y(x) = (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}.$$

$f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ où $P(x)$ est un polynôme de degré p.

- Si n'est pas solution de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré $q = p$

- Si α est une racine simple de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ où $Q(x)$ est un polynome de degré $q = p + 1$

- Si α est une racine double de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ où $Q(x)$ est un polynome de degré $q = p + 2$

$f(x) = K \sin(ax)$ ou $f(x) = K \cos(ax)$.

- Si $\sin(ax)$ ou $\cos(ax)$ n'est pas solution de l'équations sans second membre, on cherche une solution particulière du

type : $y = A \cos(ax) + B \sin(ax), \ \ A, B \in \mathbb{R}$.

-Si $\sin(ax)$ ou $\cos(ax)$ est pas solution de l'équations sans second membre, on cherche une solution particulière du type

:$y = Ax \cos(ax) + Bx \sin(ax), \ \ A, B \in \mathbb{R}$.

8.5 Exercices résolus

Exercice 1 :

Donner le nom de chaque type d'équation différentielle suivante :

(1) $\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, (2) $\frac{dy}{dx} + P(x) y = q(x) y^{\alpha}$,où $\alpha \neq 0$ et 1

(3) $M(x) dx + N(x) dy = 0$ (4) $\frac{dy}{dx} + P(x) y = q(x)$.

La solution :

(1) Équation homogène.

(2) Équation de Bernoulli.

(3) Équation à variables séparées.

(4) Équation linéaire du premier ordre.

Exercice 2 :

Résoudre les équations differentielles suivantes :

1) $xyy^{'} = 1 + y^2$ 2) $xyy^{'} = 1 + y^2$

3) $(x^2 + 1)\, y^{'} - y^2 - 1 = 0$ 4) $xy^{'} \ln x = (3 \ln x + 1)\, y$

La solution :

1) $xyy^{'} = 1 + y^2$

On commence par séparer les variables on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^{'}} &= \frac{xy}{1+y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{xy}{1+y^2} \\
donc \int \frac{1}{x}dx &= \int \frac{y}{1+y^2}dy \\
\ln|x| &= \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + c \Rightarrow \ln\left|1+y^2\right| = 2\ln|x| + c^{'} \\
1+y^2 &= e^{2\ln|x|+c^{'}} \Rightarrow y^2 = x^2.e^{c^{'}} - 1 \\
y &= \sqrt{x^2.e^{c^{'}} - 1}
\end{aligned}$$

2) $xyy^{'} = 1 + y^2$

$$\begin{aligned} y^{'} &= y - \frac{y}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y\left(x^2-1\right)}{x^2} \\ \int \frac{1}{y}dy &= \int \frac{x^2-1}{x^2}dx \\ \ln|y| &= x + \frac{1}{x} + c \\ y &= e^{x+\frac{1}{x}+c}. \end{aligned}$$

3) $\left(x^2+1\right)y^{'} - y^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} y^{'} &= \frac{y^2+1}{x^2+1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2-1}{x^2+1} \\ \int \frac{1}{y^2+1}dy &= \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ tg(ar\tan(y)) &= \tan g(ar\tan(x)+c) \\ y &= tg(ar\tan x + c) \end{aligned}$$

On a :$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Donc

$$y = \frac{x+\tan(c)}{1-x\tan(c)}$$

4)$xy^{'}\ln x = (3\ln x + 1)\,y$

On peut séparer les variables on obtient :

$$\frac{y^{'}}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x\ln x},$$

Donc: $\int \frac{y^{'}}{y}dy = \int \frac{3\ln x+1}{x\ln x}$, alors

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{1}{x\ln x}dx = 3\ln x + \ln(\ln x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}, \\ y &= ke^{3\ln x+\ln(\ln x)}, \qquad\qquad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivante :

1) $y" - 5y' + 6y = 3x$.

2) $y" - 3y^{'} + 2y = e^{x}$

3) $y" - 3y^{'} + 2y = 2xe^{3x} + 3\sin x$.

La solution :

1)$y" - 5y' + 6y = 3x$.

La solution de l'équation homogène est $y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Le second membre est un polynôme d'ordre 1. On recherche comme solution particulière un polynôme de même ordre :

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax + B \\ y_p^{'}(x) &= A, \quad y_p^{"}(x) = 0, \end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned} y_p^{''} - 5y_p^{'} + 6y_p &= 3x \Longleftrightarrow -5A + 6(Ax + B) = 3x \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{5}{12}. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}.$$

La solution générale de l'équation:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où :

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}.$$

La solution générale de l'équation:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y^{"} - 3y^{'} + 2y = e^{x}$

La solution de l'équation homogène est $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

α est une racine d'ordre 1 de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$,où

$P(x)$ est un un polynome de degré 1 :

On a, $y_p(x) = (Ax + B)\, e^x$,

alors, $y_p^{'}(x) = (Ax + B + A)\, e^x$,

et $y_p^{''}(x) = (Ax + B)e^x + Ae^x + Ae^x = (Ax + B + 2A)\, e^x$.

En injectant ces relations dans l'équation différentielle, nous obtenons:

$$(Ax + B + 2A)\, e^x - 3\,(Ax + B + A) + 2\,(Ax + B)\, e^x = e^x,$$

Donc,

$$(-A)\, e^x = e^x \Longrightarrow A = -1, d'où\ y_p(x) = (-x)\, e^x.$$

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (-x)\, e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc :

$$y(x) = (c_1 - x)\, e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y^{"} - 3y^{'} + 2y = 2xe^{3x} + 3\sin x$.

La solution de l'équation homogène associée est $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Le second membre est une combinaison linéaire d'une fonction trigonométrique et du produit d'une fonction exponentielle par un polynôme d'ordre 1. On recherche comme solution particulière du type :

$$y_p = (Ax + B)\, e^{3x} + C\sin(x) + D\cos(x). \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

On a, $y_p^{'} = (3Ax + 3B + A)\, e^{3x} + C\cos(x) - D\sin(x)$.

$y_p^{"} = (9Ax + 9B + 6A)\, e^{3x} + C\sin(x) - D\cos(x)$.

L'équation différentielle appliquée à y_p conduit à :

$y" - 3y' + 2y = 2xe^{3x} + 3\sin x \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} & (9Ax+9B+6A)\,e^{3x} - C\sin(x) - D\cos(x) - 3\left[(3Ax+3B+A)\,e^{3x} + C\cos(x - D\sin(x))\right] + \\ & 2\left[(Ax+B)\,e^{3x} + C\sin(x) + D\cos(x)\right] \\ = \; & 2xe^{3x} + 3\sin x, \end{aligned}$$

Alors,

$$(2Ax+2B+3A)\,e^{3x} + (C+2D)\sin(x) + (D-3C)\cos(x) = 2xe^{3x} + 3\sin x,$$

Et par identification, on obtient : $A = 1$, $B = \frac{-3}{2}$, $C = \frac{3}{10}$, $D = \frac{9}{10}$.

Donc :

$$y_p = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{3x} + \frac{3}{10}\sin(x) + \frac{9}{10}\cos(x).$$

La solution générale est :

$$y(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{3x} + \frac{3}{10}\sin(x) + \frac{9}{10}\cos(x) + c_1e^{x} + c_2e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Résoudre :

$(E1) : y" - 3y' + 2y = 0.$

$(E2) : y" + 2y' + 2y = 0.$

$(E3) : y" - 2y' + y = 0.$

$(E4) : y" + y' = 2\cos^2 x.$

La solution :

$(E1) : y" - 3y' + 2y = 0$

Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est :

$r^2 - 3r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = 2$ *et* $r = 1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$(E2) : y^{"} + 2y^{'} + 2y = 0$ L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = -1 + i$ *et* $r = -1 - i$.

Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{-x} \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$(E3) : y^{"} - 2y^{'} + y = 0$ L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2r + 1 = 0$;

qui admet une racine double : 1, Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{x} \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$(E4) : y^{"} + y^{'} = 2\cos^2 x$.Les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Le second membre peut en fait se réécrire, $cos^2 x = 1 + cos 2x$ d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = a + \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$$

En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1, \alpha = \frac{1}{3}, \beta = 0$,c-à-d: $y_p(x) = 1 - \frac{1}{3} \cos 2x$

Les solutions générales sont donc,

$$y_g(x) = 1 - \frac{1}{3} \cos 2x + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}., \quad (x \in \mathbb{R})$$

Exercice 5 :

Donner la forme de la solution générale de chaque équation différentielle :

1) $y^{"} - 3y^{'} + 2y = xe^{-2x}$

2) $2y^{"} + y^{'} - y = e^{7x}$

La solution :

1) $y^{"} - 3y^{'} + 2y = xe^{-2x}$

On pose

$$y = e^{kx} \Longrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0$$

On a $\triangle = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Donc

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Et on cherche la solution particulière sous la forme

$$y_p = (ax + b)\, e^{-2x}$$

Car -2 n'est pas solution de l'équation caractéristique

Finalement

$$y_G = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (ax + b)\, e^{-2x}$$

2) $2y^{"} + y^{'} - y = e^{7x}$

L'équation caractéristique est:

$$2k^2 + k - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \triangle = 1 + 8 = 9 \Longrightarrow k_1 = \tfrac{-1-9}{4} = -1 \quad , k_2 = \tfrac{-1+3}{4} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \ y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

Pour y_p , on a $f(x) = e^{7x} \Longrightarrow \alpha = 7$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique

Alors

$$y_p = Ke^{7x}$$

Finalement

$$y_G = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + Ke^{7x}$$

8.6 Exercices à résoudre :

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes:

1) $(1+x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0$

2) $xy' = y + x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes:

1) $y' - y = (x+1)\,e^x \quad avec \quad y(0) = 1$

2) $y' + y = x^2$

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes:

1) $xy' + y = x^2y^2$

2) $y' + y = -xy^3$

Exercice 4 :

Résoudre les équations suivantes:

1)$y + 12y = -e^{4x}$

2) $y' + y = \cot anx$

Bibliographie

[1] BENYAD A., BENHASSAINE M., Mathématiques, EXERCICES RESOLUS, Office des Publications Universitaires : 04 2004.

[2] J. Cerallet et M. Morel. Du cours aux applications algèbre linéaire(1),Librairie Armand colin

[3] J.L. Chambadal, Ovaret, Algébre linéaire et algébre tenorielle, Dunod, Paris1968

[4] J. Lelong , J. M. Arnaudies, cours de mathématiques tome1,algèbre ,Paris,Dunod1977.

[5] SALAH GOURARI, ALGEBRE-LINEAIRE, COURS ET EXERCIXES RESOLUS,Office des Publications universitaires : 11 1993.