

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN MATHEMATIQUES

**Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes
différentiels non linéaire**

Option : EDP et Applications

Par

SabahYessaad Mokhtari

DIRECTEUR DE MEMOIRE : L. NISSE M. C U. B. M. ANNABA

Membres du jury

RESIDENTE :P. Y. LASKRI Prof U. B. M. ANNABA

EXAMINATEUR :F. DIABA M. C U. B. M. ANNABA

EXAMINATEUR :R. AMIAR M. C U. B. M. ANNABA

Année : 2012

Résumé

Dans ce travail, on traite un problème aux limites pour un système couplé d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires avec une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. On obtient ainsi quelques résultats sur l'existence et l'unicité de la solution du système en question, à l'aide des théorèmes de point fixe de type Leray-Schauder, dans un espace de Banach.

En suite, on étudie la stabilité du système, et on donne des conditions suffisantes pour la stabilité de la solution par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire.

Mots clés : Dérivée fractionnaire, problème aux valeurs limites pour le système couplé, fonction de Green, les théorème de point fixe de Banach et Schauder, l'inégalité de type Gronwall

Abstract

In this work, we discuss the boundary values problem for a coupled system of non linear fractional differential equations with a fractional derivative of Riemann-Liouville. we gets some an existence and uniqueness result the solution in question the system, in a space of Banach.

In continuation, we studie the stability of the system, and we gives some conditions sufficient for the stability of the solution in relation of fractional derivations to the orders.

Key-Words :Fractional derivative, Boundary value problem for a coupled system, Green's function, (Banach, Schauder) fixed-point theorems, Gronwall-type inequality.

Table des matières

Introduction	1
1 Notion préliminaire	2
1.1 Espace L^P	2
1.2 Transformée de Laplace	3
1.3 Fonctions Gamma et Béta	4
1.4 Fonction de Mittag-Leffler	6
1.5 Fonction de Green	7
2 Calcul fractionnaire	9
2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	9
2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	12
2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo	16
3 Système couplé d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires	20
3.1 Introduction	20
3.2 L'unicité de la solution du système	23
3.2.1 Le premier théorème de point fixe	24
3.3 L'existence de la solution du système	28
4 Application	30
4.1 Système couplé d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires	30
4.1.1 Le deuxième théorème du point fixe	34
4.1.2 L'existence de la solution	34
4.1.3 La stabilité du système par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire	41

5 Conclusion

50

Introduction

Le concept des opérateurs d'ordres fractionnaires a été défini au 19^{ème} siècle par Riemann-Liouville et Leitchkov. Leur but est de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en utilisant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions préliminaires essentielles, utilisées dans la dérivation fractionnaire.

Le chapitre 2, contient plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire, nécessaires dans les chapitres suivants dans ce travail.

Dans le chapitre 3, on étudie l'existence et l'unicité d'une solution positive au problème aux valeurs limites pour un système couplé d'équations différentielles fractionnaires où la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. D'autre part, en utilisant les théorèmes de point fixe du Banach et de Leray-Schauder pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Au chapitre 4, on étudie le problème aux valeurs limites pour un système couplé d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires avec une dérivée fractionnaire de R-L, en reprenant, les mêmes étapes du chapitre précédent concernant la démonstration de l'existence de la solution, en se basant sur le théorème du point fixe de Schauder.

Pour terminer, on examine la question de la stabilité du système précédent par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire.

Chapitre 1

Notion préliminaire

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce travail.

1.1 Espace L^p

En analyse, les espaces L^p sont des espaces de fonction dont la puissance P -ième est intégrable, au sens de Lebesgue.

Définition 1.1.1 ([1]) Soit $\Omega =]a, b[$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) un intervalle borné ou non borné de \mathbb{R} . pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace L^p comme suit :

1. pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables sur Ω c'est-à-dire :

$$f \in L^p(\Omega) \iff \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, f \text{ mesurable} \quad (1.1)$$

$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.

$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est un Banach.

2. pour $p = 2$ alors :

$L^2(\Omega) = \{f : f \text{ mesurable à carré intégrable sur } \Omega, \int_{\Omega} f^2(x) dx < \infty\}$

$(L^2(\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$ est un Hilbert, ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx \quad \forall f, g \in L^2(\Omega) \quad (1.2)$$

3. pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω .

Définition 1.1.2 f est dite essentiellement bornée sur Ω s'il $\exists M > 0$ telle que,

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{M \geq 0; |f(x)| \leq M. \text{ p. p sur } \Omega\} \quad (1.3)$$

$(L^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty})$ est un Banach.

1.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace intervient dans la résolution des équations et des systèmes différentiels.

Définition 1.2.1 ([16]) La transformée de Laplace d'une fonction f de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ est définie par :

$$\mathcal{L} f(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L} f(s)$.

la transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (1.4) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre exponentiel a , c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que :

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad \text{pour } t > T \quad (1.5)$$

Dans ce cas la transformée de Laplace existe pour $\operatorname{Re}(s) > a$.

L'originale $f(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \mathcal{L}f(s) ds, \quad c > a$$

Exemple 1 1. $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$

2. $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{1}{s^2+1}$ (pour la démonstration, on applique l'intégration par partie)

3. $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ (on applique intégration par partie :

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2})$$

4. $\mathcal{L}(t^{\kappa})(s) = \frac{\kappa!}{s^{\kappa+1}}$ (par récurrence).

5. $\mathcal{L}(\exp(-at))(s) = \frac{1}{s+a}$

Proposition 1.2.1 *La transformée de Laplace est linéaire i.e.*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^n c_i f_i(t)\right)(s) = \sum_{i=0}^n c_i \mathcal{L}f_i(s) \quad (1.6)$$

Définition 1.2.2 *Lorsque le produit $f(x-t)g(t)$ est intégrable sur tout intervalle $[0, x]$ de \mathbb{R}^+ , le produit de convolution de f et g est définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt \quad (1.7)$$

Proposition 1.2.2 ([11]) *Si les transformées de Laplace de f et g existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \bullet \mathcal{L}g(s) \quad (1.8)$$

Proposition 1.2.3 ([11]) *La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+) \\ &= s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^k f^{(n-k-1)}(0^+) \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.3 Fonctions Gamma et Béta

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.3.1 ([11]) *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, on définit la fonction Gamma, notée par Γ :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.10)$$

cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Lemme 1.3.1 ([11]) *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1) Pour $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (1.11)$$

En particulier, $\Gamma(1) = 1$, en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$

2) On peut représenter $\Gamma(z)$ par la limite,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{(z+1) \cdots (z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (1.12)$$

Preuve. (voir [1]).

□

Remarque 1.3.1 La fonction Gamma est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Sa dérivée est :

$$\dot{\Gamma}(z) = \Gamma(z) \Psi(z) \quad (1.13)$$

où

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z))$$

Définition 1.3.2 La formule du binôme généralisée $\binom{\alpha}{n}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ est donnée par :

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}, \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (1.14)$$

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad m \geq n \quad (1.15)$$

Définition 1.3.3 Cette formule peut être exprimée en terme de la fonction Gamma pour $\alpha \notin \mathbb{Z}_-^*$ comme suit :

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha-n+1)}, \quad (\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}_-^*, n \in \mathbb{N}) \quad (1.16)$$

Définition 1.3.4 La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes x et y par :

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0. \quad (1.17)$$

Elle est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \forall x, y : \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0 \quad (1.18)$$

Remarque 1.3.2 La fonction Bêta est symétrique i.e.

$$\beta(x, y) = \beta(y, x)$$

1.4 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.4.1 Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ (notée par M-L) est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa + 1)}, \quad (\alpha > 0) \quad (1.19)$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.20)$$

Exemple 2 Pour des valeurs spéciales de α et β on a :

$$1) E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z$$

$$2) E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad (\text{on obtient, } E_{1,2} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\kappa+2)} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{(\kappa+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!} = \frac{1}{z} (e^z - 1))$$

$$3) E_{1,3}(z) = \frac{e^z - z - 1}{z^2} \quad (\text{on obtient, } E_{1,3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} (e^z - z - 1))$$

Théorème 1.4.1 La fonction de Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :

1) Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag-Leffler généralisée satisfait :

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha) dt = \frac{1}{z-1} \quad (1.21)$$

2) La transformée de Laplace de cette fonction est donnée par :

$$\mathcal{L} \left[z^{\alpha\kappa+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(\kappa)}(az^\alpha) \right] (s) = \frac{\kappa! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{\kappa+1}}, \quad \text{Re}(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.22)$$

où $E_{\alpha,\beta}^{(\kappa)}(y) = \frac{d^\kappa}{dy^\kappa} E_{\alpha,\beta}(y)$.

3) Intégration de la fonction de M-L :

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha) \quad (1.23)$$

4) La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de M-L est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^\alpha) \quad (1.24)$$

Preuve. (voir ([11])). □

1.5 Fonction de Green

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles (en particulier, le cas des équations différentielles fractionnaires).

Définition 1.5.1 (*Fonction de Green en une dimension*)

Soit $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et.

on considère le problème de l'équation différentielle et les conditions aux limites homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right) f(x) = h(x) \quad 0 < x < 1 \\ \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

où h est une fonction donnée et α_j, β_j ($j = 1, 2$) sont des constantes données.

La méthode de la fonction de Green, consiste à résoudre, pour chaque $y \in]a, b[$ fixé,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right] G(x, y) = \delta(x - y) \quad (1.26)$$

L'équation (1.26) doit être au sens des distributions.

La fonction de Green satisfait les mêmes conditions aux limites en $x = a$ et $x = b$,

On obtient, la solution f de (1.25) par :

$$f(x) = \int_a^b G(x, y) h(y) dy \quad (1.27)$$

Proposition 1.5.1 Si f est une solution de (1.25), alors f peut être représentée sous la forme (1.27).

Remarque 1.5.1 La fonction de Green est symétrique i.e :

$$G(x, y) = G(y, x)$$

Théorème 1.5.1 La fonction de Green possède les propriétés suivantes :

1) $\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right] G(x, y) = 0$ sur (a, y) et sur (b, y)

2) G satisfait les conditions aux limites

3) G est continue en $x = y$

Exemple 3 Soit la fonction de Green pour le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = f(t) \\ y(0) = \frac{d}{dt}y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

On remplace (1.28) par :

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t, \tau) - 3\frac{d}{dt}g(t, \tau) + g(t, \tau) = \delta(t - \tau)$$

pour $g(0, \tau) = \frac{d}{dt}g(0, \tau) = 0$

on applique la transformée de Laplace, et on obtient :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}g(t, \tau)\right)(s) - 3\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}g(t, \tau)\right)(s) + 2\mathcal{L}(g(t, \tau))(s) = \mathcal{L}(\delta(t - \tau))(s)$$

$$s^2G(t, \tau) - sg(0, \tau) - \frac{d}{dt}g(0, \tau) - 3[sG(t, \tau) - g(0, \tau)] + 2G(t, \tau) = \frac{1}{s}$$

où $\delta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}$ alors, $\mathcal{L}(\delta(t - \tau))(s) = \frac{1}{s}$,

Donc,

$$G(t, \tau) = \frac{\frac{1}{s}}{s^2 - 3s + 2}$$

La transformée la fonction pour le problème tel que $\tau = 0$, alors, la fonction de Green est

$$g(t, \tau) = \left[\frac{1}{2}e^{2(t-\tau)} - e^{t-\tau} + \frac{1}{2} \right] H(t - \tau), t \geq \tau$$

où H est la fonction de Heaviside.

Alors, la solution du problème (1.28) écrit comme suit :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b g(t, \tau) f(t) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2}e^{2(t-\tau)} - e^{t-\tau} + \frac{1}{2} \right] H(t - \tau) f(t) dt \end{aligned}$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier.

Dans ce chapitre, on donne les différentes définitions de la dérivée fractionnaire.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par *R-L*) d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$j_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \quad (2.1)$$

Pour $(-\infty \leq a < x < \infty)$.

Pour $\alpha = 0$, on a :

$$j_a^0 := I \quad (\text{l'opérateur identité})$$

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, j_a^α coïncide avec l'intégrale répétée n -fois de la forme :

$$\begin{aligned} (j_a^\alpha f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

Exemple 4 Soit $f(x) = (x-a)^c$ avec $c > -1$, alors

$$j_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c} \quad (2.3)$$

En effet,

$$j_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt,$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Bêta on obtient :

$$t-a = s(x-a), 0 \leq s \leq 1 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} j_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x-a-s(x-a)]^{\alpha-1} s^c (x-a)^{c+1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^c ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \beta(\alpha, c+1) \end{aligned}$$

$$j_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c}$$

dans le cas $a = 0$ on a,

$$j_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} x^{\alpha+c}$$

Théorème 2.1.1 ([16]) *Si $f \in L^1[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors $j_a^\alpha f(x)$ existe pour presque tout $x \in [a, b]$ et on a :*

$$j_a^\alpha f \in L^1[a, b]$$

Preuve. Soit $f \in L^1[a, b]$, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-t) \varphi_2(t) dt$$

avec,

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{pour } , 0 < u \leq b-a \\ 0 & \text{pour } , u \in \mathbb{R} \setminus (0, b-a) \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u) & , a \leq u \leq b \\ 0 & , \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

Par construction, $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \in \{1, 2\}$, et on a : $j_a^\alpha f \in L^1[a, b]$. □

Théorème 2.1.2 ([16]) Soit $\alpha > 0$ et soit $(f_\kappa)_{\kappa=1}^\infty$ une suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[a, b]$, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la limite comme suit :

$$\left(J_a^\alpha \lim_{\kappa \rightarrow \infty} f_\kappa \right) (x) = \left(\lim_{\kappa \rightarrow \infty} J_a^\alpha f_\kappa \right) (x)$$

en particulier, la suite $(J_a^\alpha f_\kappa)_{\kappa=1}^\infty$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit f la limite de la suite (f_κ) , il est clair que f est continue, et on a l'estimation :

$$\begin{aligned} |J_a^\alpha f_\kappa(x) - J_a^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f_\kappa(t) - f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_\kappa - f\|_\infty (b-a)^\alpha \end{aligned}$$

d'où, la convergence uniforme lorsque $\kappa \rightarrow \infty$, pour $x \in [a, b]$. \square

Théorème 2.1.3 ([11], [16]) Soit $\alpha, \beta > 0$, pour toute fonction $f \in L^1[a, b]$, on a :

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x) = J_a^\beta J_a^\alpha f(x) \quad (2.6)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$, et $f \in C[a, b]$, alors (2.6) est vraie pour tout $x \in [a, b]$.

Preuve. Soit $f \in L^1[a, b]$, on a :

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_\tau^x (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau dt$$

D'après le théorème 2.1.1 les intégrales existent et par le théorème de Fubini on a :

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau$$

En utilisant le changement de variable (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = J_a^{\alpha+\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque partout sur $[a, b]$

Si $f \in C[a, b]$, alors $j_a^\alpha f \in C[a, b]$ et par suite $j_a^\alpha j_a^\beta f \in C[a, b]$, et aussi : $j_a^{\alpha+\beta} f \in C[a, b]$

□

Lemme 2.1.1 ([11]) Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in L^1(0, b)$ pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de R-L est formulée comme suit :

$$\mathcal{L}(j_0^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L} f(s) \quad (2.7)$$

Preuve. On peut écrire $j_a^\alpha f$ comme une convolution de deux fonctions $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$j_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t)$$

Alors,

$$\mathcal{L}[j_0^\alpha f](s) = \mathcal{L}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s) \cdot \mathcal{L} f(s)$$

comme,

$$\mathcal{L}[x^{\alpha-1}](s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}$$

d'où le résultat. □

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$D_a^\alpha f(x) := D^n j_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \quad (2.8)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$

En particulier, 1) Pour $\alpha = 0$, on a :

$$D_a^0 f(x) = D j_a^1 f(x) = I f(x) \quad (2.9)$$

2) Pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^m f(x) = D^{m+1} j_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} j_a^1 f(x) = D^m f(x) \quad (2.10)$$

Ainsi pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de R-L coïncide avec la dérivée usuelle.

Exemple 5 Soit $f(x) = (x-a)^\nu$ avec $\nu > -1$ et $\alpha \geq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$, d'après (2.4) on a,

$$D_a^\alpha f(x) = D^n J_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-(\alpha-\nu)} \quad (2.11)$$

Pour le cas, $(\alpha-\nu) \in \mathbb{N}$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = 0, (\alpha-\nu) \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.12)$$

Par ailleurs si $(\alpha-\nu) \notin \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} (x-a)^{\nu-\alpha} \quad (2.13)$$

Proposition 2.2.1 ([11], [16]) Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D^m J_a^{m-\alpha} f(x), m > \alpha \quad (2.14)$$

Preuve. Comme $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} D^m J_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^{m-n} J_a^{m-n} J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^\alpha f(x) \end{aligned}$$

car $D^{m-n} J_a^{m-n} = I$. □

Théorème 2.2.1 ([16]) Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de R-L existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors : $D_a^\alpha (c_1 f + c_2 g)$ existe, et on a :

$$D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x) \quad (2.15)$$

Remarque 2.2.1 ([15]) Supposons que $f \in C(0,1) \cap L(0,1)$ tel que $D^\alpha f \in C(0,1) \cap L(0,1)$ alors :

$$J^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n C_k t^{\alpha-k}, C_k \in \mathbb{R}, n = [\alpha] + 1 \quad (2.16)$$

Lemme 2.2.1 ([16]) Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, alors l'égalité :

$$D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.17)$$

est vraie pour presque tout $x \in [a, b]$

Preuve. En utilisant la définition 2.2.1 on a :

$$D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = D^n J_a^{n-\alpha} J_a^\alpha f(x) = D^n J_a^n f(x) = f(x)$$

□

Théorème 2.2.2 ([16]) Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n - 1 \leq \alpha < n$, $m - 1 \leq \beta < m$ tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ alors :

(1) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a, b]$ l'égalité :

$$D_a^\beta (J_a^\alpha f)(x) = J_a^{\alpha-\beta} f(x) \quad (2.18)$$

est presque partout sur $[a, b]$.

(2) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a, b]$ tel que $f = J_a^\alpha \varphi$, alors :

$$J_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.19)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

(3) Pour $\alpha > 0$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_a^\alpha f$ et $D_a^{\kappa+\alpha} f$ existes, alors :

$$D_a^\kappa (D_a^\alpha f(x)) = D_a^{\kappa+\alpha} f(x) \quad (2.20)$$

(4) Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$D_a^\beta (J_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x) \quad (2.21)$$

Preuve. En utilisant la définition 2.2.1 et la relation 2.6 on obtient :

(1) Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (J_a^\alpha f)(x) &= D^n J_a^{n-\beta} (J_a^\alpha f)(x) \\ &= D^n (J_a^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ &= D^n J_a^n (J_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= J_a^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a, b]$

(2) Par la relation 2.17, on obtient :

$$J_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = J_a^\alpha (D_a^\alpha J_a^\alpha \varphi(x)) = J_a^\alpha (\varphi(x)) = f(x)$$

(3) on a :

$$\begin{aligned} D^\kappa [D_a^\alpha f(x)] &= D^\kappa D^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^{\kappa+n} J_a^{n-\alpha+\kappa-\kappa} f(x) \\ &= D^{\kappa+n} J_a^{\kappa+n-(\alpha+\kappa)} f(x) \\ &= D_a^{\kappa+\alpha} f(x) \end{aligned}$$

d'où la résultat.

(4) on a :

$$D_a^\beta (J_a^\alpha f)(x) = D^m J_a^{m-\beta} (J_a^\alpha f)(x) = D^m J_a^{m-(\beta-\alpha)} f(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x)$$

existe pour $i-1 \leq \beta-\alpha < i$ et $i \leq m$ □

Théorème 2.2.3 Si $f \in L^1[0, b]$, $b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L de f est :

$$\mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L} f)(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^\kappa [D^{\alpha-\kappa-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.22)$$

avec $n-1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue.

Preuve. Par la définition 2.2.1, on trouve,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) &= \mathcal{L}(D^n J_0^{n-\alpha} f)(s) \\ &= s^n \mathcal{L}(J_0^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (J_0^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \\ &= s^\alpha (\mathcal{L} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (J_0^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \end{aligned}$$

□

2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

On donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo.

Définition 2.3.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f est donnée par :*

$${}^c D_a^\alpha f(x) := J_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad x > a \quad (2.23)$$

avec $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 6 Soit $f(x) = (x-a)^\gamma$ avec $\gamma > 0$, pour $(0 < \alpha \leq 1)$ et utilisant le changement de variable(2.4) on a :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &= J_a^{1-\alpha} f'(x) = \gamma J_a^{1-\alpha} (x-a)^{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{\gamma-1} dt \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \int_0^1 s^{\gamma-1} (1-s)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \beta(\gamma, 1-\alpha) \\ {}^c D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 ([15]) *Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$, si f possède $n-1$ dérivées en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :*

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] \quad (2.24)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

Preuve. D'après la définition on a :

$$\begin{aligned}
& D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] \\
&= D^n J_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (t-a)^\kappa \right] dt
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
& J_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] \\
&= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (t-a)^\kappa \right] dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[\left(f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (t-a)^\kappa \right) (x-t)^{n-\alpha} \right]_{t=a}^{t=x} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \left[Df(t) - D \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (t-a)^\kappa \right] dt
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
& J_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] \\
&= J_a^{n-\alpha+1} D \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right]
\end{aligned}$$

de la même façon pour $n - fois$ alors :

$$\begin{aligned}
& J_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] \\
&= J_a^{n-\alpha+n} D^n \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] \\
&= J_a^n J_a^{n-\alpha} D^n \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right]
\end{aligned}$$

Or $\sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa$ est un polynôme de degré $n-1$, alors :

$$J_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] = J_a^n J_a^{n-\alpha} D^n f(x)$$

Donc,

$$\begin{aligned} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} (x-a)^\kappa \right] &= D^n J_a^n J_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= J_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= {}^c D_a^\alpha f(x) \end{aligned}$$

Pour presque tout $x \in [a, b]$. □

Corollaire 2.3.1 ([16]) *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si ${}^c D_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent, on suppose que $D^\kappa f(a) = 0$ pour tout $\kappa \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, alors :*

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) \quad (2.26)$$

Théorème 2.3.2 *Si $f \in C[a, b]$ et si $\alpha > 0$ ($n-1 < \alpha \leq n$), alors :*

$${}^c D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.27)$$

Preuve. Soit $g = J_a^\alpha f$ et par le corollaire précédent ($D^\kappa f(a) = 0$, pour $\kappa \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) et d'après l'égalité(2.17), on a :

$${}^c D_a^\alpha J_a^\alpha f = {}^c D_a^\alpha g = D_a^\alpha g = D_a^\alpha J_a^\alpha f = f$$

□

Théorème 2.3.3 *Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$, telles que ${}^c D_a^\alpha f_1$ et $D_a^\alpha f_2$ existent presque partout. De plus, soient c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ alors, ${}^c D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe presque partout sur $[a, b]$, et on a :*

$${}^c D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}^c D_a^\alpha f_1 + c_2 {}^c D_a^\alpha f_2 \quad (2.28)$$

Théorème 2.3.4 *Si $f \in C[0, b]$, pour tout $b > 0$, alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est :*

$$\mathcal{L} ({}^c D_a^\alpha f) (s) = s^\alpha (\mathcal{L} f) (s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{\alpha-\kappa-1} f^{(\kappa)} (0^+) \quad (2.29)$$

Preuve. Pour $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$ alors :

$${}^c D_0^\alpha f (x) = j_0^{n-\alpha} f^{(n)} (x)$$

Donc, d'après (2.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} ({}^c D_a^\alpha f) (s) &= \mathcal{L} (j_0^{n-\alpha} f^{(n)}) (s) \\ &= s^{-n+\alpha} (\mathcal{L} f^{(n)}) (s) \end{aligned}$$

et d'après (1.8)

$$\mathcal{L} ({}^c D_a^\alpha f) (s) = s^\alpha (\mathcal{L} f) (s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{\alpha-\kappa-1} f^{(\kappa)} (0^+)$$

□

Chapitre 3

Système couplé d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires

3.1 Introduction

Soit le système d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires définie comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) + f(t, v(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = au(\xi) \\ D^\beta v(t) + g(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ v(0) = 0, v(1) = bv(\xi) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où D^α, D^β sont représentés les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre α et β respectivement

et $1 < \alpha, \beta < 2; 0 \leq a, b \leq 1; 0 < \xi < 1$

$f, g : [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ sont des fonctions données.

Lemme 3.1.1 *Soit $h \in C[0, 1]$ et $1 < \alpha < 2$, alors u est une solution du problème*

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) + h(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = au(\xi) \end{cases} \quad (3.2)$$

si et seulement si u est une solution de l'équation intégrale :

$$u(t) = \int_0^1 G_1(t, s) h(s) ds \quad (3.3)$$

où G_1 est la fonction de Green définie par :

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - at^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}(1-a\xi^{\alpha-1})}{(1-a\xi^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} , & 0 \leq s \leq t \leq 1 , s \leq \xi \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}(1-a\xi^{\alpha-1})}{(1-a\xi^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} , & 0 < \xi \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - at^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-1}}{(1-a\xi^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} , & 0 \leq t \leq s \leq \xi \leq 1 \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{(1-a\xi^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} , & 0 \leq t \leq s \leq 1 , \xi \leq s \end{cases} \quad (3.4)$$

Preuve. Soit u est une solution de (3.2), d'après la relation (2.16), on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= -j^\alpha h(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} \\ &= - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Par les conditions aux limites, on aura :

$$\begin{aligned} u(1) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_1 \\ &= a \left(-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1} f(s, v(s)) ds + c_1 \xi^{\alpha-1} \right) \end{aligned}$$

$$c_2 = 0 , c_1 = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds - a \int_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds$$

Alors,

$$\begin{aligned} u(t) &= - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds + \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds \\ &\quad - \int_0^\xi \frac{t^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds \\ &= \int_0^1 G_1(s, t) h(s) ds \\ &\text{pour } \xi \in [0, 1] \text{ fixé alors : } \begin{cases} \text{étape (1) : } t \in [0, \xi] \\ \text{étape (2) : } t \in [\xi, 1] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

d'où le résultat (3.3).

Inversement, soit $u(t)$ une solution de (3.4), on applique la relation $D^\alpha t^{\alpha-m} = 0$, pour $m = 1, \dots, N$ (dans [10]), on obtient :

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t) &= D^\alpha \left(- \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds \right) \\ &\quad + D^\alpha t^{\alpha-1} \left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds - a \int_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds \right] \\ &= -D^\alpha J^\alpha h(s) = -h(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

on aura : $D^\alpha u(t) + h(t) = 0$

Et, $u(0) = 0$,

$$\begin{aligned} u(1) &= - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds - a \int_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{a\xi^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds - a \int_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds \\ &= a \left(- \int_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds + \int_0^1 \frac{(\xi(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} h(s) ds \right) \\ &= au(\xi) \end{aligned}$$

d'où le résultat (3.1). □

Remarque 3.1.1 Ainsi, on peut représenter la solution (u, v) du système d'équations (3.1)

par :

$$u(t) = \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s)) ds \quad (3.9)$$

et,

$$v(t) = \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s)) ds \quad (3.10)$$

Où $G_2(t, s)$ est définie par :

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\beta-1} - bt^{\beta-1}(\xi-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}(1-b\xi^{\beta-1})}{(1-b\xi^{\beta-1})\Gamma(\beta)} , & 0 \leq s \leq t \leq 1 , s \leq \xi \\ \frac{[t(1-s)]^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}(1-b\xi^{\beta-1})}{(1-b\xi^{\beta-1})\Gamma(\beta)} , & 0 < \xi \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{[t(1-s)]^{\beta-1} - bt^{\beta-1}(\xi-s)^{\beta-1}}{(1-b\xi^{\beta-1})\Gamma(\beta)} , & 0 \leq t \leq s \leq \xi \leq 1 \\ \frac{[t(1-s)]^{\beta-1}}{(1-b\xi^{\beta-1})\Gamma(\beta)} , & 0 \leq t \leq s \leq 1 , \xi \leq s \end{cases} \quad (3.11)$$

Soit $G(t, s) = (G_1(t, s), G_2(t, s))$, la fonction de Green du système aux valeurs limites (3.1).

Lemme 3.1.2 ([15]) *Soit $0 \leq a, b \leq 1$, alors la fonction $G(t, s)$ est continue et satisfait :*

- (1) $G(t, s) > 0$, pour $t, s \in]0, 1[$
- (2) $G(t, s) \leq G(s, s)$, pour $t, s \in]0, 1[$.

3.2 L'unicité de la solution du système

On définit, l'espace $X = \left\{ u : u \in C[0, 1] \text{ et } \|u\|_X = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)| \right\}$

et $Y = \left\{ v : v \in C[0, 1] \text{ et } \|v\|_Y = \max_{0 \leq t \leq 1} |v(t)| \right\}$

Alors, $X \times Y = \left\{ (u, v) : (u, v) \in C^2[0, 1] \text{ et } \|(u, v)\|_{X \times Y} = \max \{ \|u\|_X, \|v\|_Y \} \right\}$

D'autre part, soit la cône : $P = \{(u, v) \in X \times Y \mid u(t) \geq 0, v(t) \geq 0\}$, donc ; $P \subset X \times Y$.

Lemme 3.2.1 *Supposons que $f(t, v)$ et $g(t, u)$ sont continues, alors $(u, v) \in X \times Y$ est une solution du système (3.1) si et seulement si $(u, v) \in X \times Y$ est une solution des équations intégrales*

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s)) ds \\ v(t) &= \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s)) ds \end{aligned} \quad (3.12)$$

Preuve. *Supposons que $(u, v) \in X \times Y$ est une solution de (3.1). En appliquant la méthode de la preuve du lemme (3.1.1), on montre que (3.12) est vérifiée.*

Inversement, soit

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s)) ds \\
&= - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s)) ds + \int_0^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} f(s, v(s)) ds \\
&\quad - a \int_0^\xi \frac{[t(\xi-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-a\xi^{\alpha-1})} f(s, v(s)) ds \\
&= -j^\alpha f(t, v(t)) + \frac{t^{\alpha-1}}{1-a\xi^{\alpha-1}} j^\alpha f(1, v(1)) - \frac{at^{\alpha-1}}{1-a\xi^{\alpha-1}} j^\alpha f(\xi, v(\xi)) \\
&= -j^\alpha f(t, v(t)) + \frac{t^{\alpha-1}}{1-a\xi^{\alpha-1}} [j^\alpha f(1, v(1)) - aj^\alpha f(\xi, v(\xi))]
\end{aligned}$$

En utilisant la relation $D^\alpha t^{\alpha-m} = 0$, $m = 1, \dots, N$, et (2.19) on obtient :

$$\begin{aligned}
D^\alpha u(t) &= -D^\alpha j^\alpha f(t, v(t)) + D^\alpha \frac{t^{\alpha-1}}{1-a\xi^{\alpha-1}} [j^\alpha f(1, v(1)) - aj^\alpha f(\xi, v(\xi))] \\
&= -f(t, v(t))
\end{aligned}$$

Alors, $D^\alpha u(t) + f(t, v(t)) = 0$, de plus les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(1) = au(\xi)$ sont vérifiées.

De la même manière pour $v(t) = \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s)) ds$, on montre que v vérifie le système (3.1).

Ainsi, $(u, v) \in X \times Y$ est une solution de (3.1). \square

3.2.1 Le premier théorème de point fixe

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe sur un espace métrique complet.

Théorème 3.2.1 (Théorème du point fixe de Banach)

Soit (U, d) un espace métrique complet. Si $k \in [0, 1[$ et $A : X \rightarrow X$ une application tels que :

$$\forall u, v \in U, d(Au, Av) \leq kd(u, v)$$

Alors, A admet un unique point fixe u^* dans X .

L'hypothèse restrictive de l'existence de $k < 1$ implique l'unicité du point fixe. Le résultat n'est plus applicable quand il existe plus d'un point fixe. En effet, dans plusieurs problèmes, il arrive que l'équation sur laquelle on veut appliquer ce théorème admette plus d'une solution.

Théorème 3.2.2 (Théorème Ascoli-Arzelà)

Soient (X, d_X) un espace métrique compact et (Y, d_Y) un espace métrique. on se donne un ensemble F de $C^0(X, Y)$ tel que :

i) $\forall x \in X, \{f(x), f \in F\}$ est compact dans Y

ii) la famille F est équicontinue, i.e : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que, $\forall x, \acute{x} \in X, \forall f \in F$, on a, $d_X(x, \acute{x}) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\acute{x})) \leq \varepsilon$

Alors, \overline{F} est compact dans $C^0(X, Y)$

Lemme 3.2.2 (L'alternative non linéaire de Leray-Schauder)

Soit E un espace de Banach avec $C \subseteq E$ fermé et convexe et U un sous ensemble relativement ouvert de C avec $0 \in U$, l'opérateur $T : \overline{U} \longrightarrow C$ est continue et compact. Alors :

ou bien (a) l'application T admet un point fixe dans \overline{U} ,

sinon (b) Il existe $u \in \partial U$ et $\lambda \in]0, 1[$. avec, $u = \lambda T u$.

Définition 3.2.1 Soit $T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ un opérateur défini par :

$$\begin{aligned} T(u, v)(t) &= \left(\int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s)) ds, \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s)) ds \right) \\ &= : (T_1 v(t), T_2 u(t)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

Lemme 3.2.3 Si $f(t, v)$ et $g(t, u)$ sont continues de $[0, 1] \times [0, \infty)$ vers $[0, \infty)$, alors $T : P \longrightarrow P$ défini par (3.12) est complètement continue.

Preuve. Soit $(u, v) \in P$, si les fonctions $G(t, s)$, f et g , sont continues et non-négatives Alors, $T : P \longrightarrow P$ est continues. Montrons que :

i) $T(\Omega)$ est uniformément borné

soit $\Omega \subset P$ une partie bornée, c'est-à-dire il existe une constante positive $h > 0$ telle que $\|(u, v)\| \leq h$ pour tout $(u, v) \in P$

et soit

$$M = \max \{|f(t, v(t))| + 1 : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq v \leq h\}$$

$$N = \max \{|g(t, u(t))| + 1 : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq h\}$$

alors on a :

$$\begin{aligned}
 |T_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s)) ds \right| \leq M \int_0^1 G_1(s, s) ds \\
 |T_2 u(t)| &= \left| \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s)) ds \right| \leq N \int_0^1 G_2(s, s) ds
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \|T(u, v)\| &= \max \{ \|T_1 v\|, \|T_2 u\| \} \\
 &= \max \left\{ \max_{t \in [0,1]} |T_1 v(t)|, \max_{t \in [0,1]} |T_2 u(t)| \right\} \\
 &\leq \max \left\{ M \int_0^1 G_1(s, s) ds, N \int_0^1 G_2(s, s) ds \right\}
 \end{aligned}$$

$T(\Omega)$ est uniformément borné.

ii) $T(\Omega)$ equicontinue :

Si $G_1(t, s)$ est continue en $[0, 1] \times [0, 1]$, on a, $G_1(t, s)$ est uniformément continue en $[0, 1] \times [0, 1]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (u, v) \in P, \text{ tel que : } t_1, t_2 \in [0, 1], \text{ et } |t_2 - t_1| \leq \eta,$$

$$\implies \delta(T(u, v)(t_2), T(u, v)(t_1)) \leq \varepsilon \quad (\delta \text{ la distance euclidienne en } \mathbb{R}^2)$$

Pour $s \in [0, 1]$ fixe on a :

$$|G_1(t_1, s) - G_1(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ et } |G_2(t_1, s) - G_2(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{N} \tag{3.14}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 |T_1 v(t_2) - T_1 v(t_1)| &= \left| \int_0^1 G_1(t_2, s) f(s, v(s)) ds - \int_0^1 G_1(t_1, s) f(s, v(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_0^1 (G_1(t_2, s) - G_1(t_1, s)) f(s, v(s)) ds \right| \\
 &\leq M \int_0^1 |G_1(t_2, s) - G_1(t_1, s)| ds < \varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

de la même manière on a :

$$|T_2u(t_2) - T_2u(t_1)| \leq N \int_0^1 |G_2(t_2, s) - G_2(t_1, s)| ds < \varepsilon \quad (3.16)$$

donc,

$$\begin{aligned} \delta(T(u, v)(t_2), T(u, v)(t_1)) &= \sqrt{(T_1v(t_2) - T_1v(t_1))^2 + (T_2u(t_2) - T_2u(t_1))^2} \\ &\leq \sqrt{2}\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, $T(\Omega)$ est équicontinue $\implies T(P)$ est équicontinue.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, on a : $T : P \longrightarrow P$ est complètement continue. \square

Théorème 3.2.3 Si $f(t, v)$ et $g(t, u)$ sont continues de $[0, 1] \times [0, \infty)$ vers $[0, \infty)$, et ils existent deux fonctions positives $m(t)$, $n(t)$ qui vérifient :

$$(H_1) \quad |f(t, v_2) - f(t, v_1)| \leq m(t) |v_2 - v_1|, \text{ pour } t \in [0, 1], v_2, v_1 \in [0, \infty)$$

$$(H_2) \quad |g(t, u_2) - g(t, u_1)| \leq n(t) |u_2 - u_1|, \text{ pour } t \in [0, 1], u_2, u_1 \in [0, \infty)$$

Alors, le système (3.1) admet un point fixe unique si :

$$\rho = \int_0^1 G_1(s, s) m(s) ds < 1, \quad \theta = \int_0^1 G_2(s, s) n(s) ds < 1 \quad (3.17)$$

Preuve. Pour tout $(u, v) \in P$, si les fonctions $G(t, s)$, $f(t, v)$ et $g(t, u)$ sont non-négatives, on a $T(u, v) \in P$.

$$\begin{aligned} \|T_1v_2 - T_1v_1\| &= \max_{t \in [0, 1]} |T_1v_2(t) - T_1v_1(t)| \\ &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 G_1(t, s) [f(s, v_2(s)) - f(s, v_1(s))] ds \right| \\ &\leq \int_0^1 G_1(s, s) m(s) \|v_2 - v_1\| ds \quad (\text{d'après } (H_1)) \\ &\leq \rho \|v_2 - v_1\| \end{aligned}$$

De la même manière pour,

$$\|T_2u_2 - T_2u_1\| \leq \theta \|u_2 - u_1\|$$

d'où,

$$\|T(u_2, v_2) - T(u_1, v_1)\| \leq \max(\rho, \theta) \|(u_2, v_2) - (u_1, v_1)\|$$

d'après le lemme (3.2.3) on a : T est complètement continue dans P . Par le théorème du point fixe de Banach, le système (3.1) admet une solution unique. \square

3.3 L'existence de la solution du système

Théorème 3.3.1 Si $f(t, v)$ et $g(t, u)$ sont continues de $[0, 1] \times [0, \infty)$ vers $[0, \infty)$ qui vérifient :

$$(H_3) |f(t, v(t))| \leq a_1(t) + a_2(t) |v(t)|,$$

$$(H_4) |g(t, u(t))| \leq b_1(t) + b_2(t) |u(t)|,$$

$$(H_5) A_1 = \int_0^1 G_1(s, s) a_2(s) ds < 1, 0 < B_1 = \int_0^1 G_1(s, s) a_1(s) ds < \infty,$$

$$(H_6) A_2 = \int_0^1 G_2(s, s) b_2(s) ds < 1, 0 < B_2 = \int_0^1 G_2(s, s) b_1(s) ds < \infty.$$

Alors, le système (3.1) admet au moins une solution positive (u, v) dans

$$C = \left\{ (u, v) \in P \setminus \|(u, v)\| < \min \left(\frac{B_1}{1 - A_1}, \frac{B_2}{1 - A_2} \right) \right\} \quad (3.18)$$

Preuve. Soit $C = \{(u, v) \in P : \|(u, v)\| < r\}$ pour $r = \min \left(\frac{B_1}{1 - A_1}, \frac{B_2}{1 - A_2} \right)$

On définit l'opérateur $T : C \rightarrow P$ par (3.12).

soit $(u, v) \in C$ tel que $\|(u, v)\| < r$ alors,

$$\begin{aligned} \|T_1 v\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 G_1(s, s) [a_1(s) + a_2(s) |v(s)|] ds \\ &\leq \int_0^1 G_1(s, s) a_1(s) ds + \int_0^1 G_1(s, s) a_2(s) \|v\| ds \\ &= B_1 + A_1 \|v\| \leq r \end{aligned}$$

De la même manière pour, $\|T_2 u\| \leq r$, alors, $\|T(u, v)\| \leq r$ c'est-à-dire $T(u, v) \subseteq \overline{C}$ d'après le lemme (3.2.3) $T : \overline{C} \rightarrow \overline{C}$ est complètement continue.

On considère, le problème aux valeurs propres suivant :

$$(u, v) = \lambda T(u, v), \quad \lambda \in (0, 1) \quad (3.19)$$

Comme (u, v) est une solution de (3.19) pour $\lambda \in (0, 1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|\lambda T_1 v\| \\ &= \lambda \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s)) ds \right| \\ &< \int_0^1 G_1(s, s) [a_1(s) + a_2(s) |v(s)|] ds \\ &= \int_0^1 G_1(s, s) a_1(s) ds + \int_0^1 G_1(s, s) a_2(s) ds \|v\| \\ &= B_1 + A_1 \|v\| < r \end{aligned}$$

De la même manière pour, $\|v\| = \|\lambda T_2 u\| < r$, si $\|(u, v)\| < r$, ce qui implique que $(u, v) \notin \partial C$
Donc, T admet un point fixe dans \overline{C} . □

Chapitre 4

Application

4.1 Système couplé d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires

Soit le système d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires définie comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, v(t), D^\mu v(t)), & 0 < t < 1 \\ D^\beta v(t) = g(t, u(t), D^\nu u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = v(1) = v(0) = 0 \end{cases} \quad ((4.1)_{(\alpha, \beta)})$$

Où D^α , D^β sont représentés les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α et β respectivement.

et $1 < \alpha, \beta < 2$, $\alpha - \nu \geq 1$, $\beta - \mu \geq 1$; $\nu, \mu > 0$

$f, g : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

$(u, v) \in X \times Y$ est une solution du système $(4.1)_{(\alpha, \beta)}$

Soit les espaces X et Y ,

$$X = \{u : u \in C(I) \text{ et } D^\nu u \in C(I)\}$$

$$Y = \{v : v \in C(I) \text{ et } D^\mu v \in C(I)\}$$

et la norme associée à X et Y i.e.

$$\|u\|_X = \max_{t \in I} |u(t)| + \max_{t \in I} |D^\nu u(t)|$$

$$\|v\|_Y = \max_{t \in I} |v(t)| + \max_{t \in I} |D^\mu v(t)|$$

Où $C(I)$ est l'espace des fonctions continues dans I , muni de la norme du maximum.

Lemme 4.1.1 $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace Banach.

Preuve. Soit $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans l'espace $(X, \|\cdot\|_X)$

Alors, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{D^\nu u_n\}_{n=1}^\infty$ sont des suites de Cauchy dans $C(I)$.

Comme $C(I)$ est un espace complet, alors, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers v et $\{D^\nu u_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers w .

Montrons que : $D^\nu v = w$

$$\begin{aligned} |j^\nu D^\nu u_n(t) - j^\nu w(t)| &= \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} D^\nu u_n(s) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} w(s) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} [D^\nu u_n(s) - w(s)] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} |D^\nu u_n(s) - w(s)| ds \end{aligned}$$

$$|j^\nu D^\nu u_n(t) - j^\nu w(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \max_{t \in I} |D^\nu u_n(t) - w(t)|$$

Puisque $\{D^\nu u_n(t)\}_{n=0}^\infty$ converge vers $w(t)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} j^\nu D^\nu u_n(t) = j^\nu w(t), t \in I$

D'après la relation (2.19) et (2.17), on obtient,

$$v(t) = j^\nu w(t) \text{ implique que } D^\nu v = w$$

Ainsi, $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach.

De la même manière on démontre que l'espace $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est un Banach.

Il clear que, $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ est un Banach tel que, $\|(u, v)\|_{X \times Y} = \max\{\|u\|_X, \|v\|_Y\}$ \square

Lemme 4.1.2 Si $f \in C(I)$ et $1 < \alpha < 2$, alors la solution du problème

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, v(t), D^\mu v(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

est représentée par :

$$u(t) = \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \quad (4.3)$$

où

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1} - [t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & s \leq t \\ \frac{-[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t \leq s \end{cases} \quad (4.4)$$

Preuve. En utilisant la relation (2.16), on obtient,

$$\begin{aligned}
 j^\alpha D^\alpha u(t) &= u(t) - c_1 t^{\alpha-1} - c_2 t^{\alpha-2} \\
 j^\alpha f(t, v(t), D^\mu v(t)) &= u(t) - c_1 t^{\alpha-1} - c_2 t^{\alpha-2} \\
 u(t) &= j^\alpha f(t, v(t), D^\mu v(t)) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} \\
 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}
 \end{aligned}$$

tenant compte des conditions aux limites on aura, $c_2 = 0$,

$$c_1 = - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds - \int_0^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\
 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1} - [t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\
 &\quad - \int_t^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds
 \end{aligned}$$

d'où on en déduit, le relation (4.3). □

Remarque 4.1.1 De la même manière on représente la solution du problème

$$\begin{cases} D^\beta v(t) = g(t, u(t), D^\nu u(t)), & 0 < t < 1 \\ v(1) = v(0) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

par :

$$v(t) = \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s), D^\nu u(s)) ds \tag{4.6}$$

où

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\beta-1} - [t(1-s)]^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & s \leq t \\ \frac{-[t(1-s)]^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & t \leq s \end{cases} \tag{4.7}$$

Lemme 4.1.3 *Supposons que $f, g : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors $(u, v) \in X \times Y$ est une solution du système $(4.1)_{(\alpha, \beta)}$ si et seulement si $(u, v) \in X \times Y$ est une solution du système :*

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\ v(t) = \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s), D^\nu u(s)) ds \end{cases} \quad (4.8)$$

Preuve. Soit $(u, v) \in X \times Y$ une solution du système $(4.1)_{(\alpha, \beta)}$.

On applique la méthode de la preuve du lemme (4.1.2) alors, $(u, v) \in X \times Y$ est une solution de (4.8),

Inversement, soit $(u, v) \in X \times Y$ une solution du système (4.8),

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\ &= j^\alpha f(t, v(t), D^\mu v(t)) - t^{\alpha-1} j^\alpha f(1, v(1), D^\mu v(1)) \end{aligned}$$

d'après la relation (2.13) i.e. $D^\alpha t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}$, $\lambda > -1$ et $D^\alpha t^{\alpha-m} = 0$, $m = 1, \dots, N$, on obtient,

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t) &= D^\alpha j^\alpha f(t, v(t), D^\mu v(t)) - D^\alpha t^{\alpha-1} j^\alpha f(1, v(1), D^\mu v(1)) \\ &= f(t, v(t), D^\mu v(t)) \end{aligned}$$

avec $u(0) = u(1) = 0$

Ainsi que, $D^\beta v(t) = g(t, u(t), D^\nu u(t))$ avec $v(0) = v(1) = 0$. □

Définition 4.1.1 *Soit l'opérateur $T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ défini par :*

$$\begin{aligned} T(u, v)(t) &: = \left(\int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds ; \int_0^1 G_2(t, s) g(s, u(s), D^\nu u(s)) ds \right) \\ &: = (T_1 v(t), T_2 u(t)) \end{aligned}$$

4.1.1 Le deuxième théorème du point fixe

Le théorème de point fixe de Schauder de nature topologique a affirmé qu'une application complètement continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 4.1.1 (*Théorème du point fixe de Schauder*)

Soit E un espace de Banach, $R > 0$, $B_R = \{x \in E, \|x\| \leq R\}$ et f une application compacte de B_R dans B_R (c'est-à-dire f continue et $\{f(x), x \in B_R\}$ relativement compacte dans E). Alors f admet un point fixe i.e, qu'il existe $x \in B_R$ tel que, $f(x) = x$.

4.1.2 L'existence de la solution

Théorème 4.1.2 *Si $f, g : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H_1) : *Il existe deux fonctions non-négatives $a(t), b(t) \in L[a, b]$ telles que,*

$$|f(t, X, Y)| \leq a(t) + c_1 |X|^{p_1} + c_2 |Y|^{p_2} \text{ et } |g(t, X, Y)| \leq b(t) + d_1 |X|^{q_1} + d_2 |Y|^{q_2}$$

tel que, $c_i, d_i \geq 0, 0 < p_i, q_i < 1$ pour $i = 1, 2$

$$(H_2) : |f(t, X, Y)| \leq c_1 |X|^{p_1} + c_2 |Y|^{p_2} \text{ et } |g(t, X, Y)| \leq d_1 |X|^{q_1} + d_2 |Y|^{q_2}$$

avec, $c_i, d_i > 0, p_i, q_i > 0$, pour $i = 1, 2$

Alors, le système (4.1)_(\alpha, \beta) admet une solution.

Preuve. On définit, $U = \{(u, v) : (u, v) \in X \times Y, \|(u, v)\| \leq R\}, R > 0$

$$\text{d'où } R \geq \max \left\{ 3K, 3L, (3Ac_1)^{\frac{1}{1-p_1}}, (3Ac_2)^{\frac{1}{1-p_2}}, (3Bd_1)^{\frac{1}{1-q_1}}, (3Bd_2)^{\frac{1}{1-q_2}} \right\}$$

U est un espace de Banach dans $X \times Y$ i.e, $U \subset X \times Y$ est borné, fermé et convexe.

soit l'opérateur $T : U \rightarrow U$ pour tout $(u, v) \in U$

i) on va démontrer que T est borné, c'est-à-dire $\|T(u, v)\| \leq R, \forall (u, v) \in U$

avec,

$$\begin{aligned} \|T(u, v)\| &= \max \{ \|T_1 v\|, \|T_2 u\| \} \\ &= \max \left\{ \max_{t \in I} |T_1 v(t)| + \max_{t \in I} |D^\mu T_1 v(t)|, \max_{t \in I} |T_2 u(t)| + \max_{t \in I} |D^\nu T_2 u(t)| \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |T_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 G_1(t,s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^1 |G_1(t,s)| |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \\
 &\leq \int_0^1 |G(t,s)| (a(s) + c_1 |v(s)|^{p_1} + c_2 |D^\mu v(s)|^{p_2}) ds \quad (\text{d'après } (H_1)) \\
 &\leq \int_0^1 |G(t,s)| (a(s) + c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) ds \quad (\|u\| \leq R) \\
 &\leq \int_0^1 |G(t,s) a(s)| ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \int_0^1 |G(t,s)| ds \\
 &= \int_0^1 |G(t,s) a(s)| ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - t^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right\} \\
 &= \int_0^1 |G(t,s) a(s)| ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \left\{ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right\} \\
 &= \int_0^1 |G(t,s) a(s)| ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t^\alpha - t^{\alpha-1}) \\
 |T_1 v(t)| &\leq \int_0^1 |G(t,s) a(s)| ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}
 \end{aligned}$$

On applique la relation (2.18) et (2.13) i.e. $D^\nu t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} t^{\alpha-\nu-1}$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \\
 &\quad + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} (a(s) + c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) ds \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} (a(s) + c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha - \nu)} \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s) ds \right. \\
 &\quad \left. + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - \nu)} \left\{ t^{\alpha-\nu} \left[\int_0^t (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \int_0^t (1-s)^{\alpha-\nu-1} ds \right] \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s) ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \right\} \quad (0 < t < 1) \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha - \nu)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) [1 + (1-s)^\nu] ds \right. \\
 &\quad \left. + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} [1 + (1-s)^\nu] ds \right\} \quad (0 \leq (1-s)^\nu \leq 1) \\
 |D^\nu T_1 v(t)| &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha - \nu)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} ds \right\} \\
 &= \frac{2}{\Gamma(\alpha - \nu)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \frac{1}{\alpha - \nu} \right\} \\
 &= \frac{2}{\Gamma(\alpha - \nu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds + \frac{2(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha - \nu + 1)}
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \|T_1 v(t)\| &= \max_{t \in I} |T_1 v(t)| + \max_{t \in I} |D^\nu T_1 v(t)| \\
 &\leq \max_{t \in I} \left(\int_0^1 |G_1(t, s) a(s)| ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \\
 &\quad + \max_{t \in I} \left(\frac{2}{\Gamma(\alpha - \nu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds + \frac{2(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha - \nu + 1)} \right) \\
 &\leq \max_{t \in I} \int_0^1 |G_1(t, s) a(s)| ds + \frac{2}{\Gamma(\alpha - \nu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds \\
 &\quad + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_1}) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha - \nu + 1)} \right)
 \end{aligned}$$

On pose que,

$$A = \frac{\Gamma(\alpha - \nu + 1) + 2\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha - \nu + 1)}$$

$$K = \max_{t \in I} \int_0^1 |G_1(t, s) a(s)| ds + \frac{2}{\Gamma(\alpha - \nu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s) ds$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|T_1 v(t)\| &\leq K + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) A \leq R \\ &\leq \max \left\{ 3K, (3Ac_1)^{\frac{1}{1-p_1}}, (3Ac_2)^{\frac{1}{1-p_2}} \right\} \leq R \end{aligned}$$

De la même manière on va démontrer que :

$$\|T_2 u(t)\| \leq \max \left\{ 3L, (3Bd_1)^{\frac{1}{1-q_1}}, (3Bd_2)^{\frac{1}{1-q_2}} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Gamma(\beta - \mu + 1) + 2\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\beta - \mu + 1)} \\ L &= \max_{t \in I} \int_0^1 |G_2(t, s) b(s)| ds + \frac{2}{\Gamma(\beta - \mu)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-\mu-1} b(s) ds \end{aligned}$$

On déduit :

$$R \geq \max \left\{ 3A, 3L, (3Ac_1)^{\frac{1}{1-p_1}}, (3Ac_2)^{\frac{1}{1-p_2}}, (3Bd_1)^{\frac{1}{1-q_1}}, (3Bd_2)^{\frac{1}{1-q_2}} \right\}$$

D'où, enfin :

$$\|T(u, v)\|_{X \times Y} \leq R$$

C'est-à-dire, T est borné dans $X \times Y$ ($T(U) \subseteq U : \forall (u, v) \in U, T(u, v) \in U$)

Soit (H_2) est satisfaite :

$$\begin{aligned} |T_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |G_1(t, s)| (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) ds \\ &= (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds - t^{\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \right\} \\ &\leq \frac{(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |D^\nu T_1 v(t)| &= \left| j^{\alpha-\nu} f(t, v(t), D^\mu v(t)) - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} t^{\alpha-\nu-1} j^\alpha f(1, v(1), D^\mu v(1)) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \right\} \\
 &\leq \frac{(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1-\nu} (1-s)^\nu ds \right\} \\
 &\leq \frac{(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} [1 + (1-s)^\nu] ds \right\} \\
 &\leq \frac{(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left\{ 2 \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} ds \right\} \quad (\leq 0(1-s)^\nu \leq 1) \\
 &\leq \frac{2(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\|T_1 v(t)\| \leq (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}) A \leq R, \quad A = \frac{\Gamma(\alpha-\nu+1) + 2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\nu+1)}$$

et

$$\|T_2 u(t)\| \leq (d_1 R^{q_1} + d_2 R^{q_2}) B \leq R, \quad B = \frac{\Gamma(\beta-\mu+1) + 2\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-\mu+1)}$$

On suppose que,

$$0 < R \leq \min \left\{ \left(\frac{1}{2Ac_1} \right)^{\frac{1}{p_1-1}}, \left(\frac{1}{2Ac_2} \right)^{\frac{1}{p_2-1}}, \left(\frac{1}{2Bd_1} \right)^{\frac{1}{q_1-1}}, \left(\frac{1}{2Bd_2} \right)^{\frac{1}{q_2-1}} \right\}$$

ii) Montrons que : $T(U)$ equicontinue.i.e :

$$\forall \epsilon > 0; \delta(\epsilon) > 0, \quad |\tau - t| < \delta \implies |T(u, v)(\tau) - T(u, v)(t)| < \epsilon$$

Les foncions $G_1(t, s)$, $G_2(t, s)$, f et g sont continues, alors T est continue.

On pose

$$K = \max_{t \in I} |f(t, v(t), D^\mu v(t))|, \quad L = \max_{t \in I} |g(t, u(t), D^\nu u(t))|$$

Pour tout $(u, v) \in U$. Soit $t, \tau \in I$, tel que $t < \tau$,

Alors on a,

$$\begin{aligned} |T_1 v(\tau) - T_2 v(t)| &= \left| \int_0^1 [G_1(\tau, s) - G_1(t, s)] f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |G_1(\tau, s) - G_1(t, s)| |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \\ &\leq K \int_0^t |G_1(\tau, s) - G_1(t, s)| ds + \int_t^\tau |G_1(\tau, s) - G_1(t, s)| ds \\ &\quad + \int_\tau^1 |G_1(\tau, s) - G_1(t, s)| ds \\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t ((\tau - s)^{\alpha-1} - (t - s)^{\alpha-1} + \tau^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1}) \right. \\ &\quad + \int_t^\tau ((\tau - s)^{\alpha-1} + \tau^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1}) ds \\ &\quad \left. + \int_\tau^1 (\tau^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1}) ds \right] \\ &= \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left[- \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ds + \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} ds + \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) ds \right] \\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{\tau^\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) \right] \\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha + 1)} (\tau^\alpha - t^\alpha + \tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |D^\nu T_1 v(\tau) - D^\nu T_1 v(t)| &= \left| j^{\alpha-\nu} f(\tau, v(\tau), D^\mu v(\tau)) - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} \tau^{\alpha-\nu-1} j^\alpha f(1, v(1), D^\mu v(1)) \right. \\
 &\quad \left. - j^{\alpha-\nu} f(t, v(t), D^\mu v(t)) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} t^{\alpha-\nu-1} j^\alpha f(1, v(1), D^\mu v(1)) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} (\tau^{\alpha-\nu-1} - t^{\alpha-\nu-1}) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left[\left| \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-\nu-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right| \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K}{\Gamma(\alpha-\nu)} (\tau^{\alpha-\nu-1} - t^{\alpha-\nu-1}) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left[\left| \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-\nu-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_0^\tau (t-s)^{\alpha-\nu-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_0^\tau (t-s)^{\alpha-\nu-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \right| \right] \\
 &\quad + \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha-\nu)} (\tau^{\alpha-\nu-1} - t^{\alpha-\nu-1}) \\
 &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left[\int_0^\tau ((\tau-s)^{\alpha-\nu-1} - (t-s)^{\alpha-\nu-1}) ds + \int_t^\tau (t-s)^{\alpha-\nu-1} ds \right] \\
 &\quad + \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha-\nu)} (\tau^{\alpha-\nu-1} - t^{\alpha-\nu-1}) \\
 &= \frac{K}{\Gamma(\alpha-\nu+1)} (\tau^{\alpha-\nu} - t^{\alpha-\nu}) + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha-\nu)} (\tau^{\alpha-\nu-1} - t^{\alpha-\nu-1})
 \end{aligned}$$

De la même manière on va démontrer que,

$$|T_2u(\tau) - T_2u(t)| \leq \frac{L}{\Gamma(\beta + 1)} (\tau^{\beta-1} - t^{\beta-1} + \tau^\beta - t^\beta)$$

$$|D^\mu T_2u(\tau) - D^\mu T_2u(t)| \leq \frac{L}{\Gamma(\beta - \mu + 1)} (\tau^{\beta-\mu} - t^{\beta-\mu}) + \frac{L}{\beta\Gamma(\beta - \mu)} (\tau^{\beta-\mu-1} - t^{\beta-\mu-1})$$

Comme les fonctions $t^\alpha, t^{\alpha-1}, t^{\alpha-\nu}, t^{\alpha-\nu-1}, t^\beta, t^{\beta-1}, t^{\beta-\mu}$ et $t^{\beta-\mu-1}$ sont uniformément continues dans I c'est à dire,

$$|\tau - t| < \delta \implies |\tau^\alpha - t^\alpha| < \frac{\Gamma(\alpha + 1)\epsilon}{8K}, |\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}| < \frac{\Gamma(\alpha + 1)\epsilon}{8K},$$

$$|\tau^{\alpha-\nu} - t^{\alpha-\nu}| < \frac{\Gamma(\alpha - \nu + 1)\epsilon}{8K}, |\tau^{\alpha-\nu-1} - t^{\alpha-\nu-1}| < \frac{\alpha\Gamma(\alpha - \nu)\epsilon}{8K},$$

$$|\tau^\beta - t^\beta| < \frac{\Gamma(\beta + 1)\epsilon}{8L}, |\tau^{\beta-1} - t^{\beta-1}| < \frac{\Gamma(\beta + 1)\epsilon}{8L},$$

$$|\tau^{\beta-\mu} - t^{\beta-\mu}| < \frac{\Gamma(\beta - \mu + 1)\epsilon}{8L}, |\tau^{\beta-\mu-1} - t^{\beta-\mu-1}| < \frac{\beta\Gamma(\beta - \mu)\epsilon}{8L}$$

alors,

$$|T_1v(\tau) - T_1v(t)| + |T_2u(\tau) - T_2u(t)| + |D^\nu T_1v(\tau) - D^\nu T_1v(t)| + |D^\mu T_2u(\tau) - D^\mu T_2u(t)| < \epsilon$$

Donc la famille $T(U)$ est equicontinue.

D'après le théorème d'Ascoli-arzela on obtient, $T : U \longrightarrow U$ est complètement continue.

Ainsi, d'après le théorème de Schauder, le système(4.1) $_{(\alpha,\beta)}$ admet une solution. \square

4.1.3 La stabilité du système par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire

Définition 4.1.2 On dit que le système (4, 1) $_{(\alpha,\beta)}$ est stable par rapport à l'ordre de dérivation si $\forall \epsilon > 0, \exists k > 0,$

$$|\alpha - \bar{\alpha}| + |\beta - \bar{\beta}| < \epsilon$$

tel que implique :

$$|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}| < k\epsilon$$

où (u, v) et (\bar{u}, \bar{v}) sont respectivement les solutions du système (4, 1) $_{(\alpha,\beta)}$ et (4, 1) $_{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}$.

Lemme 4.1.4 ([18]) (*l'inégalité de type Gronwall*)

Soient α, ϵ_1 et $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_+$ ($0 < t < 1$). Si $\delta : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que :

$$|\delta(x)| \leq \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\delta(t)| dt, \forall x \in [0, T]$$

Alors :

$$|\delta(x)| \leq \epsilon_1 E_\alpha(\epsilon_2 T^\alpha) \text{ pour } x \in [0, T]$$

Théorème 4.1.3 *Si f et g sont deux fonctions continues dans $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R} qui vérifient :*

(H_3) : *Il existe K_f, K_g, L_f et L_g des constantes positives telles que :*

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| &\leq K_f |x_1 - x_2| + L_f |y_1 - y_2| \\ |g(t, x'_1, y'_1) - g(t, x'_2, y'_2)| &\leq K_g |x'_1 - x'_2| + L_g |y'_1 - y'_2| \end{aligned}$$

(H_4) : *Il existe M, N deux constantes positives telles que :*

$$M = \max_{t \in I} |f(t, v(t), D^\mu v(t))|, \quad N = \max_{t \in I} |g(t, u(t), D^\nu u(t))|$$

(H_5) : *On suppose que : $\alpha \leq \beta, \mu \leq \nu$ alors, $\alpha - \nu \leq \beta - \mu, s \leq t$.*

(H_6) : *Il existe $\Delta = \max(K_f, L_f, K_g, L_g) \max\{\psi_{(\alpha, \nu)}, \psi_{(\beta, \mu)}\} < 1$.*

$$\psi_{(\alpha, \nu)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - \nu + 1)}, \quad \psi_{(\beta, \mu)} = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta - \mu + 1)}$$

Alors le système $(4, 1)_{(\alpha, \beta)}$ est stable.

Preuve. On va applique le lemme de Gronwall pour la fonction δ est définie comme suit,

$$\begin{aligned} |\delta(t)| \quad : \quad &= |u(t) - \bar{u}(t)| + |v(t) - \bar{v}(t)| + \\ &|D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t)| + |D^\mu v(t) - D^\mu \bar{v}(t)| \end{aligned}$$

puisque les solutions u, \bar{u}, v et \bar{v} sont vérifiées le système $(4, 1)_{(\alpha, \beta)}$. On a,

$$\begin{aligned}
 u(t) - \bar{u}(t) &= \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds - \int_0^1 \bar{G}_1(t, s) f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds \\
 &= \int_0^1 G_1(t, s) f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds - \int_0^1 G_1(t, s) f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds \\
 &\quad + \int_0^1 G_1(t, s) f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds - \int_0^1 \bar{G}(t, s) f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds \\
 &= \int_0^1 G_1(t, s) [f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))] ds \\
 &\quad \int_0^1 [G_1(t, s) - \bar{G}_1(s, t)] f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds
 \end{aligned}$$

Par la définition de fonction Green (4,3) alors,

$$\begin{aligned}
 u(t) - \bar{u}(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))] ds \\
 &\quad - \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))] ds \\
 &\quad + \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right] f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\
 &\quad - \int_0^1 \left[\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right] f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 |u(t) - \bar{u}(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds \\
 &\quad + \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \\
 &\quad + \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| |f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds \\
 &= I_1 + I_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| \\
 &\quad \text{d'après } (H_3), \\
 I_1 &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (K_f |v(s) - \bar{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) ds \\
 &\quad \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (K_f |v(s) - \bar{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) ds
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| |f(s, v(s), D^\mu v(s))| ds \\
 &\quad + \int_0^1 \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| |f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds; \quad (\text{d'après } (H_2)) \\
 &\leq M \left\{ \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| ds + \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| ds \right\}
 \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis on obtient, pour tout $1 < \alpha, \bar{\alpha} < 2$ on a,

$$\|\varphi(\alpha)(s) - \varphi(\bar{\alpha})(s)\|_1 \leq \sup_{1 < \alpha < 2} \|\dot{\varphi}(\alpha)(s)\|_1 \cdot |\alpha - \bar{\alpha}|$$

tel que,

$$\varphi(\alpha)(s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Alors,

$$\varphi(\alpha)(s) = \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \rightarrow \varphi(\alpha)(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

On fixe $x > 0$, on aura :

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}(\alpha)(x) &= \frac{x^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \ln x - \psi(\alpha) \Gamma(\alpha) x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)^2} \\
 &= \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\psi(\alpha) x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
 \dot{\varphi}(\alpha)(s) &= \frac{(t(1-s))^{\alpha-1} \ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\psi(\alpha) (t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \|\dot{\varphi}(\alpha)(s)\|_1 &= \int_0^1 |\dot{\varphi}(\alpha)(s)| ds \\
 &= \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1} \ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| ds \\
 &= \int_0^1 \left\{ -\frac{(t(1-s))^{\alpha-1} \ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-k_1 + k_2)
 \end{aligned}$$

Ensuite, on intègre par partie :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1} \ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} ds \\
 &= \left[-\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^\alpha}{\alpha} \ln(t(1-s)) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\alpha} ds \\
 &= -\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\alpha} (1-s) \ln(t(1-s)) + \frac{t^{\alpha-1} \ln t}{\alpha} - t^{\alpha-1} \left[-\frac{(1-s)^\alpha}{\alpha^2} \right]_0^1 \\
 &= -\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\alpha} (1-s) \ln(t(1-s)) + \frac{t^{\alpha-1} \ln t}{\alpha} - \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2} \\
 &= 0 + \frac{t^{\alpha-1} \ln t}{\alpha} - \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2} \\
 &= \frac{t^{\alpha-1} \ln t}{\alpha} - \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2} \\
 k_2 &= \psi(\alpha) \int_0^1 (t(1-s))^{\alpha-1} ds = \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \|\dot{\varphi}(\alpha)(s)\|_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ -\frac{t^{\alpha-1} \ln t}{\alpha} + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2} + \frac{\psi(\alpha)t^{\alpha-1}}{\alpha} \right\}, 0 < t < 1 \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \psi(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \right\}, 1 < \alpha < 2 \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(3)} \left\{ \psi(2) + \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{1}{2\Gamma(3)} = c_1
 \end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis nous donne que :

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(\alpha)(s) - \varphi(\bar{\alpha})(s)\|_1 &= \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| ds \\
 &\leq c_1 |\alpha - \bar{\alpha}|
 \end{aligned}$$

On calcule en suite,

$$\int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| ds = \int_0^t \left| \frac{(t(1-\frac{s}{t}))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-\frac{s}{t}))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| ds$$

on pose $x = \frac{s}{t}$

Alors, de la même manière pour le théorème des accroissements finis on démontrer que :

$$\int_0^1 \left| \frac{(t(1-x))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-x))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\bar{\alpha})} \right| ds \leq c_2 |\alpha - \bar{\alpha}|$$

On a,

$$I_2 \leq M \{c_1 + c_2\} |\bar{\alpha} - \alpha| = K |\alpha - \bar{\alpha}|$$

$$\begin{aligned} |u(t) - \bar{u}(t)| &\leq K |\alpha - \bar{\alpha}| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (K_f |v(s) - \bar{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) ds \\ &+ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (K_f |v(s) - \bar{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) ds \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} D^\nu u(t) &= D^\nu (j^\alpha f(t, v(t), D^\mu v(t)) - t^{\alpha-1} j^\alpha f(1, v(1), D^\mu v(1))) \\ &= j^{\alpha-\nu} f(t, v(t), D^\mu v(t)) - j^\alpha f(1, v(1), D^\mu v(1)) D^\nu t^{\alpha-1} \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\ &\quad - t^{\alpha-\nu-1} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \\ &\quad - \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (1-s)^\nu f(s, v(s), D^\mu v(s)) ds \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))) ds \\
 &\quad + \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}-\nu)} \right] f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds \\
 &\quad - \left\{ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (1-s)^\nu (f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))) ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 \left[\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} - \frac{(t(1-s))^{\bar{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}-\nu)} \right] (1-s)^\nu f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s)) ds \right\}
 \end{aligned}$$

d'après (H_3) , (H_4) et $0 < (1-s)^\nu < 1$ on aura ;

$$\begin{aligned}
 |D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (|f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))|) ds \\
 &\quad + \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}-\nu)} \right| |f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds + \\
 &\quad \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (|f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))|) ds \\
 &\quad + \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} - \frac{(t(1-s))^{\bar{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}-\nu)} \right| |f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds \\
 |D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t)| &\leq K |\alpha - \bar{\alpha}| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} |f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} |f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \bar{v}(s), D^\mu \bar{v}(s))| ds \\
 &\leq K |\alpha - \bar{\alpha}| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (K_f |v(s) - \bar{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) ds \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (K_f |v(s) - \bar{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) ds
 \end{aligned}$$

De la même manière pour $|v(t) - \bar{v}(t)|$ et $|D^\mu v(t) - D^\mu \bar{v}(t)|$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 \max_{t \in I} \{ |u(t) - \bar{u}(t)| + |D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t)| \} &\leq K |\alpha - \bar{\alpha}| + \\
 \int_0^1 \left(\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \right) ds &\times \max(K_f, L_f) \max_{s \in I} (|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|)
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \right) \max(K_f, L_f) (|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) ds$$

et

$$\begin{aligned} & \max_{t \in I} \{|v(t) - \bar{v}(t)| + |D^\mu v(t) - D^\mu \bar{v}(t)|\} \leq L |\beta - \bar{\beta}| + \\ & \int_0^1 \left(\frac{(t(1-s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \frac{(t(1-s))^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)} \right) ds \times \max(K_g, L_g) \max_{s \in I} (|u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\nu u(s) - D^\nu \bar{u}(s)|) \\ & + \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \frac{(t-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)} \right) \max(K_g, L_g) (|u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\mu u(s) - D^\mu \bar{u}(s)|) ds \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} |\delta(t)| & \leq \max_{t \in I} \{|u(t) - \bar{u}(t)| + |D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t)|\} + \max_{t \in I} \{|v(t) - \bar{v}(t)| + |D^\mu v(t) - D^\mu \bar{v}(t)|\} \\ & \leq K |\alpha - \bar{\alpha}| + L |\beta - \bar{\beta}| + \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \right) \\ & \times \max(K_f, L_f, K_g, L_g) (|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)| + |u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\mu u(s) - D^\mu \bar{u}(s)|) ds \\ & + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)} \right) \max(K_f, L_f) \max(|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) + \\ & \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta-\mu+1)} \right) \max(K_g, L_g) \max(|u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\nu u(s) - D^\nu \bar{u}(s)|) \end{aligned}$$

On suppose que $\Lambda_{K,L} = \max(K_f, L_f, K_g, L_g)$ on obtient,

$$\begin{aligned} & \leq K |\alpha - \bar{\alpha}| + L |\beta - \bar{\beta}| + \Lambda_{K,L} \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \right) \\ & \times (|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)| + |u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\mu u(s) - D^\mu \bar{u}(s)|) ds \\ & + \Delta \{ \max(|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)|) + \max(|u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\nu u(s) - D^\nu \bar{u}(s)|) \} \end{aligned}$$

alors,

$$(1 - \Delta) \{ \max(|v(t) - \bar{v}(t)| + |D^\mu v(t) - D^\mu \bar{v}(t)|) + \max(|u(t) - \bar{u}(t)| + |D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t)|) \} \leq$$

$$\begin{aligned} & K |\alpha - \bar{\alpha}| + L |\beta - \bar{\beta}| + \Lambda_{K,L} \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \right) \\ & \times (|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)| + |u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\mu u(s) - D^\mu \bar{u}(s)|) ds \end{aligned}$$

$$|\delta(t)| \leq \max_{t \in I} (|v(t) - \bar{v}(t)| + |D^\mu v(t) - D^\mu \bar{v}(t)|) + \max_{t \in I} (|u(t) - \bar{u}(t)| + |D^\nu u(t) - D^\nu \bar{u}(t)|)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{K |\alpha - \bar{\alpha}|}{(1 - \Delta)} + \frac{L |\beta - \bar{\beta}|}{(1 - \Delta)} + \frac{\Lambda_{K,L}}{(1 - \Delta)} \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \right) \\ &\times (|v(s) - \bar{v}(s)| + |D^\mu v(s) - D^\mu \bar{v}(s)| + |u(s) - \bar{u}(s)| + |D^\mu u(s) - D^\mu \bar{u}(s)|) ds \end{aligned}$$

Donc,

$$|\delta(t)| \leq \frac{K |\alpha - \bar{\alpha}|}{(1 - \Delta)} + \frac{L |\beta - \bar{\beta}|}{(1 - \Delta)} + \frac{2\Lambda_{K,L}}{(1 - \Delta)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} |\delta(s)| ds$$

D'après le lemme 4.1.4 tel que,

$$\epsilon_1 = \frac{K |\alpha - \bar{\alpha}|}{(1 - \Delta)} + \frac{L |\beta - \bar{\beta}|}{(1 - \Delta)}, \quad \epsilon_2 = \frac{2\Lambda_{K,L}}{(1 - \Delta)}$$

D'où,

$$|\delta(t)| \leq \epsilon_1 E_\alpha(\epsilon_2)$$

Alors, le système $(4, 1)_{(\alpha, \beta)}$ est stable. □

Chapitre 5

Conclusion

Dans notre travail, on a étudié un système couplé d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

- Pour le système (3.1) avec conditions aux limites non nulles, on utilise le théorème du point fixe de Banach pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

- Ensuite, pour le système (4.1)_(α, β) avec conditions aux limites nulles, on utilise le théorème de point fixe de Schauder pour démontrer l'existence de la solution.

De plus, on obtient un résultat sur la stabilité de la solution par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire.

Bibliographie

- [1] **K. B. Oldam, J. Spanier**, The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).
- [2] **E. Zeidler**, Nonlinear functional analysis and its applications : Fixed-Point theorems, Springer-Verlag (1986).
- [3] **K. S. Miller, B. Ross**, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley and Sons. Inc (1993).
- [4] **I. Podlubny**, Fractional differential equations, Vol 197, Academic Press, (1999).
- [5] **D. G. Duffy**, Chapman and Hall, Green's functions with application, Crc, New York, (2001).
- [6] **R. P. Agarwal**, M. Meehan and D. O'Regan, Fixed point theory and application, Cambridge Univ. Press, (2001).
- [7] **K. Diethelm**, N. J. Ford, Multi-order fractional differential equation and their numerical solution, Appl. Math. Comput. (2004) 621-640.
- [8] **F. Mainardi**, Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity, Co. Pte. Ltd. Univ Bologna. Italy, (2005).
- [9] **J. D. Munkhamman**, Fractional calculus and the Taylor-Riemann series, (2005), 1-19.
- [10] **Z. Bai, H. Lü**, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. (2005) 495-505.
- [11] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo**, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).
- [12] **M. Gökçen**, Non integer order derivatives, Univ İzmir (2007).

-
- [13] **S. Das**, Functional fractional calculus for system identification and controls, Springer-Berlin Herdelberg (2008).
- [14] **X. Su**, Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, Appl. Math. Letters (2009), 64 – 69.
- [15] **J. Wang, H. Xiang, and Z. Liu**, Position solution to nonzero boundary values problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, Volume 2010, 1-12.
- [16] **M. Wellbeer**, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, (2010).
- [17] **R. Alikhan, M. Rehaman and J. Henderson**, Fractional differential equations, Vol 1, Number1(2011), 29-43.