

Projections positives,  
Processus d'approximation et  
Equations de diffusion.

Dirigé par : Dr. AMIAR Rachida.  
Présenté par : MANSOURI Bouzid.

Année universitaire 2009/2010

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Définitions et propriétés de base.</b>	<b>5</b>
1.1 Opérateurs linéaires positifs. . . . .	5
1.2 Espace de Hausdorff. . . . .	9
1.3 Opérateur fermé. . . . .	9
1.4 Continuité, convergence uniforme. . . . .	9
1.5 Espace de Banach réticulé. . . . .	10
1.6 Produit tensoriel. . . . .	11
1.7 Mesures de Radon. . . . .	14
1.8 Quelques résultats sur la théorie des semigroupes. . . . .	17
1.9 Théorème de Stone-Weierstrass. . . . .	26
<b>2 Projections positives.</b>	<b>28</b>
2.1 Définition. . . . .	28
2.2 Exemples. . . . .	30
2.3 Processus d'approximation associés aux projections positives. . . . .	33
2.4 Résultats de convergence. . . . .	37
2.5 Equation diffusion associées aux opérateurs $P_{n,\lambda}$ . . . . .	41
<b>3 Opérateurs de Bernstein-Schnabl et opérateurs de Stancu-Mühlbach.</b>	<b>43</b>
3.1 Opérateurs de Bernstein-Schnabl. . . . .	43
3.1.1 Notions et résultats préliminaires. . . . .	43
3.1.2 Opérateurs de Bernstein-Schnabl et leurs itérations. . . . .	47
3.2 Opérateurs de Stancu-Mühlbach. . . . .	54
3.2.1 Définitions. . . . .	54
3.2.2 Semigroupes limite des opérateurs de Stancu-Mühlbach. . . . .	57

3.2.3 Les solutions du problème de Cauchy associé. . . . .	60
<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

## **Introduction.**

En 1989 Altomare a introduit une définition générale de la suite des opérateurs de Bernstein-Schnabl associés à une projection positive. Il a également étudié le comportement limite de cette suite et de ses itérés.

De plus, il a été établi l'existence d'un semigroupe de contraction positive qui peut être représenté explicitement en termes des opérateurs de Bernstein-Schnabl.

En 1991 Campiti a introduit la définition d'une suite d'opérateurs de Stancu-Mühlbach associés à une projection positive et a étudié le comportement asymptotique de cette suite et de ses itérés.

Dans ce travail, on présente une synthèse des propriétés principales des suites d'opérateurs linéaires positifs cités ci-dessus qui sont liés par un paramètre réel positif  $\lambda > 0$ . On obtient les opérateurs de Bernstein-Schnabl si  $\lambda = 1$  et les opérateurs de Stancu-Mühlbach si  $\lambda > 1$ .

En effet, ces opérateurs peuvent être définis à partir d'une famille convexe ou une représentation de mesures.

Lorsque ces mesures sont définies par une projection positive on peut alors établir des propriétés asymptotiques de ces opérateurs et un semigroupe de contraction positive.

On démontre les propriétés principales d'approximation de ces classes d'opérateurs et on donne quelques estimations de la vitesse de convergence et on montre quelques propriétés de saturation.

Il est inévitable de mettre en évidence les relations entre ses opérateurs et quelques équations de diffusion dont les solutions peuvent être exprimées en termes de ces opérateurs.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Un premier chapitre dans lequel on introduit des définitions et des propriétés de base de l'analyse fonctionnelle utiles pour la suite de notre travail.

Un deuxième chapitre dans lequel on introduit la notion des projections positives et les processus d'approximation qui leur sont associés.

Dans le troisième chapitre, on collecte les différents résultats des études des opérateurs de Bernstein-Schnabl et les opérateurs de Stancu-Mühlbach. Ce chapitre est achevé par la représentation des solutions du problème de Cauchy.

# Chapitre 1

## Définitions et propriétés de base.

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés fondamentales qui sont utiles pour la suite du travail.

### 1.1 Opérateurs linéaires positifs.

**Définition 1.1.1 :** Etant donnés deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$ . On dit que  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  est un opérateur linéaire positif si

$$A(\lambda f + \mu g) = \lambda A(f) + \mu A(g), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in K \text{ et } f, g \in D(A)$$

et

$$\text{si } f \geq 0 \quad \text{alors } Af \geq 0.$$

**Définition 1.1.2 :**  $A$  étant un opérateur linéaire de  $D(A) \subset E \rightarrow F$ .  $A$  est dit borné s'il existe une constante  $c > 0$  :

$$\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E, \quad \forall x \in D(A).$$

On note l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de  $E \rightarrow F$  par  $\mathcal{L}(E, F)$  (ou  $\mathcal{L}(E)$  si  $E \equiv F$ ).

**Proposition 1.1.1 :** Si  $E$  est normé et  $F$  est un espace de Banach. Alors,  $\mathcal{L}(E, F)$  est aussi un espace de Banach.

**Preuve.**

Soit  $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$  une suite de Cauchy. Comme

$$\|A_n x - A x\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \longrightarrow 0.$$

On a que la suite  $\{A_n x\} \subset F$  est de Cauchy,  $F$  est complet  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$  dans  $F$ .

Notons  $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ .

Il est évident que  $A : E \rightarrow F$ .

$$\left| \|A_n\| - \|A_m\| \right| \leq \|A_n - A_m\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  la suite numérique  $\{\|A_n\|\}$  est de Cauchy  $\Rightarrow$  elle est bornée.

$$A_n \leq M, \quad \forall n.$$

$\|A_n x\| \leq M \|x\|$ , on passe à la limite quand  $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq M \|x\| \Rightarrow A$  est borné  $\Rightarrow A \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est complet  $\Rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est de Banach.  $\blacklozenge$

**Lemme 1.1.1 :** Soit  $A$  un opérateur linéaire positif de  $\mathcal{C}(X)$  dans  $\mathcal{C}(X)$  alors

$$|A(f)(x)| \leq A(|f|)(x), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

**Preuve.**

Sachant que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| ,$$

et comme  $A$  est positif, alors

$$-A|f(x)| \leq A(f)(x) \leq A|f(x)| , \quad \text{pour tout } x \in X$$

ce qui est équivalent à la relation

$$|A(f)(x)| \leq A|f(x)|.$$

Comme d'habitude, la norme d'un opérateur linéaire  $A$  de  $\mathcal{C}(X)$  à valeurs dans  $\mathcal{C}(X)$ , est définie comme suit :

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af(x)\|$$

On rappelle ici, que la norme d'un opérateur existe si et seulement si il est continu.  $\blacklozenge$

**Lemme 1.1.2 :** Soit  $A$  un opérateur linéaire positif de  $\mathcal{C}(X)$  dans  $\mathcal{C}(X)$  alors :

$$\|A\| = \|A(1)(x)\|.$$

**Preuve.**

En effet, en vertu du fait que  $|f(t)| \leq \|f\|$  et que l'opérateur  $A$  est positif on a :

$$A(|f(t)(x)|) \leq A(\|f\|(x)) = \|f\|A(1)(x),$$

donc

$$\|A(|f(t)(x)|)\| \leq \|f\| \|A(1)(x)\|.$$

D'autre part, pour la fonction  $f_0(t) = t^0 = 1$ , on aura :

$$A(f_0(t)(x)) \leq \|f_0\| \|A(1)(x)\|.$$

Alors

$$\|A(f_0(t)(x))\| = \|f_0\| \|A(1)(x)\|.$$

d'ou l'égalité.  $\blacklozenge$

**Proposition 1.1.2 :** Soit  $f_0 \in \mathcal{C}(X)$  et  $f_0(x) \geq m > 0$  pour tout  $x \in X$ . Si la suite  $(A_n)$  d'opérateurs linéaires positifs satisfait

$$\|A_n(f_0)\| \leq M,$$

alors

$$\|A_n\| \leq Mm^{-1}.$$

**Preuve.**

Comme

$$mA_n 1(x) = A_n m 1(x) \leq A_n f_0(x),$$

alors

$$m\|A_n 1(x)\| \leq \|A_n f_0\|.$$

On utilise le résultat du lemme 1.1.2 et on obtient l'inégalité.  $\blacklozenge$

**Lemme 1.1.3 :** Soit  $A$  un opérateur linéaire positif de  $\mathcal{C}(X)$  dans  $\mathcal{C}(X)$ , Si  $f, g \in \mathcal{C}(X)$  alors :

$$A(|f(x)g(x)|) \leq \sqrt{A(f^2(x))A(g^2(x))}.$$

**Preuve.**

Si  $a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$  pour  $\lambda$  réel, alors  $ac \geq b^2$ , c'est à dire que pour tout  $\lambda$  on aura :

$$0 \leq A((|f(x)| + |g(x)|)^2)(x) = \lambda^2 A(f(x))^2(x) + 2\lambda A(f(x)g(x))(x) + A(g(x))^2(x),$$

ceci prouve l'inégalité.

Si  $g = 1$ , l'inégalité précédente devient

$$A(|f(x)|) \leq \sqrt{A(f^2(x))A(1(x))}. \quad \blacklozenge$$

**Remarque 1.1.1** : Comme exemples d'opérateurs linéaires positifs, on peut citer les opérateurs de **Bernstien-Schnabl** et les opérateurs de **Stancu-Mühlbach** qu'on étudie dans les chapitres suivants.

## 1.2 Espace de Hausdorff.

**Définition 1.2.1** : On dit que  $X$  est séparable si et seulement si

$$\exists A \subset X \text{ et } A \text{ borné ou fini : } \overline{A} = X$$

## 1.3 Opérateur fermé.

**Définition 1.3.1** : Un opérateur linéaire  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  est dit fermé si et seulement si

$$\forall \{x_n\}_{n \geq 1} \subset D(A) : x_n \rightarrow x, E \quad \text{et} \quad Ax_n \rightarrow y, F$$

Alors,  $x \in D(A)$  et  $y = Ax$ .

## 1.4 Continuité, convergence uniforme.

**Définition 1.4.1** : L'application  $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$  est dite uniformément continue si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Définition 1.4.2** : La continuité simple de  $f$  s'écrit par comparaison

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Définition 1.4.3 :** On dit que  $A_n : E \rightarrow F$  converge fortement vers  $A$  si

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x, \quad \forall x \in E.$$

**Définition 1.4.4 :** Soient  $X$  un espace topologique,  $(Y, d)$  un espace métrique et  $E \subset X$  un sous-ensemble de  $X$ . Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $X$  et à valeurs dans  $Y$  et  $f$  une fonction définie sur  $X$  à valeurs dans  $Y$ .

On dit que la suite  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $E$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in E, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

donc  $f$  est appelée la limite de la suite  $(f_n)_n$  et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

**Définition 1.4.5 :** Soient  $X$  un espace métrique et  $(Y, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. La convergence uniforme d'une suite de fonctions  $(f_n)_n$  sur une partie  $E$  de  $X$  s'écrit donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in E, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

## 1.5 Espace de Banach réticulé.

**Définition 1.5.1 :** Un espace vectoriel normé réel (complexe) est un couple constitué par un espace vectoriel  $E$  réel (complexe) et par une norme

$\| \cdot \|$  sur  $E$ .

**Définition 1.5.2 :** Un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  qui est complet pour la distance associée à sa norme est appelé espace de Banach.

**Définition 1.5.3 :** Un ensemble réticulé est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  admettent une borne supérieure  $\sup(x, y)$  et une borne inférieure  $\inf(x, y)$ .

**Définition 1.5.4 :** Un espace vectoriel réel  $X$  est un vectoriel réticulé s'il est un ensemble réticulé qui satisfait les deux axiomes suivants :

$$1/ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \text{pour tout } x, y, z \in X.$$

$$2/ x \geq 0 \Rightarrow \lambda x \geq 0 \quad \text{pour tout scalaire } \lambda \geq 0.$$

Tout ensemble fini d'éléments d'un espace vectoriel admet une borne supérieure et une borne inférieure.

**Définition 1.5.5 :** On dit qu'une norme  $\| \cdot \|$  sur un espace vectoriel réticulé est monotone si

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

Un espace vectoriel réticulé muni d'une norme monotone est dit espace normé réticulé. Un espace normé réticulé complet s'appelle un Banach réticulé.

## 1.6 Produit tensoriel.

**Définitions 1.6.1 :** Soient  $f(x), x \in \mathbb{R}^d$ , et  $g(y), y \in \mathbb{R}^k$ , deux fonctions localement intégrables. Alors  $f(x)g(y)$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}^{d+k}$ , et on peut définir une distribution sur  $\mathbb{R}^{d+k}$  :

$$(f(x)g(y), \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{d+k}} f(x)g(y)\varphi(x, y) dx dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}^k} g(y) \varphi(x, y) dy \right\} dx.$$

**Définition 1.6.2 :** Soit  $f \in D'(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in D'(\mathbb{R}^k)$ . On définit le produit tensoriel de  $f$  et  $g$  comme une distribution  $h \in D'(\mathbb{R}^{d+k})$  telle que

$$(h, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))) \quad \text{pour tout } \varphi \in D'(\mathbb{R}^{d+k}).$$

On note  $h = f(x) \otimes g(y)$ .

Il faut vérifier que le produit est bien défini. Pour simplifier, on suppose dans la suite que  $d = k = 1$ .

**Lemme 1.6.1 :** Soit  $g \in D'(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$ . Alors la fonction

$$\psi(x) := (g(y), \varphi(x, y))$$

appartient à l'espace  $D(\mathbb{R})$ , et pour tout entier  $j \geq 0$  on a

$$\psi^{(j)}(x) = (g(y), \partial_x^j \varphi(x, y))$$

De plus, si  $\varphi_k \in D(\mathbb{R}^2)$  et  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  dans  $D(\mathbb{R}^2)$ , alors la suite

$$\psi_k(x) := (g(y), \varphi_k(x, y))$$

converge vers  $\psi$  dans  $D(\mathbb{R})$ .

Le lemme 1.6.1 permet de justifier la définition du produit tensoriel. Si  $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$ , alors la fonction  $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$  appartient à  $D(\mathbb{R})$ , et l'on peut considérer  $(f, \psi)$ , évidemment, la fonctionnelle

$$\varphi \rightarrow (f, \psi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y)))$$

est linéaire. Si  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  dans  $D(\mathbb{R}^2)$ , alors  $\psi_k = (g(y), \varphi_k(x, y))$  converge vers  $\psi$  dans  $D(\mathbb{R})$ . Par conséquent,

$$(f, \psi_k) \longrightarrow (f, \psi) \quad \text{quand } k \rightarrow \infty,$$

et donc la fonctionnelle est continue.

**Exemples :**

(a)  $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(b) Si  $f \in D'(\mathbb{R})$ , alors  $f \otimes \mathbf{1} \in D(\mathbb{R}^2)$  et

$$(f \otimes \mathbf{1}, \varphi) = \left( f(x), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dy \right).$$

**Propriétés du produit tensoriel :**

**Théorème 1.6.1 :**

(a) Le produit tensoriel est commutatif : si  $f, g \in D'(\mathbb{R})$ , alors

$$f(x) \otimes g(y) = g(y) \otimes f(x).$$

(b) Le produit tensoriel est continu : si  $f_k \rightarrow f$  dans  $D'(\mathbb{R})$  et  $g \in D'(\mathbb{R})$ , alors

$$f_k(x) \otimes g(y) \rightarrow f(x) \otimes g(y) \quad \text{dans } D'(\mathbb{R}^2).$$

(c) Le produit tensoriel est associative : si  $f, g, h \in D'(\mathbb{R})$ , alors

$$(f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z) = f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z)).$$

(d) Dérivation du produit tensoriel : si  $f, g \in D'(\mathbb{R})$ , alors

$$\partial_x^j (f(x) \otimes g(y)) = (\partial_x^j f(x)) \otimes g(y).$$

(e) Multiplication par une fonction régulière : si  $f, g \in D'(\mathbb{R})$  et  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , alors

$$a(x)(f(x) \otimes g(y)) = (a(x)f(x)) \otimes g(y).$$

(f) Translation du produit tensoriel : si  $f, g \in D'(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}$ , alors

$$(f \otimes g)(x + b, y) = f(x + b) \otimes g(y).$$

**Exemple :** Soit  $f \in D'(\mathbb{R})$ . Alors

$$(f \otimes \mathbf{1}, \varphi) = \left( f(x), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dy \right),$$

$$(\mathbf{1} \otimes f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} (f(x), \varphi(x, y)) dy.$$

On conclut que

$$\left( f(x), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}} (f(x), \varphi(x, y)) dy \quad \text{pour tout } \varphi \in D(\mathbb{R}^2).$$

## 1.7 Mesures de Radon.

**Définition 1.7.1 :** Soit  $K(X)$  l'espace des fonctions continues à valeurs réelles de support compact. Une mesure de Radon sur un espace localement compact  $X$  est une forme linéaire  $\mu : K(X) \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait la propriété suivante :

Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $X$ , il existe  $M_A \geq 0$  tel que

$$|\mu(f)| \leq M_A \|f\| \quad \text{pour tout } f \text{ et } \text{supp}(f) \subset A.$$

**Remarque 1.7.1 :** On note par  $M(X)$  l'espace des mesures de Radon, donc  $M(X)$  est l'espace dual de l'espace localement convexe  $K(X)$  muni de la topologie induite.

Notre étude est restreinte aux mesures de Radon bornées continues par rapport à la norme-sup donnée par :

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| : f \in K(X), \|f\| \leq 1\},$$

**Définition 1.7.2 :** Une mesure de Radon bornée est dite contractante si

$$\|\mu\| \leq 1.$$

**Remarque 1.7.2 :**

1) On désigne par  $M_b(X)$  l'espace des mesures bornées et par  $M^+(X)$  le cône des mesures de Radon positives, c.à.d

$$M^+(X) = \{\mu \in M(X) : \mu(f) \geq 0, f \in K(X), f \geq 0\}.$$

2) Toute forme linéaire positive sur  $K(X)$  est automatiquement dans  $M^+(X)$ . Posons alors

$$\left\{ \begin{array}{l} M_b^+(X) = M^+(X) \cap M_b(X) \\ \text{et} \\ M_1^+(X) = \{\mu \in M_b^+(X) : \|\mu\| = 1\}. \end{array} \right.$$

3) Les éléments de  $M_1^+(X)$  sont appelés aussi des mesures probabilité de Radon.

4) Si  $X$  est compact, alors  $M(X) = M_b(X)$ . De plus pour tout  $\mu \in M^+(X)$  on a

$$\|\mu\| = \mu(1).$$

5) Réciproquement, si  $\mu \in M(X)$  et  $\|\mu\| = \mu(1)$ , alors

$$\mu \in M^+(X).$$

Toute mesure positive de Radon vérifie l'inégalité :

$$\mu(|fg|) \leq \sqrt{\mu(f^2(x))\mu(g^2(x))}, \quad \text{pour tout } f, g \in X, \mu \in M_b^+(X).$$

Cette inégalité est vérifiée si on remplace  $K(X)$  par un sous-espace vectoriel réticulé  $E$  des fonctions continues sur  $X$ . Si on considère la forme linéaire positive  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $E$ , on obtient :

$$L(|fg|) \leq \sqrt{L(f^2)\mu(g^2)}, \quad f, g \in K(X), f^2, g^2 \in E.$$

La mesure de Dirac est une mesure de Radon bornée  $\varepsilon_x$  donnée par

$$\varepsilon_x(f) := f(x), \text{ pour tout } f \in K(x)$$

c.à.d

$$\varepsilon_x \in M_1^+(X).$$

### Combinaison des mesures de Dirac.

**Définition 1.7.3 :** Une combinaison linéaire des mesures de Dirac est une mesure bornée discrète de Radon sur  $X$  de la forme

$$\mu := \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{x_i} \quad \text{où } n \geq 1, x_1, \dots, x_n \in X \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

De plus,  $\mu$  est positive si et seulement si chaque  $\lambda_i$  est positif avec

$$\|\mu\| = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

**Exemple :** (Construction d'une mesure de Radon)

Soient  $\mu \in M(X)$  et  $g \in \mathcal{C}(X)$ , alors la forme linéaire

$$v : K(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$v(f) := \mu(f \cdot g) \text{ pour tout } f \in K(X),$$

est une mesure de Radon sur  $X$  appelée mesure avec densité  $g$  relativement à  $\mu$ , notée par  $g\mu$ .

Si  $g$  et  $\mu$  sont bornées et positives alors  $g\mu$  est bornée et positive avec

$$\|g\mu\| \leq \|g\| \cdot \|\mu\|$$

## 1.8 Quelques résultats sur la théorie des semi-groupes.

**Définition 1.8.1 :** Soit  $E$  un espace de Banach sur le corps  $\mathbb{K}$  des nombres réels ou complexes. Un opérateur linéaire  $S$  de  $E$  dans un espace de Banach  $F$  est dit borné si

$$\sup \{\|S(f)\| : \|f\| \leq 1\} < \infty.$$

**Définition 1.8.2 :** Un opérateur linéaire  $S : E \rightarrow F$  est appelé contraction linéaire si

$$\|S(f)\| \leq \|f\| \quad \text{pour tout } f \in E,$$

Dans ce qui suit on note par  $L(E)$  l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $E$ . L'espace  $L(E)$  muni de la norme

$$\|S\| := \sup \{\|S(f)\| : \|f\| \leq 1\} \quad \text{avec } S \in L(E),$$

est un espace de Banach.

Sur  $L(E)$  on considère la topologie forte. Une suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $L(E)$  converge fortement vers  $S \in L(E)$  si

$$S_n(f) \longrightarrow S(f) \quad \text{pour tout } f \in E.$$

**Définition 1.8.3 :** Un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur  $E$  est une famille  $T(t)_{t \geq 0}$  d'éléments de  $L(E)$  tels que

$$\begin{cases} T(0) = I_E \\ T(s+t) = T(s)T(t) \quad \text{pour tout } s, t \geq 0, \end{cases}$$

où  $I_E$  désigne l'opérateur identité sur  $E$ , c.à.d.  $I_E(f) = f$  pour tout  $f \in E$ .

**Définition 1.8.4 :** Un semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$  est dit fortement continu pour tout  $t_0 \geq 0$  et  $f \in E$  si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(t)f - T(t_0)f\| = 0.$$

**Définition 1.8.5 :** Un semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$  est dit uniformément continu si pour tout  $t_0 \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(t) - T(t_0)\| = 0.$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(t) - I_E\| = 0.$$

**Remarque 1.8.1 :** Si  $(T(t))_{t \geq 0}$  est un semigroupe fortement continu, alors il existe toujours  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $M \geq 1$  tels que

$$\|T(t)\| \leq M \exp(\omega t) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

La limite de croissance du semigroupe est définie par

$$\omega_0 = \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \exists M \geq 0 \text{ tq } \|T(t)\| \leq M \exp(\omega t), \forall t \geq 0 \}.$$

Si  $E$  est un Banach réticulé et si pour tout  $t \geq 0$ ,  $T(t)$  est un opérateur linéaire positif, alors  $(T(t))_{t \geq 0}$  est appelé un semigroupe fortement continu positif.

**Définition 1.8.6 :** Etant donné un semigroupe fortement continu  $(T(t))_{t \geq 0}$ , on peut considérer l'opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow E$  défini sur le sous espace linéaire

$$D(A) := \left\{ f \in E : \text{il existe } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \in E \right\},$$

comme étant

$$Af := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ pour tout } f \in D(A).$$

L'opérateur  $A$  est appelé générateur du semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ .

**Remarque 1.8.2 :** On note que si le semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  est uniformément continu alors

$$D(A) = E \quad \text{et} \quad A \text{ est borné.}$$

**Définition 1.8.7 :** Un opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow E$  est dit fermé si  $D(A)$  muni de la norme graphe

$$\|f\|_A = \|f\| + \|Af\|, \quad \text{pour tout } f \in D(A),$$

devient un espace de Banach.

Cela signifie, d'une manière plus explicite que pour toute suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  dans  $D(A)$  telle que  $f_n \rightarrow f \in E$  et  $Af_n \rightarrow g \in E$ , il suit que

$$f \in D(A) \quad \text{et} \quad Af = g.$$

En d'autres termes, le graphe

$$\{(f, Af) : f \in D(A)\}$$

est fermé dans  $E \times E$ .

**Définition 1.8.8 :**

1) Etant donné un opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow E$ , on dit qu'un opérateur linéaire  $B : D(B) \rightarrow E$  défini sur un sous-espace  $D(B)$  de  $E$ , est un prolongement de  $A$  si

$$D(A) \subset D(B), \quad \text{et} \quad Af = Bf \quad \text{pour tout } f \in D(A).$$

2) On dit qu'un opérateur  $A : D(A) \rightarrow E$  admet une fermeture s'il existe un prolongement fermé de  $A$ . Cela signifie aussi, que si  $(f_n)_{n \geq 1}$  est une suite dans  $D(A)$  telle que  $f_n \rightarrow 0$  et  $(Af_n)_{n \geq 1}$  converge, alors  $Af_n \rightarrow 0$ .

**Définition 1.8.9 :** Si  $A : D(A) \rightarrow E$  admet une fermeture, alors le plus petit prolongement fermé  $\bar{A} : D(\bar{A}) \rightarrow E$  de  $A$  est appelé fermeture de  $A$ .

En effet, on a

$$D(\bar{A}) = \{f \in E : \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A) \text{ telle que } f_n \rightarrow f \text{ et } (Af_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$$

et

$$\bar{A}f = \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n,$$

pour tout  $f \in D(\bar{A})$ ,  $(f_n)_{n \geq 1}$  étant une suite arbitraire dans  $D(A)$  telle que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{et} \quad (Af_n)_{n \geq 1} \text{ converge.}$$

**Définition 1.8.10 :** Le core d'un opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow E$  est un sous-espace linéaire  $D_0$  de  $D(A)$  qui est dense dans  $E$  relativement à la norme graphe.

On établit maintenant quelques propriétés de base des générateurs des semi-groupes fortement continus.

**Théorème 1.8.1 :** Soit  $A : D(A) \rightarrow E$  le générateur d'un semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$ . On a alors les assertions suivantes :

1.  $D(A)$  est dense dans  $E$  et  $A$  est fermé.
2. Si un sous-espace  $D_0$  de  $D(A)$  est dense dans  $E$  et

$$T(t)(D_0) \subset D_0 \text{ pour tout } t \geq 0,$$

alors

$$D_0 \text{ est un core pour } A.$$

3.  $T(t)(D(A)) \subset D(A)$  pour tout  $t \geq 0$ .
4. Etant donnée  $f \in E$ , l'application  $\psi_f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$  définie par

$$\psi_f(t) := T(t)f \ (t \geq 0).$$

$\psi_f(t)$  est différentiable dans  $\mathbb{R}_+$  si et seulement si  $f \in D(A)$ .

Si c'est le cas, alors

$$\psi_f'(t) = AT(t)f = T(t)Af \text{ pour tout } t \geq 0,$$

5.

$$\text{Pour tout } t \geq 0 \text{ et } f \in E, \int_0^t T(s)f ds \in D(A)$$

et

$$A \int_0^t T(s) f ds = T(t) f - f.$$

6.

$$\text{Pour tout } t \geq 0 \text{ et } f \in D(A), \int_0^t T(s) A f ds = T(t) f - f.$$

**Remarque 1.8.3 :** Etant donné un opérateur fermé  $A : D(A) \rightarrow E$ , notons par  $\rho(A)$  la résolvante de  $A$ , c.à.d.

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{k} : \lambda I_{D(A)} - A \text{ est inversible} \}.$$

Le spectre  $\sigma(A)$  est défini par

$$\sigma(A) := \mathbb{k} \setminus \rho(A).$$

Si  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ,  $\sigma(A)$  peut être égale à l'ensemble vide.

Si  $\lambda \in \rho(A)$  on notera par  $R(\lambda, A)$  l'inverse de  $\lambda I_{D(A)} - A$ .

Signalons aussi que la résolvante identité est donnée par

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \rho(A).$$

**Remarque 1.8.4 :** Si  $A$  est le générateur semigroupe de contraction fortement continu  $(T(t))_{t \geq 0}$  alors  $\rho(A) \neq \emptyset$ . De plus la limite spectrale  $s(A)$  de  $A$  définie par

$$s(A) = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A) \}$$

est finie.

En outre, si  $\omega_0$  désigne la limite de croissance de  $(T(t))_{t \geq 0}$  on a

$$s(A) \leq \omega_0$$

et pour tout  $\lambda \in \mathbb{k}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$  et  $f \in E$

$$R(\lambda, A)f = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)T(t)f dt.$$

De même que

$$R(\lambda, A)Af = AR(\lambda, A)f = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)T(t)Afdt,$$

pourvu que  $f \in D(A)$ .

En parlant encore de résolvante des opérateurs  $R(\lambda, A)$ , il est possible de donner plusieurs représentation du semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ .

Ici, on mentionne la formule exponentielle :

$$T(t)(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{t}R(\lambda, A)\right)^n f \quad \text{pour tout } f \in E \text{ et } t > 0,$$

et cette limite est uniforme sur tout intervalle borné de  $]0, +\infty[$ .

**Remarque 1.8.5 :** L'application la plus importante de la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, concerne les équations différentielles linéaires dans des espaces de Banach.

Rappelons la définition d'un opérateur dissipatif, pour tout  $f \in E$  on pose

$$U(f) := \{\rho \in E' : \rho(f) = \|f\|^2 = \|\rho\|^2\},$$

où  $E'$  désigne le dual de  $E$ .

**Définition 1.8.11 :** Un opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow E$  est dit dissipatif si pour tout  $f \in D(A)$ , il existe  $\varphi \in U(f)$  telle que

$$\operatorname{Re}\varphi(Af) \leq 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\|(\lambda I_{D(A)} - A)f\| \geq \lambda \|f\| \quad \text{pour tout } f \in D(A) \text{ et } \lambda > 0.$$

On mentionne deux résultats essentiels d'approximation pour des semi-groupes discrets qui sont importants pour l'étude de puissances des processus d'approximations positive.

Le premier résultat est dû à **H. F. Trotter** [26].

**Théorème 1.8.2 : (H. F. Trotter)** Soit  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'opérateurs linéaires bornés et soit  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de nombres réels positifs qui tend vers 0. Supposons qu'il existe  $M \geq 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  tels que

$$Af := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n f - f}{\rho_n},$$

$$\text{pour tout } f \in D(A) := \left\{ g \in E : \text{il existe } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n g - g}{\rho_n} \in E \right\}.$$

Si  $D(A)$  est dense dans  $E$  et si le sous-espace  $(\lambda I_{D(A)} - A)(D(A))$  est dense dans  $E$  pour  $\lambda > \omega$ , alors la fermeture de  $A$  est le générateur d'un semi-groupe de contraction fortement continu  $(T(t))_{t \geq 0}$  tel que pour tout  $t \geq 0$  et pour toute suite d'entiers positifs  $(k(n))_{n \geq 1}$  qui satisfait  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n)\rho_n = t$ , on a

$$T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{k(n)} \quad \text{fortement.}$$

En particulier

$$\|T(t)\| \leq M \exp(\omega \rho_n k) \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et, si on prend  $k(n) = [\frac{t}{\rho_n}]$ , où  $[\frac{t}{\rho_n}]$  désigne la partie entière de  $\frac{t}{\rho_n}$ ,

$$T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{[\frac{t}{\rho_n}]} \quad \text{fortement,}$$

et cette dernière convergence est uniforme sur des intervalles bornés de  $\mathbb{R}_+$ .

Dans la même direction, un autre résultat a été obtenu par **R. Schnabl**.

**Théorème 1.8.3 : (R. Schnabl)**. Soit  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de contractions linéaires sur  $E$  et soit  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de nombre réels positifs qui tend vers 0.

On considère l'opérateur linéaire

$$A : D(A) \rightarrow E,$$

défini par

$$Af := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n f - f}{\rho_n},$$

et

$$\text{pour tout } f \in D(A) := \left\{ g \in E : \text{il existe } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n g - g}{\rho_n} \in E \right\}.$$

et on suppose qu'il existe une famille  $(F_i)_{i \in I}$  de sous-espaces de dimension finie de  $D(A)$  qui sont invariants pour chaque  $L_n$  (c'est à dire  $L_n(F_i) \subset F_i$  pour tout  $i \in I$  et  $n \geq 1$ ) et dont la réunion est dense dans  $E$ .

Alors la fermeture de  $A$  est le générateur d'un semi-groupes de contraction positive fortement continu qui satisfait

$$T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{k(n)} \quad \text{fortement,}$$

et

$$T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{\lfloor \frac{t}{\rho_n} \rfloor} \quad \text{fortement,}$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour toute suite  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers positifs tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n)\rho_n = t$ .

## 1.9 Théorème de Stone-Weierstrass.

**Théorème :** Soit  $A$  une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  où  $X$  est espace métrique compact. On suppose que :

$A$  sépare les points de  $X$ , c.à.d. que pour  $x \neq y$ ,  $\exists f \in A$  t.q :  $f(x) \neq f(y)$ .

$\forall x \in X$ ,  $\exists f \in A$  t.q :  $f(x) \neq 0$ .

Alors :  $A$  est dense dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , c.à.d  $\overline{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

**Preuve.**

On commence par montrer que si  $x \neq y$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors il existe  $f \in A$  tel que  $f(x) = \alpha$  et  $f(y) = \beta$ .

Considérons  $g$  tel que  $g(x) \neq g(y)$  et  $g(x) \neq 0$ ,  $g(y) \neq 0$ . On cherche  $f = \lambda g + \mu g^2$ , et une unique solution  $(\lambda, \mu)$  existe car  $g(x)g(y)(g(x) - g(y)) \neq 0$ .

Remarquons ensuite que  $\overline{A}$  est une algèbre, car on peut passer à la limite dans la somme et le produit. On va montrer que si  $f \in \overline{A}$ , alors  $|f|$  aussi. Supposons que  $\|f\|_\infty < 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , on a  $0 \leq (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - |x| \leq \varepsilon$ , et aussi

$$x^2 + \varepsilon^2 = (1 + \varepsilon^2)\left(1 + \frac{x^2 - 1}{1 + \varepsilon^2}\right) = (1 + \varepsilon^2)(1 + u).$$

pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $|u| \leq (1 + \varepsilon^2)^{-1} < 1$ , et la série de Taylor de  $(x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$  converge uniformément sur cet intervalle. Donc il existe un polynôme  $P(x)$  tel que

$$|(x^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - P(x)| < \varepsilon, \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Ainsi,  $|P(0)| \leq 2\varepsilon$ , et en posant  $Q = P - P(0)$ , on a finalement

$$|Q(x) - |x|| \leq 4\varepsilon, \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Mais comme  $Q$  n'a pas de terme constant,  $Q(f) \in A$  et comme  $\|f\|_\infty < 1$ , on aura  $|Q(f) - |f|| \leq 4\varepsilon$ . On en déduit donc que si  $f, g \in \overline{A}$ , alors  $\sup(f, g)$

et  $\inf(f, g)$  sont aussi dans  $\overline{A}$  (ils s'expriment en fonction de  $f; g$  et de  $|f - g|$ ).

Montrons finalement que  $\overline{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  :

Considérons  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ,  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $x, y \in X$ ,  $\exists g_{x,y} \in A$  tel que  $f(x) = g_{x,y}(x)$  et  $f(y) = g_{x,y}(y)$  (c'est ce qu'on a montré au début). Considérons  $\omega_{x,y} = \{z \in X : g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$ . Comme  $g_{x,y} - f$  est continu, cet ensemble est ouvert, et il contient clairement  $y$ . Ainsi à  $x$  fixé, les  $\omega_{x,y}$  sont un recouvrement ouvert de  $X$ , dont on peut extraire un recouvrement fini,  $(\omega_{x,y_i})_{i \in I_{\text{fini}}}$ . On considère alors  $g_x = \inf_i (g_{x,y_i})$ , qui vérifie  $g_x < f + \varepsilon$  sur  $X$ ,  $g_x(x) = f(x)$ , et  $g_x \in \overline{A}$ . Considérons maintenant  $\omega_x = \{z \in X : g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$ , on extrait un recouvrement fini de cette collection d'ouverts, on pose  $g = \sup g_i$  et finalement  $g \in \overline{A}$ ,  $|g - f| < \varepsilon$ .

On vient donc de montrer que  $f$  est dans l'adhérence de  $\overline{A}$ , qui n'est autre qu'elle-même, donc  $\overline{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .  $\blacklozenge$

**Théorème : (Stone-Weierstrass complexe)** Soit  $A$  une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  où  $X$  est un espace métrique compact, telle que

$$\forall x \in X, \exists f \in A \text{ t.q. } f(x) \neq 0.$$

$A$  sépare les points de  $X$ .

pour tout  $f \in A$ ,  $\overline{f} \in A$ .

Alors  $A$  est dense dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ .

# Chapitre 2

## Projections positives.

### 2.1 Définition.

Soit  $X$  un espace métrique compact, et on note par  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  l'espace de Banach réticulé de toutes les fonctions réelles continues sur  $X$ , muni de la norme sup et l'ordre naturel. Soit  $M^+(X)$  (respectivement  $M^1(X)$ ) l'ensemble de toutes les mesures positives (respect. probabilités) de Radon sur  $X$ .

On considère la projection linéaire positive  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  (c.à.d  $T$  est un opérateur linéaire positif, tel que  $T^2 = T$ ), on suppose que

$$T(1) = 1 \tag{2.1.1}$$

et que l'image

$$H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R})) \tag{2.1.2}$$

sépare les points de  $X$ .

Puisque  $H$  est séparable, il est toujours possible de construire une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $H$  qui sépare les points de  $X$  sachant que les séries

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^2, \tag{2.1.3}$$

sont uniformément convergentes sur  $X$ .

Pour toute fonction  $\Phi$  on a le résultat suivant :

**Théorème 2.1 [1]** : Soit  $(L_i)_{i \in I}$  l'ensemble des opérateurs linéaires positifs de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui satisfont la condition

$$\lim_{i \in I} L_i(h) = h \quad \text{pour tout } h \in H. \quad (2.1.4)$$

si

$$\lim_{i \in I} L_i(\Phi) = \Phi, \quad (2.1.5)$$

alors

$$\lim_{i \in I} L_i(f) = f \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

et si

$$\lim_{i \in I} L_i(\Phi) = T(\Phi), \quad (2.1.6)$$

alors

$$\lim_{i \in I} L_i(f) = T(f) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

Notons que, pour tout  $i \in I$ ,  $\|L_i\| = \|L_i(1)\|$ , et puisque  $1 \in H$ , en vertu de (2.1.4) il s'ensuit qu'il existe  $i_0 \in I$  tel que  $\sup_{i \geq i_0} \|L_i\| < +\infty$ .

Donc, les relations (2.1.5) et (2.1.6) sont respectivement satisfaites si

$$\lim_{i \in I} L_i(h_n^2) = h_n^2$$

ou bien

$$\lim_{i \in I} L_i(h_n^2) = T(h_n^2) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème 2.1 sera très utile dans l'étude du processus d'approximation.

Pour notre travail, on se limite au cas où  $X$  est un ensemble métrisable convexe compact de quelques espaces localement convexes de Hausdorff. On suppose que

$$A(X) \subset H, \quad (2.1.7)$$

où  $A(X)$  désigne l'espace de toutes les fonctions réelles continues affines sur  $X$ , et pour tout  $\bar{x} \in X$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  et  $h \in H$

$$\text{la fonction } x \rightarrow h((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x) \text{ appartient à } H. \quad (2.1.8)$$

## 2.2 Exemples.

### 1. Simplexe de Bauer.

Soit  $X$  un simplexe de bauer métrisable, c-à-d l'ensemble  $\partial_e X$  des points externes de  $X$  est fermé et pour tout  $x \in X$  il existe un unique mesure de probabilité de Radon  $\mu_x$  dans  $X$  concentrée sur  $\partial_e X$ , tel que

$$\mu(h) = h(x), \quad \text{pour tout } h \in A(X) \quad (2.2.1)$$

On considère la projection linéaire positive  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  définie par

$$T(f)(x) = \mu_x(f), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), x \in X, \quad (2.2.2)$$

dans ce cas  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R})) = A(X)$ .

Notons que, si  $X_p$  est le simplexe standard de  $\mathbb{R}^p$  ( $p \geq 1$ ), c-à-d

$$X_p = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p : 0 \leq x_i, i = 1, \dots, p, \text{ et } x_1 + \dots + x_p \leq 1\},$$

Alors pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $(x_1, \dots, x_p) \in X_p$

$$\begin{aligned} & T(f)(x_1, \dots, x_p) = \\ & = \sum_{0 \leq h_1 + \dots + h_p \leq 1} \alpha_f(h_1, \dots, h_p) x_1^{h_1} \dots x_p^{h_p} (1 - \sum_{i=1}^p x_i)^{1 - \sum_{i=1}^p h_i}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

où

$$\alpha_f(h_1, \dots, h_p) = f(\delta_{h_1 1}, \dots, \delta_{h_p 1}), \quad (2.2.4)$$

$\delta_{h_i 1}$  désigne le symbole de Kronecker.

En particulier, si  $p = 1$ , alors  $X_p = [0, 1]$  et

$$T(f)(x) = (1 - x)f(0) + xf(1), \quad (2.2.5)$$

pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $x \in [0, 1]$ .

## 2. Les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^p$ .

Soit  $X$  un sous-ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^p$  ( $p \geq 1$ ) et on considère la projection positive  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  définie on associé pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  la solution unique  $T(f)$  du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{X}, & u \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{(2)}(\overset{\circ}{X}, \mathbb{R}) \\ u|_{\partial X} = f|_{\partial X} \end{cases}$$

où  $\Delta = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  est le Laplacien sur  $\overset{\circ}{X}$ .

Dans ce cas

$$H = \left\{ u \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{(2)}(\overset{\circ}{X}, \mathbb{R}) : \Delta u = 0, \text{ sur } \overset{\circ}{X} \right\}$$

On note que si  $X = B(x_0, r)$  est la boule de  $\mathbb{R}^p$  de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ , alors en utilisant la formule de Poisson à la solution du problème de Dirichlet sur la boule, on a

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{r^2 - \|x_0 - x\|^2}{r\sigma_p} \int_{\partial X} \frac{f(y)}{\|y - x\|^p} d\sigma(y) & \text{si } \|x - x_0\| < r, \\ f(x) & \text{si } \|x - x_0\| = r, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

où  $\sigma_p$  est l'aire de la surface de la sphère de  $\mathbb{R}^p$  et  $\sigma$  est la mesure surface sur  $\partial X$ .

### 3. Espaces produits.

Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie d'un sous-ensemble convexe compact et pour tout  $i = 1, \dots, p$  soit la projection positive  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui satisfait (2.1.7) et (2.1.8) (d'où (2.1.1) et (2.1.2)).

Posant  $X = \prod_{i=1}^p X_i$  et considérant l'opérateur linéaire positif  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  définie pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $(x_1, \dots, x_p) \in X$  par

$$T(f)(x_1, \dots, x_p) = \int_X f d\left(\bigotimes_{i=1}^p \mu_{x,i}\right), \quad (2.2.7)$$

où, pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $\mu_{x,i}$  désigne la mesure de Radon sur  $X_i$  définie par

$$\mu_{x,i}(g) = T_i(g)(x), \quad (g \in \mathcal{C}(X_i, \mathbb{R})) \quad (2.2.8)$$

Dans [1], on a prouvé que  $T$  et une projection et le sous espace  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$  coïncide avec le sous espace de tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , tel que pour tout  $i = 1, \dots, p$  et  $(\bar{x}-1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_p) \in X_i \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_p$  la fonction

$$x \in X_i \rightarrow f(\bar{x} - 1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_p)$$

appartient à  $H_i = T_i(\mathcal{C}(X_i, \mathbb{R}))$ .

Alors, (2.1.7) et (2.1.8) sont satisfaites.

On note que, si  $f_i \in \mathcal{C}(X_i, \mathbb{R})$  pour tout  $i = 1, \dots, p$  et si on désigne par  $\bigotimes_{i=1}^p f_i$  les fonctions réelles sur  $X$  définies par

$$\bigotimes_{i=1}^p f_i(x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p f_i(x_i) \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_p) \in X, \quad (2.2.9)$$

alors

$$T\left(\bigotimes_{i=1}^p f_i\right) = \prod_{i=1}^p T_i(f_i). \quad (2.2.10)$$

Donc la suite  $T$  est défini comme dans (2.2.7) par

$$\bigotimes_{i=1}^p T_i. \quad (2.2.11)$$

par exemple, si  $X = [0, 1]^p$ , prenant les formules (2.2.5) et (2.2.7) en considération on a

$$T(f)(x_1, \dots, x_p) = \sum_{h_1, \dots, h_p=0}^i \alpha_f(h_1, \dots, h_p) (1-x_1)^{1-h_1} \dots x_p^{h_p} (1-x_p)^{1-h_p}, \quad (2.2.12)$$

Dans ce cas  $H$  est le sous espace de toutes les fonctions continues qui sont affines en tenant compte de chaque variable.

## 2.3 Processus d'approximation associés aux projections positives.

On considère la projection positive  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui satisfait (2.1.7) et (2.1.8) (et donc (2.1.1), (2.1.2)). Pour tout  $x \in X$  on note par  $\mu_x \in M^1(X)$  la mesure probabilité de Radon sur  $X$  définie en posant pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

$$\mu_x(f) = T(f)(x). \quad (2.3.1)$$

Soit  $P = (p_{nj})_{n \geq 1, j \geq 1}$  la matrice stochastique infinie triangulaire inférieure, c.à.d une matrice infinie de nombres positifs satisfaisant  $p_{nj} = 0$  quand  $j > n$  et  $\sum_{j=1}^{\infty} p_{nj} = \sum_{j=1}^n p_{nj} = 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  on considère l'application  $\pi_n : X^n \rightarrow X$  définie en posant pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$

$$\pi_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n p_{nj} x_j. \quad (2.3.2)$$

De plus, on considère l'opérateur linéaire positif  $B_n : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  défini en posant pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $x \in X$

$$B_n(f)(x) = \int_{X^n} f \circ \pi_n d\left(\bigotimes_{i=1}^n \mu_{x,i}\right), \quad (2.3.3)$$

où

$$\mu_{x,i} = \mu_x \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n. \quad (2.3.4)$$

L'opérateur linéaire  $B_n$  est appelé le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Bernstein-Schnabl par rapport à la matrice  $P$  et la projection  $T$ .

Si nécessaire de poser la dépendance de  $p_{n1}, \dots, p_{nn}$  en écrivant  $B_{p_{n1}, \dots, p_{nn}}$  au lieu de  $B_n$ .

On considère maintenant  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  on pose

$$S_{n,\lambda} = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} \frac{(\lambda - 1)^{n-k}}{n^{n-k}} \sum_{|v|_k=n} \frac{1}{v_1 \dots v_k} B_{v_1/n, \dots, v_k/n}, \quad (2.3.5)$$

où

$$b_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{j}{n} (\lambda - 1)\right) \quad (2.3.6)$$

$$|v|_k = v_1 + \dots + v_k, \quad (2.3.7)$$

pour tout  $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{N}^k$ ,  $v_1, \dots, v_k \geq 1$ , et  $B_{v_1/n, \dots, v_k/n}$  est défini comme dans (2.3.3), c'est à dire

$$B_{v_1/n, \dots, v_k/n}(f)(x) = \int_{X^k} f\left(\frac{v_1}{n}x_1 + \dots + \frac{v_k}{n}x_k\right) d\left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_{x,i}\right). \quad (2.3.8)$$

L'opérateur linéaire positif  $S_{n,\lambda} : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  est appelé le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Stancu-Mühlbach associé à  $T$  et  $\lambda$ .

Finalement, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \lambda < 1$ , le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Lototsky-Schnabl  $L_{n,\lambda} : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  associé à  $T$  et  $\lambda$  est défini en posant pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $x \in X$

$$L_{n,\lambda}(f)(x) = \int_{X^n} f \circ \pi_n d\left(\bigotimes_{i=1}^n \nu_{x,i}\right), \quad (2.3.9)$$

où pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$\nu_{x,i} = \nu_x = \lambda \mu_x + (1 - \lambda)\varepsilon_x, \quad (2.3.10)$$

$\varepsilon_x$  est le point de masse concentré en  $x$  (c.à.d  $\varepsilon_x f(x) = f(x)$  pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ); ici  $\pi_n$  est définie comme dans (2.3.2) en considérant la matrice arithmétique de Toeplitz  $P$ , c.à.d  $p_{nj} = \frac{1}{n}$  si  $n \geq 1$  et  $1 \leq j \leq n$  et  $p_{nj}=0$  si  $j > n$ .

Ainsi

$$\pi_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in X^n. \quad (2.3.11)$$

Plus explicitement, on a :

$$L_{n,\lambda}(f)(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{n-m} B_m(f_{n,m,x})(x), \quad (2.3.12)$$

où la fonction  $f_{n,m,x} \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  est définie par

$$f_{n,m,x}(y) = f\left(\frac{m}{n}y + \left(1 - \frac{m}{n}\right)x\right), \quad \text{pour tout } y \in X, \quad (2.3.13)$$

et  $B_m$  est le  $m^{\text{ième}}$  opérateur de Bernstein-Schnabl associé à  $T$  et la matrice arithmétique de Toeplitz.

Les formules (2.3.5) et (2.3.12) peuvent être utilisées pour une description plus explicite des opérateurs  $S_{n,\lambda}$  et  $L_{n,\lambda}$ .

On signale que si  $X$  est un simplexe standard de  $\mathbb{R}^p$ ,  $T$  est la projection définie par (2.2.3) et  $P$  est la matrice arithmétique de Toeplitz, alors les opérateurs de Bernstein-Schnabl sont les polynômes classiques de Bernstein à  $p$ -dimensions. En particulier, si  $X = [0, 1]$  et  $T$  est la projection définie par (2.2.5), alors

$$B_n(f)(x) = \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} f\left(\frac{h}{n}\right) x^h (1-x)^{n-h}, \quad (2.3.14)$$

$$S_{n,\lambda}(f)(x) = \sum_{h=0}^n f\left(\frac{h}{n}\right) q_{n,h}(x), \quad (2.3.15)$$

où

$$q_{n,h}(x) = \binom{n}{h} \frac{1}{b_n} \prod_{j=0}^{h-1} \left(x + \frac{j}{n}(\lambda - 1)\right) \prod_{j=0}^{n-h-1} \left(1 - x + \frac{j}{n}(\lambda - 1)\right), \quad (2.3.16)$$

et

$$L_{n,\lambda}(f)(x) = \sum_{m=0}^n \sum_{h=0}^m \binom{n}{m} \binom{m}{h} \lambda^m (1-\lambda)^{n-m} f\left(\frac{h}{n} + \left(1 - \frac{m}{n}\right)x\right) x^h (1-x)^{m-h}. \quad (2.3.17)$$

## 2.4 Résultats de convergence.

Dans cette section on présente les résultats principales de la comportement asymptotique de la processus d'approximation introduit au dessus de cette section.

On pose

$$P_{n,\lambda} = \begin{cases} L_{n,\lambda} & \lambda < 1, \\ B_n & \lambda = 1, \\ S_{n,\lambda} & \lambda > 1, \end{cases}$$

où  $B_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Bernstein par rapport à la matrice arithmétique de Toeplitz.

On note par  $P_{n,\lambda}^0$  l'opérateur identité sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et on pose

$$P_{n,\lambda}^m = P_{n,\lambda} \circ P_{n,\lambda}^{m-1}$$

On a les résultats suivants

**Théorème 2.4.1 [1]** : Pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  on a :

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,\lambda}^m(f) = f$  uniformément sur  $X$  pour tout  $m \geq 1$ .  
En particulier,  $\lim P_{n,\lambda}(f) = f$  uniformément sur  $X$ .
2.  $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{n,\lambda}^m(f) = T(f)$  uniformément sur  $X$  pour tout  $n \geq 1$ .
3. Si  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'entier positifs, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,\lambda}^{k(n)}(f) = \begin{cases} f & \text{uniformément dans } X \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 0, \\ T(f) & \text{uniformément dans } X \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = +\infty, \end{cases}$$

**Théorème 2.4.2 [1]** : pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ , et  $\lambda > 0$ , on a

$$\|P_{n,\lambda}(f) - f\| \leq 2\Omega(f, (\lambda n^{-1})^{1/2}), \quad \text{si } \lambda \leq 1,$$

$$\|S_{n,\lambda}(f) - f\| \leq \frac{n(\lambda + 1) + \lambda - 1}{n + \lambda - 1} \Omega(f, n^{-1/2}), \quad \text{si } \lambda > 1,$$

$$\|P_{n,\lambda}^m(f) - f\| \leq \psi(f, 1 - (1 - \varepsilon_{n,\lambda})^m) \leq \psi(f, (m\varepsilon_{n,\lambda})^{1/2}),$$

$$\|P_{n,\lambda}^m(f) - T(f)\| \leq \psi(f, (1 - \varepsilon_{n,\lambda})^{m/2}),$$

où

$$\varepsilon_{n,\lambda} = \frac{\lambda}{n} \quad \text{si } \lambda \leq 1,$$

ou

$$\varepsilon_{n,\lambda} = \frac{\lambda}{n + \lambda - 1} \quad \text{si } \lambda > 1.$$

On rappelle que, si  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'opérateurs linéaires bornés sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui est fortement convergente vers l'identité, alors la classe de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par

$$Tr[P_n] = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : P_n(f) = f \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\},$$

de plus, si  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels positifs converge vers 0, on met

$$S[P_n, \eta_n] = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \|P_n(f) - f\| = O(\eta_n)\},$$

on dit que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est converge sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  avec ordre  $\eta_n$  si

$$\|P_n(f) - f\| = O(\eta_n) \Rightarrow f \in Tr[P_n],$$

et

$$S[P_n, \eta_n]/Tr[P_n] \neq \emptyset$$

dans ce cas on appelle  $S[P_n, \eta_n]$  la classe de convergence de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dans notre cas on a les résultats suivantes :

**Théorème 2.4.3 [1] :**

1. Pour tout  $\lambda > 0$ , et  $m \geq 1$  la suite  $(P_{n,\lambda}^m)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  avec ordre  $(1 - (1 - \varepsilon_{n,\lambda})^m)$  qui est équivalente avec l'ordre  $m\varepsilon_{n,\lambda}$  et

$$\begin{aligned} Tr[P_{n,\lambda}^m] &= \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \|P_{n,\lambda}^m(f) - f\| = o(1 - (1 - \varepsilon_{n,\lambda})^m)\} = \\ &= \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \|P_{n,\lambda}^m(f) - f\| = o(m\varepsilon_{n,\lambda})\} = H. \end{aligned}$$

2. Pour tout  $\lambda > 0$ , et pour toute suite  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers positifs tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 0$ , la suite  $(P_{n,\lambda}^{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente avec l'ordre  $(1 - (1 - \varepsilon_{n,\lambda})^{k(n)})$  qui est équivalente avec l'ordre  $k(n)\varepsilon_{n,\lambda}$  et

$$\begin{aligned} Tr[P_{n,\lambda}^{k(n)}] &= \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \|P_{n,\lambda}^{k(n)}(f) - f\| = o(1 - (1 - \varepsilon_{n,\lambda})^{k(n)})\} = \\ &= \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \|P_{n,\lambda}^{k(n)}(f) - f\| = o(k(n)\varepsilon_{n,\lambda})\} = H. \end{aligned}$$

On doit être concerné avec une autre propriété importante des opérateurs  $P_{n,\lambda}$  qui consiste dans le fait qu'ils engendrent un semigroupe positif fortement continu sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

Pour tout  $m \geq 1$  on mettra

$A_m(X)$  : sous-espace linéaire engendré par  $\left\{ \prod_{i=1}^m h_i : h_i \in A(X), i = 1, \dots, m \right\}$ ,

$(A_m)_{m \geq 1}$  est une suite croissante du sous-espace linéaire de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , de plus, le sous-espace

$$A_\infty(X) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m(X)$$

est une sous algèbre de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui sépare  $X$  et il est dense dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

**Théorème 2.4.4 [1]** : on suppose que

$$(i) \ T(A_2(X)) \subset A(X),$$

ou, où bien

$$(i)' \ A(X) \text{ est de dimension fini et } T(A_m(X)) \subset A_m(X) \text{ pour tout } m \geq 1.$$

Alors il existe un semigroupe de contraction positif fortement continu  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $t \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$  et pour toute suite  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers positifs tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = t$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n, \lambda}^{k(n)} = T(\lambda t) \quad \text{fortement sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

de plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T \quad \text{fortement sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

et le générateur du semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  est la fermeture de l'opérateur linéaire  $Z : D(Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  défini par

$$Z(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n(f) - f)$$

pour tout  $f \in D(Z)$ , où

$$D(Z) = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n(g) - g) \text{ existe sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R})\}.$$

Finalement  $A_\infty(X) \subset D(Z)$  et pour tout  $m \geq 1$  et  $h_1, \dots, h_m \in A(X)$

$$Z\left(\prod_{i=1}^m h_i\right) = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ T(h_1 h_2) - h_1 h_2, & m = 2 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq m} (T(h_i h_j) - h_i h_j) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i, j}}^m h_r, & m \geq 3. \end{cases}$$

## 2.5 Equation diffusion associées aux opérateurs

$P_{n,\lambda}$ .

On note par  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  le générateur du semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  indiqué dans le théorème 2.4.4, ainsi le domaine  $D(A)$  de  $A$  est un sous-ensemble dense de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et

$$A_\infty \subset D(Z) \subset D(A). \quad (2.5.1)$$

Pour tout  $\lambda > 0$  et  $u_0 \in D(A)$ , le problème abstrait de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda Au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.5.2)$$

a une solution unique donnée par

$$u(t) = T(\lambda t)u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,\lambda}^{[nt]}u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{[n\lambda t]}u_0.$$

L'équation différentielle indiquée dans (2.5.2) peut être regarder comme une équation de diffusion abstrait car dans tout les cas concrets on ais capable de calculer comment l'opérateur agir, on obtient des opérateurs différentiels elliptique du second ordre qu'ils dégènerent sur la frontière de Choquet de  $H$ .

Maintenant, on traite le cas de l'espace produit avec plus de détails.

On considère la famille  $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$  des sous-ensembles compactes convexes métrisables tel que  $X_i$  contenu dans un espace euclidien. Pour tout  $i = 1, \dots, p$  soit  $T_i : \mathcal{C}(X_i, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X_i, \mathbb{R})$  une projection positive satisfait la condition (i)' du théorème 2.4.4, on met  $X = \prod_{i=1}^p X_i$  et  $T = \bigotimes_{i=1}^p T_i$ .

Pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $n \geq 1$ , on note par  $B_{n,i} : \mathcal{C}(X_i, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X_i, \mathbb{R})$  le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Bernstein-Schnabl associé avec  $T_i$ , alors, du propriétés commutative et associative du produit tensoriel des mesures il suit que

$$B_n = \bigotimes_{i=1}^p B_{n,i}.$$

Pour tout  $i = 1, \dots, p$  on note par  $(T_i(t))_{t \geq 0}$  le semigroupe engendré et par  $A_i : D(A_i) \rightarrow \mathcal{C}(X_i, \mathbb{R})$  leur générateur.

On considère le sous-espace  $\bigotimes_{i=1}^p D(A_i)$  engendré par

$$\left\{ \bigotimes_{i=1}^p f_i : f_i \in D(A_i), i = 1, \dots, p \right\}.$$

**Théorème 2.5.1 [1]** : Sous les hypothèses ci-dessus, l'opérateur  $T$  satisfait la condition (i)' du théorème 2.4.4, de plus, on note par  $(T(t))_{t \geq 0}$  le semigroupe engendré et par  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  leur générateur, on a

$$T(t) = \bigotimes_{i=1}^p T_i(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

$$\bigotimes_{i=1}^p D(A_i) \subset D(A),$$

et  $A$  est la fermeture de l'opérateur  $\sum_{i=1}^p \bigotimes_{j=1}^p A_{ij}$  défini sur  $\bigotimes_{i=1}^p D(A_i)$ , où

$$A_{ij} = \begin{cases} \text{L'opérateur identité sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) & \text{si } j \neq i, \\ A_i & \text{si } j = i \end{cases}$$

# Chapitre 3

## Opérateurs de Bernstein-Schnabl et opérateurs de Stancu-Mühlbach.

### 3.1 Opérateurs de Bernstein-Schnabl.

#### 3.1.1 Notions et résultats préliminaires.

Soit  $X$  un espace compact de Hausdorff et notons par  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  le Banach réticulé de toutes les fonctions réelles continues sur  $X$ , muni de la topologie norme sup et de l'ordre naturel. Soit  $M^+(X)$  (respectivement  $M^1(X)$ ) l'ensemble de toutes les mesures positives (repect. probabilités) de Radon sur  $X$ .

Considérons l'opérateur linéaire positif  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et le sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

On dit que  $S$  est un ensemble T-Korovkin si pour tout ensemble  $(L_i)_{i \in I}$  d'opérateurs linéaires positifs sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  satisfaisant la condition

$$\lim_{i \in I} L_i(h) = T(h), \quad \text{pour tout } h \in S,$$

ainsi on a

$$\lim_{i \in I} L_i(f) = T(f), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

Si  $T$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $S$  un ensemble T-Korovkin, on dit simplement que  $S$  est un ensemble Korovkin.

Dans le but de caractériser les ensembles de Korovkin il est utile d'introduire la frontière de Choquet  $\partial_s X$  de  $X$  par rapport à  $S$  qui est définie par

$$\begin{aligned} \partial_s X &= \{x \in X : \text{si } \mu \in M^+(X) \text{ et } \mu(h) = h(x), \text{ pour tout } h \in S \\ &\text{alors } \mu(f) = f(x), \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})\}. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Alors on a (H. Bauer [11], M.W.Grossman [17])

$$S \text{ est un ensemble Korovkin si et seulement si } \partial_s X = X. \quad (3.1.2)$$

Un autre résultat qui peut être utile dans la suite est donné par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1 [2]** : Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui sépare les points de  $X$ . Alors

$$\begin{aligned} \{\mathbf{1}\} \cup S \cup S^2, \quad \text{est un ensemble Korovkin,} \\ \text{où } S^2 = \{f^2 : f \in S\} \text{ et } \mathbf{1} \text{ est la fonction constante unité.} \end{aligned}$$

On rappelle quelques résultats concernant les projections linéaires positives dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

On considère la projection linéaire positive  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  (c.à.d  $T$  est un opérateur linéaire positif tel que  $T^2 = T$ ). Supposons que  $T(1) = 1$  et l'image  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$  sépare les points de  $X$ .

Sous ces hypothèses on sait que

$$\partial_H X = \{x \in X : T(f)(x) = f(x), \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})\}. \quad (3.1.3)$$

On a prouvé le résultat suivant :

**Théorème 3.1.2 [2]** : Soit  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  une projection linéaire positive tel que  $T(1) = 1$  et l'image  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$  sépare les points de  $X$ . Alors pour toute fonction  $\Phi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  telle que  $\Phi \leq T(\Phi)$  et  $\partial_H X = \{x \in X : T(\Phi)(x) = \Phi(x)\}$ , l'ensemble  $H \cup \{\emptyset\}$  est un ensemble T-Korovkin.

On a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.1.1** : Soit  $X$  un espace compact de Hausdorff et soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui sépare les points de  $X$  telle que les séries  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2$  convergent uniformément sur  $X$ . Alors  $\{\mathbf{1}\} \cup \{h_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2\}$  est un ensemble Korovkin.

**Preuve.**

Soit  $x \in X$  et  $\mu \in M^+(X)$  tel que  $\mu(1) = 1$ ,  $\mu(h_n) = h_n(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mu(\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^2(x)$ .

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu((h_n - h_n(x))^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(h_n^2) - h_n^2(x)) = 0.$$

et par conséquent  $\mu((h_n - h_n(x))^2) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Il suit que le support  $S(\mu)$  de  $\mu$  est contenu dans  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{y \in X : h_n(y) = h_n(x)\} = \{x\}$  car  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sépare les points de  $X$ .

Donc il existe  $\lambda \geq 0$  tel que  $\mu(f) = \lambda f(x)$  pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et finalement, comme  $\mu(1) = 1$ , on a  $\lambda = 1$  et donc  $\mu(f) = f(x)$  pour tout

$f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

De (3.1.1) et (3.1.2) on obtient le résultat.  $\blacklozenge$

Avant d'établir le résultat suivant, il est nécessaire de signaler que, si  $X$  est un espace compact métrisable de Hausdorff et  $H$  est un sous-espace linéaire de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui sépare les points de  $X$ , alors il est toujours possible de construire une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $H$  qui sépare les points de  $X$  telle que les séries  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2$  convergent uniformément. Il suffit de considérer un sous-ensemble dénombrable dense  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H$  ( $H$  étant séparable) et de poser  $h_n = \frac{l_n}{\|l_n\|^{2^{n/2}}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 3.1.2 :** Soit  $X$  un espace compact métrisable de Hausdorff et  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  une projection linéaire positive. Supposons que  $T(1) = 1$  et l'image  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$  sépare les points de  $X$ . Soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $H$  qui sépare les points de  $X$  telle que les séries  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2$  convergent uniformément vers la fonction  $\Phi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . Alors

$$\Phi \leq T(\Phi) \quad \text{et} \quad \partial_H X = \{x \in X : T(\Phi)(x) = \Phi(x)\}.$$

Par conséquent  $H \cup \{\emptyset\}$  est T-Korovkin. En particulier  $H \cup H^2$  est un ensemble T-korovkin.

**Preuve.**

Pour tout  $x \in X$  on considère la mesure de Radon positive  $\mu_x$  dans  $X$  définie en posant

$$\mu_x(f) = T(f)(x), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

Pour tout  $h \in H$  on a  $\mu_x(h) = h(x)$ , donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &= |\mu_x(h_n)| = \left| \int h_n \, d\mu_x \right| \leq \int |h_n| \, d\mu_x \leq \\ &\leq \left( \int h_n^2 \, d\mu_x \right)^{1/2} \left( \int 1 \, d\mu_x \right) = (\mu_x(h_n^2))^{1/2} \end{aligned}$$

et aussi

$$h_n^2(x) \leq T(h_n^2)(x)$$

donc

$$\Phi \leq T(\Phi).$$

Maintenant, si  $x \in \partial_H X$ , alors  $T(\Phi)(x) = \Phi(x)$  par (3.1.3).

par conséquent, on suppose que  $T(\Phi)(x) = \Phi(x)$  pour quelques  $x \in X$ , alors  $\mu_x(\Phi) = \Phi(x)$ .

De plus  $\mu_x(h_n) = h_n(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En vertu du lemme 3.1.1 et proposition 3.1.2, on peut conclure que  $T(f)(x) = f(x)$  pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui implique que  $x \in \partial_H X$  par (3.1.3).

La dernière assertion suit du théorème 3.1.2.  $\blacklozenge$

### 3.1.2 Opérateurs de Bernstein-Schnabl et leurs itérations.

Soit  $X$  un sous-ensemble compact convexe métrisable d'un espace localement convexe de Hausdorff et  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  une projection linéaire positive. Soit  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$  l'image de  $T$  et notons par  $A(X)$  l'espace de toutes les fonctions affines continues dans  $X$ . On suppose que

$$A(X) \subset H \tag{3.1.4}$$

(et donc  $H$  sépare les points de  $X$  et  $T(1) = 1$ ).

Pour tout  $\bar{x} \in X$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  et  $h \in H$

$$\text{la fonction } x \in X \mapsto h((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x) \text{ appartient à } H. \tag{3.1.5}$$

Soit  $P = (p_{nj})_{n \geq 1, j \geq 1}$  une matrice stochastique triangulaire supérieure infinie, c.à.d

$p_{nj} = 0$  quand  $j > n$  et  $\sum_{j=1}^{\infty} p_{nj} = \sum_{j=1}^n p_{nj} = 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

Pour tout  $n \geq 1$  on considère l'application  $\pi_n : X^n \rightarrow X$  définie en posant pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$

$$\pi_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n p_{nj} x_j.$$

Pour tout  $x \in X$  on note par  $\mu_x \in M^1(X)$  la mesure probabilité de Radon sur  $X$  définie par

$$\mu_x(f) = T(f)(x) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}). \quad (3.1.6)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , on considère l'opérateur linéaire positif  $B_n : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  défini en posant pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $x \in X$

$$B_n(f)(x) = \int_{X^n} f \circ \pi_n d \left( \bigotimes_{i=1}^n \mu_{x,i} \right) \quad (3.1.7)$$

où  $\mu_{x,i} = \mu_x$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

L'opérateur linéaire  $B_n$  est appelé le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Bernstein-Schnabl par rapport à la matrice  $P$  et la projection  $T$ , selon la définition proposé par M.W. Grossman dans [17].

Notre but est d'étudier le comportement asymptotique des suites  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par (3.1.7), et les suites de leurs itérations.

Comme d'habitude on pose

$$B_n^0 = I \quad \text{et} \quad B_n^m = B_n \circ B_n^{m-1} \quad (3.1.8)$$

pour tout  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ .

**Théorème 3.1.3 [2]** : Sous les hypothèses (3.1.4) et (3.1.5) ci-dessus, pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  on a :

1.  $\lim_{m \rightarrow \infty} B_n^m(f) = T(f)$  uniformément sur  $X$  pour tout  $n \geq 1$ ,
2. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^m(f) = f$  uniformément sur  $X$  pour tout  $m \geq 1$ ,

**Preuve.**

On note que pour tout  $h \in H$  et  $x \in X$  ; puisque  $T(h) = h$ ,  $\mu_x(h) = h(x)$ . Alors pour tout  $n \geq 1$  et en vertu de (3.1.5) on a

$$\begin{aligned} B_n(h)(x) &= \int \dots \int h(\pi_n(x_1, \dots, x_n)) d\mu_x(x_1) \dots d\mu_x(x_n) = \\ &= h(\pi_n(x, \dots, x)) = h(x). \end{aligned}$$

Donc  $B_n(h) = h$  pour tout  $h \in H$  et  $n \geq 1$  et aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^m(h) = \lim_{m \rightarrow \infty} B_n^m(h) = h = T(h). \quad (1)$$

Considérons maintenant  $h \in A(X) \subset H$ , alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$  on note par  $pr_i : X^n \rightarrow X$  la  $n^{\text{ième}}$  projection, on a  $h \circ \pi_n = \sum_{i=1}^n p_{ni} h \circ pr_i$  et donc

$$\begin{aligned} h^2 \circ \pi_n &= \left( \sum_{i=1}^n p_{ni} h \circ pr_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 h^2 \circ pr_i + \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ni} p_{nj} (h \circ pr_i)(h \circ pr_j). \end{aligned}$$

il suit que pour tout  $x \in X$

$$B_n(h^2)(x) = \int_{X^n} h^2 \circ \pi_n d \left( \bigotimes_{i=1}^n \mu_{x,i} \right) = \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \int_X h^2 d\mu_x +$$

$$+2 \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ni} p_{nj} \right] h^2(x) = \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 T(h^2)(x) + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right] h^2(x).$$

En conclusion

$$B_n(h^2) = \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 T(h^2) + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right] h^2. \quad (2)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} B_n^2(h^2) &= \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 T(h^2) + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right] B_n(h^2) = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right] T(h^2) + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right] \left[ \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right] T(h^2) + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right]^2 h^2. \end{aligned}$$

En général, pour tout  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} B_n^m(h^2) &= \left[ \sum_{k=0}^m (1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2)^k \right] \left[ \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right] T(h^2) + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right]^m h^2 = \\ &= \left[ 1 - (1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2)^{m+1} \right] T(h^2) + \left( 1 - \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right)^m h^2. \quad (3) \end{aligned}$$

par conséquent pour tout  $h \in A(X)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_n^m(h^2) = \left[ \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \right]^{-1} \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 T(h^2) = T(h^2) \quad (4)$$

Tandis que, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_{ni}^2 = 0$  ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^m(h^2) = h^2 \quad (5)$$

donc l'assertion 1) suit de (1), (4) et proposition 3.1.2, pendant que l'assertion 2) suit de (1), (5) et théorème 3.1.1 appliqué à  $S = A(X)$ .  $\blacklozenge$

A présent, on s'intéresse à l'étude du comportement limite de la  $k(n)$ ième itération  $B_n^{k(n)}$  de  $B_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  étant une suite d'entiers positifs.

**Théorèmes 3.1.4 [2]** : Sous les hypothèses (3.1.4) et (3.1.5) ci-dessus, soit  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers positifs. De plus on suppose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 = 0,$$

Pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  on a :

1. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{k(n)}(f) = f$  uniformément sur  $X$ .
2. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{k(n)}(f) = T(f)$  uniformément sur  $X$ .

**Preuve.**

En vertu de la formule (3) ci-dessus, pour tout  $h \in A(X)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$B_n^{k(n)}(h^2) = \left[ 1 - \left(1 - \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2\right)^{k(n)} \left(1 - \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2\right) \right] T(h^2) + \left(1 - \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2\right)^{k(n)} h^2.$$

Donc on a

$$\left(1 - \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2\right)^{k(n)} = \exp \left[ -k(n) \left( \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 \right) \log \left( 1 - \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 \right) / \left( -\sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 \right) \right].$$

on peut conclure comme dans la preuve du théorème 3.1.3.  $\blacklozenge$

Sous des hypothèses supplémentaires il est possible d'étudier ce qui se passe si  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 = +t \in ]0, +\infty[$ .

Pour des raisons de simplicité on se limite au cas où  $P$  est la matrice arithmétique de Toeplitz, c.à.d  $p_{n_i} = \frac{1}{n}$  si  $n \geq 1$  et  $i = 1, \dots, n$  et  $p_{n_i} = 0$  si  $i > n$ , (cependant le résultat suivant reste vrai pour une matrice stochastique générale  $P$  dont les coefficients satisfont les conditions  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n p_{n_i}^2 \right)^{-1} \left( \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n p_{n_{i_1}}^{r_1} \dots p_{n_{i_s}}^{r_s} p_{n_{i_{s+1}}} p_{n_{i_k}} \right) = \delta_{k, m-1}$  (où  $\delta_{k, m-1}$  désigne le symbole de Kronecker). pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , avec  $m \geq 3$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq s \leq \frac{m}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}$  tel que  $r_1 + \dots + r_s = m - k + s$ ).

On pose pour tout  $m \geq 1$

$A_m$  : le sous espace linéaire engendré par

$$\left\{ \prod_{i=1}^m h_i : h_i \in A(X), i = 1, \dots, m \right\}.$$

$(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de sous-espace linéaire de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

De plus le sous-espace

$$A_\infty = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$$

est une sous-Algèbre de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui sépare  $X$  et qui est donc dense dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

On peut établir notre résultat principal :

**Théorème 3.1.5** : Sous les hypothèses (3.1.4) et (3.1.5) ci-dessus, on considère la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs de Bernstein-Schnabl associés à  $T$  et à la matrice arithmétique de Toeplitz et on suppose que

$$T(A_2) \subset A(X)$$

ou, alternativement,

(i)'  $A(X)$  est de dimension fini et  $T(A_m) \subset A_m$  pour tout  $m \geq 1$ .

Alors il existe un semigroupe de contraction positive  $(T(t))_{t \geq 0}$  fortement continu sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $t \geq 0$  et pour toute suite  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = t$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{k(n)} = T(t) \quad \text{fortement sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

De plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T \quad \text{fortement sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),$$

et le générateur du semigroupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  est la fermeture de l'opérateur linéaire  $Z : D(Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  défini par

$$Z(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n(f) - f)$$

pour tout  $f \in D(Z) = \left\{ g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n(g) - g) \text{ existe dans } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \right\}$ .

Finalement,  $A_\infty \subset D(Z)$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  et  $h_1, \dots, h_m \in A(X)$

$$Z\left(\prod_{i=1}^m h_i\right) = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ T(h_1 h_2) - h_1 h_2, & m = 2 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq m} (T(h_i h_j) - h_i h_j) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i, j}}^m h_r, & m \geq 3. \end{cases}$$

**Preuve.** voir [2]

## 3.2 Opérateurs de Stancu-Mühlbach.

### 3.2.1 Définitions.

On a besoin de rappeler quelques résultats préliminaires.

Soit  $X$  un espace compact de Hausdorff et  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  un Banach réticulé de toutes les fonctions réelles sur  $X$ , muni de la norme sup et de l'ordre naturel.

Si  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  un opérateur linéaire positif et si  $S$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , on rappelle que  $S$  est dit un ensemble T-Korovkin si pour tout opérateur linéaire positif  $(L_i)_{i \in I}$  sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  tel que

$$\lim_{i \in I} L_i(h) = T(h), \quad \text{pour tout } h \in S,$$

il suit

$$\lim_{i \in I} L_i(f) = T(f), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

Si  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  est une projection linéaire positive,  $T$  est un opérateur positif tel que  $T^2 = T$ , on a les résultats suivants :

**Théorème 3.2.1 [12]** : Soient  $X$  un espace compact convexe métrisable de Hausdorff et  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  une projection linéaire positive, telle que  $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  et l'image  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$  sépare les points de  $X$ . Soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $H$  qui sépare les points de  $X$  telle que les séries  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2$  convergent uniformément vers la fonction  $\Phi \in C(X, \mathbb{R})$ .

Alors

$H \cup \{\Phi\}$  (en particulier  $H \cup H^2$ ) est un ensemble T-korovkin.

On rappelle la définition de  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Stancu-Mühlbach, pour des raisons simplicité on considère les opérateurs de Stancu-Mühlbach associés à la matrice arithmétique de Toeplitz et à la suite des nombres réels

postifs  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Soient  $X$  un sous-ensemble compact convexe métrisable d'un espace localement convexe de Hausdorff et  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  une projection linéaire positive. Soit  $H = T(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$  l'image de  $T$ .

On désigne par  $A(X)$  l'espace de toutes les fonctions continues affines sur  $X$ . On suppose que

$$A(X) \subset H, \quad (3.2.1)$$

(donc  $H$  sépare les points de  $X$  et  $T(1) = 1$ ), et pour tout  $\bar{x} \in X$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  et  $h \in H$

$$\text{la fonction } x \in X \mapsto h((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x) \text{ appartient à } H. \quad (3.2.2)$$

Pour tout  $x \in X$  on note par  $\mu_x$  la mesure probabilité de Radon sur  $X$  définie pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  par

$$\mu_x(f) = T(f)(x). \quad (3.2.3)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , selon [11] et [12] on note par  $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction réelle définie pour tout  $a \in \mathbb{R}$  par

$$p_n(a) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + ja), \quad (3.2.4)$$

si  $k = 1, \dots, n$  on pose

$$V(n, k) = \left\{ (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{N}^k : v_1, \dots, v_k \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^k v_i = n \right\}, \quad (3.2.5)$$

pour plus de simplicité on écrit  $|v|_k = n$  au lieu de  $v = (v_1, \dots, v_k) \in V(n, k)$ .

Si on note par  $s(n, k)$  le coefficient de  $a^{n-k}$  du polynôme  $p_n(a)$ , on a

$$p_n(a) = \sum_{k=1}^n s(n, k) a^{n-k} \quad (3.2.6)$$

De plus

$$s(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{|v|_k=n} \frac{1}{v_1 \dots v_k}, \quad (3.2.7)$$

$$p_{n+1}(a) = p_2(a) \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{k!} a^{n-k} \sum_{|v|_k=n} \frac{v_1^2 + \dots + v_k^2}{v_1 \dots v_k}. \quad (3.2.8)$$

Finalement, pour tout  $(v_1, \dots, v_k) \in V(n, k)$  on considère la fonction  $\pi_{v_1, \dots, v_k} : X^k \rightarrow X$  définie pour tout  $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$  par

$$\pi_{v_1, \dots, v_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{v_1 x_1 + \dots + v_k x_k}{n}. \quad (3.2.9)$$

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Alors le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Stancu-Mühlbach  $Q_{n, a_n} : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  par rapport à la projection  $T$ , est défini pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $x \in X$  par

$$Q_{n, a_n}(f)(x) = \frac{1}{p_n(a_n)} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} a_n^{n-k} \sum_{|v|_k=n} \frac{1}{v_1 \dots v_k} \int_{X^n} f \circ \pi_{v_1, \dots, v_k} d \left( \bigotimes_{i=1}^k \mu_{x, i} \right) \quad (3.2.10)$$

$$\left( = \frac{1}{p_n(a_n)} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} a_n^{n-k} \sum_{|v|_k=n} \frac{1}{v_1 \dots v_k} \int_X \dots \int_X f \left( \frac{v_1 x_1 + \dots + v_k x_k}{n} \right) dx_1 \dots dx_k \right)$$

où  $\mu_{x, i} = \mu_x$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

Si  $a_n = 0$  le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Stancu-Mühlbach coïncide avec le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Bernstein-Schnabl.

Les itérations des opérateurs de Stancu-Mühlbach sont définies par

$$Q_{n,a_n}^0 = I \text{ et } Q_{n,a_n}^m = Q_{n,a_n} \circ Q_{n,a_n}^{m-1} \quad (3.2.11)$$

pour tout  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ .

En utilisant (3.2.6) (3.2.7) et (3.2.8), on a la formule suivante, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , et pour tout  $h \in H$

$$Q_{n,a_n}(h) = h, \quad (3.2.12)$$

De plus, si  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ , et  $h \in A(X)$

$$Q_{n,a_n}^m(h^2) = \left( \frac{n-1}{n} \frac{1}{1+a_n} \right)^m h^2 + \left( 1 - \left( \frac{n-1}{n} \frac{1}{1+a_n} \right)^m \right) T(h^2). \quad (3.2.13)$$

### 3.2.2 Semigroupes limite des opérateurs de Stancu-Mühlbach.

Supposons que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels positifs.

Dans le but d'étudier quelques propriétés de convergence pour le cas où les suites  $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers un nombre réel  $b$ , on considère les notations suivantes, pour tout  $m \geq 1$ , on pose

$A_m$  : le sous espace linéaire engendré par

$$\left\{ \prod_{i=1}^m h_i : h_i \in A(X), i = 1, \dots, m \right\}, \quad (3.2.14)$$

$(A_m)_{m \geq 1}$  est une suite croissante de sous espaces linéaires de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . De plus le sous espace

$$A_\infty = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad (3.2.15)$$

est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  qui sépare les points de  $X$  et qui est dense dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  en vertu du théorème de Stone-Weierstrass.

De plus, on considère l'opérateur linéaire  $L_0 : A_\infty \rightarrow A_\infty$  défini pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $h_1, \dots, h_m \in A(X)$  par

$$L_0 \left( \prod_{i=1}^m h_i \right) = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ T(h_1 h_2) - h_1 h_2, & m = 2 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq m} (T(h_i h_j) - h_i h_j) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i, j}}^m h_r, & m \geq 3. \end{cases} \quad (3.2.16)$$

**Lemme 3.2.1 :** Soit  $n \geq 1$ ,  $k = 1, \dots, n$ , et pour tout  $l \geq 1$  posons

$$N(l) = \{(i_1, \dots, i_l) \in \{1, \dots, k\}^l : i_r \neq i_s \text{ pour } r \neq s\}. \quad (3.2.17)$$

Si  $(v_1, \dots, v_k) \in V(n, k)$  on a

$$\sum_{(i_1, \dots, i_l) \in N(l)} v_{i_1}^2 v_{i_2} \dots v_{i_l} = n^{l-1} \sum_{i=1}^k v_i^2 + U_n(v_1, \dots, v_k; l) \quad (3.2.18)$$

avec

$$|U_n(v_1, \dots, v_k; l)| \leq u_{1l} n^{l-2} \sum_{i=1}^k v_i^3 + u_{2l} n^{l-3} \sum_{(i_1, i_2) \in N(2)} v_{i_1}^2 v_{i_2}^2$$

où  $u_{1l}$  et  $u_{2l}$  sont des constantes réelles dépendent de  $l$ .

De plus, pour tout  $l \geq 2$ , il suit que

$$\sum_{(i_1, \dots, i_l) \in N(l)} v_{i_1} \dots v_{i_l} = n^l n^{l-2} \frac{l(l-1)}{2} \sum_{i=1}^k v_i^2 + W_n(v_1, \dots, v_k; l) \quad (3.2.19)$$

avec

$$|W_n(v_1, \dots, v_k; l)| \leq w_{1l} n^{l-3} \sum_{i=1}^k v_i^3 + w_{2l} n^{l-4} \sum_{(i_1, i_2) \in N(2)} v_{i_1}^2 v_{i_2}^2$$

où  $w_{1l}$  et  $w_{2l}$  sont des constantes réelles dépendent de  $l$ .

**Preuve.** voir [12]

**Théorème 3.2.2 :** Supposons que les conditions (3.2.1) et (3.2.2) sont satisfaites et que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels positifs telle que les suites  $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $b \in \mathbb{R}$ .

Alors pour tout  $f \in A_\infty$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(Q_{n, a_n}(f) - f) = (1 + b)L_0(f), \quad \text{uniformément sur } X.$$

**Preuve.** voir [12]

Maintenant, on étudie le comportement asymptotique de la suite  $(Q_{n, a_n}^{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  dans la cas où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = t > 0$ .

**Théorème 3.2.3 :** Supposons que les conditions (3.2.1) et (3.2.2) sont satisfaites et que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels positifs telle que les suites  $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $b \in \mathbb{R}$ .

On considère la suite  $(Q_{n, a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  des opérateurs de Stancu-Mühlbach associés à  $T$  (3.2.10) et on suppose que

$$(i) \quad T(A_2) \subset A(X)$$

ou, alternativement,

$$(i)' \quad A(X) \text{ est de dimension fini et } T(A_m) \subset A_m \text{ pour tout } m \geq 1.$$

Alors il existe un semigroupe de contraction positive  $(Q(t))_{t \geq 0}$  fortement continu sur  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $t \geq 0$  et pour toute suite  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers positifs tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = t$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n, a_n}^{k(n)} = Q(t), \quad \text{fortement sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

De plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(t) = T, \quad \text{fortement sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),$$

et le générateur du semigroupe  $(Q(t))_{t \geq 0}$  est la fermeture de l'opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  défini par

$$A(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(Q_{n, a_n}(f) - f) \quad (3.2.20)$$

pour tout  $f \in D(A)$ , où

$$D(A) = \left\{ f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} n(Q_{n, a_n}(f) - f) \text{ existe sur } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \right\}.$$

Finalement,  $A_\infty \subset D(A)$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  et  $h_1, \dots, h_m \in A(X)$

$$A\left(\prod_{i=1}^m h_i\right) = (1+b) L_0 \left( \prod_{i=1}^m h_i \right). \quad (3.2.21)$$

**Preuve.** voir [12]

### 3.2.3 Les solutions du problème de Cauchy associé.

On donne une application du théorème 3.2.3 dans le cas où  $X = B(x_0, r)$  est la boule dans  $\mathbb{R}^p$  ( $p \geq 1$ ) de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ . Dans ce cas, le  $n^{\text{ième}}$  opérateur de Stancu-Mühlbach  $Q_{n, a_n}$  associé à la matrice arithmétique de Teoplitz est défini pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $x \in X$  par

$$Q_{n,a_n}(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{p_n(a_n)} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} a_n^{n-k} \left( \frac{r^2 - \|x_0 - x\|^2}{r\sigma_p} \right)^k \sum_{|v|_k=n} \frac{1}{v_1 \dots v_k} & \text{si } \|x - x_0\| < r, \\ \int_{\partial X} \dots \int_{\partial X} \frac{f\left(\frac{v_1 x_1 + \dots + v_k x_k}{n}\right)}{\|x_1 - x\|^p \dots \|x_k - x\|^p} d\sigma(x_1) \dots d\sigma(x_k) & \text{si } \|x - x_0\| < r, \\ f(x) & \text{si } \|x - x_0\| = r, \end{cases}$$

où  $\sigma_p$  est l'aire de la surface de la sphère unité et  $\sigma$  est la mesure surface au frontière  $\partial X$  de  $X$ .

De plus, la projection positive  $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  est définie pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  et  $x \in X$  par

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{r^2 - \|x_0 - x\|^2}{r\sigma_p} \int_{\partial X} \frac{f(z)}{\|z - x\|^p} d\sigma(z) & \text{si } \|x - x_0\| < r, \\ f(x) & \text{si } \|x - x_0\| = r, \end{cases}$$

pour tout  $i, j = 1, \dots, p$ , il suit

$$T(pr_i pr_j) = \begin{cases} pr_i pr_j & \text{si } i \neq j, \\ \frac{1}{p} \left( r^2 - \sum_{\lambda \neq i} (pr_\lambda - pr_\lambda(x_0))^2 + (p-1)(pr_i - pr_i(x_0))^2 \right) + 2pr_i(x_0)pr_i - pr_i^2(x_0) & \text{si } i = j, \end{cases}$$

et donc la projection  $T$  satisfait la condition (i)' du théorème 3.2.3.

Si  $A$  est l'opérateur défini par (3.2.20), alors, par la formule précédente et (3.2.21), il est facile de déduire que l'opérateur  $A$  coïncide sur  $A_\infty$  avec l'opérateur différentiel elliptique dégénéré du second ordre

$$W(f)(x) = (1+b) \frac{r^2 - \|x_0 - x\|^2}{2p} \Delta f(x),$$

Donc, la fonction

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n^{[nt]}(u_0))(x), \quad t \geq 0, x \in X,$$

est la solution unique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = Cu(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in X, u_0 \in D(C), \end{cases}$$

où  $C$  est la fermeture de  $W$ .

# Bibliographie

- [1] **F. Altomare**, *Positive projections, approximation processes and degenerate diffusion equations* ; in : Proceedings of the international Meeting in Mathematical Analysis and its applications on the Occasion of the seventieth Birthday of Professor G. Aquaro (Bari, Italy, November 9-10, 1990) ; Conf. sem. Mat. univ. Bari 241 (1991), 43-68.
- [2] **F. Altomare**, *Limit Semigroups of Bernstein-Schnabl operators associated with positive projections*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie IV, (16) 2 (1989) , 259-279.
- [3] **F. Altomare**, *On a sequence of Bernstein-Schnabl operators defined on a cylinder*, in " *Approximation theory VI* ", C.K. Chu, L.L. Schumaker and J.D. Wards eds., Academic Press Boston, 1989, pp. 1-4.
- [4] **F. Altomare**, *Lototsky-Schnabl operators on compact convex sets and their associated limit semigroups*, Mh. Math., 114, (1992), 1-13.
- [5] **F. Altomare**, **R. Amiar**, *Asymptotic formulae for positive operators*, Mathematica Belkanica, New Series, 16 (2002), Fasc 1-4, 283-304.
- [6] **F. Altomare**, and **A. Attalienti**, *Forward diffusion equations and positive operators*, Math. Z. 225(1997), 211-229.
- [7] **F. Altomare**, and **M. Campiti**, , *Korovkin-type Approximation Theory and its applications*, de Gruyter et Co, Berlin, New-york, (1994)
- [8] **F. Altomare**, and **S. Romanelli**, , *On some classes of Lototsky-Schnabl operators*, Note di matimatica Vol. XII, 1-13 (1992).
- [9] **F. Altomare**, **I. Carbone**, *On some degenerate differential operators weighted fonction spaces*, J. Math. Analysis Appl. 213 (1997) , 308-333.
- [10] **F. Altomare**, **I. Rasa**, *Towards a characterization of a class of differential operators associated with positive projections*, Atti Esm. Math. Fis. Univ. Modena, Suppl. Vol. XLVI, (1998), 3-38.

- [11] **H. Bauer**, *Theorems of Korovkin type for adapted spaces*, ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23 (1973), 245-260, MR 50 10643.
- [12] **M. Campiti**, *limit semigroups of Stancu-Mühlbach operators associated with positive projection*, (1990), AMS classification numbers : 47B55, 47D07, 41A36.
- [13] **M. Campiti, G. Metafuno, D. Pallara, S. Romanelli**, *Semigroups for ordinary differential operators*. Section VI. 4 in [64].
- [14] **P. H. Clément**, and **C.A. Timmermanns**, , *On  $C_0$ -semigroups generated by differential operators satisfying Wentzel's boundary conditions*, Indag. Math. 89 (1986), 379-387.
- [15] **J.A. Goldstein**, *Semigroups of operators and applications*, Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1985).
- [16] **W. Feller**, *The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations*, Ann. of Math. (2) 55 (1952), 468-519.
- [17] **M.W. Grossman**, *Note on a generalized Bohman-Korovkin theorem*, J. Math. Anal. Appl. 45 (1974), 43-46 MR 49 947.
- [18] **R. Martini**, *A relation between semi-groups and sequences of approximation operators*, Indag. Math. 35 (1973), 456-465.
- [19] **R. Martini**, *Differential operators degenerating at the boundary as infinitesimal generators of semi-groups*, Ph. D. Thesis, T. H. Delft, 1975.
- [20] **T. Nishishiraho**, *Quantitative theorems on approximation processes of positive linear operators*, Multivariate Approximation Theory II (Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach 1982; ed. by W. Schempp and K. Zeller) ISNM Vol. 61, 297-311, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1982.
- [21] **T. Nishishiraho**, *The order of approximation by positive linear operators*, Tohoku Math. J. 40 (1988) n. 4, 617-632.
- [22] **A. Pazy**, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1983).
- [23] **I. Rasa**, *Generalized Bernstein operators and convex functions*, Studia Univ. " Babeş-Bolyai", Math. 33 (1988), 2, 36-39.
- [24] **I. Rasa**, *On the monotonicity of sequences of Bernstein-Schnabl operator*, Anal. Numér Théor. Approx. 17 (1988), no. 2, 185-187.
- [25] **K. Taira**, *Diffusion Processes and partial differential equations*, Academic Press, Boston-San Diego-London-Tokyo, (1988).

- [26] **H.F. Trotter**, *Approximation of semi-groups of operators*, Pacific J. Math. 8 (1958), 887-919.
- [27] **E.V. Voronovskaja**, *The asymptotic properties of the approximation of functions by linear positive operators* (in Russian), Doklady SSSR, 146, (1962), 1013-1016.