وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University –
Annaba

جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Analyse Numérique

Sur l'Analyse Numérique de la Méthode de Schwarz Pour une Classe de Problèmes Elliptiques Non Linéaires

Par:
ABIDA HARBI

Sous la direction de
Pr. MESSAOUD BOULBRACHENE
Sultan Qaboos University - Oman
ET
Pr. MOHAMED HAIOUR
U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT :	Sissaoui Hocine	Professeur	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	Siddiqi Abul Hasan	Professeur	Sharda University
EXAMINATEUR :	Chibi Ahmed Salah	Professeur	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	Ayadi Abdelhamid	Professeur	U.Oum El Bouaghi

Année : 2012

REMERCIEMENTS

En premier lieu et avant tout je remercie Dieu le tout puissant, de m'avoir aidé à réaliser et à terminer cette thèse.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance au directeur de thèse, le Professeur M. Boulbrachène de l'université du Sultan Qaboos - Oman, de m'avoir mis sur la voie des méthodes de décomposition de domaine et spécialement la méthode de Schwarz, je voudrais le remercier également pour toutes ses directives et conseils objectifs et précieux qui m'ont amené à terminer cette thèse.

Je remercie également le Professeur M. Haiour à l'université Badji Mokhtar Annaba pour toute la documentation qu'il a mit à ma disposition et ses encouragements qui m'ont été d'un apport estimable.

Mes vifs remerciements au Professeur H.Sissaoui à l'université Badji Mokhtar Annaba pour l'honneur qu'il me fait en présidant le Jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements également au professeur A.H.Siddiqi de Sharda University – Inde, pour l'intérêt qu'il a manifesté à mon travail.

Mes remerciements vont également au Professeur A.S.Chibi et au Dr. A.Laouar Maître de Conférence A, à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour avoir bien voulu consacrer du temps à la lecture de cette thèse ainsi que pour leurs conseils avisées.

De même je remercie le Professeur A.Ayadi de l'université de Oum El Bouaghi, pour avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury.

Résumé

Le travail de cette thèse concerne l'analyse numérique de méthode de Schwarz pour une classe de problèmes elliptiques non-linéaires.

Plus précisément, cette thèse traite de l'approximation par décomposition en sous-domaines d'une classe d'équations aux dérivées partielles elliptiques non-linéaires, dans le contexte de la méthode de Schwarz.

Pour cela on considère le cas de deux sous domaines avec recouvrement, en utilisant des discrétisations indépendantes sur chaque sous-domaine (Nonmatching Grids); ce type de discrétisation offre la possibilité de choisir la discrétisation la mieux adaptée à la géométrie du sous-domaine ainsi qu'a la régularité de la solution.

Le résultat principal obtenu est l'ordre de convergence optimal entre la solution exacte et de 'EDP et le énième itéré de l'algorithme de Schwarz discret.

Mots clés: Méthode de Schwarz- Méthode des Eléments Finis- Estimation de l’Erreur d’Approximation Ordre de convergence- Algorithme.

Table des Matières

Chapitre 1

1.1 Introduction

La méthode alternée de Schwarz a été introduite par H. A. Schwarz dans le but de résoudre les problèmes aux limites linéaires. La méthode génère une suite de sous-problèmes dont la suite de solutions converge vers la solution du problème. La littérature relative à cette méthode appliquée à des problèmes linéaires est très vaste ([1], [7], [10] et [11] ainsi que la bibliographie qui s' y trouve). Cependant, quelques travaux seulement sont connus sur cette méthode pour les e.d.ps. non-linéaires où l'étude est portée seulement sur la convergence de l'algorithme de Schwarz continu. (cf. [1], [2], [3], [4], [5]).

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la convergence de la méthode alternée de Schwarz pour deux sous-domaines -avec recouvrement-, appliquée à une classe de problèmes elliptiques non-linéaires, dans ses deux versions continue et discrète. Dans le cas discret, on considère que chaque sous-domaine possède sa propre discrétisation par une méthode des éléments finis conforme: " non matching grid " dans le sens qu'un nœud ou un triangle appartenant à un sous-domaine n'appartient pas à l'autre.

L'étude de la convergence est établie dans le cas où les deux processus continu et discret de Schwarz conservent la définition de base de la méthode de Schwarz dans le sens où les deux suites de sous-problèmes générées par le processus de Schwarz restent des problèmes non-linéaires. L'existence de la solution du problème initial dans les deux cas continu et discret est prouvée par une méthode de monotonie dite également la méthode des sous et sur-solutions [6].

On considère le problème non-linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ dans } \Omega \\ \\ u = g \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.1}$$

On décompose Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 avec recouvrement, tels que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

On note par $\partial\Omega_i$ le bord du sous-domaine Ω_i et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ où $i \neq j$. L'intersection de $\overline{\Gamma}_i$ et $\overline{\Gamma}_j$ est supposée vide. Cette décomposition permet de définir le système de deux sous-problèmes non-linéaires avec deux inconnues $u_i,\ i = 1, 2$ solutions de

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f(u_i) \text{ dans } \Omega_i \\ \\ u_i = u_j \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_i \\ \\ u_i = g \qquad \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

En démarrant d'une donnée initiale continue u_2^0 définie sur Γ_1, la méthode alternée de Schwarz appliquée au problème (1.1.1) conduit à la résolution séquentielle des sous-problèmes non-linéaires suivants: $\forall n \geq 0$,

$u_1^{n+1} \in A_1$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f(u_1^{n+1}) \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^{n+1} = u_2^n \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ u_1^{n+1} = g \qquad \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

et $u_2^{n+1} \in A_2$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f(u_2^{n+1}) \text{ dans } \Omega_2 \\ \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_2 \\ \\ u_2^{n+1} = g \qquad \text{sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Où l'ensemble A_i est défini par

$$A_i = \left\{ u_i \in V_i = C^2\left(\overline{\Omega}_i\right), \text{ tel que } \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \text{ dans } \overline{\Omega}_i \right\},$$

$\underline{u}_i$ et $\overline{u}_i$ sont respectivement la sous-solution et la sur-solution relatives au problème (1.1.2)

- Notons que l'étude de la convergence géométrique des suites de Schwarz dans le cas d'une donnée initiale continue u_2^0 a été réalisée par P. L. Lions [3], tandis que l'étude de la convergence monotone des suites de Schwarz, dans le cas où $u_2^0 = \underline{u}_2$, la sous-solution de (1.1.2), pour $i = 2$, a été réalisée par S. H. Lui [4].

On applique une discrétisation indépendante τ^{h_i}, sur chaque sous-domaine et on définit le système discret suivant: Trouver $(u_{h_1}, u_{h_2}) \in V_{h_1}^{(u_{h_2})} \times V_{h_2}^{(u_{h_1})}$ solution de

$$\begin{cases} a_1\left(u_{h_1}, v\right) = \left(f\left(u_{h_1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_1}. \\ \\ a_2\left(u_{h_2}, v\right) = \left(f\left(u_{h_2}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_2}. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Où V_{h_i} est l'espace des fonctions linéaires, continues par morceaux et qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega_i$, relatif à la triangulation τ^{h_i}. L'espace $V_{h_i}^{(w)}$ est défini, pour tout $w \in C\left(\overline{\Gamma}_i\right)$ et pour tout $i = 1, 2$

$$V_{h_i}^{(w)} = \left\{v \in V_{h_i} \text{ tel que } v = \pi_{h_i}(w) \text{ sur } \Gamma_i\right\}.$$

Avec π_{h_i} est l'opérateur d'interpolation sur Γ_i.

Soit $u_{h_2}^0 = \pi_{h_2}\left(u_2^0\right) = \pi_{h_2}\left(\underline{u}_2\right)$ la donnée initiale discrète.

La suite discrète de Schwarz $\left(u_{h_1}^{n+1}\right)$ est définie dans Ω_1 telle que $u_{h_1}^{n+1} \in A_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)}$ est solution de

$$a_1(u_{h_1}^{n+1}, v) = \left(f\left(u_{h_1}^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_1} \tag{1.1.6}$$

et la suite discrète de Schwarz $\left(u_{h_2}^{n+1}\right)$ est définie dans Ω_2 telle que $u_{h_2}^{n+1} \in A_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)}$ est solution de

$$a_2(u_{h_2}^{n+1}, v) = \left(f\left(u_{h_2}^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_2}. \tag{1.1.7}$$

Avec

$$a_i\left(u_{h_i}, v\right) = \int_{\Omega_i} \nabla u_{h_i} \nabla v dx$$

et

$$(f(u_{h_i}), v) = \int_{\Omega_i} f(u_{h_i}) v dx$$

Les ensembles discrets A_{h_i} et $A_{h_i}^{\left(u_{h_j}\right)}$, $i \neq j$, sont respectivement définis par

$$A_{h_i} = \left\{u_{h_i} \in V_{h_i},\ \text{tel que } \underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \overline{\Omega}_i\right\}$$

et

$$A_{h_i}^{\left(u_{h_j}\right)} = \left\{u_{h_i} \in A_{h_i} \text{ tel que } u_{h_i} = \pi_{h_i}\left(u_{h_j}\right) \text{ sur } \Gamma_i\right\}$$

$\underline{u}_{h_i}$ et $\overline{u}_{h_i}$ sont respectivement la sous-solution discrète et la sur-solution discrète relatives au système (1.1.5).

Le but de ce chapitre est d'établir la convergence monotone du processus de Schwarz discret.

1.2 Position du Problème Continu

On s'intéresse au problème non-linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ dans } \Omega \\ \\ u = g \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

On présente dans ce qui suit la définition de sous et sur-solution relative au problème (1.2.1).

Définition 1.111. *Une fonction* $\underline{u} \in V$ *est dite une sous-solution du problème* (1.2.1) *si*

$$-\Delta\underline{u} - f(\underline{u}) \leq 0 \textit{ dans } \Omega \textit{ et } \underline{u} \leq g \textit{ sur } \partial\Omega. \tag{1.2.2}$$

2: *Une fonction* $\overline{u} \in V$ *est dite une sur-solution du problème* (1.2.1) *si*

$$-\Delta\overline{u} - f(\overline{u}) \geq 0 \textit{ dans } \Omega \textit{ et } \overline{u} \geq g \textit{ sur } \partial\Omega. \tag{1.2.3}$$

On présente dans ce qui suit les hypothèses relatives à l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.2.1).

(1) Le problème (1.2.1) admet une sous-solution $\underline{u}$ et une sur-solution $\overline{u}$. On définit l'ensemble continu

$$A = \left\{ u \in V = C^2\left(\overline{\Omega}\right), \text{ tel que } \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{\Omega} \right\}.$$

(2) La fonctionnelle f est non-linéaire et continue sur A.

(3) g est une fonction positive définie sur la frontière $\partial\Omega$.

(4) L'existence d'une fonction positive $c(x)$ telle que

$$-c(x)\,(u - v) \leq f(u) - f(v) \text{ pour tout } v \leq u \in A.$$

(5) Pour tout $v < u \in A$, on a

$$F(u) - F(v) < 0.$$

Où

$$F(u) = \frac{f(u)}{u}$$

Théorème 1.1 *(cf.[6]) Sous les hypothèses énoncées ci-dessus le problème continu* (1.2.1) *admet une solution unique dans* A.

On présente dans ce qui suit le lemme de comparaison suivant:

Lemme 1.1 *(cf.[4]) Soient deux fonctions* $u, v \in V$ *positives telles que* $-\Delta u \geq f(u)$ *et* $-\Delta v \leq f(v)$ *dans* Ω *et* $u \geq v \geq 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Alors* $u \geq v$ *dans* $\overline{\Omega}$.

On considère Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$ Lipschitzienne. On décompose Ω en de deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, avec les frontières respectives $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ Lipschitziennes. On note les frontières intérieures des sous-domaines par:

$$\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j, \text{ où } j \neq i.$$

On définit alors le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f(u_i) & \text{dans } \Omega_i \\ \\ u_i = u_j & \text{sur } \Gamma_i \\ \\ u_i = g & \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Dont la solution est

$$u_i = u/\Omega_i, \ i = 1, 2.$$

Définition 1.2 *On définit* $\underline{u}_i$ *(resp.* $\overline{u}_i$ *) la sous-solution (resp. la sur-solution) de* (1.2.4) *comme suit*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u}_i \leq f\left(\underline{u}_i\right) \text{ dans } \Omega_i \\ \\ \underline{u}_i = \underline{u}_j \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_i \\ \\ \underline{u}_i \leq g \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i \end{cases} \tag{1.2.5}$$

(resp.)

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u}_i \geq f\left(\overline{u}_i\right) \text{ dans } \Omega_i \\ \\ \overline{u}_i = \overline{u}_j \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_i \\ \\ \overline{u}_i \geq g \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i \end{cases} \tag{1.2.6}$$

On suppose que les sous-problèmes (1.2.4) admettent une sous-solution $\underline{u}_i$ et une sur-solution $\overline{u}_i$. On définit les ensembles continus

$$A_i = \left\{u_i \in V_i = C^2\left(\overline{\Omega}_i\right),\ \text{tel que } \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \text{ dans } \overline{\Omega}_i\right\}.$$

1.2.1 Processus de Schwarz Continu

On présente dans ce qui suit la définition du processus de Schwarz continu pour deux sous-domaines, appliquée au problème (1.2.1).

Soit $u_2^0 = \underline{u}_2$ sur Γ_1, la donnée initiale continue. On définit l'algorithme de Schwarz continu comme suit. Pour $n \geq 0$, $u_1^{n+1} \in A_1$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f(u_1^{n+1}) \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^{n+1} = u_2^n \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ u_1^{n+1} = g \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Et $u_2^{n+1} \in A_2$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f(u_2^{n+1}) \text{ dans } \Omega_2 \\ \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_2 \\ \\ u_2^{n+1} = g \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Théorème 1.2 *Les deux suites continues de Schwarz sont convergentes dans $C^2(\Omega)$ vers la solution du problème* (1.2.1).

Démonstration (cf.*[4]*) **1**. On montre par récurrence que les termes des deux suites continues de Schwarz sont des éléments de A_i. Pour $n = 0$, dans le sous-domaine Ω_1, on a

$$\begin{cases} -\Delta u_1^1 = f(u_1^1) \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^1 = u_2^0 \qquad\quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ u_1^1 = g \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1. \end{cases}$$

Donc

$$-\Delta u_1^1 = f(u_1^1) \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_1^1 = u_2^0 = \underline{u}_2 = \underline{u}_1 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Avec

$$-\Delta \underline{u}_1 \leq f(\underline{u}_1) \text{ dans } \Omega_1.$$

Alors le lemme de comparaison appliqué au sous-domaine Ω_1 implique

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \text{ dans } \Omega_1.$$

D'autre part

$$-\Delta u_1^1 = f(u_1^1) \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_1^1 = u_2^0 = \underline{u}_2 = \underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Avec

$$-\Delta \overline{u}_1 \geq f(\overline{u}_1) \text{ dans } \Omega_1.$$

Alors le lemme de comparaison appliqué au sous-domaine Ω_1 implique

$$u_1^1 \leq \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on obtient

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \leq \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

Pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_2, on a

$$\begin{cases} -\Delta u_2^1 = f(u_2^1) \text{ dans } \Omega_2 \\ \\ u_2^1 = u_1^1 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_2 \\ \\ u_2^1 = g \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega_2 / \Gamma_2. \end{cases}$$

Donc

$$-\Delta u_2^1 = f(u_2^1) \text{ dans } \Omega_2 \text{ et } u_2^1 = u_1^1 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Comme on a prouvé que

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \leq \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1$$

donc

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \leq u_2^1 = u_1^1 \leq \overline{u}_1 = \overline{u}_2 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Avec

$$-\Delta \underline{u}_2 \leq f(\underline{u}_2) \text{ dans } \Omega_2$$

et

$$-\Delta \overline{u}_2 \geq f(\overline{u}_2) \text{ dans } \Omega_2.$$

Alors le lemme de comparaison appliqué au sous-domaine Ω_2 implique

$$\underline{u}_2 \leq u_2^1 \leq \overline{u}_2 \text{ dans } \Omega_2.$$

On suppose que les inégalités qui suivent sont vraies pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_i \leq u_i^n \leq \overline{u}_i \text{ dans } \Omega_i,$$

et on démontre que

$$\underline{u}_i \leq u_i^{n+1} \leq \overline{u}_i \text{ dans } \Omega_i.$$

Comme

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f(u_1^{n+1}) & \text{dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ u_1^{n+1} = g & \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{cases}$$

Alors on peut écrire

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f(u_1^{n+1}) & \text{dans } \Omega_1 \\ \\ \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \leq u_1^{n+1} = u_2^n \leq \overline{u}_2 = \overline{u}_1 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Le lemme de comparaison implique alors

$$\underline{u}_1 \leq u_1^{n+1} \leq \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant cette dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$\underline{u}_2 \leq u_2^{n+1} \leq \overline{u}_2 \text{ dans } \Omega_2.$$

2. Monotonie des suites de Schwarz: On utilise le raisonnement par récurrence pour montrer que les suites de Schwarz sont monotones croissantes. Pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_1, on a

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \text{ dans } \Omega_1$$

et

$$u_2^0 = \underline{u}_2 \leq u_2^1 \text{ dans } \Omega_2.$$

Comme

$$\begin{cases} -\Delta u_1^2 = f(u_1^2) & \text{dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^1 = u_2^0 \leq u_1^2 = u_2^1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ u_1^1 = g & \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1. \end{cases}$$

Le lemme de comparaison implique

$$u_1^1 \leq u_1^2 \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on vient de trouver

$$\begin{array}{lcll} \underline{u}_1 & \leq & u_1^1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_2^0 & = & \underline{u}_2 \leq u_2^1 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^1 & \leq & u_1^2 & \text{dans } \Omega_1. \end{array}$$

On suppose que

$$u_1^{n-1} \leq u_1^n \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_2^{n-1} \leq u_2^n \text{ dans } \Omega_2.$$

Et on démontre

$$u_1^n \leq u_1^{n+1} \text{dans } \Omega_1 \text{ et } u_2^n \leq u_2^{n+1} \text{ dans } \Omega_2.$$

En effet:

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f(u_1^{n+1}) & \text{dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^n = u_2^{n-1} \leq u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ u_1^{n+1} = g & \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1. \end{cases}$$

Le lemme de comparaison implique alors

$$u_1^n \leq u_1^{n+1} \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant la dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$u_2^n \leq u_2^{n+1} \text{ dans } \Omega_2.$$

3. Les résultats de 1 et 2 impliquent que pour tout $n \geq 0$ et pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_i = u_i^0 \leq ... \leq u_i^n \leq u_i^{n+1} \leq \overline{u}_i \text{ dans } \Omega_i.$$

Ainsi les deux suites de Schwarz sont convergentes vers u_i l'unique solution de (1.2.4).

1.3 Discrétisation

On discrétise chaque sous-domaine par une méthode d'éléments finis P_1 conforme, où les deux maillages sont incompatibles à l'intersection des deux sous-domaines, dans le sens qu'un triangle ou un nœud appartenant à l'une des discrétisation n'appartient pas à l'autre. On définit alors les espaces V_{h_i}

$$V_{h_i} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega_i) \cap C(\overline{\Omega}_i) \colon\ v \in P_1 \text{ sur chaque triangle} \right\},$$

correspondant ainsi que les espaces $V_{h_i}^{(w)}$ suivants, pour tout $w \in C\left(\overline{\Gamma}_i\right)$ et $i = 1, 2$:

$$V_{h_i}^{(w)} = \left\{ v \in V_{h_i} \text{ tel que } v = \pi_{h_i}(w) \text{ sur } \Gamma_i \right\},$$

où π_{h_i} est l'opérateur d'interpolation sur Γ_i. On note par $\varphi_s^i,\ s = 1, ..., m\left(h_i\right)$, les fonctions de bases relatives à τ^{h_i}, la triangulation sur Ω_i.

Remarque 1.1 *Comme les deux maillages sont incompatibles à l'intersection des deux sous-domaines, il est impossible de définir le problème discret global.*

On définit donc le système discret pour tout $i, j = 1, 2,$ comme suit: Trouver $u_{h_i} \in V_{h_i}^{(u_{h_j})}$, $i \neq j$ solution de

$$a_i(u_{h_i}, v) = (f(u_{h_i}), v), \ \forall v \in V_{h_i}. \tag{1.3.1}$$

Où

$$a_i(u_{h_i}, v) = \int_{\Omega_i} \nabla u_{h_i} \nabla v dx$$

et

$$(f(u_{h_i}), v) = \int_{\Omega_i} f(u_{h_i}) v dx$$

Définition 1.3 *Une matrice A est dite une M-matrice si A^{-1}* existe et est non-négative.

Le Principe du Maximum Discret (cf. [8], [9]): On suppose que les matrices résultantes des discrétisations des problèmes (1.2.7) et (1.2.8) sont des M-matrices.

Lemme 1.2 *Soient deux fonctions discrètes $u_{h_i}, v_{h_i} \in V_{h_i}$ positives telles que: $\forall s = 1, ..., m(h_i)$, $a(u_{h_i}, \varphi_s^i) \geq (f(u_{h_i}), \varphi_s^i)$ et $a(v_{h_i}, \varphi_s^i) \leq (f(v_{h_i}), \varphi_s^i)$ avec $u_{h_i} \geq v_{h_i} \geq 0$ sur $\partial\Omega_i$ alors $u_{h_i} \geq v_{h_i}$ dans $\overline{\Omega}_i$.*

Démonstration Soit

$$S = \{x \in \Omega \text{ tel que } u_{h_i} < v_{h_i}\}$$

alors

$$\partial S = \{x \in \Omega \text{ tel que } u_{h_i} = v_{h_i}\}$$

Donc dans l'ensemble S on a

$$(f(u_{h_i}), \varphi_s^i) \leq a(u_{h_i}, \varphi_s^i) - \int_{\partial S} \frac{\partial u_{h_i}}{\partial n} \varphi_s^i \text{ et } (f(v_{h_i}), \varphi_s^i) \geq a(v_{h_i}, \varphi_s^i) - \int_{\partial S} \frac{\partial v_{h_i}}{\partial n} \varphi_s^i$$

Ce qui implique

$$(f(u_{h_i}), v_{h_i}) - (f(v_{h_i}), u_{h_i}) \leq -\int\limits_{\partial S} \frac{\partial u_{h_i}}{\partial n} v_{h_i} + \int\limits_{\partial S} \frac{\partial v_{h_i}}{\partial n} u_{h_i} = \int\limits_{\partial S} \left(\frac{\partial v_{h_i}}{\partial n} - \frac{\partial u_{h_i}}{\partial n} \right) v_{h_i}$$

Alors

$$(u_{h_i} F(u_{h_i}), v_{h_i}) - (v_{h_i} F(v_{h_i}), u_{h_i}) \leq \int\limits_{\partial S} \left(\frac{\partial v_{h_i}}{\partial n} - \frac{\partial u_{h_i}}{\partial n} \right) v_{h_i}$$

Ainsi

$$0 < (F(u_{h_i}) - F(v_{h_i}), u_{h_i} v_{h_i}) \leq \int\limits_{\partial S} \left(\frac{\partial v_{h_i}}{\partial n} - \frac{\partial u_{h_i}}{\partial n} \right) v_{h_i} \leq 0$$

Ce qui est une contradiction alors $S = \emptyset$

Définition 1.4 *On définit* $\underline{u}_{h_i}$ *(resp.* $\overline{u}_{h_i}$ *) la sous-solution discrète (resp. la sur-solution discrète) relative au sous-problème* (1.3.1) *comme suit*

$$\begin{cases} a\left(\underline{u}_{h_i}, \varphi_s^i\right) \leq \left(f\left(\underline{u}_{h_i}\right), \varphi_s^i\right), \ \forall s = 1, ..., m\,(h_i) \\ \\ \underline{u}_{h_i} = \underline{u}_{h_j} & \text{sur } \Gamma_i \\ \\ \underline{u}_{h_i} \leq g & \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i \end{cases} \tag{1.3.2}$$

(resp.)

$$\begin{cases} a\left(\overline{u}_{h_i}, \varphi_s^i\right) \geq \left(f\left(\overline{u}_{h_i}\right), \varphi_s^i\right), \ \forall s = 1, ..., m\,(h_i) \\ \\ \overline{u}_{h_i} = \overline{u}_{h_j} & \text{sur } \Gamma_i \\ \\ \overline{u}_{h_i} \geq g & \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i \end{cases} \tag{1.3.3}$$

On suppose que le sous-problème discret (1.3.1) admet une sous-solution discrète $\underline{u}_{h_i}$ et une sur-solution discrète $\overline{u}_{h_i}$. On définit alors l'ensemble A_{h_i} comme suit:

$$A_{h_i} = \left\{ u_{h_i} \in V_{h_i}, \text{ tel que } \underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \overline{\Omega}_i \right\}.$$

Et pour $i, j = 1, 2$ et $i \neq j$, l'ensemble $A_{h_i}^{\left(u_{h_j}\right)}$ suivant:

$$A_{h_i}^{\left(u_{h_j}\right)} = \left\{ u_{h_i} \in A_{h_i} \text{ tel que } u_{h_i} = \pi_{h_i}\left(u_{h_j}\right) \text{ sur } \Gamma_i \right\}.$$

On présente dans ce qui suit la définition du processus de Schwarz discret pour deux sous-domaines, appliquée au système discret (1.3.1).

1.3.1 Processus de Schwarz Discret

Soit la donnée initiale discrète

$$u_{h_2}^0 = \pi_{h_2}\left(u_2^0\right) = \pi_{h_2}\left(\underline{u}_2\right).$$

On définit le processus multiplicatif discret de Schwarz comme suit: Pour tout $n \geq 0$, $u_{h_1}^{n+1} \in A_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)}$ solution de

$$a_1(u_{h_1}^{n+1}, v) = \left(f\left(u_{h_1}^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_1} \tag{1.3.4}$$

et $u_{h_2}^{n+1} \in A_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)}$ solution de

$$a_2(u_{h_2}^{n+1}, v) = \left(f\left(u_{h_2}^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_2}. \tag{1.3.5}$$

Théorème 1.3 *Les deux suites discrètes de Schwarz convergent vers la solution du système (1.3.1).*

Démonstration Le raisonnement est similaire à celui adopté dans le cas continu et repose sur le lemme de comparaison discret et le principe du maximum discret.

1. On montre par récurrence que les termes des deux suites discrètes de Schwarz sont des éléments de A_{h_i}. Pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_1, on a pour tout $v \in V_{h_1}$

$$a_1(u^1_{h_1}, v) = (f(u^1_{h_1}), v)$$

et

$$u^1_{h_1} = u^0_{h_2} = \pi_{h_2}\left(u^0_2\right) \text{ sur } \Gamma_1.$$

Comme

$$v = \sum_{s=1}^{m(h_1)} v_s \varphi^1_s,$$

on obtient pour tout $s = 1, ..., m\,(h_1)$:

$$a_1(u^1_{h_1}, \varphi^1_s) = (f(u^1_{h_1}), \varphi^1_s)$$

et

$$u^1_{h_1} = u^0_{h_2} = \pi_{h_2}\left(u^0_2\right) \text{ sur } \Gamma_1.$$

Donc $\forall\ s = 1, ..., m\,(h_1)$

$$a_1(u^1_{h_1}, \varphi^1_s) = (f(u^1_{h_1}), \varphi^1_s)$$

et

$$u^1_{h_1} = u^0_{h_2} = \underline{u}_{h_2} = \underline{u}_{h_1} \text{ sur } \Gamma_1.$$

Avec

$$a_1\left(\underline{u}_{h_1}, \varphi^1_s\right) \leq \left(f(\underline{u}_{h_1}), \varphi^1_s\right).$$

Alors le lemme de comparaison discret appliqué au sous-domaine Ω_1 implique

$$\underline{u}_{h_1} \leq u^1_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

D'autre part, $\forall\ s = 1, ..., m\,(h_1)$

$$a_1(u^1_{h_1}, \varphi^1_s) = (f(u^1_{h_1}), \varphi^1_s)$$

et

$$u^1_{h_1} = u^0_{h_2} = \underline{u}_{h_2} = \underline{u}_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ sur } \Gamma_1.$$

Avec

$$a_1\left(\overline{u}_{h_1}, \varphi^1_s\right) \geq \left(f(\overline{u}_{h_1}), \varphi^1_s\right).$$

Alors le lemme de comparaison appliqué au sous-domaine Ω_1 implique

$$u^1_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on obtient

$$\underline{u}_{h_1} \leq u^1_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

Pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_2, on a

$$a_2(u^1_{h_2}, \varphi^2_s) = (f(u^1_{h_2}, \varphi^2_s),\ s = 1, ..., m\,(h_2)$$

et

$$u^1_{h_2} = u^1_{h_1} \text{ sur } \Gamma_2.$$

Donc

$$a_2(u^1_{h_2}, \varphi^2_s) = (f(u^1_{h_2}, \varphi^2_s)\ ,\ s = 1, ..., m\,(h_2) \text{ et } u^1_{h_2} = u^1_{h_1} \text{ sur } \Gamma_2.$$

Comme on a prouvé que

$$\underline{u}_{h_1} \leq u^1_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1$$

donc

$$\underline{u}_{h_2} = \underline{u}_{h_1} \leq u^1_{h_2} = u^1_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} = \overline{u}_{h_2} \text{ sur } \Gamma_2.$$

Avec pour tout $s = 1, ..., m\,(h_2)$

$$a_2\left(\underline{u}_{h_2}, \varphi_s^2\right) \leq \left(f\left(\underline{u}_{h_2}\right), \varphi_s^2\right)$$

et

$$a_2(\overline{u}_{h_2}, \varphi_s^2) \geq \left(f(\overline{u}_{h_2}), \varphi_s^2\right).$$

Alors le lemme de comparaison discret appliqué au sous-domaine Ω_2 implique

$$\underline{u}_{h_2} \leq u_{h_2}^1 \leq \overline{u}_{h_2} \text{ dans } \Omega_2.$$

On suppose que les inégalités qui suivent sont vraies pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i}^n \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \Omega_2.$$

Et on démontre que pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i}^{n+1} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \Omega_i.$$

Comme pour tout $s = 1, ..., m\,(h_1)$

$$a_1(u_{h_1}^{n+1}, \varphi_s^1) = (f(u_{h_1}^{n+1}), \varphi_s^1)$$

avec

$$u_{h_1}^{n+1} = u_{h_2}^n \text{ sur } \Gamma_1.$$

Alors on peut écrire, $\forall\ s = 1, ..., m\,(h_1)$

$$a_1(u_{h_1}^{n+1}, \varphi_s^1) = (f(u_{h_1}^{n+1}), \varphi_s^1)$$

et

$$\underline{u}_{h_1} = \underline{u}_{h_2} \leq u_{h_1}^{n+1} = u_{h_2}^n \leq \overline{u}_{h_2} = \overline{u}_{h_1} \text{ sur } \Gamma_1.$$

Le lemme de comparaison discret implique alors

$$\underline{u}_{h_1} \leq u_{h_1}^{n+1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant cette dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$\underline{u}_{h_2} \leq u_{h_2}^{n+1} \leq \overline{u}_{h_2} \text{ dans } \Omega_2.$$

2. Monotonie des suites discrètes de Schwarz: On utilise le raisonnement par récurrence pour montrer que les suites discrètes de Schwarz sont monotones croissantes. En effet, pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_1, on a

$$\underline{u}_{h_1} \leq u_{h_1}^{1} \text{ dans } \Omega_1$$

et

$$u_{h_2}^{0} = \underline{u}_{h_2} \leq u_{h_2}^{1} \text{ dans } \Omega_2.$$

Comme

$$a_1(u_{h_1}^2, \varphi_s^1) = (f(u_{h_1}^2, \varphi_s^1)$$

et

$$u_{h_1}^1 = u_{h_2}^0 \leq u_{h_1}^2 = u_{h_2}^1 \text{ sur } \Gamma_1$$

Le lemme de comparaison discret implique

$$u_{h_1}^1 \leq u_{h_1}^2 \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on vient de trouver

$$\begin{aligned} \underline{u}_{h_1} &\leq u^1_{h_1} && \text{dans } \Omega_1, \\ u^0_{h_2} &= \underline{u}_{h_2} \leq u^1_{h_2} && \text{dans } \Omega_2, \\ u^1_{h_1} &\leq u^2_{h_1} && \text{dans } \Omega_1. \end{aligned}$$

On suppose que

$$u^{n-1}_{h_1} \leq u^n_{h_1} \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u^{n-1}_{h_2} \leq u^n_{h_2} \text{ dans } \Omega_2.$$

Et on démontre

$$u^n_{h_1} \leq u^{n+1}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u^n_{h_2} \leq u^{n+1}_{h_2} \text{ dans } \Omega_2.$$

En effet, pour tout $s = 1, ..., m\,(h_1)$

$$a_1(u^{n+1}_{h_1}, \varphi^1_s) = (f(u^{n+1}_1), \varphi^1_s)$$

avec

$$u^n_{h_1} = u^{n-1}_{h_2} \leq u^{n+1}_{h_1} = u^n_{h_2} \text{ sur } \Gamma_1.$$

Le lemme de comparaison discret implique alors

$$u^n_{h_1} \leq u^{n+1}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant la dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$u^n_{h_2} \leq u^{n+1}_{h_2} \text{ dans } \Omega_2.$$

3. Les résultats de 1 et 2 impliquent que pour tout $n \geq 0$ et pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_{h_i} = u^0_{h_i} \leq ... \leq u^n_{h_i} \leq u^{n+1}_{h_i} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \Omega_i.$$

donc les deux suites discrètes de Schwarz sont convergentes vers u_{h_i} solution de (1.3.1).

Bibliographie

[1] T.F. Chan, T. R Mathew: Domain Decomposition Algorithms. Acta Numerica, pp. 61-143, (1994).

[2] P. L. Lions: On the Schwarz Alternating Method I, Proc. 1st, Int. sympo. On Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. SIAM Philadelphia (1988).

[3] P. L. Lions: On the Schwarz Alternating Method II, Proc. 2nd, Int. sympo. On domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. SIAM Philadelphia pp.47-70 (1989).

[4] S. H. Lui: On Monotone and Schwarz Alternating Methods For Nonlinear Elliptic PDEs. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN, Vol. 35, No 1, pp. 1-15 (2001).

[5] S. H. Lui: On the Linear Monotone Iteration and Schwarz Methods for Nonlinear Elliptic PDEs. Numerish Mathematik, pp. 109-129 (2002).

[6] C. V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenium Press, New York, 1992.

[7] R. Glowinski, G. H. Golub, J. Periaux: First Int. Symp. on Domain Decomposition Methods. SIAM, Philadelphia, (1988).

[8] P.G. Ciarlet, P.A. Raviart: Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method, comput. Meth. in Appl. Mech. Eng. 2, pp. 17-31 (1973) .

[9] J. Karatson, S. Korotov, discrete maximum principle for finite element solutions for nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions. Numer. Math. 99, 669--698 (2005)

[10] A. Quarteroni, A. Valli: Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Oxford University Press, Oxford, (1999).

[11] B. E Smith, P. Bjorstad, W. D. Gropp: Domain Decomposition : Parallel Multilevel. Algorithms for Elliptic Partial Differential Equations. Cambridge University Press, New York, (1996).

Chapitre 2

2.1 Introduction

Il est bien connu que la méthode alternée de Schwarz génère une suite de sous-problèmes dont la suite de solutions converge vers la solution du problème (cf. [1], [2], [3] et [6]. Ce chapitre est consacré à l'analyse de la convergence de la méthode alternée de Schwarz - avec recouvrement - pour une classe de problèmes elliptiques non-linéaires, où les sous-problèmes générés par le processus de Schwarz sont linéaires.

Reconsidérons le même problème non-linéaire:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ dans } \Omega \\ \\ u = g \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.1}$$

On décompose Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 avec recouvrement, tel que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

On note par $\partial\Omega_i$ le bord de Ω_i et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$. L'intersection de $\overline{\Gamma}_i$ et $\overline{\Gamma}_j$ est supposée vide. Cette décomposition permet de définir le système de deux sous-problèmes non-linéaires avec deux inconnues $u_i,\ i = 1, 2$ solutions de

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f(u_i) \qquad \text{dans } \Omega_i \\ \\ u_i = u_j \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_i \\ \\ u_i = g \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i \end{cases} \tag{2.1.2}$$

En démarrant de $u_2^0 = \underline{u}_2$ sur Γ_1, la donnée initiale continue, la méthode alternée de Schwarz appliquée au problème (2.1.1) conduit à la résolution séquentielle des sous-problèmes linéaires suivants, pour tout $n \geq 0$, $u_1^{n+1} \in A_1$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} + c\,(x)\, u_1^{n+1} = f(u_1^n) + c\,(x)\, u_1^n & \text{dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ u_1^{n+1} = g & \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

et $u_2^{n+1} \in A_2$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} + c\,(x)\, u_2^{n+1} = f(u_2^n) + c\,(x)\, u_2^n & \text{dans } \Omega_2 \\ \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \\ u_2^{n+1} = g & \text{sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Où l'ensemble A_i est défini par

$$A_i = \left\{ u_i \in V_i = C^2\left(\overline{\Omega}_i\right),\ \text{tel que } \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \text{ dans } \overline{\Omega}_i \right\},$$

la fonction $c(x)$ est positive et vérifie

$$-c(x)\,(u_i - v_i) \leq f(u_i) - f(v_i) \text{ pour tout } v_i \leq u_i \in A_i$$

$\underline{u}_i$ et $\overline{u}_i$ sont respectivement la sous-solution et la sur-solution relatives au problème (2.1.2)

- L'étude de la convergence monotone des suites de Schwarz, dans le cas où $u_2^0 = \underline{u}_2$, la sous-solution de (2.1.2), pour $i = 2$, a été réalisée par S. H. Lui (cf. [4]).

On applique une discrétisation indépendante τ^{h_i} pour chaque sous-domaine et on définit le système discret suivant: Trouver $(u_{h_1}, u_{h_2}) \in V_{h_1}^{(u_{h_2})} \times V_{h_2}^{(u_{h_1})}$ tel que

$$\begin{cases} a_1\left(u_{h_1}, v\right) = \left(f\left(u_{h_1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_1}. \\ \\ a_2\left(u_{h_2}, v\right) = \left(f\left(u_{h_2}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_2}. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Où

$$a_i\left(u_{h_i}, v\right) = \int\limits_{\Omega_i} \nabla u_{h_i} \nabla v dx$$

et

$$(f(u_{h_i}), v) = \int\limits_{\Omega_i} f(u_{h_i}) v dx$$

V_{h_i} est l'espace des fonctions linéaires, continues par morceaux et qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega_i$, relatif à la triangulation τ^{h_i}, défini par

$$V_{h_i} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega_i) \cap C(\overline{\Omega}_i) \colon \ v \in P_1 \text{ sur chaque triangle} \right\}$$

et

$$V_{h_i}^{\left(u_{h_j}\right)} = \left\{ u_{h_i} \in V_{h_i} \text{ tel que } u_{h_i} = \pi_{h_i}\left(u_{h_j}\right) \text{ sur } \Gamma_i \right\}.$$

π_{h_i} est l'operateur d'interpolation relatif à la triangulation τ^{h_i} définie sur le sous-domaine Ω_i.

On définit l'algorithme de Schwarz discret: Partant de $u_{h_2}^0 = \pi_{h_2}\left(u_2^0\right) = \pi_{h_2}\left(\underline{u}_2\right)$, on définit $u_{h_1}^{n+1} \in A_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)}$ solution de

$$a_1(u_{h_1}^{n+1}, v) + c\left(u_{h_1}^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_{h_1}^n\right), v\right) + c\left(u_{h_1}^n, v\right), \ \forall v \in V_{h_1}$$

et $u_{h_2}^{n+1} \in A_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)}$ solution de

$$a_2(u_{h_2}^{n+1}, v) + c\left(u_{h_2}^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_{h_2}^n\right), v\right) + c\left(u_{h_2}^n, v\right), \ \forall v \in V_{h_2}.$$

Où les ensembles discrets A_{h_i} et $A_{h_i}^{\left(u_{h_j}\right)}$ sont définis respectivement par

$$A_{h_i} = \left\{u_{h_i} \in V_{h_i},\ \text{tel que } \underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \overline{\Omega}_i\right\}$$

et

$$A_{h_i}^{\left(u_{h_j}\right)} = \left\{u_{h_i} \in A_{h_i} \text{ tel que } u_{h_i} = \pi_{h_i}\left(u_{h_j}\right) \text{ sur } \Gamma_i\right\}.$$

$\underline{u}_{h_i}$ et $\overline{u}_{h_i}$ sont respectivement la sous-solution discrète et la sur-solution discrète relatives au système (2.1.5).

2.2 Position du Problème Continu

On s'intéresse au problème non-linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.1}$$

On suppose que le problème (2.2.1) vérifie les hypothèses [1-5] du chapitre 1.

Théorème 2.1 *(cf.* [5]*) Sous les hypothèses [1-5], le problème continu* (2.2.1) *admet une solution unique dans A.*

On présente dans ce qui suit le lemme du principe du maximum continu.

Lemme 2.1 *(cf.* [4]*). Soit* $w \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *tel que:* $a(w, \phi) + c(w, \phi) \geq 0$ *pour tout* ϕ *positive dans* $H_0^1(\Omega)$ *et* $w \geq 0$ *sur* $\partial\Omega$*. Alors* $w \geq 0$ *dans* $\overline{\Omega}$*.*

On considère Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$ Lipschitzienne, considéré comme réunion de deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 ayant respectivement, des frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ Lipschitziennes avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. On note les frontières intérieures des sous-domaines par:

$$\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j \text{ où } j \neq i.$$

On définit alors le système suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f(u_i) & \text{dans } \Omega_i \\ \\ u_i = u_j & \text{sur } \Gamma_i \\ \\ u_i = g & \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i \end{cases} \tag{2.2.2}$$

On suppose que le sous-problème (2.2.2) admet une sous-solution continue $\underline{u}_i$ et une sur-solution continu $\overline{u}_i$ (voir définition 1.2, chapitre 1). On définit

$$A_i = \left\{u_i \in V_i = C^2\left(\overline{\Omega}_i\right),\ \text{tel que } \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \text{ dans } \overline{\Omega}_i\right\}$$

On présente dans ce qui suit la définition du processus de Schwarz continu pour deux sous-domaines, appliquée au problème (2.1.1).

2.2.1 Processus de Schwarz Continu

Soit $u_2^0 = \underline{u}_2$ sur Γ_1, la donnée initiale continue du processus de Schwarz. On définit l'algorithme de Schwarz continu comme suit, pour tout $n \geq 0$, $u_1^{n+1} \in A_1$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} + c(x)u_1^{n+1} = f(u_1^n) + c(x)u_1^n & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = g & \text{sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

et $u_2^{n+1} \in A_2$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} + c(x)u_2^{n+1} = f(u_2^n) + c(x)u_2^n & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = g & \text{sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2 \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Théorème 2.2 *Les deux suites continues de Schwarz sont convergentes dans* $C^2(\Omega)$ *vers la solution de (2.2.2).*

Démonstration (cf. [4]) **1.** On montre par récurrence que les termes des deux suites continues de Schwarz sont des éléments de A_i. Pour $n = 0$ sur le sous-domaine Ω_1, on a

$$\begin{cases} -\Delta u_1^1 + c(x)u_1^1 = f(u_1^0) + c(x)u_1^0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^1 = u_2^0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Donc

$$-\Delta u_1^1 + c(x)u_1^1 = f(u_1^0) + c(x)u_1^0 \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_1^1 = u_2^0 = \underline{u}_2 = \underline{u}_1 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Avec

$$-\Delta \underline{u}_1 + c(x)\underline{u}_1 \leq f(\underline{u}_1) + c(x)\underline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

Alors le lemme du principe du maximum appliqué au sous-domaine Ω_1 implique

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \text{ dans } \Omega_1.$$

D'autre part

$$-\Delta u_1^1 + c(x)u_1^1 = f(u_1^0) + c(x)u_1^0 \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_1^1 = u_2^0 = \underline{u}_2 = \underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Avec

$$-\Delta \overline{u}_1 + c(x)\overline{u}_1 \geq f(\overline{u}_1) + c(x)\overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

Alors le lemme du principe du maximum appliqué au sous-domaine Ω_1 implique

$$u_1^1 \leq \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on obtient

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \leq \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

Pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_2, on a

$$-\Delta u_2^1 + c(x)u_2^1 = f(u_2^0) + c(x)u_2^0 \;\text{ dans } \Omega_2$$

et

$$u_2^1 = u_1^1 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Donc

$$-\Delta u_2^1 + c(x)u_2^1 = f(u_2^0) + c(x)u_2^0 \text{ dans } \Omega_2 \text{ et } u_2^1 = u_1^1 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Comme on a prouvé que

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \leq \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1,$$

donc

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \leq u_2^1 = u_1^1 \leq \overline{u}_1 = \overline{u}_2 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Avec

$$-\Delta \underline{u}_2 + c(x)\underline{u}_2 \leq f(\underline{u}_2) + c(x)\underline{u}_2 \text{ dans } \Omega_2$$

ainsi que

$$-\Delta \overline{u}_2 + c(x)\overline{u}_2 \geq f(\overline{u}_2) + c(x)\overline{u}_2 \text{ dans } \Omega_2.$$

Alors le lemme du principe du maximum continu appliqué au sous-domaine Ω_2 implique

$$\underline{u}_2 \leq u_2^1 \leq \overline{u}_2 \text{ dans } \Omega_2.$$

On suppose que les inégalités qui suivent sont vraies pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_i \leq u_i^n \leq \overline{u}_i \text{ dans } \Omega_i,$$

et on démontre que

$$\underline{u}_i \leq u_i^{n+1} \leq \overline{u}_i \text{ dans } \Omega_i.$$

Comme

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} + c(x) u_1^{n+1} = f(u_1^n) + c(x) u_1^n \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^{n+1} = u_2^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Alors on peut écrire

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} + c(x) u_1^{n+1} = f(u_1^n) + c(x) u_1^n \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \le u_1^{n+1} = u_2^n \le \overline{u}_2 = \overline{u}_1 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} -\Delta \left(u_1^{n+1} - \underline{u}_1\right) + c(x)\left(u_1^{n+1} - \underline{u}_1\right) \\ \\ = f(u_1^n) - f\left(\underline{u}_1\right) + c(x)\left(u_1^n - \underline{u}_1\right) \ge 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^{n+1} - \underline{u}_1 = u_2^n - \overline{u}_2 \ge 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta \left(\overline{u}_1 - u_1^{n+1}\right) + c(x)\left(\overline{u}_1 - u_1^{n+1}\right) \\ \\ = f(\overline{u}_1) - f(u_1^n) + c(x)\left(\overline{u}_1 - u_1^{n+1}\right) \ge 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ \overline{u}_1 - u_1^{n+1} \ge 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Le lemme du principe du maximum continu implique alors

$$\underline{u}_1 \le u_1^{n+1} \le \overline{u}_1 \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant cette dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$\underline{u}_2 \leq u_2^{n+1} \leq \overline{u}_2 \text{ dans } \Omega_2.$$

2. Monotonie des suites de Schwarz: On utilise le raisonnement par récurrence pour montrer que les suites continues de Schwarz sont monotones croissantes. Pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_1, on a

$$\underline{u}_1 \leq u_1^1 \text{ dans } \Omega_1$$

et

$$u_2^0 = \underline{u}_2 \leq u_2^1 \text{ dans } \Omega_2.$$

Comme

$$\begin{cases} -\Delta u_1^2 + c(x)u_1^2 = f(u_1^1) + c(x)u_1^1 \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^1 = u_2^0 \leq u_1^2 = u_2^1 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Le lemme du principe du maximum continu implique

$$u_1^1 \leq u_1^2 \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on vient de trouver

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &\leq u_1^1 && \text{dans } \Omega_1, \\ u_2^0 &= \underline{u}_2 \leq u_2^1 && \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^1 &\leq u_1^2 && \text{dans } \Omega_1. \end{aligned}$$

On suppose que

$$u_1^{n-1} \leq u_1^n \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_2^{n-1} \leq u_2^n \text{ dans } \Omega_2.$$

Et on démontre

$$u_1^n \leq u_1^{n+1} \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_2^n \leq u_2^{n+1} \text{ dans } \Omega_2.$$

En effet:

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_1^{n+1}-u_1^n\right)+c(x)\left(u_1^{n+1}-u_1^n\right) \\ \\ =f(u_1^n)-f(u_1^{n-1})+c(x)\left(u_1^{n+1}-u_1^n\right)\geq 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ u_1^n=u_2^{n-1}\leq u_1^{n+1}=u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Le lemme du principe du maximum implique alors

$$u_1^n \leq u_1^{n+1} \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant la dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$u_2^n \leq u_2^{n+1} \text{ dans } \Omega_2.$$

3. Les résultats de 1 et 2 impliquent que pour tout $n \geq 0$ et pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_i = u_i^0 \leq ... \leq u_i^n \leq u_i^{n+1} \leq \overline{u}_i \text{ dans } \Omega_i.$$

Donc les deux suites de Schwarz sont convergentes vers u_i solution de (2.2.2).

2.3 Discrétisation

On discrétise chaque sous-domaine par une méthode d'éléments finis P_1 conforme, où les deux maillages sont incompatibles à l'intersection des deux sous-domaines dans le sens qu'un triangle ou un nœud appartenant à l'une des discrétisation n'appartient pas à l'autre. On définit alors les espaces V_{h_i}

$$V_{h_i} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega_i) \cap C(\overline{\Omega}_i) \colon\ v \in P_1 \text{ sur chaque triangle} \right\}$$

correspondant ainsi que les espaces $V_{h_i}^{(w)}$ suivants: Pour tout $w \in C\left(\overline{\Gamma}_i\right)$ et $i = 1, 2$:

$$V_{h_i}^{(w)} = \{ v \in V_{h_i} \text{ tel que } v_{h_i} = \pi_{h_i}(w) \},$$

où π_{h_i} est l'opérateur d'interpolation relatif à τ^{h_i}. On note par $\varphi_s^i,\ s = 1, ..., m(h_i)$, les fonctions de bases relatives à τ^{h_i}. On définit le système discret comme suit:

$$\begin{cases} a_i(u_{h_i}, v) = \left(f\left(u_{h_i}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_i} & \\ \\ u_{h_i} = u_{h_j} & \text{sur } \Gamma_i \\ \\ u_{h_i} = g & \text{sur } \partial\Omega_i / \Gamma_i. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Où

$$a_i(u_{h_i}, v) = \int_{\Omega_i} \nabla u_{h_i} \nabla v dx$$

et

$$(f(u_{h_i}), v) = \int_{\Omega_i} f(u_{h_i}) v dx$$

Le Principe du Maximum Discret (cf. [7], [8]) On suppose que les matrices résultantes des discrétisations des problèmes (2.2.3) et (2.2.4) sont des M-matrices.

On définit dans ce qui suit l'analogue discret du lemme du principe du maximum continu, défini sur chaque sous-domaine Ω_i.

Lemme 2.2 *Soit $w_{h_i} \in H^1(\Omega_i) \cap C\left(\overline{\Omega}_i\right)$ tel que: $a(w_{h_i}, \varphi) + c(w_{h_i}, \varphi) \geq 0$ pour tout φ positive dans $H_0^1(\Omega_i)$ et $w_{h_i} \geq 0$ sur $\partial\Omega_i$. Alors $w_{h_i} \geq 0$ dans $\overline{\Omega}_i$.*

Démonstration La démonstration est une conséquence directe du principe du maximum discret.

On suppose que le sous-problème discret (2.3.1) admet une sous-solution discrète $\underline{u}_{h_i}$ et une sur-solution discrète $\overline{u}_{h_i}$ (voir définition 1.4 du chapitre 1). On définit alors

$$A_{h_i} = \left\{u_{h_i} \in V_{h_i},\ \text{tel que } \underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \overline{\Omega}_i\right\}.$$

On présente dans ce qui suit la définition du processus de Schwarz discret pour deux sous-domaines, appliquée au système (2.3.1).

Remarque 2.1 *Pour que les matrices résultantes des discrétisations des sous-problèmes, générés par le processus de Schwarz, soient des M-matrices, on rajoute la condition que $c(x) = c$, une constante positive.*

2.3.1 Processus de Schwarz Discret

Soit la donnée initiale discrète

$$u_{h_2}^0 = \pi_{h_2}\left(u_2^0\right) = \pi_{h_2}\left(\underline{u}_2\right).$$

On définit le processus multiplicatif discret de Schwarz comme suit: $\forall\, n \geq 0$, $u_{h_1}^{n+1} \in A_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)}$ est solution de

$$a(u_{h_1}^{n+1}, v) + c\left(u_{h_1}^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_{h_1}^n\right), v\right) + c\left(u_{h_1}^n, v\right),\ \forall v \in V_{h_1}$$

et $u_{h_2}^{n+1} \in A_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)}$ est solution de

$$a(u_{h_2}^{n+1}, v) + c(u_{h_2}^{n+1}, v) = \left(f\left(u_{h_2}^n\right), v\right) + c(u_{h_2}^n, v),\ \forall v \in V_{h_2}.$$

Théorème 2.3 *Les deux suites discrètes de Schwarz sont convergentes.*

Démonstration Le raisonnement est similaire à celui adopté dans le cas continu et repose sur le principe du maximum discret.

1. On montre par récurrence que les termes des deux suites discrètes de Schwarz sont des éléments de A_{h_i}. Pour $n = 0$, sur le sous-domaine Ω_1, on a pour tout $s = 1, 2, ..., m(h_1)$;

$$\begin{cases} a(u^1_{h_1}, \varphi^1_s) + c\left(u^1_{h_1}, \varphi^1_s\right) = (f(u^0_{h_1}), \varphi^1_s) + c\left(u^0_{h_1}, \varphi^1_s\right) \\ \\ u^1_{h_1} = u^0_{h_2} = \pi_{h_2}\left(u^0_2\right) & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a(u^1_{h_1}, \varphi^1_s) + c\left(u^1_{h_1}, \varphi^1_s\right) = (f(u^0_{h_1}), \varphi^1_s) + \left(u^0_{h_1}, \varphi^1_s\right) \\ \\ u^1_{h_1} = u^0_{h_2} = \underline{u}_{h_2} = \underline{u}_{h_1} & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Avec

$$a\left(\underline{u}_{h_1}, \varphi^1_s\right) + c\left(\underline{u}_{h_1}, \varphi^1_s\right) \leq \left(f(\underline{u}_{h_1}), \varphi^1_s\right) + c\left(\underline{u}_{h_1}, \varphi^1_s\right).$$

Donc

$$a\left(\underline{u}_{h_1} - u^1_{h_1}, \varphi^1_s\right) + c\left(\underline{u}_{h_1} - u^1_{h_1}, \varphi^1_s\right)$$
$$\leq \left(f(\underline{u}_{h_1}) - f(u^1_{h_1}), \varphi^1_s\right) + c\left(\underline{u}_{h_1} - u^1_{h_1}, \varphi^1_s\right) \leq 0 \text{ dans } \Omega_1$$

avec

$$\underline{u}_{h_1} - u^1_{h_1} = \underline{u}_{h_2} - u^0_{h_2} = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Le lemme du principe du maximum discret implique

$$\underline{u}_{h_1} \leq u^1_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

D'autre part

$$a(u_{h_1}^1, \varphi_s^1) + c\left(u_{h_1}^1, \varphi_s^1\right) = (f(u_{h_1}^0), \varphi_s^1) + c\left(u_{h_1}^0, \varphi_s^1\right)$$

avec

$$u_{h_1}^1 = u_{h_2}^0 = \underline{u}_{h_2} = \underline{u}_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ sur } \Gamma_1.$$

La sur-solution discrète $\overline{u}_{h_1}$ vérifie

$$a\left(\overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1\right) + c\left(\overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1\right) \geq \left(f(\overline{u}_{h_1}), \varphi_s^1\right) + c\left(\overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1\right).$$

Donc $u_{h_1}^1 - \overline{u}_{h_1}$ vérifie

$$a\left(u_{h_1}^1 - \overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1\right) + c\left(u_{h_1}^1 - \overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1\right) \leq \left(f\left(u_{h_1}^1\right) - f(\overline{u}_{h_1}), \varphi_s^1\right) + c\left(u_{h_1}^1 - \overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1\right)$$

avec

$$u_{h_1}^1 - \overline{u}_{h_1} = u_{h_1}^0 - \overline{u}_{h_1} = \underline{u}_{h_1} - \overline{u}_{h_1} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Le principe du maximum discret implique alors

$$u_{h_1}^1 \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on obtient

$$\underline{u}_{h_1} \leq u_{h_1}^1 \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

Pour $n = 0$, dans le sous-domaine Ω_2, on a $\forall\ s = 1, 2, ..., m\,(h_2)$;

$$\begin{cases} a(u_{h_2}^1, \varphi_s^2) + c\left(u_{h_2}^1, \varphi_s^2\right) = (f(u_{h_2}^0, \varphi_s^2) + c\left(u_{h_2}^0, \varphi_s^2\right) \\ \\ u_{h_2}^1 = u_{h_1}^1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Donc

$$a(u_{h_2}^1, \varphi_s^2) = (f(u_{h_2}^1, \varphi_s^2) \text{ dans } \Omega_2 \text{ et } u_{h_2}^1 = u_{h_1}^1 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Comme on a prouvé que

$$\underline{u}_{h_1} \leq u^1_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

Donc

$$\underline{u}_{h_2} = \underline{u}_{h_1} \leq u^1_{h_2} = u^1_{h_1} \leq \overline{u}_{h_1} = \overline{u}_{h_2} \text{ sur } \Gamma_2.$$

Avec

$$a\left(\underline{u}_{h_2}, \varphi^2_s\right) + c\left(\underline{u}_{h_2}, \varphi^2_s\right) \leq \left(f\left(\underline{u}_{h_2}\right), \varphi^2_s\right) + c\left(\underline{u}_{h_2}, \varphi^2_s\right)$$

et

$$a(\overline{u}_{h_2}, \varphi^2_s) + c(\overline{u}_{h_2}, \varphi^2_s) \geq \left(f(\overline{u}_{h_2}), \varphi^2_s\right) + c(\overline{u}_{h_2}, \varphi^2_s).$$

Donc

$$\begin{aligned} & a(u^1_{h_2} - \overline{u}_{h_2}, \varphi^2_s) + c\left(u^1_{h_2} - \overline{u}_{h_2}, \varphi^2_s\right) \\ & \qquad = (f(u^0_{h_2}) - \overline{u}_{h_2}, \varphi^2_s) + c\left(u^0_{h_2} - \overline{u}_{h_2}, \varphi^2_s\right) \leq 0 \end{aligned}$$

avec

$$u^1_{h_2} - \overline{u}_{h_2} = u^1_{h_1} - \overline{u}_{h_1} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Et

$$\begin{aligned} & a(\underline{u}_{h_2} - u^1_{h_2}, \varphi^2_s) + c\left(\underline{u}_{h_2} - u^1_{h_2}, \varphi^2_s\right) \\ & \qquad = (f(\underline{u}_{h_2}) - f\left(u^0_{h_2}\right), \varphi^2_s) + c\left(\underline{u}_{h_2} - u^0_{h_2}, \varphi^2_s\right) \end{aligned}$$

ainsi que

$$\underline{u}_{h_2} - u^1_{h_2} = \underline{u}_{h_1} - u^1_{h_1} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

Alors le principe du maximum discret implique

$$\underline{u}_{h_2} \leq u^1_{h_2} \leq \overline{u}_{h_2} \text{ dans } \Omega_2.$$

On suppose que les inégalités qui suivent sont vraies pour $i = 1, 2$

$$\underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i}^n \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \Omega_i.$$

Et on démontre que

$$\underline{u}_{h_i} \leq u_{h_i}^{n+1} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \Omega_i.$$

Comme

$$\begin{cases} a(u_{h_1}^{n+1}, \varphi_s^1) + c(u_{h_1}^{n+1}, \varphi_s^1) = (f(u_{h_1}^n), \varphi_s^1) + (u_{h_1}^n, \varphi_s^1) \\ \\ u_{h_1}^{n+1} = u_{h_2}^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Alors on peut écrire

$$a(u_{h_1}^{n+1} - \overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1) + c(u_{h_1}^{n+1} - \overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1) = (f(u_{h_1}^n) - f\left(\overline{u}_{h_1}\right), \varphi_s^1) + c(u_{h_1}^n - \overline{u}_{h_1}, \varphi_s^1) \leq 0$$

avec

$$u_{h_1}^{n+1} - \overline{u}_{h_1} = u_{h_2}^n - \overline{u}_{h_2} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Et

$$\begin{aligned} & a(\underline{u}_{h_1} - u_{h_1}^{n+1}, \varphi_s^1) + c(\underline{u}_{h_1} - u_{h_1}^{n+1}, \varphi_s^1) \\ & \qquad = (f\left(\underline{u}_{h_1}\right) - f\left(u_{h_1}^n\right), \varphi_s^1) + c(\underline{u}_{h_1} - u_{h_1}^{n+1}, \varphi_s^1) \leq 0 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\underline{u}_{h_1} - u_{h_1}^{n+1} = \underline{u}_{h_1} - u_{h_2}^n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Le principe du maximum discret implique

$$\underline{u}_{h_1} \leq u_{h_1}^{n+1} \leq \overline{u}_{h_1} \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant cette dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$\underline{u}_{h_2} \leq u_{h_2}^{n+1} \leq \overline{u}_{h_2} \text{ dans } \Omega_2.$$

2. Monotonie des suites de Schwarz: On utilise le raisonnement par récurrence pour montrer que les suites discrètes de Schwarz sont monotones croissantes. Pour $n = 0$ sous-domaine Ω_1, on a

$$\underline{u}_{h_1} \leq u_{h_1}^1 \text{ dans } \Omega_1$$

et

$$u_{h_2}^0 = \underline{u}_{h_2} \leq u_{h_2}^1 \text{ dans } \Omega_2.$$

Comme

$$\begin{aligned} a(u_{h_1}^1 - u_{h_1}^2, \varphi_s^1) + c\left(u_{h_1}^1 - u_{h_1}^2, \varphi_s^1\right) \\ = \left(f(\underline{u}_{h_1}) - f\left(u_{h_1}^1\right), \varphi_s^1\right) + c\left(u_{h_1}^1 - u_{h_1}^2, \varphi_s^1\right) \leq 0 \end{aligned}$$

et

$$u_{h_1}^1 - u_{h_1}^2 = u_{h_2}^0 - u_{h_2}^1 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Le principe du maximum discret implique

$$u_{h_1}^1 \leq u_{h_1}^2 \text{ dans } \Omega_1.$$

Ainsi on vient de trouver

$$\begin{aligned} \underline{u}_{h_1} &\leq u_{h_1}^1 && \text{dans } \Omega_1, \\ u_{h_2}^0 &= \underline{u}_{h_2} \leq u_{h_2}^1 && \text{dans } \Omega_2, \\ u_{h_1}^1 &\leq u_{h_1}^2 && \text{dans } \Omega_1. \end{aligned}$$

On suppose que

$$u_{h_1}^{n-1} \leq u_{h_1}^{n} \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_{h_2}^{n-1} \leq u_{h_2}^{n} \text{ dans } \Omega_2.$$

Et on démontre

$$u_{h_1}^{n} \leq u_{h_1}^{n+1} \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } u_{h_2}^{n} \leq u_{h_2}^{n+1} \text{ dans } \Omega_2.$$

En effet:

$$a(u_{h_1}^{n+1} - u_{h_1}^{n}, \varphi_s^1) + c\left(u_{h_1}^{n+1} - u_{h_1}^{n}, \varphi_s^1\right)$$
$$= (f(u_1^n) - f(u_1^{n-1}), \varphi_s^1) + c\left(u_{h_1}^{n} - u_{h_1}^{n-1}, \varphi_s^1\right)$$

et

$$u_{h_1}^{n+1} - u_{h_1}^{n} = u_{h_2}^{n} - u_{h_2}^{n-1} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Le principe du maximum discret implique alors

$$u_{h_1}^{n} \leq u_{h_1}^{n+1} \text{ dans } \Omega_1.$$

En utilisant la dernière inégalité et en adoptant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve

$$u_{h_2}^{n} \leq u_{h_2}^{n+1} \text{ dans } \Omega_2.$$

3. Les résultats de 1 et 2 impliquent que pour tout $n \geq 0$ et pour $i = 1, 2$.

$$\underline{u}_{h_i} = u_{h_i}^{0} \leq ... \leq u_{h_i}^{n} \leq u_{h_i}^{n+1} \leq \overline{u}_{h_i} \text{ dans } \Omega_i.$$

Donc les deux suites discrètes de Schwarz sont convergentes vers u_{h_i} solution de (2.3.1).

Bibliographie

[1] P. L. Lions: On the Schwarz Alternating Method I, Proc. 1st, Int. sympo. On Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. SIAM Philadelphia (1988).

[2] P. L. Lions: On the Schwarz Alternating Method II, Proc. 2nd, Int. sympo. On Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. SIAM Philadelphia pp.47-70 (1989).

[3] S. H. Lui: On Monotone and Schwarz Alternating Methods For Nonlinear Elliptic PDEs. Mathematical Modeling and Numerical Analysis, M2AN, Vol. 35, No 1, pp. 1-15 (2001).

[4] S. H. Lui: On the Linear Monotone Iteration and Schwarz Methods for Nonlinear Elliptic PDEs. Numerish Mathematik, pp. 109-129 (2002).

[5] C. V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenium Press, New York, (1992).

[6]R. Glowinski, G. H. Golub, J. Periaux: First Int. Symp. on Domain Decomposition Methods. SIAM, Philadelphia, (1988).

[7] P.G. Ciarlet, P.A. Raviart: Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method, comput. Meth. in Appl. Mech. Eng. 2, pp. 17-31 (1973).

[8] J. Karatson, S. Korotov, discrete maximum principle for finite element solutions for nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions. Numer. Math. 99, 669--698 (2005).

Chapitre 3

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'analyse en norme uniforme de l'erreur d' approximation de la méthode alternée de Schwarz pour des problèmes elliptiques avec second membre dépendant de la solution ([1], [2], [3], [4], [5] et [6]. On considère un domaine Ω, réunion de deux sous-domaines avec recouvrement, où chaque sous-domaine comporte sa propre triangulation dans le sens qu'un nœud ou un triangle appartenant à l'un des sous-domaines n'appartient pas à l'autre et dans le cas où les sous-problèmes définis sur les sous-domaines sont non-linéaires.

Ce type de discrétisation est intéressant pour les problèmes où la discrétisation du problème global est impossible. Cette technique présente un intérêt considérable pour les ingénieurs ainsi que les experts en calcul scientifique car elle permet l'utilisation des pas de discrétisations différents ainsi que des ordres d'approximation différents pour chaque sous-domaine selon les besoins et les propriétés des solutions et des problèmes étudiés.

On note que la littérature relative à l'analyse de l'erreur d'approximation en norme uniforme relative à cette technique de discrétisation est assez limitée (cf. [8] , [9] , [10] et [11]).

Dans le but de prouver le résultat principal de ce chapitre, on utilise une approche similaire à celle utilisée dans [9] , laquelle consiste à combiner la convergence géométrique du processus continu de Schwarz due à P. L. Lions [2] et un lemme qui consiste à estimer en norme uniforme l'erreur entre les itérés continus et discrets de Schwarz. L'ordre de convergence optimal est alors obtenu en utilisant l'estimation standard en norme L^∞ pour les problèmes linéaires elliptiques [7]. La démonstration du lemme repose sur la dépendance

Lipschitzienne des conditions sur le bord et le second membre de l'équation linéaire tandis que dans [9] le lemme est obtenu seulement en fonction des conditions aux limites. On considère le problème qui suit

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + cu = f(u) \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = g \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Dont la formulation faible est:

$$a\,(u,v) + c\,(u,v) = (f\,(u)\,,v)\,,\ \forall v \in H_0^1\,(\Omega)\,. \tag{3.1.2}$$

Où

(1) f est une fonctionnelle non-linéaire monotone croissante.

(2) Lipschitzienne, il existe une constante k telle que $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$

$$|f\,(x) - f\,(y)| \leq k\,|x-y|$$

(3) c une constante positive telle que

$$k < \beta \leq c$$

On décompose Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 avec recouvrement, tel que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

On note par $\partial\Omega_i$ le bord de Ω_i et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$. L'intersection de $\overline{\Gamma}_i$ et $\overline{\Gamma}_j$ est supposée vide. Cette décomposition permet de définir le système de deux sous-problèmes non-linéaires avec deux inconnues $u_i,\ i = 1,2$: Trouver $(u_1, u_2) \in V_1^{(u_2)} \times V_2^{(u_1)}$ solution de

$$\begin{cases} a_1\left(u_1,v\right)+c\left(u_1,v\right)=\left(f\left(u_1\right),v\right),\ \forall v\in H_0^1(\Omega_1). \\ \\ a_2\left(u_2,v\right)+c\left(u_2,v\right)=\left(f\left(u_2\right),v\right),\ \forall v\in H_0^1(\Omega_2). \end{cases} \tag{3.1.3}$$

En démarrant de la donnée initiale continue u_2^0 définie sur Γ_1, la méthode alternée de Schwarz appliquée au problème (P) conduit à la résolution séquentielle des sous-problèmes suivants: Trouver $u_1^{n+1}\in V_1^{\left(u_2^n\right)}$ solution de:

$$a_1\left(u_1^{n+1},v\right)+c\left(u_1^{n+1},v\right)=\left(f\left(u_1^{n+1}\right),v\right),\ \forall v\in H_0^1(\Omega_1);\ \forall n\geq 0 \tag{3.1.4}$$

et $u_2^{n+1}\in V_2^{\left(u_1^{n+1}\right)}$ solution de:

$$a_2\left(u_2^{n+1},v\right)+c\left(u_2^{n+1},v\right)=\left(f\left(u_2^{n+1}\right),v\right),\ \forall v\in H_0^1(\Omega_2);\ \forall n\geq 0. \tag{3.1.5}$$

Où

$$V_i^{(w_j)}=\left\{v\in H^1\left(\Omega_i\right)\ \text{tel que}\ v=w_j\ \text{sur}\ \Gamma_i\right\} \tag{3.1.6}$$

L'étude de la convergence géométrique des suites de Schwarz dans le cas d'une donnée initiale u_2^0 a été réalisée par P. L. Lions [2].

On applique une discrétisation indépendante τ^{h_i} pour chaque sous-domaine. Le système discret relatif aux deux discrétisations est: Trouver $(u_{h_1},u_{h_2})\in V_{h_1}^{\left(u_{h_2}\right)}\times V_{h_2}^{\left(u_{h_1}\right)}$ tel que

$$\begin{cases} a_1\left(u_{h_1},v\right)+c\left(u_{h_1},v\right)=\left(f\left(u_{h_1}\right),v\right),\ \forall v\in V_{h_1}. \\ \\ a_2\left(u_{h_2},v\right)+c\left(u_{h_2},v\right)=\left(f\left(u_{h_2}\right),v\right),\ \forall v\in V_{h_2}. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Où les espaces discrets

$$V_{h_i}=\left\{v\in H_0^1(\Omega_i)\cap C(\overline{\Omega}_i)\colon\ v\in P_1\ \text{sur chaque triangle}\right\}$$

et les espaces $V_{h_i}^{(w)}$ suivants: Pour tout $i, j = 1, 2$ et $w \in C\left(\overline{\Gamma}_i\right)$:

$$V_{h_i}^{(w)} = \{v \in V_{h_i} \text{ tel que } v_{h_i} = \pi_{h_i}(w) \text{ sur } \Gamma_i\}$$

où π_{h_i} est l'opérateur d'interpolation relatif à τ^{h_i}.

On définit l'algorithme de Schwarz discret telle que $u_{h_2}^0 = \pi_{h_2}\left(u_2^0\right)$ est la donnée initiale discrète, comme suit; Trouver $u_{h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)}$ solution de

$$a_1(u_{h_1}^{n+1}, v) + c(u_{h_1}^{n+1}, v) = \left(f\left(u_{h_1}^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_1}, \ n \geq 0 \tag{3.1.8}$$

et $u_{h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)}$ solution de

$$a_2(u_{h_2}^{n+1}, v) + c(u_{h_2}^{n+1}, v) = \left(f\left(u_{h_2}^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_2}, \ n \geq 0. \tag{3.1.9}$$

On obtient alors sous des hypothèses réalistes (pour n assez grand), l'ordre de convergence suivant: pour tout $i = 1, 2$, il existe une constante C indépendante de h et de n telle que:

$$\left\| u_i - u_{h_i}^{n+1} \right\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2$$

et

$$\left\| u_i - u_{h_i}^{n+1} \right\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 \left|\log h\right|$$

3.2 Préliminaires

3.2.1 Les Equations Linéaires Elliptiques

Soit Ω un domaine convexe de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. On considère la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u.\nabla v)\, dx.$$

La forme linéaire

$$(f,v) = \int_{\Omega} f(x)\, v(x)\, dx$$

où le second membre

$$f \in L^{\infty}(\Omega)$$

L'espace

$$V^{(g)} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

où g est une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$. On considère l'équation linéaire elliptique: Trouver $\zeta \in V^{(g)}$ tel que

$$a(\zeta, v) + c(\zeta, v) = (f,v)\,,\ \forall v \in V^{(g)}, \tag{3.2.1}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et telle que:

$$c \geq \beta > 0$$

Soit V_h l'espace des éléments finis constitué de fonctions linéaires continues par morceaux et s'annulant sur la frontière $\partial\Omega$ et $\phi_s,\ s = 1, 2, ..., m(h)$ les fonctions de bases de V_h. L'analogue discret du problème continu (3.2.1) est défini par: Trouver $\zeta_h \in V_h^{(g)}$ tel que

$$a(\zeta_h, v) + c(\zeta_h, v) = (f,v)\,,\ \forall v \in V_h^{(g)} \tag{3.2.2}$$

où

$$V_h^{(g)} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = \pi_h(g) \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et π_h est l'opérateur d'interpolation défini sur $\partial\Omega$.

Théorème 3.1 (cf. [7]) *Soient ζ solution de (3.2.1) et ζ_h solution de (3.2.2) alors il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\|\zeta - \zeta_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h| .$$

Lemme 3.1 [4] *Soit $w \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que $a(w,\phi) + c(w,\phi) \geq 0$ pour tout ϕ positive dans $H_0^1(\Omega)$ et $w \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors $w \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.*

Notation 3.1 *Soient (f,g) et $\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux données telles que $\zeta = \sigma(f,g)$ et $\widetilde{\zeta} = \sigma\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux solutions relatives au problème (3.2.1), alors on a la proposition qui suit:*

Proposition 3.1 *Sous les conditions du lemme 3.1 précédent on a*

$$\left\|\zeta - \widetilde{\zeta}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)},\ \|g - \widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}.$$

Démonstration On pose

$$\Phi = \max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)},\ \|g - \widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\widetilde{f} &\leq f + \left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq f + \left(\frac{c}{\beta}\right)\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{f} &\leq f + c\frac{1}{\beta}\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} \\
&\leq f + c\max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^{\infty}(\Omega)},\ \|g - \widetilde{g}\|_{L^{\infty}(\partial\Omega)}\right\} \\
&\leq f + c\Phi
\end{aligned}$$

Ce qui implique que pour tout ϕ positive dans $H_0^1(\Omega)$

$$\left(\widetilde{f}, \phi\right) \leq (f + c\Phi, \phi)$$

Alors

$$\begin{aligned}
a(\widetilde{\zeta}, \phi) + c(\widetilde{\zeta}, \phi) &\leq a(\zeta, \phi) + c(\zeta, \phi) + c(\Phi, \phi) \\
&= a(\zeta + \Phi, \phi) + c(\zeta + \Phi), \phi)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases}
a(\zeta + \Phi - \widetilde{\zeta}, \phi) + c\left(\zeta + \Phi - \widetilde{\zeta}\right), \phi) \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\
\zeta + \Phi - \widetilde{\zeta} = g + \Phi - \widetilde{g} \geq 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega.
\end{cases}$$

En utilisant le lemme 3.1 on obtient

$$\zeta + \Phi - \widetilde{\zeta} \geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

En échangeant les rôles de (f, g) et de $\left(\widetilde{f}, \widetilde{g}\right)$ on trouve

$$\widetilde{\zeta} + \Phi - \zeta \geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Ce qui complète la démonstration.

Remarque 3.1 *Le lemme* 3.1 *reste vrai dans le cas discret.*

En effet, on suppose que le principe du maximum discret (p.m.d.) soit satisfait, alors on a:

Lemme 3.2 *Soit* $w \in V_h$ *tel que:* $a(w, \phi_s) + c(w, \phi_s) \geq 0$, $s = 1, 2, ..., m(h)$ *et* $w \geq 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Alors* $w \geq 0$ *dans* $\overline{\Omega}$.

Démonstration La démonstration est la conséquence directe du principe du maximum discret.

Notation 3.2 *Soient* (f, g) *et* $\left(\widetilde{f}, \widetilde{g}\right)$ *deux données discrètes telles que* $\zeta_h = \sigma_h(f, g)$ *et* $\widetilde{\zeta}_h = \sigma_h\left(\widetilde{f}, \widetilde{g}\right)$ *deux solutions discrètes relatives au problème discret (3.2.2), alors on a la proposition suivante.*

Proposition 3.2 *Sous les conditions du principe du maximum discret (p.m.d.) et sous les conditions du lemme 3.2, on a*

$$\left\|\zeta_h - \widetilde{\zeta}_h\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \|g - \widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}.$$

Démonstration On pose

$$\Phi_h = \max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \|g - \widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}$$

On sait que:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} &\leq f + \left\|\widetilde{f} - f\right\| \\ &\leq f + \left(\frac{c}{\beta}\right)\left\|\widetilde{f} - f\right\| \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\widetilde{f} \leq f + c\Phi_h.$$

Donc $\forall\ \phi_s,\ \ s = 1, 2, ..., m(h)$, une fonction de base relative à τ^h

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{f}, \phi_s\right) &\leq (f + c\Phi_h, \phi_s) \\ &= (f, \phi_s) + (c\Phi_h, \phi_s).\end{aligned}$$

Où $(.,.)$ est le produit scalaire dans L^2, alors

$$\begin{aligned}a\left(\widetilde{\zeta}_h, \phi_s\right) &\leq a(\zeta_h, \phi_s) + (c\Phi_h, \phi_s) \\ &= \int_\Omega (\nabla\zeta_h \nabla\phi_s + c\zeta_h\phi_s) + (c\Phi_h, \phi_s)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}a\left(\widetilde{\zeta}_h, \phi_s\right) &\leq \int_\Omega (\nabla(\zeta_h + \Phi_h)\nabla\phi_s + c\zeta_h\phi_s) + (c\Phi_h, \phi_s) \\ &= \int_\Omega (\nabla(\zeta_h + \Phi_h)\nabla\phi_s + c\zeta_h\phi_s + c\Phi_h\phi_s)\end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned}a\left(\widetilde{\zeta}_h, \phi_s\right) &\leq \int_\Omega (\nabla(\zeta_h + \Phi_h)\nabla\phi_s + c(\zeta_h + \Phi_h)\phi_s) \\ &= a(\zeta_h + \Phi_h, \phi_s)\end{aligned}$$

Ainsi

$$a\left(\widetilde{\zeta}_h, \phi_s\right) \leq a(\zeta_h + \Phi_h, \phi_s)$$

ou

$$a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, \phi_s\right) \leq 0.$$

et donc dans le cas où v_h est positif, $v_h = \sum_s v_h(a_s)\,\phi_s$, on a

$$\begin{cases} a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h\right) \leq 0, \forall\ v_h \geq 0 \\ \\ \widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h = g - \widetilde{g} - \Phi_h \leq 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le (p.m.d.) implique:

$$\max_{\overline{\Omega}}\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h\right) \leq 0$$

ou encore

$$\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h \leq \Phi_h \text{ dans } \Omega.$$

En échangeant les rôles de $\widetilde{f}$ et de f on montre que

$$\zeta_h - \widetilde{\zeta}_h \leq \Phi_h \text{ dans } \Omega.$$

Et donc

$$\left\|\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Phi_h.$$

Dans le cas où v_h est négatif alors,

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{f}, v_h\right) &\geq (f + c\Phi_h, v_h) \\ \\ &= (f, v_h) + (c\Phi_h, v_h) \\ \\ &= a(\zeta_h, v_h) + (c\Phi_h, v_h)\,. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$a(\zeta_h, v_h) + (c\Phi_h, v_h) \leq a\left(\widetilde{\zeta}_h, v_h\right).$$

Donc

$$\int_\Omega (\nabla\zeta_h \nabla v_h + c\zeta_h v_h) + (c\Phi_h, v_h) \leq a\left(\widetilde{\zeta}_h, v_h\right)$$

Alors

$$\int_\Omega (\nabla(\zeta_h + \Phi_h)\nabla v_h + c\zeta_h v_h) + (c\Phi_h, v_h) \leq a\left(\widetilde{\zeta}_h, v_h\right).$$

Ce qui implique

$$a(\zeta_h + \Phi_h, v_h) \leq a\left(\widetilde{\zeta}_h, v_h\right)$$

et donc

$$\begin{cases} a(\zeta_h + \Phi_h - \widetilde{\zeta}_h, v_h) \leq 0, \ \forall v_h \leq 0 \\ \\ \zeta_h + \Phi_h - \widetilde{\zeta}_h = g + \Phi_h - \widetilde{g} \leq 2\Phi_h \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le (p.m.d.) implique alors

$$\max_\Omega(\zeta_h + \Phi_h - \widetilde{\zeta}_h) \leq 2\Phi_h$$

et donc

$$\zeta_h - \widetilde{\zeta}_h \leq \Phi_h \text{ dans } \Omega.$$

En échangeant les rôles de $\widetilde{f}$ et de f on montre que

$$\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h \leq \Phi_h \text{ dans } \Omega$$

et donc

$$\left\|\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Phi_h.$$

Dans le cas où v_h change de signe on pose

$$v_h = v_h^+ - v_h^-$$

où

$$v_h^+ = \max(v_h, 0) \geq 0$$

et

$$v_h^- = \max(-v_h, 0) \geq 0.$$

Ce qui implique

$$a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h^+\right) \leq 0$$

et

$$a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h^-\right) \leq 0$$

La somme des deux inégalités implique

$$a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h^+ + v_h^-\right) \leq 0$$

Comme

$$v_h^+ = v_h + v_h^-$$

Alors

$$a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h + 2v_h^-\right) \leq 0$$

ou

$$a(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h) + 2a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h^-\right) \leq 0$$

Donc on distingue les deux cas possibles suivants

$$\mathbf{1}: \ a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h\right) \leq 0 \leq -2a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h^-\right)$$

ou

$$\mathbf{2}:\ 0 \le a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h\right) \le -2a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h^-\right)$$

Ainsi le cas 1 implique

$$\begin{cases} a\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h, v_h\right) \le 0,\ \forall v_h \\ \\ \widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h = g - \widetilde{g} - \Phi_h \le 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le (p.m.d.) implique

$$\max_{\overline{\Omega}}\left(\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h - \Phi_h\right) \le 0$$

ou encore

$$\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h \le \Phi_h \text{ dans } \Omega.$$

En échangeant les rôles de $\widetilde{f}$ et de f on montre que

$$\zeta_h - \widetilde{\zeta}_h \le \Phi_h \text{ dans } \Omega$$

et donc

$$\left\|\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h\right\|_{L^\infty(\Omega)} \le \Phi_h.$$

Le cas 2 implique

$$\begin{cases} a\left(-\widetilde{\zeta}_h + \zeta_h + \Phi_h, v_h\right) \le 0,\ \forall v_h \\ \\ -\widetilde{\zeta}_h + \zeta_h + \Phi_h = -\widetilde{g} + g + \Phi_h \le 2\Phi_h \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le (p.m.d.) implique

$$\max_{\overline{\Omega}}\left\{-\widetilde{\zeta}_h + \zeta_h + \Phi_h\right\} \le \max\left\{0, 2\Phi_h\right\}$$

et donc

$$-\widetilde{\zeta}_h + \zeta_h \leq \Phi_h \text{ dans } \Omega.$$

En échangeant les rôles de $\widetilde{f}$ et de f on montre que:

$$\widetilde{\zeta}_h - \zeta_h \leq \Phi_h \text{ dans } \Omega$$

et donc

$$\left\| \widetilde{\zeta}_h - \zeta_h \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Phi_h.$$

Remarque 3.2 *Si on considère le cas où $f = \widetilde{f}$ on retrouve alors le principe du maximum discret.*

3.3 La Méthode Alternée de Schwarz pour les E.D.Ps. Non-Linéaires

On considère l'E.D.P. elliptique non-linéaire suivante

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f(u) & \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Dont la formulation faible est:

$$a(u, v) + c(u, v) = (f(u), v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.3.2}$$

où

(1) f est une fonctionnelle non-linéaire monotone croissante.

(2) Lipschitzienne, il existe une constante k telle que $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$

(3) c une constante positive telle que

$$k < \beta \leq c$$

Théorème 3.2 (cf.[12]) *Sous les conditions énoncées ci-dessus le problème (3.3.2) admet une solution unique .*

On décompose le domaine Ω en deux sous-domaines polygonaux Ω_1 et Ω_2 tels que:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

On note par $\partial\Omega_i$ le bord de Ω_i et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ l'intersection de Γ_i avec Γ_j est supposée vide. Soit l'espace

$$V_i^{(w_j)} = \left\{ v \in H^1(\Omega_i) \text{ tel que } v = w_j \text{ sur } \Gamma_i \right\}. \tag{3.3.3}$$

On associe au problème (3.3.2) le système de deux sous-problèmes comme suit: Trouver $(u_1, u_2) \in V_1^{(u_2)} \times V_2^{(u_1)}$ solution de

$$\begin{cases} a_1(u_1, v) + c(u_1, v) = (f(u_1), v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega_1). \\ \\ a_2(u_2, v) + c(u_2, v) = (f(u_2), v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega_2). \end{cases}$$

où

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} (\nabla u.\nabla v)\, dx$$

et

$$u_i = u/\Omega_i, \ i = 1, 2$$

3.3.1 Les Suites Continues de Schwarz

Soit u^0 une donnée initiale continue dans $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que

$$u_2^0 = u^0/\Omega_2 \tag{3.3.4}$$

On définit respectivement la suite de Schwarz $\left(u_1^{n+1}\right)$ dans Ω_1 telle que $u_1^{n+1} \in V_1^{\left(u_2^n\right)}$ est solution de:

$$a_1\left(u_1^{n+1}, v\right) + c\left(u_1^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_1^{n+1}\right), v\right),\ \forall v \in H_0^1(\Omega_1);\ \forall n \geq 0 \tag{3.3.5}$$

et $\left(u_2^{n+1}\right)$ dans Ω_2 telle que $u_2^{n+1} \in V_2^{\left(u_1^{n+1}\right)}$ est solution de:

$$a_2\left(u_2^{n+1}, v\right) + c\left(u_2^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_2^{n+1}\right), v\right),\ \forall v \in H_0^1(\Omega_2);\ \forall n \geq 0. \tag{3.3.6}$$

On introduit dans ce qui suit un résultat de la convergence géométrique des suites de Schwarz, dû à Lions [2].

Théorème 3.3 *Les deux suites de Schwarz* $\left(u_2^{n+1}\right)$ et $\left(u_2^{n+1}\right)$ *convergent géométriquement vers la solution du système continu. Ils existent deux constantes* k_1 *et* k_2 *dans* $]0,1[$ *qui dépendent respectivement de* (Ω_1, Γ_2) *et* (Ω_2, Γ_1) *tels que pour tout* $n \geq 0$ *on a*

$$\left\|u_1 - u_1^{n+1}\right\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq k_1^n k_2^n \left\|u^0 - u\right\|_{L^\infty(\Gamma_1)}, \tag{3.3.7}$$

$$\left\|u_2 - u_2^{n+1}\right\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq k_1^{n+1} k_2^n \left\|u^0 - u\right\|_{L^\infty(\Gamma_2)}. \tag{3.3.8}$$

3.3.2 Discrétisation

Pour tout $i = 1, 2$, on définit τ^{h_i} une discrétisation par une méthode des éléments finis régulière et quasi uniforme et h_i est le pas de discrétisation. On suppose que les deux triangulations sont incompatibles dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$ dans le sens qu'un triangle appartenant à une triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre.

Soit $V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$ l'espace des fonctions continues par morceaux sur τ^{h_i} et qui s'annulent sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$, défini par

$$V_{h_i} = \left\{ v \in C\left(\overline{\Omega}_i\right) \cap H_0^1(\Omega_i) \text{ tel que } v/K \in P_1,\ \forall K \in \tau^{h_i} \right\}.$$

$\phi_s^i,\ s = 1, 2, ..., m(h_i)$ sont les fonctions de bases de τ^{h_i}. Pour tout $w \in C\left(\overline{\Gamma_i}\right)$ on définit l'espace

$$V_{h_i}^{(w)} = \{ v \in V_{h_i} :\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i;\ v = \pi_{h_i}(w) \text{ sur } \Gamma_i \}.$$

où π_{h_i} est l'opérateur d'interpolation sur Γ_i.

Le Principe du Maximum Discret (cf. [13], [14]) On suppose que les matrices résultantes des discrétisations des problèmes (3.3.5) et (3.3.6) sont des M-matrices.

On fait remarquer que comme les deux triangulations τ^{h_1} et τ^{h_2} sont indépendantes dans l'intersection des sous-domaines il est impossible de formuler le problème discret global relatif au problème continu (3.3.2).

3.3.3 Les Suites de Schwarz Discrètes

On définit les suites discrètes de Schwarz comme suit: Soit u_h^0 l'analogue discret de u^0 définie dans (3.3.4). La suite discrète de Schwarz $\left(u_{h_1}^{n+1}\right)$ dans Ω_1 telle que

$u_{h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)}$ est solution de

$$a_1\left(u_{h_1}^{n+1}, v\right) + c\left(u_{h_1}^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_{h_1}^{n+1}\right), v\right),\ \forall v \in V_{h1},\ \forall n \geq 0 \tag{3.3.9}$$

et la suite discrète de Schwarz $\left(u_{h_2}^{n+1}\right)$ dans Ω_2 telle que $u_{h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)}$ est solution de

$$a_2\left(u_{h_2}^{n+1}, v\right) + c\left(u_{h_2}^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_{h_2}^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_2}, \ \forall n \geq 0. \tag{3.3.10}$$

3.4 Analyse de l'Erreur d'Approximation

Cette section est consacrée à la démonstration des deux résultats principaux. On commence par introduire les deux suites auxiliaires suivantes et démontrer un lemme fondamental relatif à chaque résultat.

3.4.1 Définition des deux Suites Auxiliaires de Schwarz

Soit $w_{h_2}^0 = u_{h_2}^0$ la donnée initiale discrète, on définit les suites auxiliaires suivantes $\left(w_{h_i}^{n+1}\right), i = 1, 2$ telles que $w_{h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{\left(u_2^n\right)}$ est solution de:

$$a_1\left(w_{h_1}^{n+1}, v\right) + c\left(w_{h_1}^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_1^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_1}; \ \forall n \geq 0 \tag{3.4.1}$$

et $w_{h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{\left(u_1^{n+1}\right)}$ est solution de:

$$a_2\left(w_{h_2}^{n+1}, v\right) + c\left(w_{h_2}^{n+1}, v\right) = \left(f\left(u_2^{n+1}\right), v\right), \ \forall v \in V_{h_2}; \ \forall n \geq 0. \tag{3.4.2}$$

Il est claire que $w_{h_1}^{n+1}$ et $w_{h_2}^{n+1}$ sont respectivement les analogues discrets de u_1^{n+1} et u_2^{n+1} définis dans (3.3.5) et (3.3.6). Comme $f(.)$ est continue $\left\|f\left(u_i^n\right)\right\|_\infty \leq C$ (C indépendante de n) en utilisant alors les estimations standards pour les problèmes elliptiques linéaires, on a

$$\left\|u_i^n - w_{h_i}^n\right\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 \left|\log h\right| \tag{3.4.3}$$

où C est une constante indépendante de h et de n.

Notation 3.3 *Dans toute la suite on utilisera les notations suivantes:*

$$|.|_1 = \|.\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \, ; \; |.|_2 = \|.\|_{L^\infty(\Gamma_2)}$$

$$\|.\|_1 = \|.\|_{L^\infty(\Omega_1)} \, ; \; \|.\|_2 = \|.\|_{L^\infty(\Omega_2)}$$

$$\pi_{h_1} = \pi_{h_2} = \pi_h$$

3.4.2 Estimation Optimale de l'Erreur d'Approximation: Premier Résultat

Le lemme qui suit joue un rôle crucial dans la démonstration du premier résultat.

Lemme 3.3 *Soient u_i^n la suite de Schwarz continue et $u_{h_i}^n$ la suite de Schwarz discrète alors on a pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i = 1, 2$*

$$\left\| u_1^n - u_{h_1}^n \right\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| u_1^i - w_{h_1}^i \right\|_1 + \sum_{i=0}^{n-1} \left\| u_2^i - w_{h_2}^i \right\|_2 \right)$$

et

$$\left\| u_2^n - u_{h_2}^n \right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} \left(\sum_{i=0}^{n} \left\| u_2^i - w_{h_2}^i \right\|_2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| u_1^i - w_{h_1}^i \right\|_1 \right).$$

où $\rho = \dfrac{k}{\beta}$.

Démonstration La démonstration du lemme repose sur le raisonnement par récurrence. Par définition de $u_{h_i}^0$ on a:

$$\left\| u_i^0 - u_{h_i}^0 \right\|_i \leq Ch^2 \left| \log h \right|$$

Pour $n = 1$, on a:

$$\left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \left\| u_1^1 - w_{h_1}^1 \right\|_1 + \left\| w_{h_1}^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1$$

D'après la proposition 3.2, on obtient:

$$\begin{aligned}
\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 &\leq \left\|u_1^1 - w_{h_1}^1\right\|_1 + \left\|w_{h_1}^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \\
&\leq \left\|u_1^1 - w_{h_1}^1\right\|_1 + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_1^1\right) - f\left(u_{h_1}^1\right)\right\|_1,\ \left|\pi_h u_2^0 - \pi_h u_{h_2}^0\right|_2\right\} \\
&\leq \left\|u_1^1 - w_{h_1}^1\right\|_1 + \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1,\ \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas:

$$\mathbf{1}\ : \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1, \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\} = \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

ou

$$\mathbf{2}\ : \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1, \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\} = \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

Le **cas 1** implique:

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \left\|u_1^1 - w_{h_1}^1\right\|_1 + \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

et donc:

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{1}{(1-\rho)}\left\|u_1^1 - w_{h_1}^1\right\|_1.$$

Le **cas 2** implique:

$$\begin{aligned}
\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 &\leq \left\|u_1^1 - w_{h_1}^1\right\|_1 + \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{1}\left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 + \sum_{i=0}^{0}\left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 \\
&\leq \frac{1}{(1-\rho)}\left(\sum_{i=1}^{1}\left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 + \sum_{i=0}^{0}\left\|u_2^0 - w_{h_2}^0\right\|_2\right)
\end{aligned}$$

Dans les deux cas on a:

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=1}^{1} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 + \sum_{i=0}^{0} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 \right).$$

En faisant le même travail pour le second sous-domaine on trouve:

$$\begin{aligned}
\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 &\leq \left\|u_2^1 - w_{h_2}^1\right\|_2 + \left\|w_{h_2}^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \\
&\leq \left\|u_2^1 - w_{h_2}^1\right\|_2 + \max\left\{ \frac{1}{\beta} \left\|f\left(u_2^1\right) - f\left(u_{h_2}^1\right)\right\|_2 ,\ \left|\pi_h u_1^1 - \pi_h u_{h_1}^1\right|_1 \right\} \\
&\leq \left\|u_2^1 - w_{h_2}^1\right\|_2 + \max\left\{ \rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 ,\ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \right\}
\end{aligned}$$

On distingue également deux cas possibles:

$$\mathbf{1}: \ \max\left\{ \rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 ,\ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \right\} = \rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

ou

$$\mathbf{2}: \ \max\left\{ \rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 ,\ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \right\} = \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

Le **cas 1** implique

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \left\|u_2^1 - w_{h_2}^1\right\|_2 + \rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

donc

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left\|u_2^1 - w_{h_2}^1\right\|_2 .$$

Le **cas 2** implique:

$$\begin{aligned}
\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 &\leq \left\|u_2^1 - w_{h_2}^1\right\|_2 + \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \\
&\leq \left\|u_2^1 - w_{h_2}^1\right\|_2 \\
&\qquad + \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=1}^{1} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 + \sum_{i=0}^{0} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 \right) \\
&\leq \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=0}^{1} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 + \sum_{i=1}^{1} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 \right)
\end{aligned}$$

Ainsi dans les deux cas on a

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=0}^{1} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 + \sum_{i=1}^{1} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 \right).$$

On suppose que les deux inégalités qui suivent sont vraies:

$$\left\|u_1^n - u_{h_1}^n\right\|_1 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 + \sum_{i=0}^{n-1} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 \right)$$

et

$$\left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=0}^{n} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 + \sum_{i=1}^{n} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 \right).$$

Et on démontre

$$\left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 + \sum_{i=0}^{n} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 \right)$$

et

$$\left\|u_2^{n+1} - u_{h_2}^{n+1}\right\|_2 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \left\|u_2^i - w_{h_2}^i\right\|_2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left\|u_1^i - w_{h_1}^i\right\|_1 \right).$$

En effet

$$\begin{aligned}
\left\| u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 &\leq \left\| u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1} \right\|_1 + \left\| w_{h_1}^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 \\
&\leq \left\| u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1} \right\|_1 \\
&\qquad + \max \left\{ \frac{1}{\beta} \left\| f\left(u_1^{n+1}\right) - f\left(u_{h_1}^{n+1}\right) \right\|_1 ,\ \left| \pi_h u_2^n - \pi_h u_{h_2}^n \right|_2 \right\} \\
&\leq \left\| u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1} \right\|_1 + \max \left\{ \rho \left\| u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 ,\ \left| \pi_h u_2^n - \pi_h u_{h_2}^n \right|_2 \right\} \\
&\leq \left\| u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1} \right\|_1 + \max \left\{ \rho \left\| u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 ,\ \left\| u_2^n - u_{h_2}^n \right\|_2 \right\}
\end{aligned}$$

Et comme à chaque itération on distingue deux cas possibles

$$\mathbf{1} : \max \left\{ \rho \left\| u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 ,\ \left\| u_2^n - u_{h_2}^n \right\|_2 \right\} = \rho \left\| u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1$$

ou

$$\mathbf{2} : \max \left\{ \rho \left\| u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 ,\ \left\| u_2^n - u_{h_2}^n \right\|_2 \right\} = \left\| u_2^n - u_{h_2}^n \right\|_2$$

Le **cas 1** implique:

$$\left\| u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 \leq \frac{1}{(1-\rho)} \left\| u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1} \right\|_1 .$$

Tandis que le **cas 2** implique:

$$\begin{aligned}
\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 &\leq \left\|u_1^{n+1}-w_{h_1}^{n+1}\right\|_1+\left\|u_2^{n}-u_{h_2}^{n}\right\|_2 \\
&\leq \left\|u_1^{n+1}-w_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \\
&\qquad +\frac{1}{(1-\rho)}\left(\sum_{i=0}^{n}\left\|u_2^{i}-w_{h_2}^{i}\right\|_2+\sum_{i=1}^{n}\left\|u_1^{i}-w_{h_1}^{i}\right\|_1\right) \\
&\leq \frac{1}{(1-\rho)}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left\|u_1^{i}-w_{h_1}^{i}\right\|_1+\sum_{i=0}^{n}\left\|u_2^{i}-w_{h_2}^{i}\right\|_2\right).
\end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement pour le second sous-domaine on trouve:

$$\begin{aligned}
\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2 &\leq \left\|u_2^{n+1}-w_{h_2}^{n+1}\right\|_2+\left\|w_{h_2}^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2 \\
&\leq Ch^2\left|\log h\right|+\max\left\{\rho\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2,\ \left|\pi_h u_1^{n+1}-\pi_h u_{h_1}^{n+1}\right|_1\right\} \\
&\leq Ch^2\left|\log h\right|+\max\left\{\rho\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2,\ \left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1\right\}.
\end{aligned}$$

Et comme à chaque itération on distingue deux cas possibles

$$\mathbf{1}:\max\left\{\rho\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2,\ \left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1\right\}=\rho\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2$$

ou

$$\mathbf{2}:\max\left\{\rho\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2,\ \left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1\right\}=\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1$$

Le **cas 1** implique:

$$\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2\leq\frac{1}{(1-\rho)}\left\|u_2^{n+1}-w_{h_2}^{n+1}\right\|_2.$$

Tandis que le **cas 2** implique:

$$\begin{aligned}
\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2 &\leq \left\|u_2^{n+1}-w_{h_2}^{n+1}\right\|_2+\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \\
&\leq \left\|u_2^{n+1}-w_{h_2}^{n+1}\right\|_2 \\
&\qquad +\frac{1}{(1-\rho)}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left\|u_1^i-w_{h_1}^i\right\|_1+\sum_{i=0}^{n}\left\|u_2^i-w_{h_2}^i\right\|_2\right) \\
&\leq \frac{1}{(1-\rho)}\left(\sum_{i=0}^{n+1}\left\|u_2^i-w_{h_2}^i\right\|_2+\sum_{i=1}^{n+1}\left\|u_1^i-w_{h_1}^i\right\|_1\right)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 3.4 *Soit* $h=\max\{h_1,h_2\}$. *Alors pour tout* $i=1,2,$ *il existe une constante* C *indépendante de* h *et de* n *telle que:*

$$\left\|u_i-u_{h_i}^{n+1}\right\|_i \leq Ch^2\left|\log h\right|^2 \tag{3.4.4}$$

Démonstration On présente la démonstration pour le cas $i=1$. Le cas $i=2$ est similaire. En effet, soit $\kappa=\max\{k_1,k_2\}$ alors en utilisant le théorème 3.3, le lemme 3.3 et (3.4.3) on a

$$\begin{aligned}
\left\|u_1-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 &\leq \left\|u_1-u_1^{n+1}\right\|_1+\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \\
&\leq \kappa^{2n}\left\|u_1-u_1^0\right\|_1 \\
&\qquad +\frac{1}{(1-\rho)}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left\|u_1^i-w_{h_1}^i\right\|_1+\sum_{i=0}^{n}\left\|u_2^i-w_{h_2}^i\right\|_2\right) \\
&\leq \kappa^{2n}\left\|u_1-u_1^0\right\|_1+2(n+1)Ch^2\left|\log h\right|
\end{aligned}$$

En mettant

$$\kappa^{2n} = h^2$$

On obtient

$$\left\| u_1 - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 \leq h^2 \left\| u_1 - u_1^0 \right\|_1 + \left(2\overline{C} \left| \log h \right| + 2 \right) Ch^2 \left| \log h \right|$$

Et donc le résultat cherché

$$\left\| u_1 - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 \leq Ch^2 \left| \log h \right|^2$$

3.4.3 Estimation Optimale de l'Erreur d'Approximation: Second Résultat

Le lemme qui suit joue un rôle important dans la démonstration relative à l'estimation de l'erreur optimale (second résultat).

Lemme 3.4 *Soit* $\rho = \dfrac{k}{\beta}$. *Alors, il existe une constante* C *indépendante de* h *et de* n *telle que:*

$$\left\| u_i^{n+1} - u_{h_i}^{n+1} \right\|_i \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left| \log h \right| ; \; i = 1, 2. \tag{3.4.5}$$

Démonstration On sait d'après les estimations de l'erreur en norme L^∞- pour les problèmes linéaires qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\left\| u^0 - u_h^0 \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 \left| \log h \right|$$

(cf [7]). On décompose la démonstration en deux parties.

Partie 1. On prend

$$\frac{1}{2} < \rho < 1 \text{ alors } 1 < \frac{\rho}{1-\rho} \tag{3.4.6}$$

ainsi

$$\left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \leq Ch^2\left|\log h\right| \leq \frac{\rho}{1-\rho}Ch^2\left|\log h\right|. \qquad (3.4.7)$$

On démontre (3.4.5) par récurrence. En effet pour $n = 1$, en utilisant la proposition 3.2 et (3.4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 &\leq \left\|u_1^1 - w_1^1\right\|_1 + \left\|w_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \\
&\leq Ch^2\left|\log h\right| + \left\|w_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \\
&\leq Ch^2\left|\log h\right| + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_1^1\right) - f\left(u_{h_1}^1\right)\right\|_1,\ \left|u_2^0 - u_{h_2}^0\right|_1\right\} \\
&\leq Ch^2\left|\log h\right| + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_1^1\right) - f\left(u_{h_1}^1\right)\right\|_1,\ \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\} \\
&\leq Ch^2\left|\log h\right| + \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1,\ \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas possibles:

$$\mathbf{1}: \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1, \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\} = \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

ou

$$\mathbf{2}: \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1, \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\} = \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

Le **cas 1** implique

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq Ch^2\left|\log h\right| + \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

et

$$\left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \leq \rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 .$$

Alors

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right| ,$$

et

$$\left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \leq \rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

Le **cas 2** implique

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \tag{3.4.8}$$

et

$$\rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 .$$

En multipliant (3.4.8) par ρ on obtient

$$\rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \rho Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

et

$$\rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

Donc, $\rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$ est majoré par les deux valeurs suivantes $\rho Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$ et $\left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$. Ce qui implique

$$\textbf{(a)} : \ \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

ou

$$\textbf{(b)} : \ Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \leq \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

Donc

$$\textbf{(a)} : \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq \frac{\rho C h^2 \left|\log h\right|}{1-\rho}$$

ou

$$\textbf{(b)} : \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \geq \frac{\rho C h^2 \left|\log h\right|}{1-\rho}$$

Comme

$$\textbf{(b)} : \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \geq \frac{\rho C h^2 \left|\log h\right|}{1-\rho} > C h^2 \left|\log h\right|$$

ce qui contredit (3.4.7). Il s'en suit que seulement le **cas (a)** est vrai, i.e.,

$$\left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq \frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left|\log h\right|$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 &\leq C h^2 \left|\log h\right| + \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \\ &\leq C h^2 \left|\log h\right| + \frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left|\log h\right| \\ &\leq \frac{1}{1-\rho} C h^2 \left|\log h\right| \end{aligned}$$

Alors dans les deux **cas 1 et 2**, on a

$$\left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \frac{C h^2 \left|\log h\right|}{1-\rho}. \tag{3.4.9}$$

D'une manière similaire, dans le sous-domaine 2, on a

$$\begin{aligned}\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 &\leq \left\|u_2^1 - w_2^1\right\|_2 + \left\|w_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \\ &\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|w_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \\ &\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_2^1\right) - f\left(u_{h_2}^1\right)\right\|_2,\ \left|u_1^1 - u_{h_1}^1\right|_2\right\} \\ &\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_2^1\right) - f\left(u_{h_2}^1\right)\right\|_2,\ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1\right\} \\ &\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2,\ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1\right\}\end{aligned}$$

Donc ou on a

$$\mathbf{1}:\ \max\left\{\rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2, \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1\right\} = \rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

ou

$$\mathbf{2}:\ \max\left\{\rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2, \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1\right\} = \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

Le **cas 1** implique

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

et

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

Donc

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

et

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

$$\leq \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

$$\leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right| .$$

Tandis que le **cas 2** implique

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \tag{3.4.10}$$

et

$$\rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_1 \leq \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 .$$

En multipliant (3.4.10) par ρ on trouve

$$\rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \rho Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

et

$$\rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_1 \leq \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 .$$

Donc $\rho \left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$ est majoré par les deux valeurs suivantes $\rho Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$ et $\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$. Alors

$$\textbf{(a)} : \ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \rho Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

ou

$$\textbf{(b)} : \ Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

Ce qui implique

$$\textbf{(a)}: \ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right| < \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

ou

$$\textbf{(b)}: \ \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right| \leq \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 < \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

Ainsi, les deux cas **(a)** et **(b)** sont vrais car ils coïncident avec (3.4.9). Donc ou il ya contradiction et le **cas 2** est impossible ou le **cas 2** est possible seulement si

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 = \rho Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

et donc

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 = \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 &\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \\ &\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \frac{\rho Ch^2 \left|\log h\right|}{1-\rho} \\ &\leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|\end{aligned}$$

Donc les deux **cas 1** et **2** impliquent

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|.$$

On suppose que

$$\left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|. \tag{3.4.11}$$

Et on démontre que

$$\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho} C h^2 |\log h|$$

et

$$\left\|u_2^{n+1}-u_{h_2}^{n+1}\right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} C h^2 |\log h| .$$

En effet on a

$$\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \left\|u_1^{n+1}-w_1^{n+1}\right\|_1+\left\|w_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1$$

$$\leq C h^2 |\log h|+\left\|w_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1$$

$$\leq C h^2 |\log h|+\max \left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_1^{n+1}\right)-f\left(u_{h_1}^{n+1}\right)\right\|_1,\ \left|u_2^n-u_{h_2}^n\right|_1\right\}$$

$$\leq C h^2 |\log h|+\max \left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_1^{n+1}\right)-f\left(u_{h_1}^{n+1}\right)\right\|_1,\ \left\|u_2^n-u_{h_2}^n\right\|_2\right\}$$

$$\leq C h^2 |\log h|+\max \left\{\rho\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1,\ \left\|u_2^n-u_{h_2}^n\right\|_2\right\}$$

On distingue deux cas

$$\mathbf{1}: \ \max \left\{\rho\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1,\ \left\|u_2^n-u_{h_2}^n\right\|_2\right\}=\rho\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1$$

ou

$$\mathbf{2}: \ \max \left\{\rho\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1,\ \left\|u_2^n-u_{h_2}^n\right\|_2\right\}=\left\|u_2^n-u_{h_2}^n\right\|_2$$

Le **cas 1** implique

$$\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq C h^2 |\log h|+\rho\left\|u_1^{n+1}-u_{h_1}^{n+1}\right\|_1$$

et

$$\left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \leq \rho \left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 .$$

Alors

$$\left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho} C h^2 \left|\log h\right|$$

et

$$\left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} C h^2 \left|\log h\right| .$$

Le **cas 2** implique

$$\left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq C h^2 \left|\log h\right| + \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \tag{3.4.12}$$

et

$$\rho \left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 .$$

En multipliant (3.4.12) par ρ, on obtient

$$\rho \left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \rho C h^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2$$

et

$$\rho \left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 .$$

Il est claire que $\rho \left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1$ est majoré par les deux valeurs suivantes $\rho C h^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2$ et $\left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2$. Ainsi on a

$$\textbf{(a)}\ \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \leq \rho C h^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2$$

ou

$$\textbf{(b)}\ \rho C h^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \leq \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2$$

Ce qui implique

$$\textbf{(a)} \ \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 \leq \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right| \ < \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

ou

$$\textbf{(b)} \ \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right| \leq \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 < \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

Donc, les deux **cas (a)** et **(b)** sont vrais car les deux coïncident avec (3.4.11). Donc ou il ya contradiction et le **cas 2** est impossible, ou le **cas 2** est seulement possible si

$$\rho Ch^2 \left|\log h\right| + \rho \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 = \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2$$

alors

$$\left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2 = \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|.$$

Donc

$$\left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|u_2^n - u_{h_2}^n\right\|_2$$

$$\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

$$= \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

Ainsi les deux **cas 1 et 2** impliquent

$$\left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right| \tag{3.4.13}$$

L'estimation pour le second sous-domaine est alors obtenue en utilisant (3.4.13).

Partie 2. On prend

$$\rho \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ alors } \frac{\rho}{1-\rho} \leq 1. \tag{3.4.14}$$

Donc

$$\frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 |\log h| \leq Ch^2 |\log h|$$

Comme

$$\left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq Ch^2 |\log h|$$

on distingue alors les deux cas suivants

$$\textbf{(A)}: \ \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 |\log h| \leq Ch^2 |\log h|$$

ou

$$\textbf{(B)}: \ \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 |\log h| \leq \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq Ch^2 |\log h| \tag{3.4.15}$$

On commence par le **cas (A)**. La démonstration relative à ce cas est similaire à celle de $\frac{1}{2} < \rho < 1$. i.e. **(partie 1)**.

On considère maintenant le **cas (B).** Pour $n = 1$, en utilisant la proposition 3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 &\leq \left\| u_1^1 - w_1^1 \right\|_1 + \left\| w_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \\
&\leq Ch^2 |\log h| + \left\| w_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \\
&\leq Ch^2 |\log h| + \max \left\{ \frac{1}{\beta} \left\| f\left(u_1^1\right) - f\left(u_{h_1}^1\right) \right\|_1, \ \left| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right|_1 \right\}
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_1^1\right) - f\left(u_{h_1}^1\right)\right\|_1,\ \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\}$$

$$\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1,\ \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\}$$

On distingue les deux cas suivants:

$$\mathbf{1}: \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1, \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\} = \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

ou

$$\mathbf{2}: \max\left\{\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1, \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2\right\} = \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

Le **cas 1** implique

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

et

$$\left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \leq \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1.$$

Alors

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

et

$$\left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \leq \rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|.$$

Ce qui contredit (3.4.15). On déduit que le **cas 1** est impossible. Le **cas 2** implique

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 \tag{3.4.16}$$

et

$$\rho\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2.$$

En multipliant (3.4.16) par ρ on obtient

$$\rho \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \rho C h^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2$$

et

$$\rho \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 .$$

On remarque que $\rho \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1$ est majoré par les deux valeurs suivantes $Ch^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2$ et $\left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2$. Ainsi on a

$$\textbf{(a)} : \; \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq C h^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2$$

ou

$$\textbf{(b)} : \; C h^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2$$

Ce qui implique

$$\textbf{(a)} : \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq \frac{\rho C h^2 \left| \log h \right|}{1-\rho}$$

ou

$$\textbf{(b)} : \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \geq \frac{\rho C h^2 \left| \log h \right|}{1-\rho}$$

Il est claire que seulement le **cas (b)** est vrai car il coïncide avec (3.4.15), alors on a

$$\frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left| \log h \right| \leq \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 .$$

Ce qui implique

$$C h^2 \left| \log h \right| \leq \frac{1-\rho}{\rho} \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 .$$

Ainsi

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

$$\leq \frac{1-\rho}{\rho} \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 + \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2$$

$$\leq \frac{1}{\rho} \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 .$$

Ainsi dans le **cas 2** on a

$$\left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \frac{1}{\rho} \left\|u_2^0 - u_{h_2}^0\right\|_2 . \tag{3.4.17}$$

D'une manière similaire, pour le second sous-domaine on a

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \left\|u_2^1 - w_2^1\right\|_2 + \left\|w_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

$$\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|w_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

$$\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_2^1\right) - f\left(u_{h_2}^1\right)\right\|_2 ,\ \left|u_1^1 - u_{h_1}^1\right|_2\right\}$$

$$\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f\left(u_2^1\right) - f\left(u_{h_2}^1\right)\right\|_2 ,\ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1\right\}$$

$$\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \max\left\{\rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 ,\ \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1\right\}$$

Donc ou on a

$$\mathbf{1}: \ \max\left\{\rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 , \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1\right\} = \rho\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2$$

ou

$$\mathbf{2}: \ \max\left\{\rho\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2, \left\|u_1^1-u_{h_1}^1\right\|_1\right\} = \left\|u_1^1-u_{h_1}^1\right\|_1$$

Le **cas 1** implique

$$\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2 \leq Ch^2\left|\log h\right| + \rho\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2$$

et

$$\left\|u_1^1-u_{h_1}^1\right\|_1 \leq \rho\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2.$$

Donc

$$\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho}Ch^2\left|\log h\right|$$

et

$$\begin{aligned}\left\|u_1^1-u_{h_1}^1\right\|_1 &\leq \rho\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2 \\ &\leq \frac{\rho}{1-\rho}Ch^2\left|\log h\right| \leq \left\|u_2^0-u_{h_2}^0\right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\rho}\left\|u_2^0-u_{h_2}^0\right\|_2.\end{aligned}$$

Tandis que le **cas 2** implique

$$\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2 \leq Ch^2\left|\log h\right| + \left\|u_1^1-u_{h_1}^1\right\|_1 \tag{3.4.18}$$

et

$$\rho\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_1 \leq \left\|u_1^1-u_{h_1}^1\right\|_1$$

En multipliant (3.4.18) par ρ on trouve

$$\rho\left\|u_2^1-u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \rho Ch^2\left|\log h\right| + \rho\left\|u_1^1-u_{h_1}^1\right\|_1$$

et

$$\rho \left\| u_2^1 - u_{h_2}^1 \right\|_1 \leq \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 .$$

Ainsi $\rho \left\| u_2^1 - u_{h_2}^1 \right\|_2$ est majoré par les deux valeurs suivantes $\rho C h^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1$ et $\left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1$. Alors

$$\textbf{(a)}: \ \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \rho C h^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1$$

ou

$$\textbf{(b)}: \ C h^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1$$

Ce qui implique

$$\textbf{(a)}: \ \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left| \log h \right|$$

ou

$$\textbf{(b)}: \ \frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left| \log h \right| \leq \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1$$

Alors

$$\textbf{(a)}: \ \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left| \log h \right| \leq \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2 \leq \frac{1}{\rho} \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2$$

ou

$$\textbf{(b)}: \ \frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left| \log h \right| \leq \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 \leq \frac{1}{\rho} \left\| u_2^0 - u_{h_2}^0 \right\|_2$$

Ainsi, les deux cas (a) et (b) sont vrais car les deux coïncident avec (3.4.17). Donc ou il ya contradiction et le **cas 2** est impossible ou le **cas 2** est seulement possible si

$$\left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 = \rho C h^2 \left| \log h \right| + \rho \left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 .$$

Donc

$$\left\| u_1^1 - u_{h_1}^1 \right\|_1 = \frac{\rho}{1-\rho} C h^2 \left| \log h \right| .$$

Ainsi

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq Ch^2 \left|\log h\right| + \left\|u_1^1 - u_{h_1}^1\right\|_1$$

$$\leq Ch^2 \left|\log h\right| + \frac{\rho}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

$$\leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|.$$

Alors les deux **cas 1 et 2** impliquent

$$\left\|u_2^1 - u_{h_2}^1\right\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|. \tag{3.4.19}$$

Le reste de la démonstration est similaire à celui du cas $\frac{1}{2} < \rho < 1$.

Théorème 3.5 *Soit $h = max(h_1, h_2)$. Alors, il existe une constante C indépendante de h et de n telle que:*

$$\left\|u_i - u_{h_i}^{n+1}\right\|_i \leq Ch^2 \left|\log h\right|, \; i = 1, 2.$$

Démonstration La démonstration est pour le cas $i = 1$. Pour celle du cas $i = 2$ on adopte la même approche

En effet, soit $\kappa = k_1 k_2$, en utilisant le théorème 3.3 et le lemme 3.4, on trouve

$$\left\|u_1 - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1 \leq \left\|u_1 - u_1^{n+1}\right\|_1 + \left\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\right\|_1$$

$$\leq k_1^n k_2^n \left|u^0 - u\right|_1 + \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

$$\leq \kappa^{2n} \left|u^0 - u\right|_1 + \frac{1}{1-\rho} Ch^2 \left|\log h\right|$$

Pour n assez grand, on a

$$\kappa^{2n} \leq h^2 \tag{3.4.20}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left\| u_1 - u_{h_1}^{n+1} \right\|_1 &\leq Ch^2 + Ch^2 \left| \log h \right| \\ &\leq Ch^2 \left| \log h \right|. \end{aligned}$$

Remarque 3.3 L'approche utilisée dans ce chapitre qui consiste à combiner la convergence géométrique du processus continu et l'estimation standard en norme L^∞ pour les problèmes linéaires elliptiques, peut être étendue à d'autre problèmes [15].

Bibliographie

[1] P. L. Lions: On the Schwarz Alternating Method I, Proc. 1st, Int. sympo. on domain decomposition methods for Partial Differential Equations. SIAM Philadelphia (1988).

[2] P. L. Lions: On the Schwarz Alternating Method II, Proc. 2nd, Int. sympo. on domain decomposition methods for Partial Differential Equations. SIAM Philadelphia pp.47-70 (1989).

[3] S. H. Lui: On Monotone and Schwarz Alternating Methods For Nonlinear Elliptic PDEs. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN, Vol. 35, No 1, pp. 1-15 (2001).

[4] S. H. Lui: On the Linear Monotone Iteration and Schwarz Methods for Nonlinear Elliptic PDEs. Numerish Mathematik, pp. 109-129 (2002).

[5] C. V. Pao: Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenium Press, New York, (1992).

[6] R. Glowinski, G. H. Golub, J. Periaux: First Int. Symp. on Domain Decomposition Methods. SIAM, Philadelphia, (1988).

[7] J. Nitsche: L^∞ Convergence of Finite Element Approximation, Mathematical aspects of finite element methods, Lec. Notes Maths, 606, 261-274 (1977).

[8] M. Boulbrachene, P. Cortey-Dumont and J.C. Miellou: Mixing Finie elements and Finite Differences on a Subdomain Decomposition Method. "In Domain Decomposition for Partial Differential equations", SIAM, Philadelphia. 198-216 (1988).

[9] M. Boulbrachene, S. Saadi: Maximum Norm Analysis of an Overlapping Nonmatching Grids Method For The Obstacle Problem, Advances in Difference equations, 1-10 (2006).

[10] X.Cai, T.P. Mathew and M. Sarkis: Maximum Norm Analysis of Overlapping Nomatching Grid Discretisation of Elliptic Equations, SIAM J. Numer. Anal. 37, no 5, 1709-1728 (2002).

[11] T.P. Mathew and G. Russo: Maximum Norm Stability of Difference Schemes for Parobolique equations on Overset Nomatching Space-Time Grids. Math. Comp. 72,no 242, 619-656 (2002).

[12] Brezis and M. Sibony: Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones, Archive for Rational Mechanics and Analysis 28, no 1, 52-82 (1968).

[13] P.G. Ciarlet, P.A. Raviart: Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method, comput. Meth. in Appl. Mech. Eng. 2, 17-31 (1973).

[14] J. Karatson, S. Korotov: Discrete maximum principle for finite element solutions for nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions. Numer. Math. 99, 669--698 (2005).

[15] T.P. Mathew: Uniform convergence of the Schwarz alternating method for solving singularly perturbed advection-diffusion equation, SIAM J Numer Anal. 35, no 4, 1563-1683, (1998).

Chapitre 4

Essais Numériques

4.1 Position du Problème

Considérons le problème non-linéaire (4.1.1), (cf. [3]) suivant:

$$\begin{cases} \Delta u = u^2 \text{ dans } \Omega = [0.1] \times [0.1] \\ \\ u = \dfrac{12}{(x+y+1)^2} \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

La solution exacte est donnée par

$$u_{exa} = \frac{12}{(x+y+1)^2} \tag{4.1.2}$$

On décompose le domaine global Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2, ensuite on discrétise chaque sous-domaine par une méthode d'éléments finis indépendante.

Pour tout les essais effectués on prend le test d'arrêt $\varepsilon = 10^{-5}$ et on note

- $Iter$ = Nombre des itérations du processus de Schwarz.
- h_1 le pas de discrétisation relatif au maillage du sous-domaine Ω_1.
- h_2 le pas de discrétisation relatif au maillage du sous-domaine Ω_2.
- $\mathrm{ERR}_{ih} = \left\| u_{Exact} - u_{ih}^{Iter} \right\|_i = \left\| u_{Exact} - u_{ih}^{Iter} \right\|_{L^\infty(\Omega_i)}$.
- p_i l'ordre de convergence relatif à chaque sous domaine Ω_i et est définit par (cf. [2])

$$p_i = -2\frac{\ln(ERR_{ih}) - \ln\left(ERR_{ih'}\right)}{\ln(NDL)_{ih} - \ln(NDL)_{ih'}} \tag{4.1.3}$$

où $(NDL)_{ih}$ est le nombre des degrés de libertés relatif au pas h_i et $(NDL)_{ih'}$ est le nombre des degrés de libertés relatif au pas $h_i^{'}$, pour $i = 1, 2$.

A titre d'indicatif, on donne pour chaque discrétisation un tableau dans lequel est représenté la solution approchée dans certains points du domaine Ω.

4.2 Les Résultats Numériques

4.2.1 Première Décomposition

On considère la décomposition du domaine global comme suit

$$\Omega = \left[0, \frac{5}{8}\right] \times [0,1] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1] \tag{4.2.1}$$

L'overlap

$$\delta_1 = \frac{1}{8}$$

$\mathbf{1}^{\grave{e}re}$ **discrétisation**: $h_1 = \dfrac{1}{8}$ et $h_2 = \dfrac{1}{6}$.

$$NDL_{1h}^{1} = 54$$

$$NDL_{2h}^{1} = 28$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter = 12$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u_{1h}^{12} \right\|_1 = 0.0931533$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u_{h_2}^{12} \right\|_2 = 0.0346342$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.72649	1.37851	2.68754	1.52955
2	3.71349	2.42967	2.97085	1.81297
3	3.87753	2.84455	3.04256	1.91123
4	3.89023	2.962	3.05645	1.93711
5	3.89862	2.99327	3.06027	1.94423
6	3.89985	3.00117	3.06115	1.94602
7	3.90031	3.00318	3.06139	1.94649
8	3.9004	3.00369	3.06145	1.94661
9	3.90043	3.00382	3.06146	1.94664
10	3.90044	3.00386	3.06147	1.94664
11	3.90044	3.00387	3.06147	1.94665
12 Conv.	3.90044	3.00387	3.06147	1.94665

Tableau 1

2$^{\grave{e}me}$ **discrétisation:** $h_1 = \dfrac{1}{16}$ et $h_2 = \dfrac{1}{12}$.

$$NDL_{1h}^2 = 187$$

$$NDL_{2h}^2 = 91$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter = 11$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u_{h_1}^{11} \right\|_1 = 0.0275765$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u_{h_2}^{11} \right\|_2 = 0.00838272$$

$$p_1 = 1.96$$

$$p_2 = 2.407\,3$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.73013	1.37164	2.62415	1.54979
2	3.73421	2.44070	2.89994	1.80660
3	3.89626	2.85680	2.97967	1.89252
4	3.90555	2.96772	2.99412	1.91329
5	3.91325	2.99494	2.99795	1.91863
6	3.91401	3.00119	2.99873	1.91984
7	3.91437	3.00266	2.99893	1.92013
8	3.91442	3.00300	2.99897	1.92020
9	3.91444	3.00308	2.99898	1.92022
10	3.91445	3.00310	2.99899	1.92022
11 Conv.	3.91445	3.00310	2.99899	1.92022

Tableau 2

3ème **discrétisation:** $h_1=\dfrac{1}{32}$ et $h_2=\dfrac{1}{24}$.

$$NDL_{1h}^{3}=693$$

$$NDL_{2h}^{3}=325$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter=11$$

$$Erreur1=\left\|u_{Exact}-u_{h_1}^{11}\right\|_1=0.00262518$$

$$Erreur2=\left\|u_{Exact}-u_{h_2}^{11}\right\|_2=0.00111575$$

$$p_1=3.5908$$

$$p_2=3.1684$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.73092	1.36988	2.62648	1.54957
2	3.74125	2.44584	2.90336	1.80888
3	3.90085	2.85995	2.98118	1.89370
4	3.90856	2.96673	2.99473	1.91342
5	3.91584	2.99193	2.99826	1.91828
6	3.91640	2.99748	2.99894	1.91933
7	3.91673	2.99873	2.99912	1.91958
8	3.91677	2.99901	2.99915	1.91963
9	3.91678	2.99907	2.99916	1.91965
10	3.91678	2.99909	2.99916	1.91965
11 Conv.	3.91678	2.99909	2.99916	1.91965

Tableau 3

4ème discrétisation: $h_1 = \dfrac{1}{64}$ et $h_2 = \dfrac{1}{48}$

$$NDL_{1h}^{4} = 2665$$

$$NDL_{2h}^{4} = 1225$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter = 11$$

$$Erreur1 = \left\|u_{Exact} - u_{h_1}^{11}\right\|_1 = 0.000655945$$

$$Erreur2 = \left\|u_{Exact} - u_{h_2}^{11}\right\|_2 = 0.000314748$$

$$p_1 = 2.059\,2$$

$$p_2 = 1.907\,5$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.73111	1.36944	2.62724	1.54957
2	3.74240	2.44551	2.9039	1.80882
3	3.90199	2.86019	2.98176	1.89382
4	3.90969	2.96724	2.99533	1.91363
5	3.91702	2.99255	2.99888	1.91853
6	3.91759	2.99814	2.99957	1.91959
7	3.91792	2.99941	2.99974	1.91984
8	3.91795	2.99969	2.99978	1.91990
9	3.91797	2.99976	2.99979	1.91819
10	3.91797	2.99977	2.99979	1.91991
11 Conv.	3.91797	2.99977	2.99979	1.91991

Tableau 4

Remarque 4.1 *L'erreur d'approximation relative à chaque sous domaine diminue au fur et à mesure qu'on raffine le pas de discrétisation tandis que le nombre des itérations du processus de Schwarz est fixe* $Iter = 11$ *sauf pour la première discrétisation où on trouve* $Iter = 12$.

Pour le même problème (4.1.1) et pour la même décomposition de sous-domaines on donne les résultats relatifs aux discrétisations suivantes:

5ème discrétisation: $h_1 = \dfrac{1}{8}$ et $h_2 = \dfrac{1}{16}$.

$$NDL_{1h}^5 = 54$$

$$NDL_{2h}^5 = 153$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter = 11$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u_{h_1}^{11} \right\|_1 = 0.0418104$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u_{h_2}^{11} \right\|_2 = 0.0227774$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.72649	1.37581	2.63811	1.55725
2	3.71264	2.43616	2.89855	1.80799
3	3.87344	2.84281	2.97639	1.89106
4	3.88300	2.94928	2.99016	1.91053
5	3.88989	2.97453	2.99362	1.91053
6	3.89060	2.98012	2.99430	1.91640
7	3.89090	2.98138	2.99447	1.91665
8	3.89094	2.98166	2.99450	1.91670
9	3.89096	2.98172	2.99451	1.91671
10	3.89096	2.98174	2.99451	1.91671
11 Conv.	3.89096	2.98174	2.99451	1.91671

Tableau 5

6ème discrétisation: $h_1 = \dfrac{1}{16}$ et $h_2 = \dfrac{1}{32}$, on a

$$NDL^6_{1h} = 187$$

$$NDL^6_{2h} = 561$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter = 11$$

$$Erreur1 = \left\|u_{Exact} - u^{11}_{h_1}\right\|_1 = 0.0107026$$

$$Erreur2 = \left\|u_{Exact} - u^{11}_{h_2}\right\|_2 = 0.00554763$$

$$p_1 = 2.19408$$

$$p_2 = 2.20285$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.73013	1.37164	2.63003	1.55146
2	373524	2.44326	2.90265	1.80860
3	3.89536	2.85601	2.98059	1.89318
4	3.90348	2.96299	2.99421	1.91293
5	3.91071	2.98831	2.99774	1.91782
6	3.91132	2.99391	2.99843	1.91888
7	3.91164	2.99518	2.99860	1.91913
8	3.91168	2.99546	2.99864	1.91918
9	3.91169	2.99556	2.99864	1.91918
10	3.91170	2.99554	2.99865	1.91919
11 Conv.	3.91170	2.99554	2.99865	1.91920

Tableau 6

7ème **discrétisation:** $h_1 = \dfrac{1}{32}$ et $h_2 = \dfrac{1}{64}$.

$$NDL_{1h}^{7} = 693$$

$$NDL_{2h}^{7} = 2145$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter = 11$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u_{h_1}^{11} \right\|_1 = 0.00266438$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u_{h_2}^{11} \right\|_2 = 0.00147468$$

$$p_1 = 2.12304$$

$$p_2 = 1.98967$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.73092	1.36988	2.62813	1.55005
2	3.74089	2.44487	2.90371	1.80876
3	3.90063	2.85920	2.98161	1.89369
4	3.90843	2.96631	2.99520	1.91351
5	3.91574	2.99165	2.99875	1.91842
6	3.91633	2.99725	2.99944	1.91948
7	3.91665	2.99852	2.99962	1.91973
8	3.91669	2.99881	2.99965	1.91978
9	3.91671	2.99887	2.99966	1.91980
10	3.91671	2.99888	2.99966	1.91980
11 Conv.	3.91671	2.99889	2.99966	1.91980

Tableau 7

8ème **discrétisation:** $h_1=\dfrac{1}{64}$ et $h_2=\dfrac{1}{128}$.

$$NDL_{1h}^{8}=2665$$

$$NDL_{2h}^{8}=8385$$

On obtient les résultats suivants

$$Iter=11$$

$$Erreur1=\left\|u_{Exact}-u_{h_1}^{11}\right\|_1=0.00066547$$

$$Erreur2=\left\|u_{Exact}-u_{h_2}^{11}\right\|_2=0.000399804$$

$$p_1=2.05985$$

$$p_2=1.92175$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=1.92$
1	3.73111	1.36944	2.62766	1.54970
2	3.74231	2.44527	2.90399	1.80879
3	3.90194	2.86000	2.98187	1.98381
4	3.90966	2.96713	2.99544	1.91365
5	3.91699	2.99248	2.99901	1.91857
6	3.91757	3.99808	2.99970	1.91963
7	3.91790	3.99936	2.99987	1.91988
8	3.91794	3.99964	2.99990	1.91827
9	3.91795	3.99970	2.99991	1.91995
10	3.91795	3.99972	2.99991	1.91995
11 Conv.	3.91795	3.99972	2.99992	1.91995

Tableau 8

Remarque 4.2 *L'erreur d'approximation relative à chaque sous domaine diminue au fur et à mesure qu'on raffine le pas de discrétisation tandis que le nombre des itérations du processus de Schwarz est indépendant des pas de discrétisation choisis et est fixe:* $Iter = 11$.

4.2.2 Deuxième Décomposition

On choisit une deuxième décomposition du domaine global comme suit

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

où

$$\Omega_1 = \left[0, \frac{3}{4}\right] \times [0,1]$$

$$\Omega_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1]$$

L'overlap est

$$\delta_2 = \frac{1}{4}$$

1$^{\text{ère}}$ **discrétisation:** $h_1 = \dfrac{1}{8}$ et $h_2 = \dfrac{1}{16}$.

$$NDL_{1h}^{1} = 63$$

$$NDL_{2h}^{1} = 153$$

Alors, on a les résultats suivants

$$Iter = 9$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u_{h_1}^{9} \right\|_1 = 0.0429576$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u_{h_2}^{9} \right\|_2 = 0.0271409$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = 1.92$
1	4.13707	2.31935	3.01419	1.83093
2	3.85963	3.01659	3.01498	1.93584
3	3.89944	2.99011	2.99296	1.91695
4	3.88683	2.9752	2.9924	1.91508
5	3.89025	2.97818	2.99352	1.91602
6	3.88962	2.97808	2.99331	1.91590
7	3.88971	2.97804	2.99333	1.91590
8	3.88969	2.97804	2.99333	1.91590
9 Conv.	3.8897	2.97804	2.99333	1.91590

Tableau 9

2ème discrétisation: $h_1 = \dfrac{1}{16}$ et $h_2 = \dfrac{1}{32}$.

$$NDL_{1h}^2 = 221$$

$$NDL_{2h}^2 = 561$$

Alors, on a les résultats suivants

$$Iter = 9$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u_{h_1}^9 \right\|_1 = 0.0108549$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u_{h_2}^9 \right\|_2 = 0.0066429$$

$$p_1 = 2.19214$$

$$p_2 = 2.16655$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) = 1.92$
1	4.14708	2.31893	3.01564	1.83004
2	3.88201	3.03812	3.02163	1.94045
3	3.92155	3.00660	2.99771	1.91989
4	3.90817	2.99143	2.99735	1.91810
5	3.91206	2.99482	2.99859	1.91913
6	3.91127	2.99462	2.99832	1.91898
7	3.91140	2.99459	2.99835	1.91899
8	3.91137	2.99460	2.99835	1.91899
9 Conv.	3.91138	2.99460	2.99835	1.91899

Tableau 10

3$^{\grave{e}me}$ discrétisation: $h_1 = \dfrac{1}{32}$ et $h_2 = \dfrac{1}{64}$.

$$NDL^3_{1h} = 825$$

$$NDL^3_{2h} = 2145$$

Alors on a

$$Iter = 9$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u^9_{h_1} \right\|_1 = 0.00270113$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u^9_{h_2} \right\|_2 = 0.00166103$$

$$p_1 = 2.11194$$

$$p_2 = 2.067$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) = 1.92$
1	4.14963	2.31866	3.01613	1.82986
2	3.88755	3.04357	3.02331	1.94161
3	3.92686	3.01059	2.99886	1.92059
4	3.91335	2.99541	2.99858	1.91885
5	3.91735	2.99890	2.99984	1.91990
6	3.91651	2.99868	2.99956	1.91974
7	3.91665	2.99865	2.99959	1.91975
8	3.91663	2.99865	2.99959	1.91975
9 Conv.	3.91663	2.99865	2.99959	1.91975

Tableau 11

$4^{ème}$ discrétisation: $h_1 = \dfrac{1}{32}$ et $h_2 = \dfrac{1}{64}$.

$$NDL_{1h}^{4} = 3185$$

$$NDL_{2h}^{4} = 8385$$

Alors, on a

$$Iter = 9$$

$$Erreur1 = \left\| u_{Exact} - u_{h_1}^{9} \right\|_1 = 0.000674010$$

$$Erreur2 = \left\| u_{Exact} - u_{h_2}^{9} \right\|_2 = 0.000414471$$

$$p_1 = 2.05531$$

$$p_2 = 2.0365$$

La solution approchée en certains points est représentée dans le tableau suivant:

$\frac{u_{exa}}{Iter}$	$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ =3.91837	$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = 3$	$u\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) = 1.92$
1	4.15026	2.31858	3.01626	1.82981
2	3.88893	3.04493	3.02373	1.94190
3	3.92818	3.01158	2.99914	1.92077
4	3.91463	2.99640	2.99888	1.91903
5	3.91866	2.99992	3.00015	1.92009
6	3.91781	2.99969	2.99987	1.91993
7	3.91795	2.99966	2.99990	1.91994
8	3.91793	2.99966	2.99990	1.91994
9 Conv.	3.91793	2.99966	2.99990	1.91994

Tableau 12

4.3 Conclusion

- En changeant la taille du recouvrement $\delta_1 = \frac{1}{4}$, on constate que le processus de Schwarz converge plus rapidement - $Iter = 9$ - que pour le cas $\delta_2 = \frac{1}{8}$ où $Iter = 11$. Ce résultat illustre une des particularités de la méthode de Schwarz qui consiste à dire que plus la taille du recouvrement est grande plus la convergence du processus est rapide.

- Le nombre d'itérations ne tient pas compte du raffinement des deux pas de discrétisation mais uniquement de la taille de l'overlap.

- L'ordre de convergence est globalement égal à 2, ce qui est en parfaite adéquation avec les résultats théoriques.

Le logiciel utilisé est le FreeFem++, version 2.9, (cf. [1]).

Bibliographie

[1] F. Hecht, O.Pironneau, A.Le Hyaric et K. Ohtsuka FreeFem++, version 2.9

[2] L. Jänick. & A. Kost, Convergence Properties of the finite Element Method, IEEE Transaction on Magnetics 35, volume 3, 1414-1417, (1999).

[3] Kasuo Ishihara, Monotone Explicit Iterations of the finite Element Approximations for the Nonlinear Boundary Value Problem, Numer. Math. 43, 419-437 (1984).