

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure de la Recherche Scientifique

Université Badji Mokhtar- Annaba



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LANOS



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en mathématiques

Option : Modélisation mathématique

**Systemes dynamiques stochastiques dans des
réseaux d'interactions neuronales**

Par
SAKRI Amine

DIRECTEUR DE THESE : BENCHETTAH Azzedine
CO-DIRECTEUR DE THESE : AZIZ ALAOUI Moulay. A

Pr. U.B.M. Annaba
Pr. U. Le Havre(France)

Devant le Jury

PRESIDENT : HAIOUR Mohamed
EXAMINATEUR : AISSAOUI Med Zine
EXAMINATEUR : BOUTABIA Hacene
INVITE : SISSAOUI Hocine

Pr. U.B.M. Annaba
Pr. U. Guelma
Pr. U.B.M. Annaba
Pr. U.B.M. Annaba

Année 2016

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Résumé (en français) | 4 |
| Résumé (en anglais) | 5 |
| Résumé (en arabe) | 6 |
| 1 Introduction | 7 |
| 1.1 Motivation de la recherche et obtention de l'équation de FitzHugh-Nagumo | 7 |
| 1.2 Contenu de la thèse | 11 |
| 2 Notions générales et préliminaires | 13 |
| 2.1 Rappel sur les systèmes dynamiques | 13 |
| 2.2 Calcul stochastique | 16 |
| 2.2.1 Processus stochastiques | 16 |
| 2.2.2 Mouvement brownien | 17 |
| 2.2.3 Formule d'Ito | 17 |
| 2.2.4 Equations différentielles stochastiques | 21 |
| 3 Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe | 24 |
| 3.1 Sous système 1 | 24 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2 | Sous système 2 | 29 |
| 4 | Etude numérique du système de FitzHugh-Nagumo | 36 |
| 4.1 | Sous système 1 | 36 |
| 4.1.1 | Cas d'un seul point d'équilibre : noeud stable | 36 |
| 4.1.2 | Cas de deux points d'équilibres : noeud stable et selle noeud instable | 38 |
| 4.1.3 | Cas de trois points d'équilibres : deux noeuds stables et un selle instable | 38 |
| 4.2 | Sous système 2 | 39 |
| 4.2.1 | Cas d'un point selle : existence d'un cycle limite | 39 |
| 4.2.2 | Cas d'un point noeud stable | 39 |
| 4.2.3 | Cas d'un foyer stable | 40 |
| 4.3 | Système général | 41 |
| 5 | Système de FitzHugh-Nagumo stochastique | 42 |
| 5.1 | Étude théorique | 42 |
| 5.1.1 | Existence et unicité de la solution | 42 |
| 5.2 | Étude numérique | 44 |
| 5.2.1 | Cas du sous système 1 stochastique | 44 |
| 5.2.2 | Cas du sous système 2 stochastique | 46 |
| 6 | Appendice | 49 |
| 6.1 | Autre démonstration du théorème 3.6 pour le cas $ a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 49 |

Résumé (en français)

L'objet de ce travail consiste à l'étude du système de FitzHugh-Nagumo décrivant la dynamique des potentiels d'action neuronale en ajoutant une perturbation stochastique. Nous commençons par traiter ce système dans le cas déterministe dont l'étude repose sur le traitement de sa décomposition en deux sous systèmes. Ainsi, on montre l'existence globale de la solution, la nature des points d'équilibres (point selle, nœud, bifurcation, ...) ainsi que leur stabilité globale ou asymptotique et enfin l'existence de cycles limites. Une étude numérique en utilisant Matlab nous a permis par des illustrations de retrouver nos résultats théoriques. Dans le cas stochastique, on montre l'existence et l'unicité de la solution et, à l'aide de simulation numérique, nous obtenons des résultats sur le changement du comportement de la solution par rapport au cas déterministe dû au mouvement brownien.

Mots-clés : Modèle neuronal , FitzHugh-Nagumo, système dynamique, bifurcation, cycle limite.

Résumé (en anglais)

This work address the FitzHugh-Nagumo system which models the dynamics of neuronal action potentials with a stochastic perturbation. We begin the study of the deterministic system by decomposing it on two sub-systems. Thus, we prove the global existence of the solution, the nature of equilibrium points (saddle point, node, bifurcation, ...) as well as their global or asymptotic stability and finally the existence of limit cycles. A numerical study using Matlab permets us by illustrations to find the theoretical results. In the stochastic case, we obtain the existence and the unicity of the solution and, by numerical simulation , we obtain some results on the behavior change of the solution with respect to the deterministic case which results from the Brownian motion.

Keywords. neuron model, FitzHugh-Nagumo, asymptotic dynamics, bifurcation, limit cycles.

Résumé (en arabe)

إن هذا البحث يختص في دراسة الجمل فيزيوخ ناقومو و هي تصف ديناميكا الكمون ذو الفعل العصبي بإضافة متغير عشوائي. نبدأ بدراسة هذه الجملة في الحالة المعرفة و التي دراستها تركز على دراسة تجزئتها إلى جملتين تحتيتين و من ثم نبرهن وجود الحل الكلي و نحدد طبيعة نقاط التوازن (النقطة السرج , العقدة, الانشطار) و كذلك توازنهما الكلي و المماسي و أخيرا وجود الدورات المتناهية.

دراسة عددية باستخدام MATLAB سمحت لنا بدعم النتائج النظرية المحصل عليها سابقا.

في الحالة الستوكاستيكية, نبرهن وجود و وحدانية الحل و باستعمال دراسة عددية نتحصّل على نتائج خاصة بتغير سيرورة الحل بالنسبة للحالة المعرفة وهذا بسبب المتغير العشوائي.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation de la recherche et obtention de l'équation de FitzHugh-Nagumo

Concernant la recherche dans les neurosciences, plus précisément pour l'étude de la dynamique du potentiel d'action neuronal, une des premières modélisations rigoureuse et utilisée a été proposée par Hodgkin et Huxley [15] en 1952. En effet, d'après leurs expériences sur l'axone géant du calamar, ils ont proposé le modèle de l'influx nerveux donné par le système suivant :

$$\begin{cases} c \frac{dV}{dt} = -\bar{g}_k n^4 (V - V_k) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_L (V - V_L) + I, \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m, \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h, \end{cases} \quad (1.1)$$

où les paramètres sont décrits comme suit :

V : potentiel de la membrane,

I : courant extérieur appliqué,

$m, n, h \in [0, 1]$: probabilités d'activation du sodium, de désactivation du sodium et d'activation du potassium,

$\bar{g}_k, \bar{g}_{Na}, \bar{g}_L$: conductance de la membrane pour le potassium, le sodium et le courant de fuite (leakage current),

V_k, V_{Na}, V_L : potentiel d'équilibre du potassium, du sodium et du courant de fuite (leakage current),

$\alpha_m, \beta_m, \alpha_n, \beta_n$ et α_h, β_h : taux de transfert du potassium et du sodium.

Pour la simplification de l'écriture du système, posons

$$\tau_m = \frac{1}{\alpha_m + \beta_m}, \tau_n = \frac{1}{\alpha_n + \beta_n}, \tau_h = \frac{1}{\alpha_h + \beta_h},$$

$$m_\infty = \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \beta_m}, n_\infty = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n}, h_\infty = \frac{\alpha_h}{\alpha_h + \beta_h}.$$

Le système (1.1) devient

$$\begin{cases} c \frac{dV}{dt} = -\bar{g}_k n^4 (V - V_k) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_L (V - V_L) + I, \\ \frac{dm}{dt} = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)}, \\ \frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)}, \\ \frac{dh}{dt} = \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Ensuite, Fitzhugh et Nagumo [19] en 1961, expérimentalement, ont remarqué d'une part que l'activation du sodium est très rapide et font donc l'estimation suivante $m \approx m_\infty(V)$, i.e., m peut être assimilé à une constante, et donc l'équation en $\frac{dm}{dt}$ n'a plus lieu d'être, et d'autre part que la somme des deux variables h et n est à peu près constante au cours du potentiel d'action et est donnée par

$$h_\infty(V) + n_\infty(V) = 0,8.$$

Ainsi, comme généralisation, en notant

$$h(V) + an(V) = b,$$

où a et b sont des constantes et en posant

$$w(V) = b - h(V) = an(V),$$

on obtient

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(V) - w}{\tau_w(V)},$$

et donc le système (1.2) se réduit au système

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}(\bar{g}_{Na}(m_\infty(V))^3(b-w)(V_{Na} - V) + \bar{g}_k(\frac{w}{a})^4(V_k - V) + \bar{g}_L(V_L - V) + I), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(V) - w}{\tau_w(V)}. \end{cases}$$

De plus, toujours à partir d'observation, Fitzhugh a remarqué que la V -nullcline (i.e., $\dot{V} = 0$) a la forme d'une fonction cubique et que la w -nullcline (i.e., $\dot{w} = 0$) peut être approximée par une droite. Ainsi le modèle a la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = V(V - \eta)(1 - V) - w + I, \\ \frac{dw}{dt} = \varepsilon(V - \gamma w), \end{cases}$$

où V correspond au potentiel de la membrane, tandis que w correspond aux flux lents d'ions à travers la membrane ; les paramètres η , γ et ε sont des constantes avec $0 < \eta < 1$, $\gamma \ll 1$ et le paramètre I correspond au courant externe appliqué.

Ainsi la formulation mathématique du système de Fitzhugh-Nagumo est décrite comme suit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - f(x)), \\ \frac{dw}{dt} = b(g(x) - y) \end{cases} \quad (1.3)$$

où x représente le potentiel de la membrane, y les flux d'ions à travers la membrane, f une fonction cubique, g une fonction linéaire et a et b sont des constantes. Pour plus de précision sur l'aspect biologique voir [8], [16], [19]. Des résultats pour ce type de système ont été obtenus par plusieurs auteurs, numériquement [7], et avec des méthodes de régularisation [1].

Concernant le cas de la perturbation stochastique, Berglund et Gentz [5], [4] ce sont

intéressés au nombre des petites oscillations entre deux spikes successifs et au comportement des trajectoires au voisinage des branches d'équilibre stable et instable ainsi qu'au voisinage du point d'équilibre.

1.2 Contenu de la thèse

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du système de Fitzhugh-Nagumo stochastique suivant :

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y)dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\epsilon}}dW_t^1, \\ dy = (a - bx - cy)dt + \sigma_2dW_t^2, \end{cases} \quad (1.4)$$

où

x représente le potentiel de la membrane,

y correspond à l'échange des ions à travers la membrane neuronale,

$a, b, c \in \mathbb{R}$ et ϵ est paramètre positif assez petit,

W_t^2, W_t^1 sont deux processus de Weiner standards indépendants,

$\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$.

Le deuxième chapitre est consacré à des rappels sur la théorie des systèmes dynamiques ainsi que sur le calcul stochastique en dimension finie.

Dans le troisième chapitre, nous considérons le système de FitzHugh-Nagumo déterministe suivant :

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y)dt, \\ dy = (a - bx - cy)dt. \end{cases} \quad (1.5)$$

L'étude de ce système nous conduit à sa décomposition en deux sous systèmes. Pour le premier sous système, en prenant $b = 0$ et $c = 1$, une étude complète a été établie. En effet, nous avons pu trouver les points d'équilibre, leurs natures ainsi que leurs stabilités asymptotiques. Aussi nous avons réussi, à l'aide du lemme de Gronwall, à montrer que la solution est bornée et, à l'aide du critère de Bendixon, que ce système n'admet pas de cycle limite. Concernant le second sous système, où $b = 1$ et $c = 0$, qui a un unique point d'équilibre, nous prouvons que ce point stationnaire est un attracteur globale dans les deux cas où il est stable : $|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $|a| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La démonstration dans le cas où $|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ repose sur la technique donnée dans [13], [17], [18], et dans le cas où $|a| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, nous utilisons l'algorithme des Formes Normales. Dans le cas où le point stationnaire est instable, nous avons donné deux démonstrations, l'une utilisant les résultats sur

les systèmes de Liénard et l'autre en s'inspirant de [13], pour montrer l'existence d'un unique cycle limite hyperbolique stable. Le contenu de ce chapitre correspond à l'article [21].

Le quatrième chapitre est consacré à la validation des résultats théoriques obtenues dans le chapitre précédent en procédant par des stimulations numériques à l'aide du logiciel Matlab.

Dans le dernier chapitre, nous considérons le système de Fitzhugh-Nagumo stochastique. En utilisant le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles stochastiques, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, dans le cas stochastique, on effectue une étude numérique qui nous permet d'obtenir des simulations numériques décrivant le changement du comportement de la solution par rapport au cas déterministe, en faisant varier les paramètres $\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2$ et a .

Chapitre 2

Notions générales et préliminaires

2.1 Rappel sur les systèmes dynamiques

Ce chapitre contient des notions générales et certains résultats utiles pour l'étude des systèmes dynamiques.

Soient E un sous ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n et ϕ une application définie dans l'espace $\mathbb{R} \times E$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Définitions

- On appelle *système dynamique* sur E toute application ϕ_t continument différentiable satisfaisant

1. $\phi_0(x) = x, \quad \forall x \in E.$
2. $(\phi_t \circ \phi_s)(x) = \phi_{t+s}(x) \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in E.$

- Rappelons qu'un système dynamique sur E est *linéaire* si $\phi_t(\alpha x + \beta y) = \alpha \phi_t(x) + \beta \phi_t(y) \quad \forall \alpha, \beta, t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in E.$

- Considérons le système non linéaire dans \mathbb{R}^n

$$dx = f(x)dt \tag{2.1}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, où f est une fonction continument différentiable. Soit $\phi(t, x_0) \triangleq \phi_t(x_0)$ la solution de (2.1) avec la condition initiale précédente. L'ensemble des application $(\phi_t) : E \rightarrow E$ est appelé *flot* de l'équation différentielle (2.1).

- Un flot est dit *autonome* si la fonction ϕ_t ne dépend pas explicitement du temps, sinon il est dit non autonome.

- Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé un *point critique* ou *point d'équilibre* du système (2.1) s'il vérifie

$$f(x^*) = 0.$$

Le point critique x^* est dit *hyperbolique* si le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne $Df(x^*) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*))_{1 \leq i, j \leq n}$ n'admet aucune valeur propre avec partie réelle nulle. Dans ce cas, le système

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2}$$

où $A = Df(x^*)$, est appelé le système linéarisé du système (2.1)

- Considérons le cas d'un système planaire suivant

$$\begin{cases} dx = P(x, y)dt, \\ dy = Q(x, y)dt. \end{cases} \tag{2.3}$$

La représentation complète des orbites de ce système est appelé le *portrait de phase* dans le plan $(x \circ y)$, *plan de phase*.

Rappelons que la linéarisation du système d'équations différentielles nous amène à l'étude des points critiques. En effet, considérons le système différentiel linéaire (2.2) où A est une matrice d'ordre 2 et λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de cette matrice. Pour tout point critique x^* , nous avons les résultats suivants.

(i) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signes différents, alors x^* est dit un point *selle* et il est toujours *instable*.

(ii) Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, alors x^* est un *noeud*, et il est *stable* si λ_1 et λ_2 sont négatifs et instable si λ_1 et λ_2 sont positifs.

- (iii) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, x^* est un *noeud propre stable* si $\lambda < 0$ et *instable* sinon.
 - (iv) Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $Im(\lambda_j) \neq 0, 1 \leq j \leq 2$, alors x^* est un *foyer*. De plus, il est stable si $Re(\lambda_j) < 0$ et instable sinon.
 - (v) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $x = x^*$ est un *centre*.
- On appelle *orbite périodique* toute trajectoire $\phi_t(x)$ de (2.1) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x),$$

où le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie cette égalité est appelé *période*.

- Un *cycle limite* du système (2.1) noté \mathcal{C} est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phases, i.e., il existe un voisinage de \mathcal{C} dans lequel il n'y pas d'autres courbes fermées.

Il est clair que les cycles limites apparaissent uniquement dans les systèmes non linéaires.

Lemme 2.1 *Supposons que le système (2.3) admet une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T . Définissons l'exposant caractéristique noté σ , par*

$$\sigma = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

Alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite instable si $\sigma > 0$, et est stable si $\sigma < 0$. Dans le cas où $\sigma = 0$, le cycle peut être stable, instable ou semi-stable.

- Le système (2.3) est dit *symétrique* par rapport à l'axe des x (resp. y) s'il est invariant par la transformation $(t; y) \rightarrow (-t; -y)$ (resp. $(t; x) \rightarrow (-t; -x)$).

Soit le système

$$dx = f(x, \mu) dt \tag{2.4}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1(E)$.

- On appelle *bifurcation* tout changement qualitatif et topologique du comportement des solutions du système (2.4) lorsque le paramètre μ change. Aussi, une bifurcation est dite bifurcation de Hopf le changement donne naissance à une orbite périodique.

Théorème 2.1 [14] *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} dx = f(x, y, \mu)dt, \\ dy = g(x, y, \mu)dt. \end{cases} \quad (2.5)$$

Soit (x^, y^*) un point d'équilibre du système (2.5) pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Si la matrice jacobienne du système (2.5) en (x^*, y^*) admet deux valeurs propres imaginaires conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ et s'il existe un certain $\mu = \mu_0$ tel que $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) \neq 0$ et $(\frac{\partial}{\partial \mu} \alpha(\mu))_{\mu=\mu_0} \neq 0$, alors une bifurcation de Hopf survient lorsque la valeur du paramètre de bifurcation μ passe μ_0 et $((x^*, y^*), \mu_0)$ est un point de bifurcation de Hopf.*

Théorème 2.2 *Soit le système (2.5). Pour tout domaine simplement connexe D où $\text{div}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ ne change pas de signe, il n'existe pas de solution périodique de (2.5) entièrement contenue dans D .*

2.2 Calcul stochastique

2.2.1 Processus stochastiques

Dans toute la suite, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 2.2.1

Soient (Ω, \mathcal{F}) et (E, Σ) deux espaces mesurables. Une application $X : \Omega \longrightarrow E$ est dite (\mathcal{F}, Σ) -mesurable si

$$f^{-1}(\Sigma) \subset \mathcal{F}.$$

f est dite aussi variable aléatoire.

Définition 2.2.2

On appelle processus stochastique toute famille de variables aléatoires $(\xi(t), t \in I)$, définies sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans l'espace mesurable (E, Σ) où I est un ensemble ordonné quelconque.

– Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $\xi_\omega(\cdot) : I \longrightarrow E$ est appelée *trajectoire* du processus.

– Nous disons qu'un processus stochastique est continu si pour presque tout ω , ses trajectoires sont continues, i.e.,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \mapsto \xi_\omega(t) \text{ continue}\}) = 1.$$

– Deux processus stochastiques $(\xi(t), t \in I)$ et $(\xi'(t), t \in I)$ définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dits *stochastiquement équivalents* si

$$\mathbb{P}\{\xi(t) \neq \xi'(t), t \in I\} = 0.$$

Dans ce cas nous disons que $\xi'(t)$ est une version de $\xi(t)$.

2.2.2 Mouvement brownien

Définition 2.2.3

Un processus stochastique $(W(t), t \geq 0)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien (ou processus de Wiener) s'il vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $W(0) = 0$,
- (ii) Pour tous $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $W(t_k) - W(t_{k-1})$, $(1 \leq k \leq n)$ sont indépendantes,
- (iii) Pour tous $0 \leq s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}[W(t) - W(s)] = (t - s)\mu,$$

$$\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^2] = (t - s)\sigma^2,$$

où μ et σ sont des constantes réelles positives avec $\sigma \neq 0$.

Généralement on ne considère que le mouvement brownien *standard* ($\mu = 0$ et $\sigma = 1$) puisque tout brownien peut se ramener à un brownien standard.

2.2.3 Formule d'Ito

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire qui sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter

à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du mouvement brownien. Ainsi, on a commencé par construire une intégrale par rapport au mouvement brownien pour définir la notion d'équation différentielle stochastique. Ainsi, on veut donner un sens à l'intégrale

$$I(t) = \int_0^t f(s)dW(s),$$

où $(W(t), t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, $t \in [0, T]$ et $f(t)$ est une fonction stochastique.

Nous allons rappeler la définition de l'intégrale stochastique introduite par Itô en introduisant les définitions suivantes.

Définition 2.3.1

Une classe de fonction $f : [\alpha, \beta] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ est dite nonanticipative relativement à \mathcal{F}_t , $t \in [\alpha, \beta]$, si

- (i) $f(t)$ est un processus séparable,
- (ii) $f(t)$ est un processus progressivement mesurable, $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ est mesurable,
- (iii) $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $f(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 2.3.2

Un processus $f(t), t \in [\alpha, \beta]$ est dit un processus élémentaire s'il existe une partition $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \beta$ dans $[\alpha, \beta]$ telle que

$$f(t) = f(t_i) \quad \text{si } t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, r - 1.$$

Notons par

$$L_W^p[\alpha, \beta] = \left\{ \begin{array}{l} f \text{ nonanticipatives : } \mathbb{P} \left[\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt < \infty \right] = 1, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \text{et } \mathbb{P} \left(\text{ess sup}_{\alpha \leq t \leq \beta} |f(t)| < \infty \right) = 1 \quad \text{si } p = \infty \end{array} \right\}. \quad (2.6)$$

et

$$M_W^p[\alpha, \beta] = \left\{ \begin{array}{l} f \in L_W^p[\alpha, \beta] : \mathbb{E} \left[\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt \right] < \infty, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \text{et } \mathbb{E} \left(\text{ess sup}_{\alpha \leq t \leq \beta} |f(t)| \right) < \infty \quad \text{si } p = \infty. \end{array} \right\}. \quad (2.7)$$

On commence d'abord par définir l'intégrale pour toute fonction élémentaire $f \in L^2_W$.

Définition 2.3.3

La variable aléatoire

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) (W(t_k) - W(t_{k-1})),$$

que l'on note

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t), \tag{2.8}$$

est appelée intégrale stochastique d'Ito de la fonction élémentaire $f \in L^2_W[\alpha, \beta]$, où $(W(t), t \in [\alpha, \beta])$ est un mouvement brownien.

Lemme 2.2 Soit $f \in L^2_W[\alpha, \beta]$.

Il existe une suite de fonctions élémentaires $f_n \in L^2_W[\alpha, \beta]$ telle que

$$\int_{[\alpha, \beta]} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Lemme 2.3 Pour toute fonction élémentaire $f \in L^2_W[\alpha, \beta]$ et pour tous $\varepsilon > 0$ et $N > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t) \right|^2 > \varepsilon \right\} \leq \mathbb{P}\left\{ \int_{[\alpha, \beta]} f^2(t) dt > N \right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Les lemmes 2.2 et 2.3 nous permettent de définir l'intégrale d'Ito pour tout $f \in L^2_W[\alpha, \beta]$.

Définition 2.3.4

L'intégrale stochastique de $f \in L^2_W[\alpha, \beta]$ est définie comme la limite en probabilité de

$$\int_{[\alpha, \beta]} f_n(t) dW(t),$$

où f_n est une suite de fonctions é élémentaires $\in L^2_W [\alpha, \beta]$, i.e.,

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} f_n(t_k) (W_{t_k} - W(t_{k-1})), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Définition 2.3.5

Soit $(\xi(t), t \in [0, T])$ un processus stochastique réel tel que, pour tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, on a

$$\xi(t_1) - \xi(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t) dW(t),$$

où $a \in L^1_W [0, T]$ et $b \in L^2_W [0, T]$. Alors, on dit que $\xi(t)$ a une différentielle stochastique $d\xi$, qu'on écrit comme

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dW(t).$$

Théorème 2.1 (Formule d'Ito) Soient $\xi(t)$ un processus admettant une différentielle stochastique

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dW(t)$$

et $f(t, x)$ est une fonction continue sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ admettant les dérivées $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ continues. Alors, le processus $F(t) = f(t, \xi(t))$ admet une différentielle stochastique donnée par

$$\begin{aligned} df(t, \xi(t)) &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, \xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \xi(t))b(t) \right] dt \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))b(t)dW(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ce résultat se généralise dans \mathbb{R}^m .

Théorème 2.2 Soient les processus $\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)$ admettant tous des différentielles stochastiques données par

$$d\xi_i(t) = a_i(t) dt + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) dW_j(t), \quad i = 1, \dots, m,$$

où $a = (a_1, \dots, a_m) \in L^1_W[0, T]$, $b = b_{ij, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} \in L^2_W[0, T]$ et $W(t)$ est un mouvement brownien en dimension n .

Si $u(t, x_1, \dots, x_m)$ est une fonction continue dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}^m$ admettant aussi des dérivées continues $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, m$; alors le processus $\eta(t) = u(t, \xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ admet aussi une différentielle stochastique, donnée par

$$\begin{aligned} d\eta(t) = & \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi(t)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \xi(t)) a_i(t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t)) b_{ik}(t) b_{jk}(t) \right] dt \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \xi(t)) b_{ik}(t) dW_k(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2.4 Equations différentielles stochastiques

Rappelons qu'il y a plusieurs phénomènes dans différents domaines (sciences, mécanique, physique,...) modélisés mathématiquement par des équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = a(t, \xi(t)) + v(t), \quad (2.11)$$

où $v(t)$ est l'effet de perturbation. Le cas où l'effet de perturbation est irrégulier, i.e., les phénomènes sont soumis à des excitations stochastiques de type

$$v(t) = b(t, \xi(t)) \frac{dW(t)}{dt},$$

où $(W(t), t \in [0, T])$ est un mouvement brownien. Alors l'équation (2.11) devient

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = a(t, \xi(t)) + b(t, \xi(t)) \frac{dW(t)}{dt}, \quad t \in [0, T], \quad (2.12)$$

équation différentielle ordinaire perturbée par une perturbation aléatoire

$$b(t, \xi(t)) \frac{dW(t)}{dt},$$

où $\frac{dW(t)}{dt}$ est une dérivée formelle par rapport au temps du mouvement brownien. Puisque $\frac{dW(t)}{dt}$ n'a pas de sens, l'équation (2.12) s'écrit sous la forme

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + b(t, \xi(t)) dW(t), \quad t \in [0, T],$$

au sens de la définition 2.4.1.

Soient $a : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $b : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ et supposons que les $a_i, b_{i,j}, i, j = 1, \dots, n$ sont mesurables en (t, x) avec $a \in L^1_W[0, \infty[$ et $b \in L^2_W[0, \infty[$, où W est un mouvement brownien en dimension n défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Si $\xi(t)$ est un processus stochastique tel que

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t b(s, \xi(s)) dW(s), \quad t \in [0, \infty[, \quad (2.13)$$

alors on dit que $\xi(t)$ vérifie le système d'équations différentielles stochastique

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + b(t, \xi(t)) dW(t), \quad t \in [0, \infty[\quad (2.14)$$

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad (2.15)$$

Concernant l'existence et l'unicité de la solution, on a les résultats suivants.

Théorème 2.3 [10] *Supposons que*

- 1) $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont mesurables dans $[0, T] \times \mathbb{R}^n$,
- 2) $|a(t, x) - a(t, y)| \leq k_1 |x - y|$, $|b(t, x) - b(t, y)| \leq k_1 |x - y|$,
- 3) $|a(t, x)| \leq k_2(1 + |x|)$, $|b(t, x)| \leq k_2(1 + |x|)$, (k_1 et k_2 deux constantes quelconques).

Si ξ_0 est un vecteur aléatoire en dimension n indépendant de $\sigma(W(t), 0 \leq t \leq T)$ tel que $\mathbb{E}|\xi_0|^2 < \infty$, alors il existe une solution unique du système 2.14-2.15 dans $M^2_W[0, T]$.

Notons que l'unicité est comprise au sens des trajectoires \mathbb{P} , i.e, si $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ sont deux solutions, alors

$$\mathbb{P} \{ \xi_1(t) = \xi_2(t), \quad t \in [0, T] \} = 1.$$

Théorème 2.4 *Si, en plus des hypothèses du théorème 1.4.1, a et b sont continues dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ alors, la solution de l'équation (2.14) est un processus de diffusion de drift $a(\cdot, \cdot)$ et de matrice de diffusion $\sigma(t, x) = b(t, x)b^t(t, x)$, ($\sigma_{ij}(t, x) = \sum_{k=1}^n b_{ik}(t, x)b_{jk}(t, x)$).*

Pour plus de précisions, voir [12], [11], [10].

Chapitre 3

Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe

Soit le système de FitzHugh-Nagumo déterministe

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + y)dt, \\ dy = (a - bx - cy)dt. \end{cases}$$

L'étude de ce système, comme on le verra par la suite, nous conduit à traiter séparément deux sous systèmes issus de sa décomposition en prenant $b = 0$ et $c = 1$ pour le premier et $b = 1$ et $c = 0$ pour le second.

3.1 Sous système 1

Soit donc le système

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + y)dt, \\ dy = (a - y)dt. \end{cases} \tag{3.1}$$

La recherche des points d'équilibre est donnée par le résultat suivant.

Théorème 3.1 *Posons*

$$\Delta = 4 - 27a^2.$$

Alors le système (3.1) admet

1. un unique point d'équilibre si $\Delta < 0$,
2. deux points d'équilibre si $\Delta = 0$,
3. trois points d'équilibre si $\Delta > 0$.

Démonstration

Comme l'on connaît, la recherche des points d'équilibre du système (3.1) se traduit par la résolution du système suivant

$$\begin{cases} x - x^3 + y = 0, \\ a - y = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

ce qui revient à résoudre l'équation $x^3 - x - a = 0$. En appliquant alors les formules de Cardan, on a l'expression

$$\Delta = 4 - 27a^2,$$

dont l'étude permet d'obtenir les résultats désirés.

Aussi, concernant la stabilité des points d'équilibres, nous avons.

Théorème 3.2 *On a :*

1. Si $|a| > \frac{2\sqrt{3}}{9}$, le seul point d'équilibre est un noeud stable.
2. Si $|a| < \frac{2\sqrt{3}}{9}$, les trois points d'équilibre correspondent à deux noeuds stables et à un point selle instable.
3. Si $|a| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, les deux points d'équilibre correspondent à un noeud stable et à un selle-noeud instable.

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 26

Démonstration

L'étude de la stabilité des points d'équilibre revient à considérer la matrice suivante

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

qui, pour notre système, est

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{(1-3x^2)}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La nature des points d'équilibre étant déterminée à partir des valeurs propres de cette matrice qui sont les racines du polynôme caractéristique de cette matrice au point d'équilibre (x^*, y^*) ; ainsi, comme on a

$$\det(A(x^*) - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr } A(x^*) \cdot \lambda + \det A(x^*),$$

où

$$\text{Tr } A(x^*) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{3x^{*2}}{\varepsilon} - 1$$

et

$$\det A(x^*) = \frac{3x^{*2} - 1}{\varepsilon},$$

alors les polynômes $\text{Tr } A(x^*)$ et $\det A(x^*)$ admettent deux racines réelles données par

$$x_{tr1}^* = + \frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3}, \quad x_{tr2}^* = - \frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3},$$

et

$$x_{d1}^* = + \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_{d2}^* = - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

respectivement. Aussi, comme on sait que les racines du polynôme caractéristique peuvent être exprimées par

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[\text{Tr } A + \sqrt{(\text{Tr } A)^2 - 4 \det A}] \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{2}[\text{Tr } A - \sqrt{(\text{Tr } A)^2 - 4 \det A}].$$

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 27

avec $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}A$ et $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$, on peut en déduire les résultats suivants :

Si $x \in \left] -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right[$ alors $\text{Tr} A \leq 0$ et $\det A < 0$, donc λ_1 et λ_2 sont deux nombres réelles de signes opposés et donc on a un point selle.

Si $x \in \left[-\frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3}, \frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3} \right]$, on peut montrer que $\text{Tr} A \geq 0$ et $\det A < 0$, donc λ_1 et λ_2 sont deux nombres réelles de signes opposés et donc on a un point selle.

Si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$, alors $\text{Tr} A < 0$, $\det A > 0$ et $(\text{Tr} A)^2 > 4 \det A$, donc λ_1 et λ_2 sont deux réelles de même signe négatif et donc on a un noeud stable.

Si $|x| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, alors $f(x, y) = 0$ et $\det A = 0$, par la définition 3.9, p. 77 dans [4], les deux points $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9})$ et $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})$ sont des points de bifurcation de type selle-noeud puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ pour ces deux points.

Maintenant, en utilisant les résultats précédents, on peut démontrer les assertions du théorème. En effet pour l'assertion 1, comme $|a| > \frac{2\sqrt{3}}{9}$, le point d'équilibre est donné par $((\frac{a+\sqrt{27a^2-4}}{2})^{\frac{1}{3}} + (\frac{a-\sqrt{27a^2-4}}{2})^{\frac{1}{3}}, a)$, et comme $((\frac{a+\sqrt{27a^2-4}}{2})^{\frac{1}{3}} + (\frac{a-\sqrt{27a^2-4}}{2})^{\frac{1}{3}}) > \frac{\sqrt{3}}{3}$, le point d'équilibre est un noeud stable. Les assertions 2 et 3 du théorème sont données de manière similaire.

L'existence de la solution globale est donnée par le résultat suivant.

Théorème 3.3 *Supposons que le système (3.1) avec une donnée initiale $(x(0), y(0))$ admet la solution $(x(t), y(t))$. Alors il existe $\beta > 0$ et T dépendant uniquement de $(x(0), y(0))$ tels que, pour tout $t > T$, $|(x(t), y(t))| < \beta$.*

Démonstration

Posons $\Phi = \varepsilon x^2 + y^2$, d'après (3.1), on a

$$\frac{d\Phi}{dt} = -x^4 + x^2 + xy + ay - y^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + ay - \frac{1}{2}y^2,$$

qui, d'après l'inégalité de Young, devient

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -x^4 + \frac{3}{2}\left(\frac{h}{2}x^4 + \frac{1}{2h}\right) + a\left(\frac{k}{2}y^2 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}y^2, \text{ pour tous } h, k > 0.$$

Alors, en choisissant h et k assez petits, on peut trouver $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tels que

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -\alpha x^4 - \beta y^2 + \gamma,$$

qui, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, s'écrit

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -2\alpha x^2 + \alpha - \beta y^2 + \gamma$$

et donc, on peut trouver deux constantes A et $C > 0$, telles que

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -A\Phi + C.$$

Ainsi, en multipliant alors les deux membres de l'inégalité par $\exp(At)$ et ensuite en intégrant, on obtient

$$(\varepsilon x^2 + y^2)(t) \leq (\exp(-At))(\varepsilon x^2(0) + y^2(0)) + \frac{C}{A}(1 - \exp(-At)),$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons montrer maintenant que le système (3.1) n'admet pas de cycle limite.

Théorème 3.4 *Il n'existe pas de cycle limite pour le système (3.1).*

Démonstration

Soit $S = (f, g)^T$ où $(\cdot, \cdot)^T$ est le vecteur transposé, avec

$$f(x, y) = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + y) \text{ et } g(x, y) = a - y.$$

Comme

$$\operatorname{div}S = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y},$$

on a

$$\operatorname{div}S = -\frac{3}{\varepsilon}x^2 - 1 + \frac{1}{\varepsilon},$$

donc

$$\operatorname{div}S < 0 \quad \text{si } |x| > \frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3},$$

et

$$\operatorname{div}S > 0 \quad \text{si } |x| < \frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3}.$$

Dans ces deux cas, d'après le critère de Bendixon [9], on remarque qu'il ne peut exister de cycle limite entièrement contenu dans ces deux régions. Aussi, comme le critère de Bendixon n'empêche pas l'existence d'orbites périodiques qui chevauchent sur ces deux régions, i.e., pour $|x| = \frac{\sqrt{3(1-\varepsilon)}}{3}$; nous montrons également que ceci n'est pas possible puisque, dans ce cas, nous avons trouvé que le point d'équilibre du système (3.1) est un point selle. Par conséquent, il n'existe pas de cycle limite pour le système (3.1).

3.2 Sous système 2

Considérons le système

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^3 + \mathbf{y})dt, \\ dy = (a - \mathbf{x})dt. \end{cases} \quad (3.3)$$

Il est clair que, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système (3.3) admet une unique solution locale. De plus, il est facile de voir que ce système admet le point $(a, a^3 - a)$ comme unique point stationnaire. Pour la simplification des calculs, nous effectuons le changement de variables $x = \mathbf{x} - a$ et $y = \mathbf{y} - a^3 + a$, qui ramène le point stationnaire au point $(0, 0)$. Ainsi, le système (3.3) devient

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(g_a(x) + y)dt, \\ dy = -xdt. \end{cases} \quad (3.4)$$

où $g_a(x) = (1 - 3a^2)x - 3ax^2 - x^3$.

L'étude de la stabilité de ce système nous donne le résultat suivant.

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 30

Théorème 3.5 *Soit le système (3.4). Alors le point stationnaire $(0, 0)$ est*

1. *un foyer si $a^2 \in]\frac{1}{3}(1 - 2\sqrt{\varepsilon}), \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{\varepsilon})[$ et un noeud sinon.*
2. *asymptotiquement instable si $|a| < \frac{\sqrt{3}}{3}$,*
3. *asymptotiquement stable si $|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$,*
4. *un point bifurcation de Hopf si $|a| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.*

Démonstration

Pour l'étude de la stabilité, il est évident qu'il suffit de considérer le système linéarisé de (3.4) donné comme suit,

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}((1 - 3a^2)x + y)dt, \\ dy = -xdt. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les valeurs propres de la matrice associée

$$\begin{pmatrix} \frac{1-3a^2}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}((1 - 3a^2) \pm \sqrt{\Delta_\varepsilon}), & \text{if } \Delta_\varepsilon \geq 0 \\ \frac{1}{2\varepsilon}((1 - 3a^2) \pm i\sqrt{-\Delta_\varepsilon}), & \text{if } \Delta_\varepsilon < 0 \end{cases},$$

où $\Delta_\varepsilon = (1 - 3a^2)^2 - 4\varepsilon$. D'après la théorie classique sur l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques ([9], [20]), on a :

Pour $a^2 > \frac{1}{3}$, on a $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est stable.

Pour $a^2 < \frac{1}{3}$, on a $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ et donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable.

Pour $a^2 \in]\frac{1}{3}(1 - 2\sqrt{\varepsilon}), \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{\varepsilon})[$, alors les deux racines sont complexes conjuguées et donc $(0, 0)$ est un foyer, si $a^2 \notin]\frac{1}{3}(1 - 2\sqrt{\varepsilon}), \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{\varepsilon})[$ alors les deux racines sont réelles et le point stationnaire est un noeud.

Pour $|a| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, soit $\lambda_{1,2} = z(a) \pm iw(a)$ où $z(a) = \frac{1}{2\varepsilon}(1 - 3a^2)$ et $w(a) = \sqrt{4\varepsilon - (1 - 3a^2)^2}$. Comme $z(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$, $w(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}) = \sqrt{4\varepsilon}$ et $\frac{\partial z}{\partial a}(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{\varepsilon}$, d'après le théorème 36 p. 61 in [9], on montre qu'il se produit une bifurcation de Hopf [2], [3], [6] en $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 31

ce qui nous permet de prouver l'existence d'une solution périodique. Ce qui achève la démonstration.

Théorème 3.6 *Le système (3.4) admet une unique solution globale. De plus, on a*

1. Si $|a| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, le point stationnaire est un attracteur global.
2. Si $|a| < \frac{\sqrt{3}}{3}$, il existe un cycle limite. De plus, ce cycle est unique et attire toutes les trajectoires autres que le point stationnaire.

Comme l'on peut vérifier facilement les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz pour notre système, nous obtenons l'existence locale de la solution. Concernant l'existence globale, problème assez difficile, nous nous inspirons d'une technique utilisée dans [13] et d'un résultat de [22] qui sont donnés par les deux lemmes suivants.

Lemme 3.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(-3x^2 + y)dt, \\ dy = -xdt. \end{cases} \quad (3.6)$$

Alors, le point $(0,0)$ est un centre pour le système (3.6), de plus toutes les trajectoires passant par le demi-axe $y^-(x=0, y < 0)$ sont périodiques.

Démonstration

On considère uniquement le cas où $a < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, l'autre cas se déduit de la même manière. Il est facile de voir que le point $(0,0)$ est un centre pour le système (3.6). Aussi comme les trajectoires sont symétriques par rapport à l'axe $x=0$, en effet si (x,y) est solution de (3.6), alors $(-x(-t), y(-t))$ l'est également, et donc, en notant y^+ le demi-axe $(x=0, y > 0)$ et y^- le demi-axe $(x=0, y < 0)$, pour montrer la périodicité des trajectoires, il suffit de montrer que toute trajectoire partant de y^- atteint le demi-axe y^+ en un temps fini. Ainsi, on commence par montrer que, pour toute condition initiale $(0, y_0)$, $y_0 < 0$, la trajectoire atteint la demi parabole $(x < 0, 3ax^2)$ en un temps fini, ceci est vérifié puisqu'on a $\frac{dx}{dt} < 0$ et $\frac{dy}{dt} > 0$ dans le domaine délimité par le demi axe y^- et la demi parabole $(x < 0, 3ax^2)$. Ensuite, on montre que toute trajectoire partant de la demi

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 32

parabole atteint l'axe ($x < 0, y = 0$) en un temps fini puisqu'on vérifie que $\frac{dx}{dt} > 0$ et $\frac{dy}{dt} > 0$ en tout point de la région comprise entre la demi parabole et le demi axe ($x < 0, y = 0$). Enfin, on montre qu'à partir du demi axe ($x < 0, y = 0$), la trajectoire atteint y^+ en un temps fini. Ceci est vrai puisque $\frac{dx}{dt} > 0$ et $\frac{dy}{dt} < 0$ dans cette dernière région, ce qui achève la démonstration.

Lemme 3.2 [22] *Soit le système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y) - \beta(y)F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -g(x), \end{cases} \quad (3.7)$$

où les fonctions α, β, F et g sont supposées continues et tel que l'on ait l'unicité des solutions pour toute valeur initiale. Posons $G(x) = \int_0^x g(s)ds$, et supposons vérifiées les conditions suivantes

1. $\alpha(0) = 0$, α est strictement croissante et $\alpha(\pm\infty) = \pm\infty$.
2. $xg(x) > 0$ si $x \neq 0$ et $G(\pm\infty) = \infty$.
3. $\beta(y) > 0$ pour $y \in \mathbb{R}$, et β est décroissante.
4. Il existe des constantes x_1, x_2 avec $x_1 < 0 < x_2$ telles que $F(x_1) = F(0) = F(x_2) = 0$ et $xF(x) < 0$ pour $x \in]x_1, x_2[\setminus \{0\}$.
5. $F(x)$ est croissante pour $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[$.
6. Il existe des constantes $M > 0, k, k_0$ avec $k > k_0$, tel que $F(x) < k_0$ pour $x \leq -M$ et $F(x) > k$ pour $x \geq M$.
7. $G(-x) \geq G(x)$ pour $x > 0$.

Alors le système (3.3) a exactement une seule orbite fermée qui est un cycle limite hyperbolique stable.

Démonstration du théorème 3.6

Pour cette démonstration, nous allons traiter trois cas séparément.

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 33

- **Cas** $|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ici, nous allons considérer uniquement le cas où $a < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, puisque le cas où $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$ s'en déduit par symétrie. On veut ainsi montrer que toutes les trajectoires de (3.4) passant par l'axe y^- tendent vers le point stationnaire $(0, 0)$. Pour cela, comme l'on sait d'après le lemme (3.1), que toutes les trajectoires du système (3.6) passant par le demi-axe y^- sont périodiques et que, en comparant les trajectoires des solutions de (3.4) à celles de (3.6), on montre que le champ de vecteurs associé à (3.4) pointe à l'intérieur des trajectoires de (3.6). En effet il suffit de voir que l'expression $(1 - 3a^2)x - x^3$ est strictement positive si $x < 0$, et est strictement négative si $x > 0$; il nous reste à montrer que, pour toute condition initiale pour le système (3.4), la trajectoire atteint l'axe y^- en un temps fini. Cette dernière assertion se démontre de manière similaire à celle utilisée dans la preuve du lemme (3.1).

- **Cas** $|a| < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Dans ce cas, la démonstration découle du lemme (3.2). En effet, posons

$$\alpha(y) = \frac{y}{\varepsilon}, \beta(y) = 1, F(x) = \frac{(-1 + 3a^2)x + 3ax^2 + x^3}{\varepsilon} \text{ et } g(x) = x.$$

On va montrer que les conditions du lemme (3.2) sont vérifiées. En effet, on a $\alpha(0) = \frac{0}{\varepsilon} = 0$ et la fonction $\alpha(y)$ est strictement croissante avec $\alpha(\pm\infty) = \pm\infty$. Aussi, comme $xg(x) = x^2$, il est clair que $xg(x) > 0$ si $x \neq 0$, et $G(\pm\infty) = \infty$. La fonction $\beta(y)$ étant identiquement égale à 1, est donc une fonction décroissante positive. De plus, les solutions de l'équation $F(x) = 0$ étant

$$x_1 = \frac{-3a - \sqrt{4 - 3a^2}}{2}, x_2 = \frac{-3a + \sqrt{4 - 3a^2}}{2} \text{ et } x_3 = 0$$

et les racines de la fonction $F'(x) = 3x^2 + 6ax + 3a^2 - 1$ sont données par

$$x_1^* = -a - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } x_2^* = -a + \frac{\sqrt{3}}{3},$$

on peut déduire que $xF(x) < 0$ pour $x \in]x_1, x_2[\setminus \{0\}$, et que la fonction F est croissante pour $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[$. Enfin, il est évident que l'on peut toujours trouver $\gamma > 0$

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 34

tel que, on pose

$$M = x_2 + \gamma, k = F(x_1^*) \text{ et } k_0 = F(x_2^*), \text{ si } a > 0, \text{ et}$$

$$M = x_2 + \gamma, k = F(x_2^*) \text{ et } k_0 = F(x_1^*), \text{ si } a < 0.$$

La dernière condition est évidente puisque $G(-x) = G(x)$. Ainsi, ayant vérifié toutes les conditions du lemme (3.2), on peut affirmer que le système (3.4) admet un unique cycle limite hyperbolique stable.

- **Cas** $|a| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme précédemment, il nous suffit de faire la démonstration pour $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$. puisque pour $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, la démonstration s'effectue de manière similaire. Dans ce cas, le système (3.4) s'écrit

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(-\sqrt{3}x^2 - x^3 + y)dt, \\ dy = -xdt. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ici, les méthodes précédentes ne pouvant pas être appliquées puisque le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne du système (3.8) a deux valeurs propres imaginaires pures, nous allons utiliser la méthode de l'*Algorithme des Formes Normales* [23] pour déterminer la nature du point d'équilibre. A cet effet, nous avons besoin que les valeurs propres de la matrice jacobienne soient égales à i et $-i$. Pour cela, à l'aide de cette transformation judicieuse

$$X = (\varepsilon)^{\frac{1}{4}}x, Y = \frac{y}{(\varepsilon)^{\frac{1}{4}}} \text{ and } \tau = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}},$$

le système (3.8) devient

$$\begin{cases} dX = \left(-\frac{\sqrt{3}}{(\varepsilon)^{\frac{3}{4}}}X^2 - \frac{X^3}{(\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} + Y\right)d\tau, \\ dY = -Xd\tau \end{cases} \quad (3.9)$$

dont la matrice jacobienne est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3. Étude théorique du système de FitzHugh-Nagumo déterministe 35

Ainsi, l'utilisation de *l'Algorithme des Formes Normales* nous permet de déterminer que le second coefficient de Lyapunov est égale à $-\frac{15\sqrt{10}}{4}$, donc négatif, ce qui nous permet, d'après cette théorie, d'en déduire que ce point d'équilibre est un foyer.

Chapitre 4

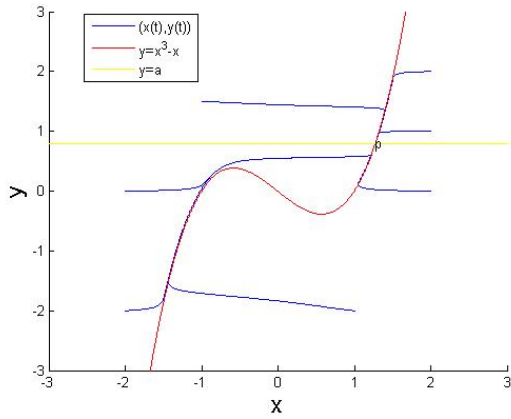
Etude numérique du système de FitzHugh-Nagumo

Dans ce chapitre, nous allons montrer la validité de nos résultats théoriques par des simulations numériques en utilisant le logiciel Matlab. Nous allons ainsi figurer tous les schéma relatifs aux différents cas des sous systèmes (3.1) et (3.3) et les interpréter.

4.1 Sous système 1

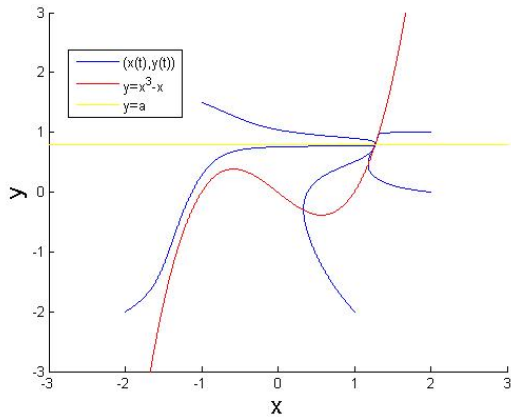
Nous allons exprimer les résultats numériques à l'aide de schéma pour les trois cas trouvés.

4.1.1 Cas d'un seul point d'équilibre : noeud stable



Pour tout condition initiale, la solution (orbite) tend vers le point d'équilibre stable.

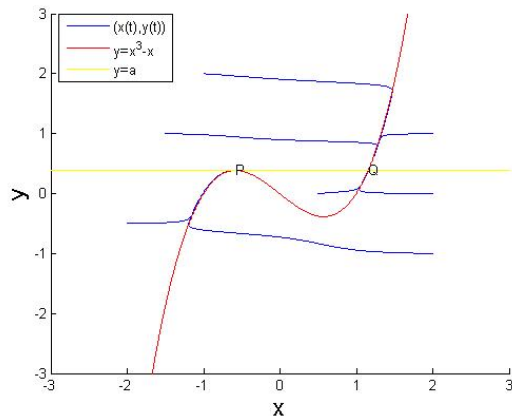
Fig 4. 1. 1 : $a = \frac{2\sqrt{3}}{9} + 0.4$ et $\varepsilon = 0.1$.



La propriété "*lent-rapide*" du système est éliminée lorsque ε est proche de 1 : perte du rôle des branches d'équilibres.

Fig 4. 1. 1' : $a = \frac{2\sqrt{3}}{9} + 0.4$, $\varepsilon = 0.99$.

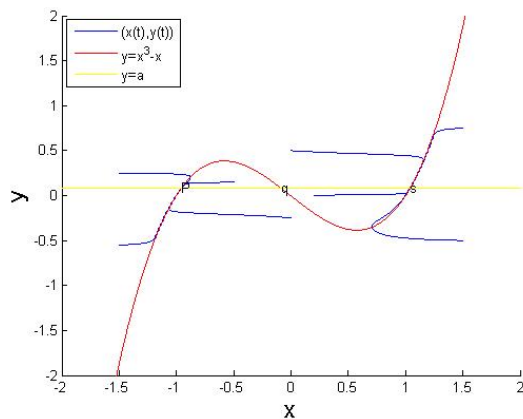
4.1.2 Cas de deux points d'équilibres : noeud stable et selle noeud instable



La présence d'une branche d'équilibre instable, malgré le caractère lent-rapide, le point P (selle noeud) n'est pas un bassin d'attraction comme le point Q (noeud).

Fig 4. 1. 2 : $a = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \varepsilon = 0.1$.

4.1.3 Cas de trois points d'équilibres : deux noeuds stables et un selle instable



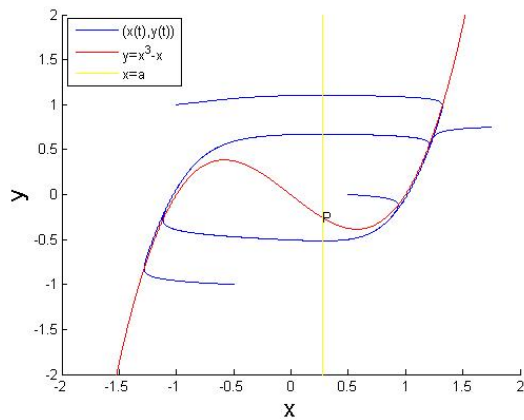
Orbites s'éloignent du point q (selle), et tendent vers les deux points p, s (noeuds).

Fig 4. 1. 3 : $a = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 0.3, \varepsilon = 0.1$.

4.2 Sous système 2

Nous allons exprimer les résultats numériques à l'aide de schéma pour les trois cas. Ici, nous rappelons qu'il existe un seul point d'équilibre qui peut correspondre soit à un selle, soit à un noeud et soit enfin à un foyer.

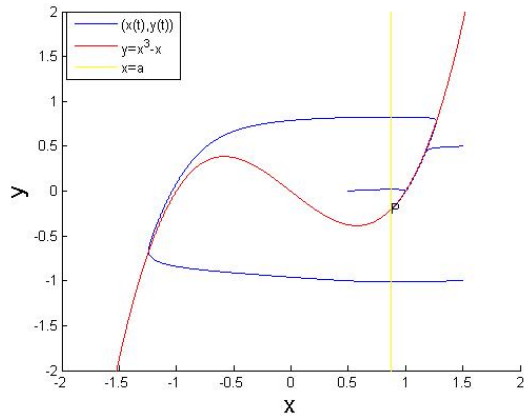
4.2.1 Cas d'un point selle : existence d'un cycle limite



Pour toute condition initiale, les orbites tendent vers une orbite périodique (cycle limite attractif)

Fig 4. 2. 1 : $a = \frac{\sqrt{3}}{3} - 0.3$, $\varepsilon = 0.1$.

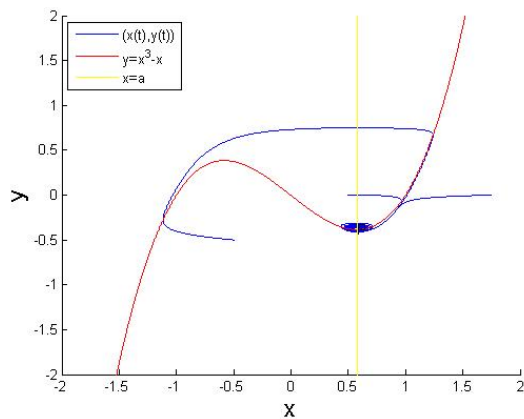
4.2.2 Cas d'un point noeud stable



Toute orbite tend vers le point noeud stable.
Caractère d'excitabilité : pour toute condition initiale en dessous du minimum local la solution va changer considérablement de valeurs avant de retourner à son état d'équilibre.

Fig 4. 2. 2 : $a = \frac{\sqrt{3}}{3} + 0.3, b = 1, c = 0$ et $\varepsilon = 0.1$.

4.2.3 Cas d'un foyer stable



Le caractère d'excitabilité est identique au cas précédent.

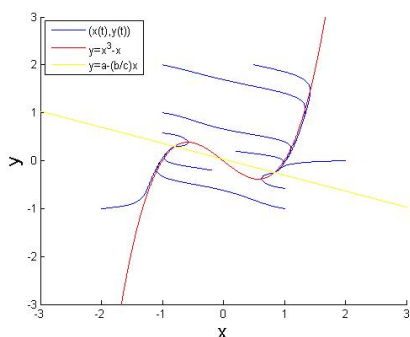
Fig 4. 2. 3 : $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \varepsilon = 0.1$.

4.3 Système général

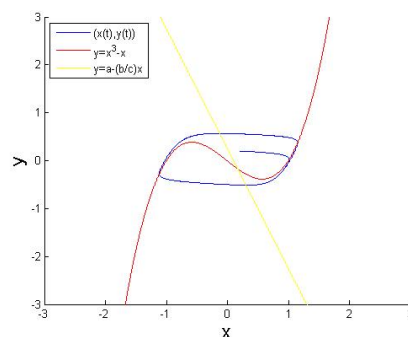
Soit le Système

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + y)dt, \\ dy = (a - bx - cy)dt. \end{cases}$$

Comme nous l'avons signalé au début du chapitre précédent, l'étude de ce système repose sur le traitement de ses deux sous systèmes. En effet, pour toutes valeurs arbitraires des paramètres a, b et c , nous n'obtenons pas d'autres cas que les cas rencontrés dans l'étude des deux sous systèmes. Ici, nous nous limitons à l'étude numérique des cas d'un et de trois points d'équilibre, le cas de deux points d'équilibres se traite de manière identique. La validation de notre résultat est illustrée par les deux schéma suivants.



(A) Fig 4. 3. 1 : $a = 0.1, b = 1, c = 3, \varepsilon = 0.1$



(B) Fig 4. 3. 2 : $a = 0.1, b = 1, c = 1, \varepsilon = 0.1$.

Chapitre 5

Systeme de FitzHugh-Nagumo stochastique

5.1 Étude théorique

5.1.1 Existence et unicité de la solution

Soit le système de FitzHugh-Nagumo stochastique suivant

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + y)dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}dW_t^1, \\ dy &= (a - bx - cy)dt + \sigma_2 dW_t^2, \end{aligned}$$

où σ_1, σ_2 sont deux réels positifs et W_t^1 et W_t^2 sont deux mouvements browniens standards indépendants.

Ici, vu l'expérimentation et les travaux de recherche de Berglund et Gentz [5], [4], la perturbation stochastique dans l'équation du flux n'a pas beaucoup d'importance vu le caractère "*lent-rapide*" du modèle. Ainsi nous nous limitons au cas où $\sigma_2 = 0$. De plus, comme dans le cas déterministe, l'étude se ramène à traiter les deux sous systèmes

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + y)dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}dW_t^1, \\ dy = (a - y)dt \end{cases} \quad (5.1)$$

et

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + y)dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}dW_t^1, \\ dy = (a - x)dt. \end{cases}$$

Les démonstrations de l'existence de la solution pour ces deux systèmes étant similaires, nous allons l'établir uniquement dans le cas du système (5.1)

Proposition *Pour tout (x_0, y_0) vecteur aléatoire indépendant de $\sigma(W_t^1, 0 \leq t \leq T)$ tel que $\mathbb{E} |(x_0, y_0)|^2 < \infty$, le système (5.1) avec la condition initiale $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, admet une unique solution dans $M_{W^1}^2[0, T]$.*

Démonstration

La preuve de cette proposition repose sur le Théorème 2.3. Ainsi, il suffit de vérifier les conditions 1), 2) et 3) pour notre système. Pour la simplification des calculs, nous transformons notre système en l'équation

$$dx = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + a - (a - y_0) \exp(-t))dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}dW_t^1. \quad (5.2)$$

Ceci est obtenu par la résolution de l'équation $dy = (a - y)dt$, qui nous donne $y = a - (a - y_0) \exp(-t)$. Les conditions 1) et 3) étant évidentes, nous allons démontrer uniquement la condition 2).

Posant $A(t, x) = \frac{1}{\varepsilon}(x - x^3 + a - (a - y_0) \exp(-t)), B(t, x) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} |A(t, x) - A(t, y)| + |B(t, x) - B(t, y)| &= \frac{1}{\varepsilon}|x - x^3 - y + y^3| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}|x - y + (y^3 - x^3)| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}|x - y||1 - y^2 - x^2 - xy| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}|x - y|. \end{aligned}$$

Puisque l'on a $|1 - x^2 - y^2 - xy| \leq 1$, en effet, en posant $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2 - xy$, on montre que cette expression admet la valeur 1 comme maximum global au point $(0, 0)$.

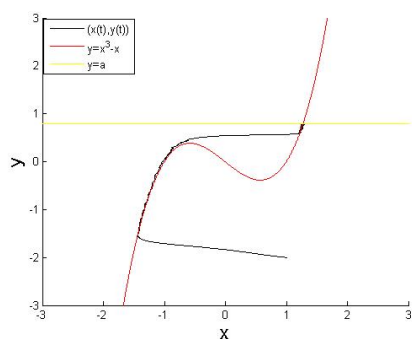
Ce qui achève la démonstration.

5.2 Étude numérique

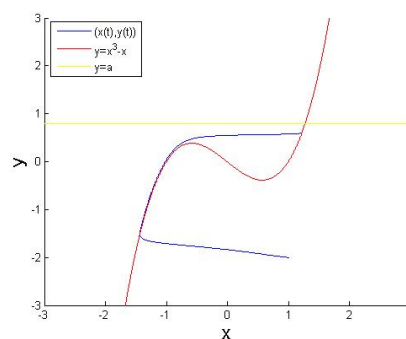
Dans cette partie, nous allons effectuer des simulations pour différentes valeurs des paramètres. Pour tous les cas que nous allons considérer, nous remarquons que, pour des valeurs de σ_1, σ_2 assez petites, les solutions dans le cas stochastique sont très proches des solutions du cas déterministe avec des légères fluctuations. Maintenant, si l'on augmente les valeurs de σ_1, σ_2 , l'amplitude des trajectoires augmente et dans certains cas les points d'équilibres changent de nature, par exemple le cas où le selle noeud se transforme en un point selle (totalement instable). Tous ces résultats sont illustrés dans les figures qui suivent.

5.2.1 Cas du sous système 1 stochastique

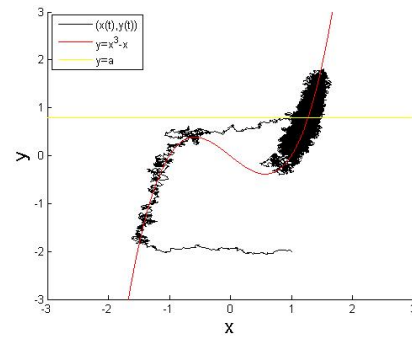
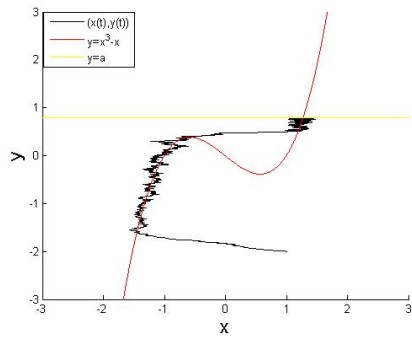
5.2.1.1 Cas d'un seul point d'équilibre : noeud stable



(A) $a = 2\sqrt{\frac{3}{9}} + 0.4, \sigma_1 = 0.02, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$

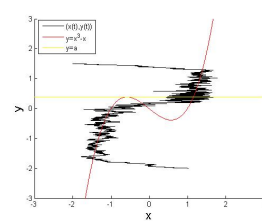
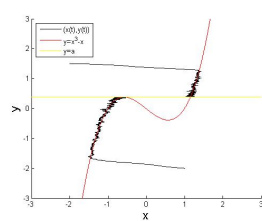
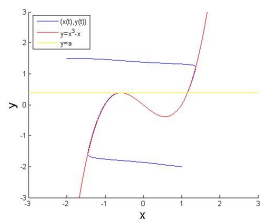


(B) $a = 2\sqrt{\frac{3}{9}} + 0.4, \varepsilon = 0.1.$



(C) $a = 2\frac{\sqrt{3}}{9} + 0.4, \sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$ (D) $a = 2\frac{\sqrt{3}}{9} + 0.4, b = 0, \sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = 0.5, \varepsilon = 0.1.$

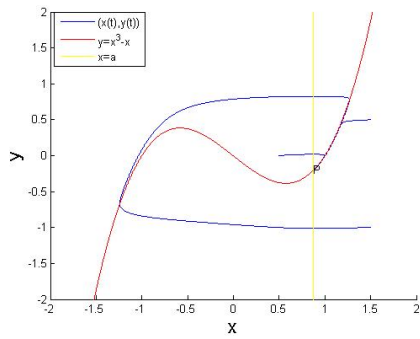
5.2.1.2 Cas de deux points d'équilibres : noeud stable et selle noeud instable



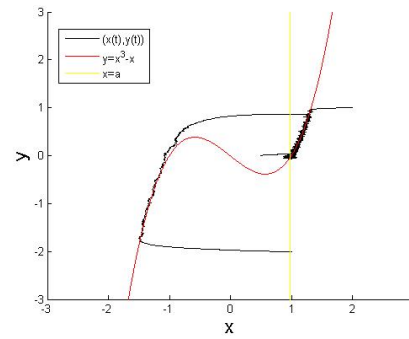
(E) $a = 2\frac{\sqrt{3}}{9}, \varepsilon = 0.1.$ (F) $a = 2\frac{\sqrt{3}}{9}, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$ (G) $a = 2\frac{\sqrt{3}}{9}, \sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$

5.2.2 Cas du sous système 2 stochastique

5.2.2.1 Cas d'un foyer stable

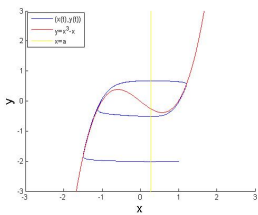


(H) $a = \frac{\sqrt{3}}{3} + 0.4$ et $\varepsilon = 0.1$.

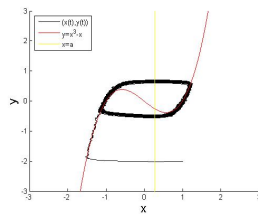


(I) $a = \frac{\sqrt{3}}{3} + 0.4, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1$.

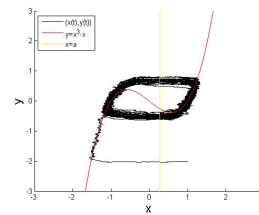
5.2.2.2 Cas d'un point selle : existence d'un cycle limite



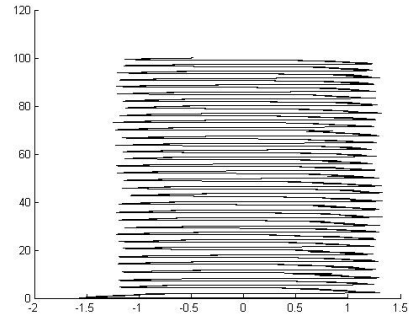
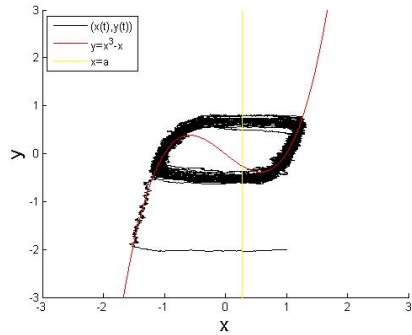
(J) $a = \frac{\sqrt{3}}{3} - 0.3, \varepsilon = 0.1$.



(K) $a = \frac{\sqrt{3}}{3} - 0.3, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.01, \varepsilon = 0.1$.

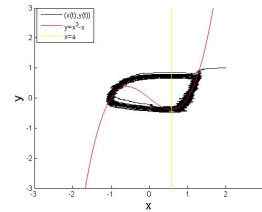
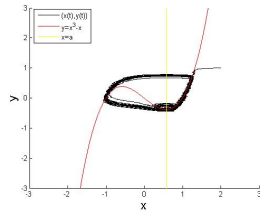
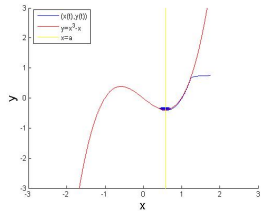


(L) $a = \frac{\sqrt{3}}{3} - 0.3, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.1, \varepsilon = 0.1$.

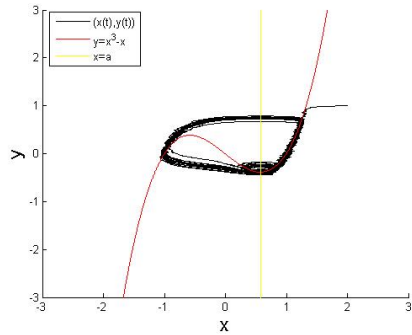


- (M) $a = \frac{\sqrt{3}}{3} - 0.3, b = 0, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.1, \varepsilon = 0.1.$ (N) $x \text{ en } t, a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = 0, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.1, \varepsilon = 0.2.$

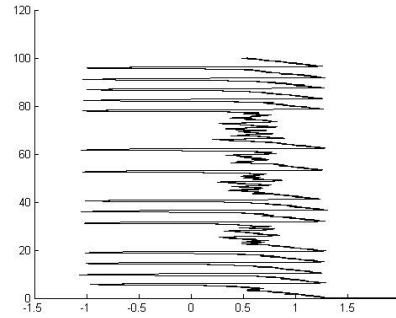
5.2.2.3 Cas d'un seul point d'équilibre : noeud stable



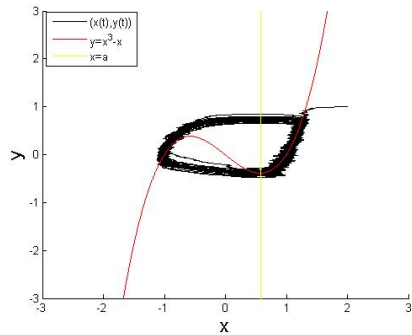
- (O) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\varepsilon = 0.1.$ (P) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$ (Q) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$



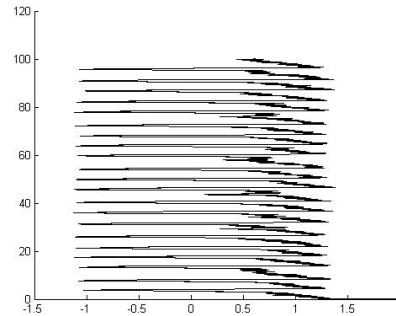
(R) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$



(S) x en t avec $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0, \varepsilon = 0.1.$



(T) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0$ et $\varepsilon = 0.1.$



(U) x en t avec $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0$ et $\varepsilon = 0.1.$

Chapitre 6

Appendice

6.1 Autre démonstration du théorème 3.6 pour le cas

$$|a| < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Comme il n'est pas toujours possible de vérifier les hypothèses du lemme (3.2), nous allons proposer une autre démonstration dans le cas où l'on doit prouver l'existence et l'unicité d'un cycle limite. Dans cette démonstration, nous utilisons des résultats sur la théorie de bifurcation de Hopf. Aussi, comme le théorème de bifurcation de Hopf [20] nous donne seulement l'existence d'un cycle limite, il nous reste à démontrer l'unicité. Ce dernier point est résolu à l'aide de techniques utilisées dans les travaux de [13]. La procédure de cette technique pour prouver l'unicité du cycle limite consiste à montrer d'abord que le système admet tout au plus deux cycles limites et ensuite qu'on ne peut avoir exactement deux. A cet effet, on commence d'abord par montrer qu'aucun cycle ne peut être contenu dans le domaine intérieur délimité par les axes $x = \pm \sqrt{1 - 3a^2}$. Pour cela, en utilisant les trajectoires de la solution de (3.6), on a

$$\det(F, H) < 0, \text{ pour tout } |x| < \sqrt{1 - 3a^2},$$

où $H = (-3ax^2 + y, -x)^t$ et $F(x, y) = (g_a(x) + y, -x)^t$, i.e., le champ de vecteurs de F pointe à l'extérieur des trajectoires fermées solutions de (3.6). Ainsi, aucune trajectoire de (3.4) ne peut se refermer tant que $|x| < \sqrt{1 - 3a^2}$. De plus, à cause de la symétrie des trajectoires de (3.6), il est clair que si la trajectoire de (3.4) intersecte l'axe $x = -\sqrt{1 - 3a^2}$, alors elle intersecte l'axe $x = \sqrt{1 - 3a^2}$ et inversement.

Maintenant, il nous faut montrer que le système (3.4) n'a pas plus de deux cycles limites. Soient donc γ , le plus petit cycle contenant le point $(0, 0)$ et T sa période. Ce point $(0, 0)$ étant instable, d'après le lemme 2.1, on a l'expression $\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt$ négative. Considérons maintenant γ' , le plus petit cycle contenant γ , et T' sa période, on va montrer que $\int_0^{T'} \nabla \cdot F(\gamma'(t)) dt < \int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt$.

Comme

$$\begin{aligned} \int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt &= \int_0^T (-3x^2 - 6ax + (1 - 3a^2)) dt \\ &= \int_0^T (-3x^2 + (1 - 3a^2)) dt \end{aligned}$$

puisque $\int_0^T -x dt = \int_0^T \frac{dy}{dt} = 0$. Ensuite, choisissant $x_3 = -\sqrt{\frac{1}{3} - a^2}$ et $x_4 = \sqrt{\frac{1}{3} - a^2}$, on obtient

$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt = \sum_{i=1}^3 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (-3x^2 + (1 - 3a^2)) dt$, où les t_i sont les instants auxquels le cycle intersecte les axes $x = x_3$ et $x = x_4$ avec t_1 l'instant où la trajectoire intersecte le demi axe $(x = x_4, y < 0)$. Pour simplifier l'écriture, notons par I_i l'intégration sur $[t_i, t_{i+1}]$. Alors, en effectuant la même procédure pour γ' , on montre que

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_{t'_1}^{t'_2} (-3x^2 + (1 - 3a^2)) dt = \int_{x_4}^{x_3} \left(\frac{-3x^2 + (1 - 3a^2)}{g_a(x) + y'} \right) dx \\ &< \int_{x_4}^{x_3} \left(\frac{-3x^2 + (1 - 3a^2)}{g_a(x) + y} \right) dx = I_1. \end{aligned}$$

Aussi, de la même manière, on obtient $I'_3 < I_3$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} I'_2 &= \int_{t'_2}^{t'_3} (-3x^2 + (1 - 3a^2))dt = \int_{y'_2}^{y'_3} \left(\frac{-3x^2 + (1 - 3a^2)}{-x} \right) dy \\ &< \int_{y_2}^{y_3} \left(\frac{-3x^2 + (1 - 3a^2)}{-x} \right) dy = I_2. \end{aligned}$$

De même, on montre que $I'_4 < I_4$. D'où $\int_0^{T'} \nabla \cdot F(\gamma'(t))dt < 0$.

Maintenant, si, de plus, l'on suppose qu'il existe γ^* , le plus petit cycle contenant γ' , alors, on a

$$\int_0^{T^*} \nabla \cdot F(\gamma^*(t))dt < 0.$$

Ainsi, nous obtenons deux cycles attractifs consécutifs, ce qui n'est pas possible et donc Il ne peut y avoir plus de deux cycles.

Montrons maintenant qu'il ne peut pas y avoir exactement deux cycles.

Supposons qu'il y en ait deux à savoir γ et γ' . On construit deux courbes fermées C_1 et C_2 telles que

$$C_1 \subset \gamma \subset C_1 \subset \gamma',$$

et telles que le champ de vecteurs F pointe à l'extérieur de ces deux courbes. On considère alors le système

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\varepsilon}(g_a(x) + y - \alpha x)dt, \\ dy = -xdt, \end{cases} \quad (6.1)$$

avec $\alpha > 0$. Posons $F_\alpha = (g_a(x) + y - \alpha x, -x)$. Ainsi, puisque pour α assez petit, ce système admet un cycle limite γ'_α extérieur à C_2 tel que F_α pointe à l'extérieur de C_2 et de C_1 ; mais comme F_α pointe à l'intérieur de γ , ceci implique l'existence de trois cycle limites, l'un entre C_1 et γ , un deuxième entre γ et C_2 , et un troisième à l'extérieur de C_2 . Ce qui contredit le fait qu'il n'y ait pas plus de deux cycles, résultat valable également pour le champ de vecteur F_α , comme ceci est valable pour tout α , d'où l'unicité du cycle limite.

Bibliographie

- [1] B. Ambrosio and M. A. Aziz-Alaoui. Synchronization and control of coupled reaction–diffusion systems of the fitzhugh–nagumo type. *Computers and Mathematics with Applications*, 64 :934–943, 2012.
- [2] S. M. Baer and T. Erneux. Singular hopf bifurcation to relaxation oscillations. *I SIAM J. Appl. Math*, 46 :721–739, 1986.
- [3] S. M. Baer and T. Erneux. Singular hopf bifurcation to relaxation oscillations. *II SIAM J. Appl. Math*, 52 :1651–1664, 1992.
- [4] N. Berglund and B. Gentz. *Stochastic Methods in Neuroscience*. Oxford University Press, 2009.
- [5] N. Berglund and B. Gentz. Mixed-mode oscillations and interspike interval statistics in the stochastic fitzhugh–nagumo model. *IOP PUBLISHING*, 25 :2303–2335, 2012.
- [6] B. Braaksma. Singular hopf bifurcation in systems with fast and slow variables. *J. Nonlinear Sci.*, 8 :457–490, 1998.
- [7] N. Corson and M.A. Aziz-Alaoui. Asymptotic dynamics of the slow-fast hindmarsh-rose neuronal system. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 16 :535–549, 2009.

-
- [8] R. FitzHugh. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane. *Bull. Math. Biophys.*, 17 :257–269, 1955.
- [9] J. P. Francoise. *Oscillations en Biologie : Analyse qualitative et Modèles*. Collection Mathématiques et Applications, SMAI Springer, 2005.
- [10] A. Friedman. *Stochastic Differential Equation and Application*. New York, Academic Press, 1975-1976.
- [11] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod. *Equations différentielles stochastiques*. Springer-Verlag, 1972.
- [12] R.Z. Has'minskii. *Stochastic stability of differential equations*. Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [13] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, 1974.
- [14] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic press, 1974.
- [15] A.L. Hodgkin and A.F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117 :500–544, 1952.
- [16] E. M. Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience - The geometry of excitability and bursting*. The MIT Press, 2007.
- [17] S. Lefschetz. *Differential equations : Geometric theory*. Interscience Publishers, New York, 1957.
- [18] A. Lins, W. De Melo, and C. Pugh. On lienard's equation. *Lecture Notes in Mathematics*, 597 :335–357, 1977.
- [19] J. S. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50 :2061–2070, 1962.
- [20] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1991.

-
- [21] A. Sakri and A. Benchettah. A study of a class of a dynamic system of fitzhugh-nagumo type. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2 :1873–1883, 2016.
- [22] J. E. Nàpoles Valdès. Uniqueness of limit cycles for a class of lienard systems. *Revista de la Union Matematica Argentina*, 42 :39–49, 2000.
- [23] P. YU and Y. YUAN. An efficient method for computing the simplest normal forms of vector fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13-1 :19–46, 2003.