وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
ANNABA

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Année : 2017

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématique, Dynamique et Modélisation

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en MATHÉMATIQUES

SUR L'EXISTENCE GLOBALE DE LA SOLUTION D'UN SYSTÈME DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC MATRICE DE DIFFUSION PLEINE

EN
Option
Equations Différentielles et Applications
Présenter Par:

MEBARKI MAROUA

DIRECTEUR DE THÈSE : MOUMENI Abdelkader Prof U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRESIDENT :	Diaba Fatma	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Amiar Rachida	M.C.A.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Ardjouni Abdelouaheb	M.C.A.	U.C.M. SOUK AHRAS
EXAMINATEUR :	Djebabla Abdelhak	M.C.A.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Hadji Mohammed Lakhdar	M.C.A.	U.B.M. ANNABA

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Pr. Moumeni Abdelkader, pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité et sa patience, pour ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier son esprit de recherche et ses commentaires efficaces. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier Pr. Diaba Fatma pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury.

Je remercie Dr. Amiar Rachida, Dr. Ardjouni Abdelouaheb, Dr. Djebabla Abdelhak, Dr. Hadji Mohammed Lakhdar d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je remercie également tous les chercheurs rencontrés au cours de ma thèse et qui m'ont permis de progresser dans ma recherche et de m'intégrer dans la communauté scientifique.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux êtres les plus chers dans ma vie mes parents, à mes frères (Imed, Haitem, Akram) pour leurs sacrifices et sans lesquels rien de tout cela ne serait arrivé, à mes beaux-parents, et toute la famille.

Je remercie enfin et surtout la personne avec laquelle j'ai la chance de partager ma vie et qui a été pour moi un soutien constant. Merci à toi mon chèr époux Taki Eddine.

Résumé

Le but de cette thèse est de prouver l'existence globale et le comporement asymptotique dans le temps des solutions pour le système de réaction-diffusion fortement couplé

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f(u,v) & sur\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_3 \Delta u - d_4 \Delta v = g(u,v) & sur\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & sur\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(.,0) = u_0(.), v(.,0) = v_0(.) & sur\ \Omega \end{cases} \tag{SRD}$$

avec une matrice de diffusion pleine. Nos techniques de preuve sont basées sur les méthodes fonctionnelles de Lyapunov et sur quelques estimations L^P. Nous montrons que des solutions globales existent pour une large classe des termes non linéaires f et g.

Mots-clés : Système Réaction-Diffusion, Existence globale, Comportement asymptotique, Semi-groupe, Fonction Lyapunov .

La Classification Mathématiques par Matières 2010 (AMS) : 35K57, 35B40, 35B45.

Abstract

The purpose of this thesis is to prove the global existence and behavior asymptotic in time of solutions for the strongly coupled reaction-diffusion system

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f(u,v) & in\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_3 \Delta u - d_4 \Delta v = g(u,v) & in\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & in\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(.,0) = u_0(.), v(.,0) = v_0(.) & in\ \Omega \end{cases} \tag{SRD}$$

with full matrix of diffusion coefficients. Our techniques of proof are based on Lyapunov functional methods and some L^P estimates. we show that global solutions exist. Our investigation applied for a wide class of the nonlinear terms f and g.

Keywords : Reaction-Diffusion System, Global Existence, Asymptotic behavior , Semi-group, Lyapunov Functional.

2010 Mathematics Subject Classification (AMS) : 35K57, 35B40, 35B45.

ملخص

نهتم بدراسة الوجود الكلي وسلوك التقارب بالنسبة للزمن لحلول أنظمة الانتشار ورد الفعل ذات مصفوفة انتشار " مملوءة " في الحالة التي تكون فيها بنية الحدود غير الخطية.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f(u,v) & \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_3 \Delta u - d_4 \Delta v = g(u,v) & \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur }]0,+\infty[\times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 \geq 0, v(0,.) = v_0 \geq 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \qquad \text{(SRD)}$$

لهذا الغرض نستخدم تقنيات مناسبة تشد على أشباه نصف المجموعات، تقديرات L^p و الدالة "ليابينوف

الكلمات المفتاحية: أنظمة التفاعل والانتشار, نصف زمرة , دالة ليابينوف, حل كلي, سلوك تقاربي

التصنيف الرياضي (AMS)2010: 35B45, 35B40, 35K57 .

Introduction

Par système de Réaction-Diffusion, nous entendons un système d'équations aux dérivées partielles, parabolique, semi-linéaire de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right)-D\Delta u(x,t)=F\left(u\left(x,t\right)\right)\qquad x\in\Omega,t\geq0\qquad\qquad(R.D)$$

où $u=(u_1,...,u_m);u_i:\Omega\times\ \mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^m$ est l'inconnue, D est une matrice carrée définie positive dite matrice de diffusion et $F:\mathbb{R}^m\rightarrow\mathbb{R}^m$ est une application régulière (au moins localement Lipchitzienne et généralement non linéaire); Δ est le laplacien où

$\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}$.

L'équation $(R.D)$ est posée sur un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et complétée par des conditions initiales et des conditions sur le bord, par exemple les conditions de Dirichlet ou les conditions de Neumann.

Cette classe de systèmes a reçu un intérêt très attentionné par les chercheurs motivés tout autant par la richesse qu'apporte la structure de la solution que par le fait que ces systèmes modélisent plusieurs phénomènes.

En effet, ces derniers interviennent couramment en chimie dans les réactions chimiques, en biologie dans les réactions des enzymes et même en dynamique des populations qui a été traditionnellement un domaine de prédilection en biomathématiques.

Nous nous intéressons au modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f\,(u,v) & sur \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_3 \Delta u - d_4 \Delta v = g\,(u,v) & sur \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & sur \quad \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(.,0) = u_0(.), v(.,0) = v_0(.) & sur \quad \Omega \end{cases} \tag{SRD}$$

d_1, d_2, d_3, d_4 sont des constantes positives. f et g sont deux fonctions continûment différentiables.

Nous allons donner un panorama des résultats obtenus au cours de ces dernières années autour de la question d'existence globale des solutions pour des systèmes de réaction-diffusion satisfaisant à deux propriétés qu'on trouve classiquement dans beaucoup d'applications :

$$f(0,v) \geq 0, \quad g(u,0) \geq 0 \qquad \forall u,v \geq 0 \tag{P}$$

qui assure que le système (SRD) préserve la positivité.

La masse totale des composants est contrôlée au cours du temps $(M1)$. En particulier, cette classe correspond aux non-linéarités f et g satisfaisant la condition

$$f(u,v) + g(u,v) \leq 0, \forall u,v \geq 0 \tag{M2}$$

La condition $(M2)$ garantit que la masse totale des composants reste contrôlée, et on aura que la fonction

$$t \longrightarrow := M\,(t) = \int_\Omega u\,(x,t)\,dx + \int_\Omega v\,(x,t)\,dx$$

est non croissante. En effet, c'est une conséquence immédiate par l'intégration des équations différentielles du système (SRD) sur Ω et en prenant en compte les conditions aux bords.

La question est maintenant : Est-ce-que la condition $(M2)$ garantit l'existence globale des solutions du système donné ?

Dans le cas trivial où $d_2 = d_3 = d_1 - d_4 = 0;$ solutions existent non-négatifs à l'échelle globale dans le temps.

Dans le cas diagonal où $d_2 = d_3 = 0$ remarque que Alikakos [1] traite le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \triangle u = f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_4 \triangle v = g(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

avec les mêmes conditions aux limites de (SRD), où $f(u,v) = -g(u,v) = -uv^{\sigma}$ et a donné une réponse positive au problème de l'existence globale de ce système sous l'hypothèse $1 < \sigma < \sigma_0$ où $\sigma_0 = 1 + \frac{2}{n}$. La méthode utilisée dans [1] est basée sur certains théorèmes d'injection de Sobolev. Notez que l'exposant $1 < \sigma < 1 + \frac{2}{n}$ est exactement l'exposant critique donné dans chaque cas par Fujita [15] pour le problème parabolique

$$\begin{cases} u_t = \triangle u + u^{\sigma} \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) > 0 \end{cases}$$

Fujita a prouvé si $1 < \sigma < \sigma_0$ le problème ne possède aucune solution globale non-négative et si $\sigma > \sigma_0$ globales et non globales solutions non-négatives existent, selon la nature de l'énergie initiale. Hollis, Martin et Pierre [21] ont établi l'existence globale de solutions positives pour le système (SRD) avec les conditions aux limites

$$\lambda_1 u + (1-\lambda_1)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta_1, \lambda_2 v + (1-\lambda_2)\frac{\partial v}{\partial \eta} = \beta_2 \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

où

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1 \text{ où } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ et } \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$$

en vertu de la condition $f(r,s) + g(r,s) \leq C(r,s)(r+s+1); \forall r,s \geq 0, i = 1,...,p$

En [28] Masuda a obtenu un résultat d'existence globale pour une large classe du paramètre σ. En fait, à l'aide de quelques estimations L^p, il a montré que la solution du problème (SRD) existe dans le temps si $\sigma > 1$. Le même résultat [28] a été obtenu par Hollis et Pierre [21] en exploitant les arguments de dualité sur L^p, ce qui permet de dériver la boundeness uniforme de la solution. Haraux et Youkana [18] ont établi un résultat d'existence globale du système (SRD) pour une large classe de la fonction $f$et g. Plus précisément, ils ont montré que, pour $f(u,v) = -g(u,v) = -u\Phi(v)$ le problème (SRD) admet une solution globale, sous réserve que la condition suivante

$$\lim_{(v\to+\infty)} \frac{\log\left(1+\Phi\left(v\right)\right)}{v} = 0$$

Dans le cas général, c'est à dire pour $f(u,v) = -g(u,v)$ la positivité de la fonction de $g(u,v)$ ainsi que le principe du maximum de l'opérateur de la chaleur donne l'estimation suivante uniforme de la solution en $L^\infty(\Omega)$

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0(t)\|_\infty \forall t \in [0, T_{max}[$$

Où T_{max} est le temps maximal d'existence. Pour plus de détails, consultez Pazy [36]. Kouachi [26] a prouvé l'existence globale de la solution du problème (SRD) dans le temps si

$$\lim_{(v\to+\infty)} \frac{\log(1+f(u,v))}{v} < \frac{8\alpha\beta}{n(\alpha-\beta)^2\|u_0\|_\infty}$$

Moumeni et Salah Derradji [33] ont établi l'existence globale d'une solution basée sur la méthode fonctionnelle de Lyapunov et pour f et g satisfaisant la condition

$f\ (r,s) + g(r,s) \leq C(r+s+1)$.

Dans le cas où $d_1 = d_4$ et la condition de Balance $g(u,v) = -f(u,v)$, la réponse est oui. En effet, en ajoutant les deux équations du système (SRD) nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u+v\right) - d_1\Delta\left(u+v\right) = 0$$

ce qui donne par application du principe du maximum une $L^\infty(\Omega)$ estimation de u et de v puisque

$$\left\|\left(u+v\right)(t)\right\|_\infty \leq \|u_0+v_0\|_\infty$$

Dans le cas où $d_1 \neq d_4$, on va voir que l'existence globale sera assurée que lorsqu'on ajoute d'autres conditions. Notons que M.Pierre-D.Schmitt [37] par des des contreexemples ont montré que sous la condition $(M2)$ la solution peut exploser en temps fini. Une attention particulière est à porter au cas où

$$f(u,v) \leq 0 \leq g(u,v)$$

dans ce cas, le principe du maximum nous donne l'estimation à priori

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty}, \forall t \in [0, T_{max}[$$

T_{max} désigne le temps de l'existence maximal. Le problème est donc réduit à obtenir une estimation uniforme de v. Mais, et c'est là la difficulté car une telle estimation n'est pas du tout évidente sauf bien sur dans le cas où $d_1 = d_4$

Dans le cas où $d_1 > d_4$ (c'est le cas où la substance absorbée diffuse plus rapidement que l'autre substance), une réponse positive est donnée par Martin et Pierre [27] pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, et le même résultat est obtenu par Kanel et Kirane [22] pour Ω un borné de $\mathbb{R}^n$.

Toujours dans le cas $f \leq 0$, mais sans supposer que $d_1 > d_4$, la réponse d'après Hollis-Martin-Pierre [21] est encore positive sous la condition

$$g(u,v) \leq C(u+v+1)^{\gamma} \quad \text{pour tout } u, v \geq 0 \text{ et } \gamma \geq 1$$

où les auteurs ont montré que sous la condition $(M2)$, v est contrôlée par u dans L^p pour tout p fini.

Si f et g n'ont pas de signe constant, il est encore possible de montrer l'existence globale si les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\lambda f(u,v) + g(u,v) \leq 0, \forall u, v \geq 0 \; et \; \lambda \text{ suffisammet grand}$$

et

$$f(u,v), g(u,v) \leq C(u+v+1)^{\gamma} \text{ pour tout } u, v \geq 0 \text{ et } \gamma \geq 1$$

Voir Kouachi [25].

Pour des résultats antérieurs voir [1], [2] (basé sur l'itération de Moser), [29] (basé sur la méthode de Bootstrap) et [20] (basé sur la fonctionnelle de Lyapunov).

D'une autre part, des résultats d'existence globale sont obtenus pour f et g satisfaisant certaines conditions de croissance exponentielle. Voir [12], [3] (en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov), et [14], [17] (en utilisant les estimations).

Dans le cas triangulaire où $d_3 > 0$ et $d_2 = 0$, Moumeni et Salah Derradji [34] ont établi l'existence d'une solution globale du problème (SRD) en utilisant la méthode de Lyapunov combinée avec des L^p estimations. Sur la même direction, Moumeni et Barrouk [32] traite le même problème par une autre méthode . Pour $d_3 > 0$ et $d_2 > 0$, J. I. Kanel et M. Kirane [22] ont prouvé l'existence de solutions pour un système de réaction-diffusion fortement couplé avec des conditions aux limites homogènes de Neumann et

$$f(u, v) = -g(u, v) = uv^m, m > 0$$

m est un entier impair, plus tard ils ont amélioré leurs résultats dans [13] où ils ont obtenu l'existence globale avec

$$f(u, v) = -g(u, v) = uF(v)$$

Dans le cas pleine, S. Kouachi [23] a prouvé l'existence globale de problème (SRD) avec des conditions aux limites non homogènes et des conditions de croissance polynômes sur les termes non-linéaires et il a obtenu dans [24] l'existence de solutions pour le même système avec des conditions aux limites de Neumann homogènes et

$$g(u, v) = \rho F(u, v), f(u, v) = -\sigma F(u, v), \rho > 0, \sigma > 0$$

B. Rebiai et S. Benachour [38] traitent le même cas avec des conditions aux limites homogènes avec des non-linéarités de la croissance des exponentiel. Enfin K. Boukerrioua [9] généralise un résultat obtenu dans [33].

Dans le présent travail, nous considérons le problème (SRD) avec $d_2 > 0$ et $d_3 > 0$, où la fonction f et g sont supposées satisfaire à la condition (M2), et en adoptant la méthode de Lyapunov combinée à une certaine L^p estime que nous établissons un résultat d'existence globale de la solution.

Dans la partie centrale de cette thèse, nous allons étendre ces résultats à des non-linéarités plus générales, en d'autres termes, nous allons montrer l'existence d'une solution globale (u, v) pour le système (SRD) sous des conditions encore plus faibles sur f et g par l'effet de régularisant suivant :

Si $F(u(x,t)) \in L^{\infty}(0, T_{max}, L^{q}(\Omega))$ alors la solution est globale dés que $n, q \in \mathbb{N}$ tels que $q > \frac{n}{2}$. Ce qui revient donc à montrer que

$$\sup_{\substack{0<t<T_{\max} \\ x\in\Omega}} \left\| F\left(u\left(x,t\right)\right)\right\|_{L^{q}(\Omega)} < +\infty$$

L'objet de cette thèse est l'étude du système de Réaction-Diffusion (SRD), plus particulièrement nous étudions l'existence locale et globale ainsi que le comportement asymptotique de la solution du (SRD).

Notre thèse est divisée en six chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats et théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui sont fondamentaux pour notre travail.

Le deuxième chapitre sera consacré à la modélisation des systèmes de réaction-diffusion en utilisant la loi de comportement de Fick, et nous allons traiter quelques exemples faisant ressortir leur rôle essentiel dans les sciences.

Au cours du troisième chapitre, toutes les notions nécessaires inhérentes à la théorie des opérateurs m-dissipatifs et à celle des semi-groupes seront données. Ensuite, nous nous attacherons à l'étude des problèmes d'évolution semi-linéaires où nous allons aborder quelques questions, parmi lesquelles l'existence locale des solutions, l'existence globale ou l'éventuelle explosion en temps fini, etc. Puis, nous allons donner quelques résultats généraux sur l'existence globale de la solution pour des systèmes de réaction-diffusion à m équations.

Le résultat le plus important est présenté au quatrième chapitre où, en faisant appel à la fonctionnelle de Lyapunov nous démontrons que la solution du système (SRD) est en fait globale. (Publié dans la revue : **Global Journal of Mathematical Analysis Volume 3, Number 3 (2015) , pp.109-120** sous le titre "**Global solution of reaction diffusion system with full matrix**".

Dans le cinquième chapitre, nous nous intéressons à ce chapitre où, il contient l'étude d'un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion pleine via un résultat de compacité. L'étude concerne l'existence locale et globale. (Publié dans la revue : **Global Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 12, Number 6 (2016), pp.**

4913–4928 sous le titre " **Global existence solution of reaction diffusion system with full matrix via the compactness"**

Enfin, nous énonçons un résultat de comportement asymptotique. (Publié dans la revue : **Global Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 12 Number 3 (2016), pp. 2175–2194** et intitulé " **Behavior asymptotic solution of reaction diffusion system with full matrix**"

CHAPITRE 1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques propriétés d'analyse fonctionnelle qui seront constamment utilisées dans cette thèse.

1.1 Espaces de Sobolev

Soit p un entier naturel et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

$L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Banach des fonctions mesurables (au sens de Lebesgue) sur Ω, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

On pose

$$W^{m,\,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega)\,,\ \forall\alpha, \quad \text{avec } |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

alors, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|.\|_{m,p}$définie par

$$\|f\|_{m\,,\,p} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_p)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in W^{m\,,\,p}(\Omega)$$

On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

Lorsque $p = 2$, on notera de préférence

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) \text{ et } W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$

Sur $H^m(\Omega)$ on utilisera plutôt la norme équivalente

$$|f|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui fait de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f . D^\alpha g dx$$

En particulier, pour $m = 1$ on a

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_\Omega f . g dx + \int_\Omega \nabla f . \nabla g dx$$

Lorsque Ω est borné, on sait qu'il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 \leq C(\Omega). \|\nabla u\|_2$$

Il sera alors parfois commode de munir l'espace $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle_{1,0} = \int_\Omega \nabla f . \nabla g dx$$

qui induit une norme équivalente à la norme $|.|_1$ sur le sous espace fermé $H_0^1(\Omega)$.

1.2 Inégalités fondamentales

Lemme 1.2.1 *(Inégalité de Young)*

pour $1 < p, q < \infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a,\, b > 0$ on a l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Preuve. voir H. Brezis[10] ■

Lemme 1.2.2 *(Inégalité de Hôlder)*

pour $1 < p, q < \infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et pour f, g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$ on a l'inégalité

$$\int_{\Omega} \left|(f.g)(x)\right| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve. voir H. Brezis[10] ■

Lemme 1.2.3 *(Inégalité de Gronwall)*

Soit $T > 0, \curlywedge \in L^1([0, T[)$ vérifiant $\curlywedge \geq 0$ $p.p$ et c_1, c_2 deux constantes positives. Soit $\Phi \in L^1([0, T[), \Phi \geq 0$ telle que $\curlywedge\Phi \in L^1([0, T[)$ et

$$\Phi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \curlywedge(s)\,\Phi(s)\,ds, \text{ pour presque tout } t \in [0, T[$$

alors

$$\Phi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^t \curlywedge(s)\,ds\right)$$

Preuve. On pose

$$\Psi(t) = c_1 + c_2 \int_0^t \curlywedge(s)\,\Phi(s)\,ds, \quad \text{pour } t \in [0, T[$$

Ψ est dérivable presque partout (car absolument continue), et on a

$$\Psi'(t) \leq c_2 \curlywedge(t)\,\Phi(t) \quad p.p \text{ sur } [0, T[$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\left\{\Psi(t)\exp\left(-\int_0^t c_2 \curlywedge(s)\,ds\right)\right\} \leq 0$$

et donc

$$\Psi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2\int_0^t \curlywedge(s)\,ds\right) \quad \text{pour presque tout } t \in [0,T[$$

d'où le résultat, puisque $\Phi \leq \Psi$ *p.p.*

En particulier, si $c_1 = 0$ alors $\Phi = 0$ *p.p.*

Ce résultat est très utile dans l'étude des problèmes semi-linéaires, aussi bien pour montrer l'unicité des solutions que pour établir des propriétés de bornage. ■

1.3 Formule de Green

On se donne Ω un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ la normale extérieure au point x. Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$

Alors la formule de Green s'écrit

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

1.4 Formes quadratiques

Soit V un espace vectoriel sur le corps K. Une application $Q : V \longrightarrow K$ est appelée forme quadratique sur V s'il existe une forme bilinéaire symétrique $B : V \times V \longrightarrow K$ telle que

$$\forall u \in V, Q(u) = B(u,u)$$

B est alors unique et appelée la forme bilinéaire associée. En effet, si u, v sont deux vecteurs de V,

$$Q(u+v) = Q(u) + 2B(u,v) + Q(v)$$

Donc l'expression nécéssaire de la forme bilinéaire symétrique B en fonction de Q est

$$B(u,v) = \frac{1}{2}\left[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\right]$$

1.5 Quelques outils abstraits

Les résultats généraux ci-dessous sont très importants pour l'étude théorique des équations aux dérivées partielles.

Théorème 1.5.1 *(Théorème de la divergence)*

Ce théorème énonce que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. L'expression du théorème est la suivante:

$$\int_V divF.dV = \int_\Sigma F.dS$$

Où V est un volume et $\Sigma = \partial F$ (la frontière de F), dS est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur, div F est aussi notée $\nabla.F$.

Théorème 1.5.2 *(Théorème du point fixe de Banach)*

Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application telle qu'il existe $k \in [0,1[$ vérifiant $d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$ pour tout $(x,y) \in X \times X$: Alors il existe un unique point x_0 de X tel que $f(x_0) = x_0$.

Preuve. voir H. Brezis[10] ■

Théorème 1.5.3 *(Convergence dominée de Lebesgue)*

Soit (f_n) une suite d'éléments de $L^1(\Omega)$ vérifiant :

1) $(f_n(x))$ converge presque par tout.

2) Il existe $g \in L^1(\Omega)$ positive telle que

$$\forall n \geq 1 : |f_n(x)| \leq g(x) \ p.p$$

Alors, il existe $f \in L^1(\Omega)$ telle que

1) $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ p.p

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$, et de même $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$

Preuve. voir H. Brezis[10] ■

CHAPITRE 2

Les origines des systèmes de réaction-diffusion

2.1 Introduction

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles, paraboliques, donnés sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right)-D\Delta u(x,t)=F\left(u\left(x,t\right)\right)\qquad x\in\Omega,t\geq0\qquad(R.D)$$

Ces systèmes servent de modèles dans de nombreux domaines en constituant un excellent laboratoire théorique pour la compréhension de certains processus naturels.

Ici le temps t varie dans un intervalle $[0,T]$, x dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, l'inconnue u est une fonction définie sur $\Omega\times[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, qui dans les applications correspond à un m-vecteurs de concentrations d'espèces chimiques, de températures, de densités de populations, etc. D est une $m\times m$ matrice qui sera le plus souvent diagonale, Δ désigne le laplacien et $F:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ est une fonction non- linéaire modélisant les phénomènes de réaction mis en jeu. (Réaction chimique par exemple).

2.2 Exemples de réaction-diffusion

Des systèmes de la forme (R.D) apparaissent naturellement dans de nombreuses situations. Voici quelques modèles :

2.2.1 Modèles simples

L'équation de réaction-diffusion la plus simple, ne portant que sur la concentration u d'une seule dimension de l'espace $\dfrac{\partial u}{\partial t} - d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u)$ est aussi appelée équation K.P.P (Kolmogorov-Pertrovsky-Piskunov). Si le terme en $f(u)$ (qui représente le facteur de réaction chimique dans le processus) vient de s'annuler, l'équation modélise une simple diffusion. L'équation correspondante est alors l'équation de la chaleur.

Si $f(u) = u(1-u)$, on obtient l'équation qui a été introduite à la fin des années 30 par Fisher [14] comme modèle de génétique des populations, et avec $f(u) = u(1-u)(u-\alpha)$ et $0 < \alpha < 1$, on obtient l'équation de Zeldovich qui est employée dans la théorie de la combustion. L'inconnue u représente une densité de gêne dominant dans le premier cas et la température en combustion.

2.2.2 Modèles plus évolués

Un modèle génétique

On considère une population d'individus "diploïdes", c'est-à-dire chez qui l'information génétique est dédoublée. On suppose qu'un certain gène sur une certaine paire de chromosomes se présente sous deux formes possibles, ou allèles, que l'on notera a et A. La population se subdivise alors en individus "homozygotes" de type aa ou AA, et "hétérozygotes" de type aA.

Notons $\rho_1(x,t), \rho_2(x,t), \rho_3(x,t)$ la densité d'individus de type aa, aA, AA respectivement, au point x et à l'instant t. Supposons que les individus constituant la population se reproduisent avec un taux r (indépendant du génotype), et se déplacent aléatoirement dans l'espace suivant un mouvement brownien de constante d (également indépendante du génotype). On suppose en revanche que les taux de décès τ_1, τ_2, τ_3 des trois populations peuvent légèrement différer. Alors les densités ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - d\triangle\rho_1 = -\tau_1\rho_1 + \frac{r}{\rho}\left(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2\right)^2 \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - d\triangle\rho_2 = -\tau_2\rho_2 + \frac{2r}{\rho}\left(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2\right)\left(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2\right) \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial t} - d\triangle\rho_3 = -\tau_3\rho_3 + \frac{r}{\rho}\left(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2\right)^2 \end{cases}$$

où $\rho(x,t) = \rho_1(x,t) + \rho_2(x,t) + \rho_3(x,t)$

Modèles en dynamique des populations :

a) Un modèle prédateur-proie

Dans la première moitié du XXe siècle, l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction connut un essor considérable. C'est à cette époque là appelée l'âge d'or de l'écologie théorique que furent développés les premiers modèles basés sur des comportements de type compétition et des relations prédateur-proie. V. Volterra a étudié la coexistence de deux espèces dont l'une dévore l'autre.

Considérant deux espèces, la première, la proie $u(x,t)$, aurait si elle était seule une croissance exponentielle. La seconde, le prédateur $v(x,t)$, se nourrit exclusivement de la première et en l'absence de proie s'épuiserait progressivement et disparaîtrait. La mise en équation de la fonction représentant la prédation est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborées par Volterra. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre ces deux espèces est proportionnel au nombre des individus qui la compose. Le coefficient de proportionnalité étant égal à la probabilité de rencontre. La seconde consiste à supposer qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres, i.e., que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur. De plus, Volterra considère comme immédiat cet accroissement. Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_u \triangle u = au - buv & sur\ [0,+\infty[\times\Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_v \triangle v = -cu + duv & sur\ [0,+\infty[\times\Omega \end{cases}$$

où a représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur, b le taux de prédation du prédateur sur la proie, c le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie et d le taux croissance du prédateur du fait de sa prédation et d_u, d_v sont les constantes de diffusion de proie prédateur respectivement.

b) Un modèle prédateur-compétiteur-proie

On considère un système d'un prédateur et deux populations de proies du type prédateur-compétiteur (proie introduite) proie indigène. Les densités de populations sont notées respectivement B, R et C pour les proies, compétiteurs et prédateurs. Le modèle mathématique associé est le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} - d_b \triangle B = r_b B \left(1 - \frac{B}{K_b}\right) - \eta BR - \frac{\alpha B}{\alpha B + R} \mu_b C & sur\ [0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial R}{\partial t} - d_r \triangle R = r_r R \left(1 - K_r\right) - \frac{R}{\alpha B + R} \mu_r C & sur\ [0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial C}{\partial t} - d_c \triangle C = r_r R \left(1 - \mu_r \mu_b \frac{C}{\mu_r B + \mu_b R}\right) & sur\ [0, +\infty[\times \Omega \end{cases}$$

où r_r, r_b, k_r k_b, μ_r et μ_b les taux de croissance, capacités d'accueil du milieu et les taux de prédation respectifs pour les populations de proies introduites et natives, α le coefficient de préférence des prédateurs, η la compétition asymétrique entre proies natives et introduites (i.e. pression unilatérale des proies introduites sur les proies natives), et d_b, d_r, d_c sont les constantes de diffusion des proies, compétiteurs et prédateurs, respectivement.

Un modèle chimique

Soient A et B des substances chimiques qui réagissent suivant la loi $A + B \rightarrow 2B + R$. On note a, resp b, la concentration de A, resp B.

Si on a un melange parfait de A et B les concentrations vérifient le système différentiel ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = -ab \\ \frac{\partial b}{\partial t} = ab \end{cases}$$

Si A et B n'ont pas été mélanges et si on veut modéliser leur diffusion, on obtient le modèle de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = D_1 \triangle a - ab \\ \frac{\partial b}{\partial t} = D_2 \triangle b + ab \end{cases}$$

Un modèle en combustion

On décrit la combustion d'un milieu gazeux par une réaction chimique exothermique de la forme $R \longrightarrow P$, où R est le réactant (mélange gazeux) et P le produit de la réaction (substance inerte). On note $Y(x, t)$ la densité du réactant au point x à l'instant t et $T(x, t)$

la température du mélange. Alors sous différentes approximations (densité, convection négligeable,...) on obtient le système thermo-diffusif

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = K\Delta T + YF(T) \\ \frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{K}{Le}\Delta Y - YF(T) \end{cases}$$

où le nombre de Lewis, noté Le, est le rapport des constantes de diffusion. La non-linéarité F de type "Arrhenius" :

$$F(T) = P(T)\exp\left(\frac{-E}{RT}\right)$$

où P est un polynôme en T, R est la constante des gaz parfaits, et E est une énergie d'activation, si $Le = 1$ et si $T + Y = 1$, ont ramené à l'équation scalaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\Delta T - (1 - T)F(T).$$

La fonction $f(T) = F(T)(1 - T)$ s'annulant très vite lorsque $T \longrightarrow 0$, on l'approche souvent par une fonction identiquement nulle sur un petit intervalle $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ et la "température d'ignition".

Un modèle en physique nucléaire

Le modèle décrivant une réaction nucléaire est décrit par le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \triangle u + u(av - b) & sur\ [0, +\infty[\\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \triangle vv + cv & sur\ [0, +\infty[\end{cases}$$

avec conditions aux bords homogènes de Neumann et conditions initiales positives. On montre que (Voir Pao), pour $a > 0, b \geq 0$ et $c > 0$, la solution de ce système avec conditions aux bords bien choisies et conditions initiales positives explose en temps fini. Cette réaction est analogue à celle de deux enzymes avec les conditions aux bords et conditions initiales positives.

$$\begin{cases} u_x\,(0,t) = ag_1(v(0,t)) \\ u_x(1,t) = 0 \\ v_x(0,t) = 0 \\ v_x(1,t) = ag_2(u(1,t)) \end{cases}$$

2.3 Modélisation

Les équations de réaction-diffusion ont été proposées par A. Turing (1952) pour la modélisation des phénomènes de morphogènes, c'est à dire le développement des formes.

Dans cette section, nous allons présenter les étapes à suivre pour établir le système $(R.D)$. Pour clarifier les idées, notons que pour modéliser un phénomène, on doit simplifier plusieurs termes et négliger d'autres facteurs rentrant dans les réactions, dans le but d'une obtention des équations simples et faciles à étudier.

2.3.1 Réaction et Diffusion

a) La réaction

Une réaction est une transformation de la matière au cours de laquelle les espèces chimiques (atomiques, ioniques ou moléculaires) qui constituent la matière sont modifiées les espèces qui sont consommées sont appelées **réactifs.** Les espèces formées au cours de la réaction sont appelées produits de réaction. Depuis les travaux de **Lavoisier** (1777), les scientifiques savent que la réaction chimique se fait sans variation mesurable de la masse : «Rien ne perd, rien ne se crée, tout se transforme» qui traduit la conversation de la masse.

b)La diffusion

La diffusion est un phénomène par le quel deux ou plusieurs substances en contact acquièrent une répartition et de propriétés homogènes. Diffusion des gaz, des solutions, diffusion thermique, coefficient de diffusion. De rapides courants entraînaient tous ces gaz en diffusion, et les torrents laviques glissaient jusqu'au bas de la montagne, est appelé de manière générale "migration". La diffusion est donc la migration sous une certaine agitation (thermique par exemple), par exemple lorsque l'extrémité d'une barre est chauffée, la chaleur se diffuse de la partie chauffée vers la partie froide de la barre.

La diffusion de matière est en générale encore plus lente, lorsque l'on place un morceau de sucre au fond d'une tasse contenant de l'eau, le sucre se dissout et se diffuse lentement dans l'eau, mais si l'eau n'est pas agitée, il faudra peut-être plusieurs semaines avant d'atteindre l'homogénéité.

La diffusion de la lumière. Dissémination ou changement de direction des rayons lumineux produit par passage à travers certains milieux. Diffusion par diffraction, par réflexion. La couleur bleue du ciel est due à la diffusion de la lumière solaire par les gaz de l'atmosphère.

La diffusion désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces en son sein.

Le déplacement des atomes, ions ou molécules dans un milieu, que celui-ci soit solide, liquide ou gazeux, est appelé de manière générale " migration".

Lorsqu'un atome se déplace parmi des atomes de même nature, on parle d'autodiffusion.

En parlera d'autodiffusion du fer pour désigner la migration d'un atome de fer dans un cristal de fer.

Lorsque l'on a deux milieux homogènes différents que l'on met en contact, on parle d'inter diffusion.

2.3.2 Lois de Fick

Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que **le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration.**

Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Elle peut être vue comme une définition de la vectrice densité du courant J_i . Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

Soit B un milieu dans lequel se trouve une espèce chimique A, et soit une surface S. On note $C_A(x, y, z, t)$ la concentration de A en un point donné. On appelle J_A la vectrice densité de courant des particules de A. La première loi de Fick s'écrit :

$$J_A = -D_{AB}.\nabla C_A$$

D_{AB} est le coefficient de diffusion de A dans le milieu B; il dépend de la température du milieu et de A.

Seconde loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i : $\iiint C_i.dV$ dans un volume donné V est égale au flux sortant : $\iint J_i.dS$ de la vectrice densité de courant J_i de particules i à travers la surface fermée S délimitant le volume V.

On obtient la deuxième loi de Fick en identifiant les intégrants ci-dessous :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V C_i.dV = \iint_S J_i.dS = \iiint_V \nabla.J_i.dV$$

La deuxième égalité ci-dessus est due au théorème de la divergence, dit de "Green-Ostrogradsky", et le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente.

On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla.J_i = 0$$

à une dimension, l'équation devient :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial x}$$

2.3.3 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion

Considérons une région bornée Ω de $\mathbb{R}^n(n = 1, 2, 3)$ dans laquelle des réactions se réalisent. Ω peut être des molécules ou une surface géographique qui forme les lieux des milliers de virus, d'épidémies ou même des rumeurs circulant entre les individus des populations. Ω peut être aussi une cellule vivante qui est le siège de plusieurs réactions chimiques.

Nous avons besoin du principe suivant :

La vitesse de formation de la $i^{ème}$ espèce dans un volume ω est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers la surface S. Soit alors J_i le flux de ces espèces à travers la frontière et soient $u_i\ (x, t)$ la concentration de la $i^{ème}$ espèce prenant part dans une réaction et $f_i((u_1, u_2, ..., u_m), x, t)$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$.

Considérons alors un volume ω infiniment petit de Ω de frontière $S = \partial\omega$. En terme d'équations, le principe précédent se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega u_i\,(x,t)\,dx = \int_\omega f_i((u_1, u_2, ..., u_m), x, t)dx - \int_s J_i d\sigma$$

Par application directe du théorème de la divergence, on obtient

$$\int_s J_i d\sigma = \int_\omega \nabla.J_i dx, i = 1, ..., n$$

Ceci implique

$$\int_\omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla J_i - f_i\right) dx = 0, i = 1, ..., n$$

Puisque ω est infiniment petit et arbitraire, le théorème de l'intégrale nulle nous assure que

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla J_i - f_i = 0 \text{ dans } \Omega, i = 1, ..., n$$

Le phénomène de la diffusion est régi par la loi de Fick, D'après cette loi J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces et donné par :

$$J_i = -\sum_{j=1}^{m} a_{i\,j} \nabla u_j, i = 1, ..., m$$

où les $a_{i\,j}$ sont les coefficients d'autodiffusion, $A := (a_{i\,j})_{1 \leq i,\, j \leq n}$ est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion. De ce qui précède, on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f(u)$$

et par un changement de variable, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, ..., d_m)$ avec $d_i > 0, \forall i = 1, ..., m$: (le cas où l'écoulement de la matière se fait des milieux les plus concentrés vers les moins concentrés). D'où on retrouve finalement le système

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) - D\Delta v(x,t) = F(v(x,t)) \qquad x \in \Omega, t \geq 0 \qquad (R.D)$$

Le système $(R.D)$ s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords selon l'origine et la nature du problème étudié. S'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière de Ω sur lequel le problème est posé, nous choisissons les conditions aux bords de Neumann. Et s'il n'y a pas d'individus sur la frontière, nous prenons les conditions aux bords homogènes de Dirichlet.

CHAPITRE 3

Problèmes d'évolution semi-linéaires

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques résultats concernant les propriétés locales (existence, unicité) des solutions de problèmes d'évolution semi-linéaires. Il apparaîtra clairement que les solutions sont soit explosives en temps fini, soit au contraire uniformément bornées pour $t \geq 0$.

Les équations d'évolution sont des équations qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X) \\ \dfrac{du}{dt} - Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{PSL}$$

où $u = u(x,t)$, $A : X \to X$ est un opérateur d'un espace de Banach X dans X, u_0 la donnée initiale et F une application dans X.

Comparativement avec les équations différentielles ordinaires, il est tout à fait raisonnable d'envisager l'existence et l'unicité de la solution du problème précédent à partir des propriétés de l'opérateur A.

3.1 Notation et définition

Dans toute la suite, X est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et X^* son dual de norme $\|.\|_{X^*}$ et $P(X)$ l'ensemble des parties de X. On appelle opérateur multivoque de X toute application A de X dans $P(X)$. On note par :

$D(A) = \{x \in X; Ax \neq \varnothing\}$ le domaine de définition de A.

$R(A) = \bigcup\limits_{x \in X} Ax = \bigcup\limits_{x \in D(A)} Ax$ l'image de A.

$G(A) = \{(x, y) \in X \times X; x \in X; y \in Ax\}$ le graphe de A.

$(x, y) \in A$ signifie que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Si pour tout $x \in X$, Ax contient au plus un élément, on dit que A est opérateur univoque de X. (on retombe alors sur la théorie classique des opérateurs). Un opérateur univoque de X est complètement déterminé par la donnée de son graphe .

Définition 3.1.1 *On rappelle que si A est un opérateur linéaire pas nécéssairement borné dans X, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - A$ est inversible; i.e. $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire dans X. La famille $J_\lambda(A) = (\lambda - I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ des opérateurs linéaires bornés, est appelée la résolvante de A.*

Définition 3.1.2 *Un opérateur linéaire dans X est un couple $(A, D(A))$, où $D(A)$ est un sous espace vectoriel de X, et $A : D(A) \longrightarrow X$ est une application linéaire. On dit que A est borné si $\|Au\|$ reste bornée lorsque $u \in \{x \in D(A), \|x\| \leq 1\}$. Dans le cas contraire, A est dit non borné.*

3.2 Opérateurs m-dissipatifs

Dans tout ce qui suit, on considère les opérateurs univoques comme étant les seuls éléments de notre travail.

Définition 3.2.1 *Un opérateur A dans X est dit dissipatif si on a*

$$\forall u_1, u_2 \in D(A), \forall \lambda > 0, \|u_1 - u_2 - \lambda (Au_1 - Au_2)\| \geq \|u_1 - u_2\|$$

Remarque 3.2.1 *Un opérateur linéaire A dans X est dit dissipatif si on a*

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, \|u - \lambda Au\| \geq \|u\|$$

Définition 3.2.2 *Un opérateur A dans X est dit m-dissipatif si*

$$\begin{cases} A \text{ est dissipatif} \\ \forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists u \in D(A) : u - \lambda Au = f \end{cases}$$

Remarque 3.2.2 *Si A est un opérateur linéaire m-dissipatif dans X, il est immédiat, que pour tout $f \in X$ et tout $\lambda > 0$, l'équation $u - \lambda Au = f$ possède une unique solution qui vérifie $\|u\| \leq \|f\|$.*

Définition 3.2.3 *Soit A un opérateur m-dissipatif dans X et $\lambda > 0$. Pour tout $f \in X$, on note $J_\lambda f$ la solution u de l'équation $u - \lambda Au = f$.*

Proposition 3.2.1 *Soit A est un opérateur (linéaire) dissipatif dans X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A est m-dissipatif dans X.

ii) il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, il existe $u \in D(A) : u - \lambda_0 Au = f$.

Preuve. Il est immédiat que $(i) \Longrightarrow (ii)$

Montrons que $(ii) \Longrightarrow (i)$

Soit $\lambda > 0$ on remarque que l'équation $u - \lambda\ Au = f$ est équivalente à

$$u - \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

or, puisque A est dissipatif et $R(I - \lambda_0 A) = X$, on peut définir comme dans la définition (3.2.3) l'opérateur $J_{\lambda_0} = (I - \lambda_0 A)^{-1}$ qui est une contraction sur X. L'équation précédente est alors équivalente à

$$u = J_{\lambda_0} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right]$$

Lorsque $2\lambda > \lambda_0$, cette équation s'écrit $u = F(u)$, où F est une application Lipschitzienne sur X, de rapport $K = \left|1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\right| < 1$. En appliquant le théorème (point) fixe, on peut donc résoudre l'équation $u - \lambda Au = f$, pour tout $\lambda \in \left]\frac{\lambda_0}{2}, +\infty\right[$. En itérant ce procédé, on résout l'équatioon pour tout $\lambda \in \left]\frac{\lambda_0}{2^n}, +\infty\right[$, $n \in IN$ et donc pour tout $\lambda > 0$. ■

Définition 3.2.4 *Un opérateur A est dit accrétif si l'opérateur $(-A)$ est dissipatif et il est dit m-accrétif si l'opérateur $(-A)$ est m-dissipatif.*

3.3 Produit semi-intérieur. Application de dualité

Définition 3.3.1 *Pour tout u et v dans X, on définit le produit semi-interieur noté $[u, v]$ par*

$$[u, v] = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$$

Propriétés du produit semi-intérieur

1.$[u, v] = \inf\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \dfrac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$

2. $[u, \lambda v] = \lambda [u, v]$

3.$[u, v + v'] \leq [u, v] + [u, v']$

4. $[u, \alpha u + v] = \alpha \, |u| + [u, v]$

Preuve. Voir A. Moumeni [31] ■

Définition 3.3.2 *Soit $x \in X$, on pose :*

$$J\,(x) := \left\{ w \in X^*; \langle w, x \rangle_{X^* \times X} = \|x\| \quad \text{et} \quad \|w\|_{X^*} \leq 1 \right\}$$

J est une application de X dans X^*, partout définie d'après le théorème de Banach dite application duale normalisée.

Proposition 3.3.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. A est accrétif.

2. $\forall u_1, u_2 \in D(A) : \exists w \in J(u_1 - u_2)$ tel que $\langle w, Au_1 - Au_2 \rangle \geq 0$

3. $\forall u_1, u_2 \in D(A) : [u_1 - u_2, Au_1 - Au_2] \geq 0$

4. $\forall \curlywedge > 0; (I + \curlywedge A)^{-1}$ défini de $R(I + \curlywedge A)$ dans X est une contraction.

Preuve. Voir A. Moumeni [31] ■

Dans la suite, on désignera par $[.,.]_p$ le produit semi-intérieur et par $J_p\,(.)$ l'application duale normalisée dans $L^P(\Omega)$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.3.2

1) Si $p = 1$ alors pour tout u, v *dans* $L^1(\Omega)$; on a

$$[u, v]_1 = \int\limits_{\{x, u(x) \neq 0\}} sign_0\,(u\,(x))\,.v\,(x)\,dx + \int\limits_{\{x, u(x) = 0\}} |v\,(x)|\,dx$$

et

$$J_1\,(u) = \{w \in L^\infty\,(\Omega) : w\,(x) \in sign_0\,(u\,(x)) \quad p.p\}$$

2) Si $1 < p < \infty$, on a pour tout u, v dans $L^p(\Omega)$

$$[u, v]_p = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \int_\Omega sign_0\,(u\,(x))\,.\,|u\,(x)|^{p-1}\,v\,(x)\,dx$$

et

$$J_p\,(u) = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} sign_0 u\,(x)\,.\,|u\,(x)|^{p-1}$$

La fonction $sign_0$ est définie par

$$sign_0 r \begin{cases} 1 \text{ si } r > 0 \\ 0 \text{ si } r = 0 \\ -1 \text{ si } r < 0 \end{cases}$$

Preuve. 1) Si $p = 1$, on a

$$[u, v]_1 = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|u + \lambda v\|_1 - \|u\|_1}{\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\int_\Omega |u(x) + \lambda v(x)|\, dx - \int_\Omega |u(x)|\, dx}{\lambda}$$

Lorsqu'on fait tendre λ vers 0, on aura

$$\frac{|u(x) + \lambda v(x)|\, dx - |u(x)|\, dx}{\lambda} = \begin{cases} v(x) & \text{si } u(x) > 0 \\ |v(x)| & \text{si } u(x) = 0 \\ -v(x) & \text{si } u(x) < 0 \end{cases}$$

ainsi

$$[u, v]_1 = \int\limits_{\{x, u(x) \neq 0\}} sign_0(u(x)) . v(x)\, dx + \int\limits_{\{x, u(x) = 0\}} |v(x)|\, dx$$

Cherchons maintenant l'ensemble $J_1(u)$ qui est donné par

$$J_1(u) = \{w \in L^\infty(\Omega); \langle w, u \rangle = \|u\|_1 \quad \text{et} \quad \|w\|_\infty \leq 1\}$$

Soit alors $w \in J_1(u)$, on a donc

$$\int_\Omega w(x)\, u(x)\, dx = \int_\Omega |u(x)|\, dx$$

ce qui donne

$$\int_\Omega w(x)\, u(x)\, dx - \int_\Omega |u(x)|\, dx = 0$$

ainsi

$$\int_\Omega (sign_0(u(x)) . w(x) - 1)\, |u(x)|\, dx = 0$$

on peut donc conclure que

$$sign_0(u(x)).w(x) = 1 \quad p.p$$

d'où finalement

$$w(x) \in sign_0(u(x)) \quad p.p$$

2) si $1 < p < \infty$, on a

$$[u,v]_p = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|u+\lambda v\|_p - \|u\|_p}{\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\left(\int_\Omega |u(x)+\lambda v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\lambda}$$

on définit maintenant les deux fonctions f et g comme suit

$f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$, qui à chaque λ associe $f(\lambda)$ donnée par

$$f(\lambda) = \int_\Omega |u(x)+\lambda v(x)|^p \, dx$$

et $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, qui à chaque λ associe $g(\lambda)$ donnée par

$$g(\lambda) = (f(\lambda))^{\frac{1}{p}}$$

donc $[u,v]_p$ devient

$$[u,v]_p = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{g(\lambda)-g(0)}{\lambda} = g'_d(0)$$

où $g'_d(0)$ est la dérivé de g à droite du point 0. Or

$$g'(\lambda) = \frac{1}{p}(f(\lambda))^{\frac{1}{p}-1} f'(\lambda)$$

donc la continuité de f et f' au point 0 donne que

$$g'(0) = \frac{1}{p}(f(0))^{\frac{1}{p}-1} f'(0)$$

en utilisant le fait que

$$f'(0) = p\int_\Omega sign_0(u(x))\,|u(x)|^{p-1} v(x)\, dx$$

et que

$$(f(0))^{\frac{1}{p}-1} = (\|u\|^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

on déduit que

$$[u,v]_p = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \int_\Omega sign_0(u(x)) \,.\, |u(x)|^{p-1} v(x)\, dx$$

et l'ensemble $J_p(u)$ défini par

$$J_p(u) = \left\{ w \in L^q(\Omega) \, ; \langle w, u \rangle = \|u\|_p \quad \text{et} \quad \|w\|_q \leq 1 \right\}$$

est constitué d'un seul élément donné par

$$J_p(u) = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} sign_0 u(x) \, . \, |u(x)|^{p-1} \in L^q(\Omega)$$

■

3.4 Le Laplacien dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Proposition 3.4.1 *Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, et posons $X = L^1(\Omega)$, on définit l'opérateur A_1 sur l'ensemble*

$$D(A_1) = \left\{ u \in L^1(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \right\}$$

par

$$A_1 u = -\Delta u, \forall u \in D(A_1)$$

Alors, A_1est m-accrétif dans X.

Preuve. Si $X = L^1(\Omega)$, son dual est donc $X^* = L^\infty(\Omega)$.

Le produit semi-intérieur et l'ensemble dual sont donnés respectivement par

$$[u, v]_1 = \int\limits_{\{x, u(x) \neq 0\}} sign_0(u(x)) \, .v(x) \, dx + \int\limits_{\{x, u(x) = 0\}} |v(x)| \, dx$$

et

$$J(u) = \{ w \in L^\infty(\Omega) : w(x) \in sign_0(u(x)) \quad p.p \}$$

la fonction $sign_0$ est finie plus haut .

Il est clair que l'opérateur linéaire A_1 est accrétif dans $L^1(\Omega)$ pour le voir il suffit de remarquer que

$$[u, A_1 u]_1 \geq 0$$

Pour la m-accrétivité, voir Bresis-Strauss [10] . ■

Proposition 3.4.2 *On se donne Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, X = L^P(\Omega), 1 < p < \infty$ et on définit l'opérateur A_2 tel que*

$$\begin{cases} A_2 u = -\Delta u, \forall u \in D(A_2) \\ D(A_2) = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega), \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \right\} \end{cases}$$

Alors, A_2 est m-accrétif dans X.

Preuve. Montrons que l'opérateur A_2 est accrétif.

L'opérateur A_2 étant linéaire, d'après la proposition (3.2.2), il suffit de montrer que

$$[u, A_2 u]_p \geq 0$$

sachant que

$$[u, A_2 u]_p = \frac{-1}{\|u\|_p^{p-1}} \int_\Omega sign_0 u. |u|^{p-1} \Delta u dx$$

La formule de Green donne

$$\begin{aligned} -\int_\Omega sign_0 u. |u|^p \Delta u dx &= \int_\Omega \nabla \left[sign_0 u. |u|^{p-1} \right] \nabla u dx \\ &= \int_\Omega [sign_0 u]^2 (p-1) |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que A_2 est accrétif

Pour la m-accrétivité, voir Bresis-Strauss [10]. ■

3.5 C_0 Semi-groupes et leurs générateurs

Définition 3.5.1 *On appelle C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de $X \longrightarrow X$, une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ vérifiant :*

1. $S(0) = I$, (I est l'opérateur identité dans X)

2. $S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \geq 0$

3. $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} S(t)x = x, \forall x \in X.$

Définition 3.5.2 *On dit que le semi-groupe $S(t)$ est de contraction si*

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\| \leq 1. (\text{et } S(t) \in \mathcal{L}(x)).$$

Définition 3.5.3 *On appelle générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensembe*

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{existe} \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A)$$

Exemple 3.5.1

Soit $C_{ub}[0, +\infty[= \{f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, f$ est uniformément continue et bornée$\}$ avec la norme

$$\|f\|_{C_{ub}[0,+\infty[} = \sup_{\alpha \in [0,+\infty[} |f(\alpha)|$$

l'espace $C_{ub}[0, +\infty[$ devient un espace de Banach.

Définissons

$$(S(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \forall t \geq 0, \text{ et } \alpha \in [0, +\infty[$$

Evidemment $S(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :

i)$(S(0)f)(\alpha) = f(0+\alpha) = f(\alpha)$, donc $S(0) = I$.

ii) $(S(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = (S(t)f)(s+\alpha) = (S(t)S(s)f)(\alpha), \forall f \in C_{ub}[0,+\infty[$

donc $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0$

iii) $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \|S(t)f - f\|_{C_{ub}[0,+\infty[} = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \left\{ \sup\limits_{\alpha\in[0,+\infty[} |f(t+\alpha) - f(\alpha)| \right\} = 0, \forall f \in C_{ub}[0,+\infty[$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} \|S(t)f\|_{C_{ub}[0,+\infty[} &= \sup_{\alpha\in[0,+\infty[} |(S(t)f)(\alpha)| = \sup_{\alpha\in[0,+\infty[} |f(t+\alpha)| = \sup_{\beta\in[t,+\infty[} |f(\beta)| \\ &\leq \sup_{\beta\in[0,+\infty[} |f(\beta)| = \|f\|_{C_{ub}[0,+\infty[}, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

donc

$$\|S(t)\| = 1, \forall t \geq 0$$

ainsi $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $C_{ub}[0,+\infty[$, nommé le C_0 semi-groupe de translation à droite.

Soit maintenant $A : D(A) \subset C_{ub}[0,+\infty[\longrightarrow C_{ub}[0,+\infty[$ le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Si $f \in D(A)$, alors, nous avons

$$Af(\alpha) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{(S(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α . Par conséquent :

$$D(A) \subset \{f \in C_{ub}[0,+\infty[\text{ tel que } f' \in C_{ub}[0,+\infty[\}$$

Si $f \in C_{ub}[0,+\infty[$ tel que $f' \in C_{ub}[0,+\infty[$; alors :

$$\left\| \frac{S\left(t\right)f-f}{t}-f'\right\|_{C_{ub}[0,+\infty[} = \sup_{\alpha\in[0,+\infty[}\left| \frac{\left(S\left(t\right)f\right)\left(\alpha\right)-f\left(\alpha\right)}{t}-f'\left(\alpha\right)\right|$$

mais

$$\begin{aligned}
\sup_{\alpha\in[0,+\infty[}\left| \frac{\left(S\left(t\right)f\right)\left(\alpha\right)-f\left(\alpha\right)}{t}-f'\left(\alpha\right)\right| &= \sup_{\alpha\in[0,+\infty[}\left| \frac{f\left(t+\alpha\right)-f\left(\alpha\right)}{t}-f'\left(\alpha\right)\right| \\
&= \left| \frac{1}{t}f\left(\tau\right)\Big|_{\alpha}^{\alpha+t}-f'\left(\alpha\right)\right| \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_{\alpha}^{\alpha+t}\left[f'\left(\tau\right)-f'\left(\alpha\right)\right]d\tau\right) \\
&\leq \frac{1}{t}\left(\int_{\alpha}^{\alpha+t}\left[f'\left(\tau\right)-f'\left(\alpha\right)\right]d\tau\right) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α, pour $t \longrightarrow 0$.

Par suite :

$$\left\| \frac{S\left(t\right)f-f}{t}-f'\right\|_{C_{ub}[0,\infty)} \longrightarrow 0,\ \text{si } t\longrightarrow 0$$

d'où $f \in D(A)$ et l'ensemble $\{f \in C_{ub}[0,+\infty[$ tel que $f' \in C_{ub}[0,+\infty[\} \subset D(A)$. Par conséquent

$$D(A) = \{f \in C_{ub}[0,+\infty[\text{ tel que } f' \in C_{ub}[0,+\infty[\}$$

et

$$Af = f'$$

Théorème 3.5.1 *(Hill-Yosida-Phillips) Un opérateur linéaire A dans X est le générateur d'un semi-groupe de contraction sur X si et seulement si A est m-dissipatif de domaine dense.*

Preuve. Voir T. Cazenave -A. Haraux [11]. ■

3.6 Problèmes semi-linéaires

3.6.1 Préliminaires

Définition 3.6.1 *Une fonction $F : X \longrightarrow X$ est dite localement Lipschitzienne sur les bornés de X si $\forall M > 0, \exists K(M)$ telle que $\|F(x) - F(y)\| \leq K(M) \|x - y\|, \forall x, y \in B_M$, où B_M est la boule de centre 0 et de rayon M.*

Dans ce paragraphe, X est un espace de Banach, A est un opérateur m-dissipatif dans X, de domaine dense et $S(t)$ est le semi-groupe de contraction engendré par A,

$F : X \longrightarrow X$ une fonction Lipschitzienne sur les bornés de X. On note $K(M)$ la constante de Lipschitz de F sur B_M.

Etant donné $u_0 \in X$, on cherche $T > 0$ et une solution $u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)$ du problème (PSL).

Lemme 3.6.1 *Si u est une solution du problème (PSL) alors elle vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$u(t) S(t) u_0 + \int_0^t S(t-s) F(u(s)) \, ds, \forall t \in [0,T] \tag{3.2}$$

Preuve. Soit u une solution du problème (PSL), on définit w par

$$w(s) = S(t-s) u(s)$$

qui est différentiable pour $0 < s < t$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\frac{w(h+s)-w(s)}{h} &= \frac{S(t-h-s)\,u(h+s)-S(t-s)\,u(s)}{h} \\
&= S(t-h-s)\,\frac{[u(h+s)-S(h)\,u(s)]}{h} \\
&= S(t-h-s)\,\frac{[u(h+s)-u(s)+u(s)-S(h)\,u(s)]}{h} \\
& \quad S(t-h-s)\left[\frac{u(h+s)-u(s)}{h}-\frac{S(h)-I}{h}u(s)\right]
\end{aligned}$$

Si on passe à la limite quand h tend vers zéro, on aura

$$w'(s) = S(t-s)[u'(s) - Au(s)] = S(t-s)F(u(s))$$

On intègre de 0 *à* $\tau < t$ pour avoir

$$w(\tau) - w(0) = \int_0^\tau S(t-s)F(u(s))ds$$

par suite

$$w(\tau) = S(t)\,u(0) + \int_0^\tau S(t-s)F(u(s))ds$$

en faisant tendre τ vers t, on aura

$$w(t) = S(t)\,u(0) + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$$

comme $w(t) = S(0)u(t) = u(t)$, il en résulte

$$u(t) = S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \forall t \in [0,T]$$

■

Remarque 3.6.1 *La formule* (3.2) *nous définit une solution* $u \in C([0,T],X)$.

3.6.2 L'existence locale

Commençons par énoncer un résultat d'unicité.

Lemme 3.6.2 *Soit $u_0 \in X$ et $T > 0$ alors, le problème (PSL) admet au plus une solution.*

Preuve. Soient u et v deux solutions de (PSL) , elles sont donc solutions de (3.2). Posons

$$M = \sup_{t\in[0,t]} \max \{\|u(t)\|, \|v(t)\|\}$$

on a

$$u(t) - v(t) = \int_0^t S(t-s)[F(u(s)) - F(v(s))]\,ds$$

donc

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|\,ds \\ &\leq K(M)\int_0^t \|u(s) - v(s)\|\,ds \end{aligned}$$

On conclut en appliquant la remarque (3.6.1) qui donne

$$u(s) - v(s) = 0$$

d'où on obtient finalement

$$u = v$$

le résultat attendu. ■

Posons maintenant

$$T_M = [2K(2M + \|F(0)\|) + 2]^{-1} > 0, \text{ pour } M > 0$$

On peut établir un résultat d'existence locale.

Proposition 3.6.1 *Soit $M > 0$ et $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| \leq M$. Alors, il existe une unique solution $u \in C([0, T_M], X)$ de (3.1) avec $T = T_M$.*

Preuve. Notons tout d'abord que le lemme (3.6.2) nous assure l'unicité de la solution. Soit $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| \leq M$.

On note $E = \{u \in C([0, T_M], X), \|u(t)\| \leq L; \forall t \in [0, T_M]\}$ avec $L = 2M + \|F(0)\|$.

Si on munit E de la distance d induite par la norme de $C([0, T_M], X)$ donnée par

$$d(u, v) = \max_{t \in [0, T_M]} \|u\,(t) - v\,(t)\|, \text{ pour tout } u, v \text{ dans } E$$

alors, E est un espace métrique complet.

Pour tout $u \in E$, on définit $\Phi_u \in C([0, T_M], X)$ par

$$\Phi_u\,(t) = S\,(t)\,u_0 + \int_0^t S\,(t - s)\,F\,(u\,(s))\,ds, \forall t \in [0, T_M]$$

1) montrons que $\Phi_u : E \longrightarrow E$.

pour $s \in [0, T_M]$, on a :

$$F(u(s)) = F(0) + (F(u(s)) - F(0))$$

donc

$$\|F(u(s))\| \leq \|F(0)\| + K\,(L)\,L \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M}$$

il en résulte que

$$\|\Phi_u\,(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F\,(u\,(s))\|\,ds \leq \frac{(M + \|F(0)\|)\,t}{T_M} \leq L, \forall t \in [0, T_M]$$

ainsi, on a bien $\Phi_u : E \longrightarrow E$.

2) Montrons que Φ_u est une contraction.

Notons d'une part que pour tout $u, v \in E$ on a

$$\|\Phi_u\,(t)\| - \|\Phi_v\,(t)\| = \left\| \int_0^t S\,(t - s)\,[F\,(u\,(s)) - F\,(v\,(s))]\,ds \right\|$$

donc

$$\|\Phi_u\,(t)\| - \|\Phi_v\,(t)\| \leq K\,(L) \int_0^t \|u\,(s) - v\,(s)\|\,ds \leq K\,(L)\,T_M.d\,(u, v)$$

d'autre part on sait que

$$\|F\,(0)\| + K\,(L)\,L \leq \frac{M + \|F\,(0)\|}{T_M}$$

donc

$$K(L)\,L \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M}$$

d'où finalement

$$K(L)\,T_M \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M} = \frac{M + \|F(0)\|}{2M + \|F(0)\|} < 1$$

on peut donc conclure que Φ_u étant une contraction, elle admet alors un point fixe $u \in E$ qui est solution de (3.2). ■

3.6.3 L'existence globale. L'éventuelle explosion en temps fini

Nous complétons ce chapitre par ce théorème.

Théorème 3.6.1 *Il existe une fonction* $T : X \longrightarrow]0, +\infty[$ *avec les propriétés suivantes: Pour tout* $u_0 \in X$*, il existe* $u \in C(]0, T(u_0)[, X)$*, qui pour tout* $T < T(u_0)$ *est l'unique solution de* (3.1) *dans* $C([0, T], X)$*. de plus,*

$$2K\left(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|\right) \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2, \forall t \in [0, T(u_0)[\tag{3.3}$$

En particulier, l'une de ces deux éventualités suivantes aura lieu :

$i)T(u_0) = +\infty$

$ii)$ $T(u_0) < +\infty$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow T(u_0)} \|u(t)\| = +\infty$.

Remarque 3.6.2 *Si la propriété* (i) *est satisfaite, on dit que la solution* u *est globale. Si la propriété* (ii) *est satisfaite, on dit que* u *explose en temps fini. L'alternative* $(i) - (ii)$ *signifie en d'autres termes que l'existence globale de la solution* u *est équivalente à l'existence d'une estimation à-priori de* $\|u(t)\|$ *sur* $[0, T(u_0)[$.

Pour clarifier les idées, notons qu'à partir de l'inégalité (3.3), il est clair que $\lim\limits_{t \longrightarrow T(u_0)} \|u(t)\| = +\infty$ dès que $T(u_0) < +\infty$.

Preuve. du théorème 3.6.1

Soit maintenant $u_0 \in X$, on introduit :

$$T(u_0) = \sup \{T > 0, \exists u \in C([0,T], X) \text{ solution de } (3.2)\}$$

d'après la proposition (3.6.1), on sait que $T(u_0) > 0$. D'autre part, la propriété d'unicité permet de construire une solution maximale $u \in C([0, T(u_0)[, X)$ de (3.2).

Il nous reste donc à montrer (3.3). L'inégalité (3.3) étant immédiate si $T(u_0) = +\infty$, on peut supposer que $T(u_0) < +\infty$. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $t_0 \in [0, T(u_0)[$ tel que (3.3) ne soit pas vérifiée.

On a alors,

$$T(u_0) - t_0 < T_M, \text{ avec } M = \|u(t_0)\|$$

soit $v \in C([0, T_M], X)$ la solution donnée par la proposition (3.6.1) de l'équation

$$v(t) = S(t)u(t_0) + \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds, \forall t \in [0, T_M]$$

on définit la fonction $w \in C([0, t_0 + T_M], X)$ par

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_0 \\ v(t - t_0) & \text{pour } t_0 \leq t \leq t_0 + T_M \end{cases}$$

Pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T_M$ on a

$$w(t) = v(t - t_0) = S(t - t_0)u(t_0) + \int_0^{t-t_0} S(t - t_0 - s)F(v(s))ds$$

en utilisant le fait que

$$u(t_0) = S(t_0)u_0 + \int_0^{t_0} S(t_0 - s) F(u(s))\, ds$$

on aura

$$w(t) = S(t - t_0)\left[S(t_0)u_0 + \int_0^{t_0} S(t_0 - s)F(w(s))ds\right] + \int_0^{t-t_0} S(t - t_0 - s)F(v(s))ds$$

en effectuant le changement de variables: $s' = s + t_0$, on obtient

$$\int_0^{t-t_0} S(t - t_0 - s)F(v(s))ds = \int_{t_0}^{t} S(t - s')F(v(s' - t_0))ds' = \int_{t_0}^{t} S(t - s)F(w(s))ds$$

par conséquent

$$w(t) = S(t-t_0)\left[S(t_0)u_0 + \int_0^{t_0} S(t_0-s)F(w(s))ds\right] + \int_{t_0}^{t} S(t-s)F(w(s))ds$$

d'où finalement

$$w(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(w(s))ds$$

w est donc solution de (3.2) sur $[0, t_0 + T_M]$, c'est à dire, on a pu construire une solution de (3.2) avec $T = t_0 + T_M > T(u_0)$, ce qui contredit la définition de $T(u_0)$. Donc on a bien

$$2K\left(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|\right) \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2$$

D'où le résulat attendu. ■

3.7 Un résultat sur l'existence globale

3.7.1 Introduction

Dans cette section nous considérons un système de réaction-diffusion à m équations, on établit que pour un système ayant une matrice de diffusion diagonale dont les coefficients sont égaux, les solutions existent globalement en temps.

Sous leur forme la plus simple, les systèmes de réaction-diffusion s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) - D\Delta u(x,t) = f(u(x,t)) & x \in \Omega \quad t \geq 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & x \in \partial\Omega \quad t > 0 \\ u(0,.) = u_0 & x \in \Omega \quad t = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $D = diag(d_1, ..., d_m)$ est une matrice diagonale définie positive, dite matrice de diffusion. $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction localement Lipchitzienne. Ces systèmes ont donné lieu au travail mathématique pionnier des chercheurs qui s'intéressent aux deux propriétés qu'on trouve dans plusieurs applications :

La positivité des solutions est préservée au cours du temps (3.4)

La masse totale des composants est contrôlée au cours du temps (3.5)

En partant du fait que le système (S) possède une solution locale unique définie sur l'intervalle $\Omega\times]0,T_{\max}[$ **(Voir Chapitre 3)**, la question générique est dans quelle mesure les propriétés (3.4) et (3.5) contribuent à l'existence globale en temps de la solution $(T_{\max}=+\infty)$.

On s'intéresse en premier lieu à la positivité de la solution.

3.7.2 Positivité de la solution

Définition 3.7.1 *Une fonction $f=(f_i)_{1\leq i\leq m}$ est dite quasi-positive si et seulement si pour tout $i=1,...,m$ on a $f_i(v)\geq 0$ si $v_i=0$ pour tout $v=(v_1,...,v_i,...,v_m)\in\mathbb{R}_+^m$.*

Proposition 3.7.1 *Si $f=(f_i)_{1\leq i\leq m}$ est quasi-positive, la solution du système (S) est non négative terme à terme.*

Preuve. On pose $u^+=\max(u,0)$ et $u^-=\min(u,0)$, et on désigne par $(S)^+$ le système (S) où on a remplacé $f(u)$ par $f(u^+)$. On travaille sur la i ème équation du système, qu'on intègre sur $\Omega\times\ ]0,t[$ après l'avoir multiplié par u_i^-.

$$\int_0^t\int_\Omega u_i^-.\frac{\partial u_i}{\partial t}dxdt-\int_0^t\int_\Omega d_i.u_i^-.\Delta u_i dxdt=\int_0^t\int_\Omega u_i^- f_i\left(u^+\right)dxdt$$

en utilisant le fait que $(u_i)_t=-\left(u_i^-\right)_t$ et que $\Delta u_i=-\Delta u_i^-$ si $u_i^->0$ et par intégration par parties, on obtient

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(u_i^-\right)^2.dx-d_i\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u_i^-\right|^2dxdt=\int_0^t\int_\Omega u_i^- f_i\left(u^+\right)dxdt$$

comme f_i est quasi-positive, on a

$$\begin{cases} u_i^- f_i\left(u^+\right)=0 & \text{si } u\geq 0\\ & \text{et}\\ u_i^- f_i\left(u^+\right)\geq 0 & \text{si } u\leq 0\end{cases}$$

ainsi

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u_i^-\right)^2.dx-d_i\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u_i^-\right|^2dxdt\geq 0$$

par conséquent: $u_i^-=0$ et $u=u_i^+$ qui est solution de (S). Il s'en suit, par unicité de la solution, que toutes ses composantes sont non négatives. ■

3.7.3 Résultat d'existence globale

Définition 3.7.2 *La masse totale des composants du système (S) est la quantité :*

$$M\left(t\right)=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega}u_i\left(x,t\right)dx$$

La condition (3.5) est par exemple satisfaite dès que $\sum_{i=1}^{m}f_i\leq 0$. En effet, il suffit pour le voir d'intégrer sur $\Omega\times]0,t[$. Les conditions aux bords vont assurer que

$$\int_0^t\int_{\Omega}d_i.\Delta u_i\left(x,t\right)dxdt=0$$

si bien qu'on obtient l'estimation à priori

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_i\left(x,t\right)dx\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_i\left(x,0\right)dx$$

lorsque les u_i sont initialement positifs, comme les $u_i(.,t)$ le restent, ceci assure bien que la masse totale des composants reste bornée au cours du temps. Ainsi, on est ramené à la définition suivante.

Définition 3.7.3 *On dit qu'une fonction $f=(f_i)_{1\leq i\leq m}:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ vérifie la loi de la balance s'il existe des constantes $c_i>0$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(v) \leq 0, \forall v \in IR_+^m$$

Proposition 3.7.2 *Si les constantes de la diffusion sont telles que $d_i = d$, $\forall i = 1, ..., m$, et si la fonction f est quasi-positive, vérifiant la loi de la balance alors, la solution du système (S) est globale.*

Preuve. Précisons d'une part que nous considérons f quasi-positive, ce qui assure que la solution u est non négative.

d'autre part, puisque f vérifie la loi de la balance alors, en posant $w = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i$ on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - d\Delta w \leq 0 & , x \in \Omega \quad , t \in]0, T_{\max}[\\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & , x \in \partial\Omega \quad , t > 0 \\ w(x,0) = w_0 = \sum_{i=1}^{m} u_i(x,0) & , x \in \Omega \quad , t = 0 \end{cases}$$

on applique le principe du maximum, le but étant alors d'obtenir l'estimation

$$\|w(.,t)\|_\infty \leq \|w_0\|_\infty, \ \forall t \in]0, T_{\max}[$$

par conséquent, la solution $u(x,t)$ est uniformément bornée (existe globalement). ■

Définition 3.7.4 *On dit qu'une région $\hat{I} \subset \mathbb{R}^n$ est invariante pour le système (S) si la solution $u(x,t)$ de (S) vérifie la relation $u(x,t) \in \hat{I}$ dès que la donnée initiale $u(x,0) = u_0(x)$ vérifie la relation $u_0(x) \in \hat{I}$:*

Définition 3.7.5 *Soit $\hat{I} \subset \mathbb{R}_+^n$ une région invariante pour le système (S). Une fonction $L : \hat{I} \longrightarrow [0, +\infty[$ est dite fonction de Lyapunov si*

1. L est une fonction convexe qui admet une racine unique.
2. L peut s'écrire sous la forme

$$L(u) = \sum_i \ell_i(u), \ell_i \in C^2\left(\hat{I}\right)$$

3. L vérifie: $\nabla L(u)\ f\ (u) \leq 0, \forall u \in \hat{I}$.

Proposition 3.7.3 *Si les constantes de la diffusion sont telles que $d_i = d, \forall i = 1, ..., m$ et si le système (S) admet une région invariante $\hat{I}$ et une fonction de Lyapunov alors, la solution de (S) existe globalement en temps.*

Preuve. Soit L une fonction de Lyapunov qui s'annulle au point x_0. Notons que pour tout x dans $\hat{I}$ on a $\ell_i''\ (x) \geq 0$.

Comme les constantes de la diffusion sont toutes égales à $d > 0$ i.e. $D = dI_m$ alors, le système $(R\ D)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta_x u = f(u)$$

d'une autre part on a

$$\frac{d}{dt} L(u) = \nabla_u L(u) \frac{\partial u}{\partial t}$$

et

$$\Delta_x L(u) = \nabla_x \left(\nabla_u L(u) \nabla_x u\right) = \Delta_u L(u) \left(\nabla_x u\right)^2 + \nabla_u L(u) \Delta_x u$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} L(u) - d\Delta_x L(u) &= \nabla_u L(u) \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta_u L(u) \left(\nabla_x u\right)^2 - d\nabla_u L(u) \Delta_x u \\
&= \nabla_u L(u) \left[d\Delta_x u + f(u)\right] - d\Delta_u L(u) \left(\nabla_x u\right)^2 - d\nabla_u L(u) \Delta_x u \\
&= \nabla_u L(u) f(u) - d\Delta_u L(u) \left(\nabla_x u\right)^2 \\
&\leq \nabla_u L(u) f(u)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{d}{dt} L(u) \leq d\Delta_x L(u) + \nabla_u L(u) f(u)$$

comme

$$\nabla_u L(u) f(u) \leq 0$$

alors on aura

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}L(u) \leq d\Delta_x L(u) \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}L(u) = \nabla_u L(u)\, f(u) \end{cases}$$

ce qui permet d'après le principe de maximum de conclure que $L(u)$ est bornée. ■

CHAPITRE 4

Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion avec matrice de diffusion pleine via Lyapunov

4.1 Introduction

Considérons maintenant, le système de réaction diffusion à deux composantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \triangle u - d_2 \triangle v = f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_3 \triangle u - d_4 \triangle v = g(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{4.2}$$

et les conditions initiales

$$u(.,0) = u_0(.),\ v(.,0) = v_0(.) \qquad \text{sur } \Omega \tag{4.3}$$

Où $u = u(x,t), v = v(x,t)$, $x \in \Omega, t > 0$. Ω est un ouvet borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, d_1, d_2, d_3, d_4 sont des constantes positives. On s'intéresse ici à des conditions initiales positives et uniformément bornées. Les nonlinéarités f et g, sont deux fonctions continûment différentiables sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, choisies avec les propriétés suivantes :

(H1)

$$f(0,s) \geq 0, g(r,0) \geq 0 \ \forall r, s \geq 0 \tag{4.4}$$

(**H2**) On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tels que

$$K^{2i-1} f\ (r,s) + g(r,s) \leq C(r+s+1) \quad i = 1, ..., p \tag{4.5}$$

$\forall\ r, s \geq 0$, C est une constante positive et $m \geq 1$ tels que

$$\sup(|f(r,s)|, |g(r,s)|) \leq C(r+s+1)^m, \forall r, s \geq 0 \tag{4.6}$$

Le contenu de ce chapitre est le suivant. À la section 2, nous introduirons un résultat d'existence locale. Notre principal résultat est indiqué dans la section 3.

4.2 Existence locale

Commençons par tirer quelques conséquences des sections précédentes, nous allons

travailler dans l'espace de Banach $X = C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|(u,v)\|_X = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$

Nous allons étudier le système (4.1) - (4.3) en l'écrivant sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) - AU(t) = F(U(t)) & t > 0 \\ \\ U(0) = U_0 = (u_0, v_0) \end{cases}$$

Sachant que : $U(t) = (u(t), v(t)), F(U(t)) = (f(u,v), g(u,v))$ et l'opérateur A est défini comme suit

$A : D(\Delta) \times D(\Delta) \to C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$

$$A : \begin{pmatrix} d_1\Delta & d_2\Delta \\ d_3\Delta & d_4\Delta \end{pmatrix}$$

avec

$D(\Delta) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \Delta u \in C(\overline{\Omega}) \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}$

Notons d'une part qu'il est facile de s'assurer que la fonction F est locallement Lipshitzienne sur les bornés de X. D'autre part, on vérifie aisément que les opérateurs $d_1\Delta, d_2\Delta, d_3\Delta, d_4\Delta$ sont m-dissipatifs dans L^p (Voir chapitre 3).

Ainsi pour des conditions initiales $(u_0, v_0) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$, nous pouvons conclure d'après la proposition (3.6.1) que le système (4.1)-(4.3) admet une solution locale définie dans un intervalle maximal $[0; T_{max}[$.

4.3 Existence globale

Dans cette section, nous démontrons un résultat d'éxistence globale de la solution du système (4.1) - (4.3). Notre démarche étant de chercher une estimation uniforme de

$\sup(\|f(u,v)\|_q, \|g(u,v)\|_q)$ pour un certain $q > n/2$.(Voir D.Henry [10]). On utilise pour cela une méthode qui fait appel à la fonctionnelle de Lyapunov.

Commençons par un premier lemme.

Lemme 4.3.1 *Soit $(u(t,.), v(t,.))$ une solution (4.1)–(4.3) et soit* $L(t) = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i} dx$ *avec p un entier positif et K est une suite des nombres positifs tels que* $K \geq \max(\frac{d_1+d_4}{2\sqrt[1]{d_1 d_4}}, \frac{d_2+d_3}{2\sqrt[1]{d_3 d_2}})$ *alors la fonction L est uniformément bornée sur l' intervalle* $[0, T^*]$, $T^* \leq T_{\max}$

Preuve. Soit $L(t) = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i} dx$

On dérive L par rapport à t pour avoir

$$
\begin{aligned}
L'(t) &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} (iC_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i}) u_t + \sum_{i=0}^{p-1} ((p-i) C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i-1}) v_t \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} (iC_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i})(d_1 \triangle u + d_2 \triangle v + f(u,v)) dx + \\
&\quad \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{p-1} ((p-i) C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i-1})(d_3 \triangle u + d_4 \triangle v + g(u,v)) dx
\end{aligned}
$$

Un simple calcul à conduit

$$
\begin{aligned}
L'(t) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} (iC_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i})(d_1 \triangle u + d_2 \triangle v + f(u,v)) dx + \\
&\quad \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} ((p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i})(d_3 \triangle u + d_4 \triangle v + g(u,v)) dx
\end{aligned}
$$

De l'égalité ci-dessus, il en résulte que

$$
\begin{aligned}
L'(t) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} d_1 i C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} \triangle u dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} d_4 (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i} \triangle v dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} d_2 i C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} \triangle v dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} d_3 (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i} \triangle u dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} i C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} f(u,v) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i} g(u,v) dx \\
&\quad I + J + H
\end{aligned}
$$

Par une simple utilisation de la formule de Green, nous avons :

$$
I = -\int_{\Omega} \left(A \left| \nabla u \right|^2 + B \nabla u \nabla v + C \left| \nabla v \right|^2 \right) dx \tag{4.7}
$$

où :

$$
A = \sum_{i=2}^{p} d_1 i \left(i-1 \right) C_p^i K^{i^2} u^{i-2} v^{p-i}
$$

$$
B = \sum_{i=1}^{p-1} d_1 i \left(p-i \right) C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i-1} + \sum_{i=2}^{p} d_4 \left(i-1 \right) \left(p-i+1 \right) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-2} v^{p-i}
$$

$$C=\sum_{i=1}^{p-1}d_4\,(p-i)\,(p-i+1)C_p^{i-1}K^{(i-1)^2}u^{i-1}v^{p-i-1}$$

En utilisant le fait que :

$$iC_p^i=(p-i+1)C_p^{i-1}=pC_{p-1}^{i-1}\quad\forall i=1,...,p \tag{4.8}$$

et aussi depuis

$$i(i-1)C_p^{i+1}=i(p-i)C_p^i=(p-i)\,(p-i+1)C_p^{i-1}=p(p-1)C_{p-2}^{i-2} \tag{4.9}$$

nous donnons

$$A=\sum_{i=2}^{p}d_1p\,(p-1)\,C_{p-2}^{i-2}K^{i^2}u^{i-2}v^{p-i}$$

$$\begin{aligned}B&=\sum_{i=1}^{p-1}d_1p\,(p-1)\,C_{p-2}^{i-2}K^{i^2}u^{i-1}v^{p-i-1}+\sum_{i=2}^{p}d_4p(p-1)C_{p-2}^{i-2}K^{(i-1)^2}u^{i-2}v^{p-i}\\&=B_1+B_2\end{aligned}$$

et

$$C=\sum_{i=1}^{p-1}d_4p(p-1)C_{p-2}^{i-1}K^{(i-1)^2}u^{i-1}v^{p-i-1}$$

Mettre $j=i-2$, nous avons :

$$A=\sum_{j=0}^{p-2}d_1p\,(p-1)\,C_{p-2}^{j}K^{(j+2)^2}u^jv^{p-j-2}$$

$$B_2=\sum_{j=0}^{p-2}d_4p(p-1)C_{p-2}^{j}K^{(j+1)^2}u^jv^{p-j-2}$$

et mettre $j=i-1$, nous donnons :

$$B_1=\sum_{j=0}^{p-2}d_1p\,(p-1)\,C_{p-2}^{j}K^{(j+1)^2}u^jv^{p-j-2}$$

$$C=\sum_{j=0}^{p-2}d_4p(p-1)C_{p-2}^{j}K^{j^2}u^jv^{p-j-2}$$

Alors:

$$I=-p(p-1)\sum_{j=0}^{p-2}C_{p-2}^{j}\int\limits_{\Omega}u^jv^{p-j-2}\times\Psi(\nabla u,\nabla v)dx \tag{4.10}$$

où

$$\Psi(\nabla u, \nabla v) = d_1 K^{(j+2)^2} |\nabla u|^2 + (d_1 + d_4) K^{(j+1)^2} \nabla u \nabla v + d_4 K^{j^2} |\nabla v|^2$$

Les formes quadratiques sont positives depuis :

$$((d_1 + d_4) K^{(j+1)^2})^2 - 4 d_1 d_4 K^{j^2} K^{(j+2)^2} \leq 0 \quad j = 0, ..., p-2 \tag{4.11}$$

En utilisant la relation $K \geq \max(\frac{d_1+d_4}{2\sqrt[1]{d_1 d_4}}, \frac{d_2+d_3}{2\sqrt[1]{d_3 d_2}})$

Alors

$$I \leq 0 \tag{4.12}$$

Par une simple utilisation de la formule de Green, nous avons :

$$J = -\int_\Omega \left(D |\nabla v|^2 + E \nabla v \nabla u + F |\nabla u|^2\right) dx \tag{4.13}$$

où :

$$D = \sum_{i=1}^{p-1} d_2 i (p-i) C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i-1}$$

$$E = \sum_{i=2}^{p} d_2 i (i-1) C_p^i K^{i^2} u^{i-2} v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p-1} d_3 (p-i)(p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i-1}$$

$$F = \sum_{i=2}^{p} d_3 (i-1)(p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-2} v^{p-i}$$

En utilisant la relation (4.8), nous obtenons

$$D = \sum_{i=1}^{p-1} d_2 p (p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i-1}$$

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=2}^{p} d_2 p (p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{i^2} u^{i-2} v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p-1} d_3 p (p-1) C_{p-2}^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i-1} \\ & E_1 + E_2 \end{aligned}$$

et

$$F = \sum_{i=2}^{p} d_3 p (p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{(i-1)^2} u^{i-2} v^{p-i}$$

Mettre: $j = i-1$, nous avons :

$$D = \sum_{j=0}^{p-2} d_2 p (p-1) C_{p-2}^{j} K^{(j+1)^2} u^j v^{p-j-2}$$

$$E_2 = \sum_{j=0}^{p-2} d_3 p(p-1) C_{p-2}^{j} K^{j^2} u^j v^{p-j-2}$$

et mettre: $j = i - 2$, nous obtenons :

$$E_1 = \sum_{j=0}^{p-2} d_2 p\,(p-1)\, C_{p-2}^{j} K^{(j+2)^2} u^j v^{p-j-2}$$

$$F = \sum_{j=0}^{p-2} d_3 p(p-1) C_{p-2}^{j} K^{(j+1)^2} u^j v^{p-j-2}$$

Alors :

$$J = -p(p-1) \sum_{j=0}^{p-2} C_{p-2}^{j} \int_{\Omega} u^j v^{p-j-2} \times \Phi\left(\nabla v, \nabla u\right) dx \tag{4.14}$$

avec

$$\Phi\left(\nabla v, \nabla u\right) = d_2 K^{(j+1)^2} \left|\nabla v\right|^2 + (d_2 K^{(j+2)^2} + d_3 K^{j^2}) \nabla v \nabla u + d_3 K^{(j+1)^2} \left|\nabla u\right|^2$$

Les formes quadratiques sont positives depuis :

$$((d_2 K^{(j+2)^2} + d_3 K^{j^2}))^2 - 4 d_2 d_3 K^{(j+1)^2} K^{(j+1)^2} \leq 0 \quad j = 0, ..., p-2 \tag{4.15}$$

En utilisant la relation $K \geq \max(\frac{d_1 + d_4}{2\sqrt[1]{d_1 d_4}}\ , \frac{d_2 + d_3}{2\sqrt[1]{d_3 d_2}})$

Alors

$$J \leq 0 \tag{4.16}$$

En utilisant la relation (4.8), dans les troisièmes intégrales, on obtient :

$$H = \int_{\Omega} \left[p \sum_{i=1}^{p} \left(K^{i^2} f(u,v) + K^{(i-1)^2} g(u,v) \right) C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right] dx$$

En utilisant la relation (4.6) nous déduisons

$$H \leq c_3 \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} (u+v+1) C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right] dx$$

Pour prouver que la fonction L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$

D'abord nous écrivons

$$L'(t) \leq c_3 \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^i v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i+1} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right] dx$$

$$L'(t) \leq c_3 \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^i v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i-1} \right] dx$$

$$L'(t) \leq c_3 \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=0}^{p} C_{p}^{i} u^i v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i-1} \right] dx$$

En utilisant le fait que

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i-1} = (u+v)^{p-1}$$

Par conséquent, la dernière inégalité peut être écrite

$$L'(t) \leq c_1(p)L(t) + c_3 \int\limits_{\Omega} (u+v)^{p-1}$$

En appliquant l'inégalité de Hôlder au deuxième terme dans le côté droit de la l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$L'(t) \leq c_1(p)L(t) + c_3(mes\Omega)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_{\Omega} (u+v)^p \, dx)^{\frac{(p-1)}{p}})$$

Depuis l'inégalité suivante est

$$(u+v)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i u^i v^{p-i} \leq \frac{\sup_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min_{0\leq i\leq p} C_p^i K^{i^2}} \sum_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i}$$

Alors, nous avons

$$L'(t) \leq c_1(p)L(t) + c_3(mes\Omega)^{\frac{1}{p}} (\frac{\sup_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min_{0\leq i\leq p} C_p^i K^{i^2}})^{\frac{(p-1)}{p}} (L(t))^{\frac{(p-1)}{p}} \qquad \forall t < T_{\max}$$

Par conséquent, $L(t)$ la fonction vérifie l'inégalité différentielle suivante :

$$L'(t) \leq c_1(p)L(t) + c_2(p)(L(t))^{\frac{(p-1)}{p}} \qquad \forall t < T_{\max}$$

où

$$c_2(p) = c_3(mes\Omega)^{\frac{1}{p}} (\frac{\sup_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min_{0\leq i\leq p} C_p^i K^{i^2}})^{\frac{(p-1)}{p}}$$

Qui nous donne, par une simple intégration

$$(L(t))^{\frac{1}{p}} \leq \left[(L(0))^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right] \exp(c_1'(p)t) - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \tag{4.17}$$

où

$$c_1'(p) = \frac{c_1(p)}{p} \qquad\qquad c_2'(p) = \frac{c_2(p)}{p}$$

ce qui nous donne, par une simple intégration

$$L(t) = \int_\Omega (\sum_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i}) dx \geq \int_\Omega (C_p^p K^{p^2} u^p + C_p^0 K^{0^2} v^p) dx$$

il en résulte que

$$L(t) \geq \min(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2}) \sup(\int_\Omega u^p dx, \int_\Omega v^p dx)$$

Par conséquent,

$$(L(t))^{\frac{1}{p}} \geq [\min(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2})]^{\frac{1}{p}} \sup((\int_\Omega u^p dx)^{\frac{1}{p}}, (\int_\Omega v^p dx)^{\frac{1}{p}})$$

Et donc,

$$\sup(\|u(t,.)\|_p, \|v(t,.)\|_p) \leq \frac{(L(t))^{\frac{1}{p}}}{[\min(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2})]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall t < T_{\max} \tag{4.18}$$

Avec (4.17) et (4.18) nous obtenons :

$$\sup(\|u(t,.)\|_p, \|v(t,.)\|_p) \leq c(t) \qquad \forall t < T_{\max} \tag{4.19}$$

où

$$c(t) = \frac{1}{[\min(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2})]^{\frac{1}{p}}} \{ \left[(L(0))^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right] \exp(c_1'(p)t) - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \}$$

La preuve de ce lemme est complète. ■

Remarque 4.3.1 *Sous condition (H1), il résulte de la méthode de la région invariante du système (4.1) - (4.3) préserve la positivité. En d'autres termes, si la condition initiale de données u_0 et v_0 en (4.3) sont positives ou nulles, les fonctions u et v de la solution correspondante (4,1) - (4,3) sont positives ou nulles également sur $\Omega \times]0, T_{\max}[$. Voir [10].*

Nous complétons ce chapitre par énoncer et démonter notre résultat principal.

Théorème 4.3.1 *Soit $(u(t,.),v(t,.))$ une solution du système (4.1)–(4.3) . On assume que la condition (H2) est satisfaite. Si de plus $p > \frac{mn}{2}$ alors, la solution $(u(t,.),v(t,.))$ existe globalement en temps.*

Preuve. Commençons tout d'abord par rappeler la condition

$$\sup(|f(u,v)|\,,|g(u,v)|) \leq c_2\,(u+v+1)^m$$

qui donne

$$\sup(\int_\Omega |f(u,v)|^{\frac{p}{m}}\,dx, \int_\Omega |g(u,v)|^{\frac{p}{m}}\,dx \leq c_2^{\frac{p}{m}} \int_\Omega (u+v+1)^p\,dx$$

donc on a bien

$$\sup(\|f(u,v)\|_{\frac{p}{m}}^{\frac{p}{m}}\,, \|g(u,v)\|_{\frac{p}{m}}^{\frac{p}{m}}) \leq c_2^{\frac{p}{m}} \int_\Omega (u+v+1)^p\,dx \tag{4.20}$$

Notons d'une part qu'on a

$$\int_\Omega (u+v+1)^p\,dx = \int_\Omega^k \sum_{k=0}^{p} C_p^k\,(u+v)^k\,dx$$

$$\int_\Omega (u+v+1)^p\,dx = \int_\Omega [1+(u+v)^p]dx + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \int_\Omega (u+v)^k$$

Après avoir appliqué l'inégalité de Hôlder, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \int_\Omega (u+v)^k \leq \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left[\int_\Omega \left(1^{\frac{p}{(p-k)}}dx\right)^{\frac{(p-k)}{p}} \left(\int_\Omega (u+v)^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \right]$$

d'une autre part, la relation (4.17) nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u+v+1)^p\,dx \quad &\leq \quad mes(\Omega) + \int_\Omega (u+v)^p\,dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left[(mes(\Omega))^{\frac{(p-k)}{p}} \left(\int_\Omega (u+v)^p\,dx\right)^{\frac{k}{p}} \right] \end{aligned} \tag{4.21}$$

et l'inégalité (4.19) devient

$$(\int_\Omega (u+v)^p\,dx)^{\frac{1}{p}} = \|u(t,.)+v(t,.)\|_p \leq \|u(t,.)\|_p + \|v(t,.)\|_p \leq 2c(t)$$

revenons maintenant à la relation (4.21), le but étant d'avoir

$$\int_{\Omega} (u+v+1)^p\,dx \leq mes(\Omega) + 2^p(c(t))^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k[(mes(\Omega))^{\frac{(p-k)}{p}}(2c(t))^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} C_p^k[(mes(\Omega))^{\frac{(p-k)}{p}}(2c(t))^k$$

donc

$$\sup((\|f(u,v)\|_{\frac{p}{m}}^{\frac{p}{m}}, \|g(u,v)\|_{\frac{p}{m}}^{\frac{p}{m}}) \leq c^{\frac{p}{m}} \sum_{k=0}^{p} C_p^k[(mes(\Omega))^{\frac{(p-k)}{p}}(2c(t))^k \tag{4.22}$$

d'où finalement

$$\sup(\|f(u,v)\|_{\frac{p}{m}}, \|g(u,v)\|_{\frac{p}{m}}) \leq c_{p,m}(t) \quad \forall t < T_{\max} \tag{4.23}$$

avec

$$c_{p,m}(t) = c[\sum_{k=0}^{p} 2^k C_p^k[(mes(\Omega))^{\frac{(p-k)}{p}}(c(t))^k]^{\frac{p}{m}}$$

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque 4.3.2 *Il est clair que la condition (4.5) entraine la positivité de la solution. (Voir chapitre 3; pour plus de détails).*

4.4 Conclusion

Grâce au lemme (4.3.1) et au théorème (4.3.1), on a pu avoir une estimation uniforme de $\sup(\|f(u,v)\|_q, \|g(u,v)\|_q)$ pour $q = p/m > n/2$ ce qui nous permet de conclure que la solution existe globalement en temps.

CHAPITRE 5

Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion pleine via la compacité

5.1 Introduction

Nous étudions le système parabolique semi-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f(u, v) & sur \mathbb{R}^+ \times \Omega \ 5.1.1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_3 \Delta u - d_4 \Delta v = g(u, v) & sur \mathbb{R}^+ \times \Omega \ 5.1.2 \end{cases} \tag{5.1}$$

Où Ω est un domaine régulier et borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$, $x \in \Omega$, $t > 0$ sont des fonctions réelles, η est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$, Δ désigne l'opérateur laplacien, d_1, d_2, d_3, d_4 sont des constantes positives satisfaisant la condition $(d_2 + d_3)^2 < 4d_1 d_4$ qui reflète la parabolicité du système et implique en même temps que la matrice de diffusion est définie positive. Les valeurs propres λ_1 et λ_2

$(\lambda_1 < \lambda_2)$ de la matrice de diffusion sont positives. Si l'on suppose que $d_1 < d_4$, alors on a $\lambda_1 < d_1 < d_4 < \lambda_2$

Le système (5.1) est soumis aux conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad sur \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{5.2}$$

et la condition initiale

$$u(.,0) = u_0(.), v(.,0) = v_0(.) \qquad sur\Omega \tag{5.3}$$

qui sont supposées être non négatives.

Le système ci-dessus (5.1) - (5.3) apparaît dans la physique, la chimie et divers processus biologiques, y compris la dynamique des populations. (Voir [7], [27] et les références qui y figurent). La condition (5.2) signifie qu'il n'y a aucune espèce d'immigration.

On considère le problème (5.1) - (5.3) qui suppose les hypothèses suivantes :

(H1) $u_0, v_0 \in L^1(\Omega) \Rightarrow w_0, z_0 \in L^1(\Omega)$

(H2)$f(0,v) \geq 0 \forall u \geq 0, \quad g(u,0) \geq 0 \forall v \geq 0$

(H3)$F(0,z) \geq 0 \forall w \geq 0, G(w,0) \geq 0 \forall z \geq 0$

(H4)$\exists c \geq 0 \ f(u,v) + g(u,v) \leq c(u+v+1) ; \forall u, v \geq 0$

(H5)$\exists C \geq 0 \ F(w,z) + G(w,z) \leq C(w+z+1) ; \forall w, z \geq 0$

5.2 Les résultats principaux

Notre objectif est de réduire le système comme suit :

En multipliant l'équation (5.1.2) une fois par $\frac{d_1 - \lambda_1}{d_3}$ et en soustrayant (5.1.1) et un autre temps par $-\frac{d_1 - \lambda_2}{d_3}$ et en ajoutant (5.1.1) on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \lambda_1 \Delta w = F(w,z) & sur \ [0,T[\times\Omega \\ \frac{\partial z}{\partial t} - \lambda_2 \Delta z = G(w,z) & sur \ [0,T[\times\Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 & sur \ [0,T[\times\partial\Omega \\ w(.,0) = w_0(.), z(.,0) = z_0(.) & sur \ \Omega \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} w(x,t) &= -u(x,t)+\frac{d_1-\lambda_1}{d_3}v(x,t) \\ z(x,t) &= u(x,t)-\frac{d_1-\lambda_2}{d_3}v(x,t) \end{aligned}$$

pour tout (x,t) dans $\Omega \times [0,T[$et

$$\begin{aligned} F(w,z) &= -f(u,v)+\frac{d_1-\lambda_1}{d_3}g(u,v) \\ G(w,z) &= f(u,v)-\frac{d_1-\lambda_2}{d_3}g(u,v) \end{aligned}$$

Théorème 5.2.1 *Nous supposons que les hypothèses (H_i) sont satisfaites alors il y'a (w,z) solution de :*

$$\left\{ \begin{array}{c} w,z \in C([0,+\infty[\,,L^1(\Omega)) \\ F(w,z),G(w,z)\in L^1(\Phi) \;\; où \; \Phi=\Omega\times(0,T) \;\; \forall T>0 \\ w(t,x)=S_{\lambda_1}(t)w_0+\int_0^t S_{\lambda_1}(t-s)F(w(s),z(s))ds \;\forall t\in[0,T[\\ z(t,x)=S_{\lambda_2}(t)z_0+\int_0^t S_{\lambda_2}(t-s)G(w(s),z(s))ds \;\forall t\in[0,T[\end{array} \right. \tag{5.4}$$

Où $S_{\lambda_1}(t), S_{\lambda_2}(t)$ sont des semi-groupes de contractions dans $L^1(\Omega)$ engendrés par $\lambda_1\Delta w, \lambda_2\Delta z$ avec des conditions aux limites Newmann homogènes.

Pour prouver ce théorème, nous nous appuierons sur l'étude d'un système unique par lequel il est plus commode de tirer la preuve.

Théorème 5.2.2 *Soit A un opérateur m-dissipatif du domaine dense dans l'espace de Banach X et $S(t)$ un semi-groupe engendré par A, F une fonction localement Lipschitzienne, donc $\forall u_0 \in X$ il existe $T(u_0)=T_{\max}$ tel que le problème*

$$\left\{ \begin{array}{c} u\in C([0,T]\,,D(A))\cap C^1([0,T]\,,X) \\ \frac{du}{dt}-Au=F(u(s)) \\ u(0)=u_0 \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Admet une solution unique u vérifiant

$$u=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \quad \forall t\in[0,T_{\max}] \tag{5.6}$$

Remarque 5.2.1 *La formule (5.6) a défini une solution $u\in C\left([0,T_{\max}]\,,X\right)$*

5.3 Compacité de la solution

Dans ce paragraphe on va donner un résultat de compacité de l'opérateur L définissant la solution du problème (5.5) dans le cas où la valeur initiale égale zéro $[u(0) = 0]$, *i.e.*

$$L(F)(t) = u(t) = \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \quad \forall t \in [0,T]$$

Théorème 5.3.1 *Si pour tout* $t > 0$, *les opérateurs* $S(t)$ *sont compacts, alors* L *est compact de* $L^1([0,T],X)$ *dans* $L^1([0,T],X)$

Preuve. Etape1 : Montrons que $S(\lambda)L : F \to S(\lambda)L(F)$ est compact dans $L^1([0,T],X)$ c'est -à-dire : montrons que l'ensemble

$$\{S(\lambda)L(F)(t); \|F\|_1 \leq 1\}$$

est relativement compact dans $L^1([0,T],X), \forall t \in [0,T]$

Comme $S(t)$ est compact alors, l'application: $t \to S(t)$ est continue de $]0,+\infty[$ dans $\pounds(X)$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists \eta > 0. \forall 0 \leq h \leq \eta, \forall t \geq \delta, \|S(t+h) - S(t)\|_{\pounds(X)} \leq \varepsilon$$

Choisissons $\lambda = \delta$, on a pour $\forall 0 \leq t \leq T-h$

$$\begin{aligned} & S(\lambda)u(t+h) - S(\lambda)u(t) \\ = & \int_0^{t+h} S(\lambda+t+h-s)F(u(s))ds - \int_0^t S(\lambda+t-s)F(u(s))ds \\ = & \int_t^{t+h} S(\lambda+t+h-s)F(u(s))ds + \int_0^t (S(\lambda+t+h-s) - S(\lambda+t-s))F(u(s))ds \end{aligned}$$

comme

$$\|S(\lambda)u(t+h) - S(\lambda)u(t)\|_X \leq \int_t^{t+h} \|F(u(s)\|_X \, ds + \varepsilon \int_0^t \|F(u(s)\|_X \, ds$$

on définit $v(t)$ par :

$$v(t)=\begin{cases} u(t)\ \forall 0\leq t\leq T \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\|S(\lambda)v(t+h)-S(\lambda)v(t)\|_1\leq(h+\varepsilon T)\,\|F(u(s)\|_1$$

Impliquant que tout $\{S(\lambda)v;\|F\|_1\leq 1\}$ est équi-intégrable, alors il est conventionnel que tous $\{S(\lambda)L(F)(t);\|F\|_1\leq 1\}$ est relativement compact dans $L^1([0,T]\,,X)$, ainsi $S(\lambda)L$ est compact

Etape 2 : Montrons que $S(\lambda)L$ converge vers L lorsque λ tend vers 0 dans $L^1([0,T]\,,X)$

On a :

$$S(\lambda)u(t)-u(t)=\int_0^t S(\lambda+t-s)F(u(s))ds-\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$$

donc pour $t\geq\delta$ on a :

$$\|S(\lambda)u(t)-u(t)\|\leq\int_\delta^t\|S(\lambda+s)-S(s)\|_{\pounds(X)}\,\|F(u(s)\|\,ds+2\int_{t-\delta}^t\|F(u(s)\|\,ds$$

choisissons $0<\lambda<\eta$ alors

$$\|S(\lambda)u(t)-u(t)\|\leq\varepsilon\int_\delta^t\|F(u(s)\|\,ds+2\int_{t-\delta}^t\|F(u(s)\|\,ds$$

et pour $0\leq t\leq\delta$ on a :

$$\|S(\lambda)u(t)-u(t)\|\leq 2\int_0^t\|F(u(s)\|\,ds$$

comme $F\in L^1\left([0,T],X\right)$ on trouve

$$\|S(\lambda)u(t)-u(t)\|\leq(\varepsilon T+2\delta)\,\|F(u(s)\|_1$$

donc si $\lambda\to 0$ alors $S(\lambda)u\to u$ dans $L^1\left([0,T],X\right)$. d'où l' opérateur L est une limite uniforme d'opérateur linéaire compact entre deux espaces de Banach donc L est compact dans $L^1\left([0,T],X\right)$ ■

Remarque 5.3.1 *Le semi-groupe $S(t)$ engendré par l'opérateur Δ est compact dans $L^1\left(\Omega\right)$*

5.4 Etude d'un système particulier

On a $\forall\ n > 0$; on définit les fonctions u_{n_0} et v_{n_0} par $u_{n_0} = \min(u_0, n) \geq 0$ et $v_{n_0} = \min(v_0, n) \geq 0$

$$u_{n_0} = \min(u_0, n) = \begin{cases} u_0 & si\ u_0 \leq n \\ n & si\ non \end{cases}$$

alors

$$\int_\Omega u_{n_0} dx = \begin{cases} \int_\Omega u_0 dx < \infty & \text{car } u_0 \in L^1(\Omega) \text{ si } u_0 \leq n \\ \int_\Omega n dx = n\,|\Omega| < \infty & \text{car } \Omega \text{ est borné } si\ non \end{cases}$$

donc $\int_\Omega u_{n_0} dx < \infty$ ce qui implique que $u_{n_0} \in L^1(\Omega)$, même chose pour v_{n_0}, alors u_{n_0} et v_{n_0} vérifié (H1), i.e.

$$\begin{aligned} u_{n_0} &\in L^1(\Omega), w_{n_0} \geq 0 \\ v_{n_0} &\in L^1(\Omega), z_{n_0} \geq 0 \end{aligned}$$

Pour tout $n > 0$; on définit les fonctions w_{n_0} et z_{n_0} par $w_{n_0} = \min(w_0, n) \geq 0$ et $z_{n_0} = \min(z_0, n) \geq 0$

il est clair que w_{n_0} et z_{n_0}vérifié (H1), alors

$$\begin{aligned} w_{n_0} &\in L^1(\Omega), w_{n_0} \geq 0 \\ z_{n_0} &\in L^1(\Omega), z_{n_0} \geq 0 \end{aligned}$$

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - d_1 \Delta u_n - d_2 \Delta v_n = f(u_n, v_n) & sur\ [0, T[\times\Omega \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} - d_3 \Delta u_n - d_4 \Delta v_n = g(u_n, v_n) & sur\ [0, T[\times\Omega \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} = \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0 & sur\ [0, T[\times\partial\Omega \\ u_n(.,0) = u_{n0}(.), v_n(.,0) = v_{n0}(.) & sur\ \Omega \end{cases} \qquad (\mathrm{p}_n)$$

5.4.1 Existence locale

On transforme le problème (p_n) à la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} w_{nt} - \lambda_1 \Delta w_n = F(w_n, z_n) & sur\ [0,T[\times\Omega \\ z_{nt} - \lambda_2 \Delta z_n = G(w_n, z_n) & sur\ [0,T[\times\Omega \\ \frac{\partial w_n}{\partial \eta} = \frac{\partial z_n}{\partial \eta} = 0 & sur\ [0,T[\times\partial\Omega \\ \quad w_n\left(0,.\right) = w_{n0}\left(x\right), z_n(0,.) = z_{n0}(x) & sur\ \Omega \end{array}\right. \quad (s_n)$$

dans l'espace de Banach $X = L^1\left(\Omega\right) \times L^1\left(\Omega\right).$

Ainsi, le système (s_n) peut être renvoyé à la forme du système (5.5), donc si (w_n, z_n) est une solution de (s_n),vérifie les équations intégrales :

$$\left\{\begin{array}{l} w_n(x,t) = S_{\lambda_1}(t) w_{n_0} + \int_0^t S_{\lambda_1}(t-s) F(w_n(s), z_n(s)) ds\ \forall t \in [0,T[\\ z_n(x,t) = S_{\lambda_2}(t) z_{n_0} + \int_0^t S_{\lambda_2}(t-s) G(w_n(s), z_n(s)) ds\ \forall t \in [0,T[\end{array}\right. \tag{5.7}$$

Où $S_{\lambda_1}(t), S_{\lambda_2}(t)$ sont des semi-groupes de contractions dans $L^1(\Omega)$ générés par $\lambda_1 \Delta w, \lambda_2 \Delta z$

Lemme 5.4.1 *Il existe $T_M > 0$ et (w_n, z_n) une solution locale de (s_n) pour tout $t \in [0, T_M]$*

Preuve. On sait que $S_{\lambda_1}(t), S_{\lambda_2}(t)$ sont les semi-groupes de contraction et puisque $\{F(w_n(s), z_n(s)), G(w_n(s), z_n(s))\}$ est locallement Lipschitzienne dans l'espace X , alors on a $\exists T_M > 0$ et (w_n, z_n) une solution locale de (s_n) sur $[0, T_M]$. ■

5.4.2 Positivité de la solution de système (p_n)

Lemme 5.4.2 *Soit (w_n, z_n) la solution de problème (s_n) tel que* $\left\{\begin{array}{c} w_{n_0}(x) \geq 0, \forall x \in \Omega \\ z_{n_0}(x) \geq 0, \forall x \in \Omega \end{array}\right\}$

alors $w_n(x,t) \geq 0$ et $z_n(x,t) \geq 0$,$\forall (x,t) \in \Omega \times [0,T[$

Preuve. 1.positivité de w_n

Soit

$$\overline{w_n}(x,t) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0,T[\Rightarrow \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial t} = 0 \text{ et } \triangle \overline{w_n} = 0$$

alors

$$w_{nt} - \lambda_1 \Delta w_n - F(w_n, z_n) = 0 \geq \overline{w_{n_t}} - \lambda_1 \Delta \overline{w_n} - F(\overline{w_n}, z_n)$$

et

$$w_n(x,0) = w_0(x) \geq 0 = \overline{w_n}(x,0)$$

D'aprés le critère de comparaison on trouve

$$w_n(x,t) \geq \overline{w_n}(x,t)$$

donc

$$w_n(x,t) \geq 0$$

2.positivité de z_n

Soit

$$\overline{z_n}(x,t) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0,T[\Rightarrow \frac{\partial \overline{z_n}}{\partial t} = 0 \text{ et } \triangle \overline{z_n} = 0$$

alors

$$z_{nt} - \lambda_2 \Delta z_n - G(w_n, z_n) = 0 \geq \overline{z_{n_t}} - \lambda_2 \Delta \overline{z_n} - G(w_n, \overline{z_n})$$

et

$$z_n(x,0) = z_0(x) \geq 0 = \overline{z_n}(x,0)$$

D'aprés le critère de comparaison on trouve

$$z_n(x,t) \geq \overline{z_n}(x,t)$$

donc

$$z_n(x,t) \geq 0$$

■

5.4.3 Existence globale de la solution du système (p_n)

Pour prouver l'existence globale de la solution du système (p_n) pour tout t non-négatif $t, \forall t > 0$, il suffit de trouver une estimation de la solution pour tout $t \geq 0$ selon A.Haraux-M.Kirane [17], D.Henry [19], F.Routh [22].

Pour cela, on a besoin les lemmes suivants :

Lemme 5.4.3 *Soit (w_n, z_n) une solution d'un système (s_n), alors il existe $M(t)$ qui dépend seulement de t tel que $\forall 0 \leq t \leq T_M$*

on a : $\|w_n(t)+z_n(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq M(t)$

Preuve. Nous ajoutons la première et la deuxième équation de (s_n) on obtient

$$(w_n+z_n)-\Delta(\lambda_1 w_n+\lambda_2 z_n)=F(w_n,z_n)+G(w_n,z_n)$$

En prenant en compte l'hypothèse (5), nous avons :

$$(w_{nt}+z_{nt})-\Delta(\lambda_1 w_n+\lambda_2 z_n)\leq c\,(w_n+z_n+1)$$

En intégrant sur Ω et en appliquant la formule de Green, nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (w_n,z_n)dx \leq c\int_\Omega (w_n+z_n+1)\,dx$$

ce qui implique

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (w_n,z_n)dx}{\int_\Omega (w_n+z_n+1)\,dx}\leq c$$

Intégrer sur $[0,T]$ on obtient

$$\ln\left[\int_\Omega (w_n+z_n+1)\,dx\right]_0^t \leq ct$$

donc

$$\ln\frac{\int_\Omega (w_n+z_n+1)\,dx}{\int_\Omega (w_{n_0}+z_{n_0}+1)\,dx}\leq ct$$

ce qui implique

$$\frac{\int_\Omega (w_n+z_n+1)\,dx}{\int_\Omega (w_{n_0}+z_{n_0}+1)\,dx}\leq \exp(ct)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (w_n+z_n+1)\,dx \leq \exp(ct)\int_\Omega (w_{n_0}+z_{n_0}+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (w_n+z_n)\,dx \leq \int_\Omega (w_n+z_n+1)\,dx \leq \exp(ct)\int_\Omega (w_{n_0}+z_{n_0}+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (w_n+z_n)\,dx \leq \exp(ct)\int_\Omega (w_0+z_0+1)\,dx \text{ car } w_{n_0}\leq w_0 \text{ et } z_{n_0}\leq z_0$$

Mettons

$$M(t)=\exp(ct)\int_\Omega (w_0+z_0+1)\,dx=\exp(ct)\,\|(w_0+z_0+1)\|_{L^1(\Omega)}$$

Ainsi w_n, z_n sont positifs alors

$$\|w_n+z_n\|_{L^1(\Omega)}\leq M(t), \forall 0\leq t\leq T_M$$

On peut conclure de cette estimation que la solution (w_n,z_n) donnée par le théorème (5.2.1) est globale. ■

5.5 Existence globale de la solution du système (5.1)-(5.3)

Lemme 5.5.1 *Pour toute solution (w_n, z_n) de (s_n) il existe une constante $K(t)$ qui ne dépend que de t telle que*

$$\|w_n(t) + z_n(t)\|_{L^1(\Phi)} \leq K(t)(\|w_0 + z_0\|_{L^1(\Omega)} + 1)$$

Preuve. Pour prouver ce lemme; Nous utilisons les résultats suivants : (voir S.L.Hollis-H.Martin-M.Pierre [21] et S.Bonafede-D.Schmitt [8]).

Donc, nous introduisons $\theta \in C_0^\infty(\Phi), \theta \geq 0$ et $\varphi \in C^{2,1}(\Phi)$ une solution non-négative du système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - d_1 \triangle \varphi = \theta & \text{sur } \Phi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ \varphi(., T) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{s}$$

Selon O.A.Ladyzenskaya, V.A.Solonnikov [29] (s) possède une solution non-négative unique.

De plus, pour tout $q \in]1, +\infty[$, il existe une constante positive C indépendante de θ telle que $\|\varphi\|_{L^q(\Phi)} \leq C \|\theta\|_{L^q(\Phi)}$

Selon S.Bonafede-D.Schmitt [8] nous avons :

$$\int_\Phi S_{\lambda_1}(t) w_{n_0} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - d_1 \triangle \varphi\right) dxdt = \int_\Omega w_{n_0}(x) \varphi(x, 0) dx \tag{5.8}$$

$$\int_\Phi S_{\lambda_2}(t) z_{n_0} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - d_1 \triangle \varphi\right) dxdt = \int_\Omega z_{n_0}(x) \varphi(x, 0) dx \tag{5.9}$$

$$\int_\Phi S_{\lambda_1}(t) z_{n_0} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - d_1 \triangle \varphi\right) dxdt = \int_\Omega z_{n_0}(x) \varphi(x, 0) dx \tag{5.10}$$

$$\int_\Phi S_{\lambda_2}(t) w_{n_0} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - d_1 \triangle \varphi\right) dxdt = \int_\Omega w_{n_0}(x) \varphi(x, 0) dx \tag{5.11}$$

et cela

$$\int_\Phi (\int_0^t S_{\lambda_1}(t-s) F(w_n, z_n) ds) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - d_1 \triangle \varphi\right) dxdt = \int_\Phi F(w_n, z_n) \varphi(x, s) dxds \tag{5.12}$$

$$\int_\Phi (\int_0^t S_{\lambda_2}(t-s) F(w_n, z_n) ds) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - d_1 \triangle \varphi\right) dxdt = \int_\Phi F(w_n, z_n) \varphi(x, s) dxds \tag{5.13}$$

$$\int_{\Phi}(\int_{0}^{t} S_{\lambda_1}(t-s)G(w_n,z_n)ds)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-d_1\triangle\varphi\right)dxdt=\int_{\Phi}G(w_n,z_n)\varphi(x,s)dxds \quad (5.14)$$

$$\int_{\Phi}(\int_{0}^{t} S_{\lambda_2}(t-s)G(w_n,z_n)ds)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-d_1\triangle\varphi\right)dxdt=\int_{\Phi}G(w_n,z_n)\varphi(x,s)dxds \quad (5.15)$$

$$\int_{\Phi}(S_{\lambda_1}(t)w_{n_0})\theta dxdt=\int_{\Omega}w_{n_0}(x)\varphi(x,0)dx \quad (5.16)$$

$$\int_{\Phi}(\int_{0}^{t} S_{\lambda_1}(t-s)F(w_n,z_n)ds)\theta dxdt=\int_{\Phi}F(w_n,z_n)\varphi(x,s)dxds \quad (5.17)$$

$$\int_{\Phi}(S_{\lambda_2}(t)z_{n_0})\theta dxdt=\int_{\Omega}z_{n_0}(x)\varphi(x,0)dx \quad (5.18)$$

$$\int_{\Phi}(\int_{0}^{t} S_{\lambda_2}(t-s)G(w_n,z_n)ds)\theta dxdt=\int_{\Phi}G(w_n,z_n)\varphi(x,s)dxds \quad (5.19)$$

En multipliant la première équation de (5.7) par θ, et nous intégrons sur Φ, en utilisant (5.16) et (5.17) on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Phi}w_n\theta dxdt &= \int_{\Phi}(S_{\lambda_1}(t)w_{n_0})\theta dxdt+\int_{\Phi}(\int_{0}^{t}S_{\lambda_1}(t-s)F(w_n,z_n)ds)\theta dxdt\\ &= \int_{\Omega}w_{n_0}(x)\varphi(x,0)dx+\int_{\Phi}F(w_n,z_n)\varphi(x,s)dxds\end{aligned}$$

En multipliant la seconde équation de (5.7) par θ, et nous intégrons sur Φ, en utilisant (5.18) et (5.19) nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\Phi}z_n\theta dxdt &= \int_{\Phi}(S_{\lambda_2}(t)z_{n_0})\theta dxdt+\int_{\Phi}(\int_{0}^{t}S_{\lambda_2}(t-s)G(w_n,z_n)ds)\theta dxdt\\ &= \int_{\Omega}z_{n_0}(x)\varphi(x,0)dx+\int_{\Phi}G(w_n,z_n)\varphi(x,s)dxds\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{\Phi}(w_n+z_n)\theta dxdt &= \int_{\Omega}(w_{n_0}(x)+z_{n_0}(x))\varphi(x,0)dx+\int_{\Phi}(F(w_n,z_n)+G(w_n,z_n))\varphi(x,s)dxds\\ &\leq \int_{\Omega}(w_{n_0}(x)+z_{n_0}(x))\varphi(x,0)dx+\int_{\Phi}c\left(w_n+z_n+1\right)\varphi(x,s)dxds\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder nous déduisons :

$$\int_{\Phi}(w_n+z_n)\theta dxdt\leq\|w_0+z_0\|_{L^1(\Omega)}\bullet\|\varphi(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)}+c\left\|w_n+z_n+1\right\|_{L^1(\Phi)}\bullet\|\varphi\|_{L^\infty(\Phi)}$$

$$\leq K_1(\|w_0+z_0\|_{L^1(\Omega)}+\left\|w_n+z_n\right\|_{L^1(\Phi)}+1)\bullet\|\theta\|_{L^\infty(\Phi)}$$

Comme θ est arbitraire dans $C_0^\infty(\Phi)$ cela implique

$$\|w_n + z_n\|_{L^1(\Phi)} \leq K_1(\|w_0 + z_0\|_{L^1(\Omega)} + \|w_n + z_n\|_{L^1(\Phi)} + 1)$$

On prend $K = \frac{K_1(t)}{1-K_1(t)}$ on trouve : $\|w_n + z_n\|_{L^1(\Phi)} \leq K(t)(\|w_0 + z_0\|_{L^1(\Omega)} + 1)$ ∎

Preuve. du théorème 5.1.1:

Définissons l'application L comme suit :

$$L : (m_0, h) \to S_d(t)m_0 + \int_0^t S_d(t-s)h(s)ds$$

Où $S_d(t)$ le semi-groupe de contraction engendré par l'opérateur $d\Delta$ selon le résultat précédent dans le théorème (5.3.1) et $S_d(t)$ est compact, alors l'application L est la somme des deux applications compactes sur $L^1(\Phi)$ alors l'application L est compacte $L^1(\Phi) \times L^1(\Phi)$ dans $L^1(\Phi)$.

Par conséquent, il existe une sous-suite (w_{n_j}, z_{n_j}) de (w_n, z_n) dans $L^1(\Phi) \times L^1(\Phi)$ tel que (w_{n_j}, z_{n_j}) converge vers (w, z)

Montrons que (w_{n_j}, z_{n_j}) est une solution de (5.7)

nous avons :

$$\begin{cases} w_{n_j}(t,x) = S_{\lambda_1}(t)w_{n_0} + \int_0^t S_{\lambda_1}(t-s)F(w_{n_j}, z_{nj})ds \ \forall t \in [0, T[\\ z_{n_j}(t,x) = S_{\lambda_2}(t)z_{n_0} + \int_0^t S_{\lambda_2}(t-s)G(w_{nj}, z_{nj})ds \ \forall t \in [0, T[\end{cases} \tag{p$_j$}$$

Il suffit de montrer que (w, z) satisfait (5.4)

Il est clair que si $j \to \infty$, on a les limites suivantes :

$$\begin{aligned} F(w_{n_j}, z_{nj}) &\to F(w, z) \quad p.p \\ G(w_{nj}, z_{nj}) &\to G(w, z) \quad p.p \end{aligned} \tag{5.20}$$

et

$$\begin{aligned} w_{n_0} &\to w_0 \\ z_{n_0} &\to z_0 \end{aligned}$$

Donc pour montrer que si (w,z) vérifie (5.4), il reste à montrer que :

$$\begin{aligned} F(w_{n_j}, z_{nj}) &\rightarrow F(w,z) \\ G(w_{nj}, z_{nj}) &\rightarrow G(w,z) \end{aligned}$$

dans $L^1(\Phi)$ lorsque $j \to \infty$

Nous intégrons la première et la deuxième équations de (s_n) sur Φ en prenant en compte que

$$-\lambda_1 \int_\Phi \Delta w_{n_j} dxdt = 0, -\lambda_2 \int_\Phi \Delta z_{n_j} dxdt = 0$$

nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_{n_j} dx - \int_\Omega w_{n_0} dx &= \int_\Phi F(w_{n_j}, z_{nj}) dxdt \\ \int_\Omega z_{n_j} dx - \int_\Omega z_{n_0} dx &= \int_\Phi G(w_{n_j}, z_{nj}) dxdt \end{aligned}$$

où

$$-\int_\Phi F(w_{n_j}, z_{nj}) dxdt \leq \int_\Omega w_0 dx \tag{5.21}$$

$$-\int_\Phi G(w_{n_j}, z_{nj}) dxdt \leq \int_\Omega z_0 dx \tag{5.22}$$

Posons $N_n = C\left(w_{n_j} + z_{nj} + 1\right) - F(w_{n_j}, z_{nj})$

$$M_n = C\left(w_{n_j} + z_{nj} + 1\right) - F(w_{n_j}, z_{nj}) - G(w_{n_j}, z_{nj}) = N_n - G(w_{n_j}, z_{nj})$$

Il est clair que M_n et N_n sont positives, d'après (H3) et (H4) de (5.21) et (5.22) on trouve :

$$\begin{aligned} \int_\Phi N_n dxdt &\leq C \int_\Phi (w_{n_j} + z_{nj} + 1) dxdt + \int_\Omega w_0 dx \\ &= C \left\| w_{n_j} + z_{nj} + 1 \right\|_{L^1(\Phi)} + \|w_0\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C(\left\| w_{n_j} + z_{nj} \right\|_{L^1(\Phi)} + 1) + \|w_0\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C(K(t) \|w_0 + z_0 + 1\|_{L^1(\Omega)}) + 1) + \|w_0\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi} M_n dxdt &\leq C\int_{\Phi}(w_{n_j}+z_{nj}+1)dxdt+\int_{\Omega}(w_0+z_0)dx\\
&= C\left\|w_{n_j}+z_{nj}+1\right\|_{L^1(\Phi)}+\|w_0+z_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&\leq C(\left\|w_{n_j}+z_{nj}\right\|_{L^1(\Phi)}+1)+\|w_0+z_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&\leq C(K(t)\|w_0+z_0+1\|_{L^1(\Omega)})+1)+\|w_0+z_0\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

d'après le lemme (5.5.1) on trouve :

$$\begin{cases} \int_{\Phi} N_n dxdt < +\infty \\ \int_{\Phi} M_n dxdt < +\infty \end{cases} \tag{5.23}$$

d'après (5.22) on a

$F(w_{n_j}, z_{nj}) = C(w_{n_j} + z_{nj} + 1) - N_n$

$\Longrightarrow \left|F(w_{n_j}, z_{nj})\right| = \left|C(w_{n_j} + z_{nj} + 1) - N_n\right| \leq \left|C(w_{n_j} + z_{nj} + 1)\right| + |N_n|$

et (5.22) donne

$G(w_{n_j}, z_{nj}) = N_n - M_n$

$\Longrightarrow \left|G(w_{n_j}, z_{nj})\right| = |N_n - M_n| \leq |M_n| + |N_n|$

mais C, w_{n_j}, z_{nj}, M_n et N_n sont positives alors

$$\begin{aligned}
\left|F(w_{n_j}, z_{nj})\right| &\leq C(w_{n_j}+z_{nj}+1)+N_n\\
\left|G(w_{n_j}, z_{nj})\right| &\leq M_n+N_n
\end{aligned}$$

ceci entraîne

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi}\left|F(w_{n_j}, z_{nj})\right| dxdt &\leq C\int_{\Phi}(w_{n_j}+z_{nj}+1)dxdt+\int_{\Phi}N_n dxdt < +\infty\\
\int_{\Phi}\left|G(w_{n_j}, z_{nj})\right| dxdt &\leq \int_{\Phi}M_n dxdt+\int_{\Phi}N_n dxdt < +\infty
\end{aligned}$$

Soit $H_n = N_n + C(w_{n_j} + z_{nj} + 1)$ $\quad , \Psi_n = N_n + M_n$

$H_n, \Psi_n \in L^1(\Phi)$

on a H_n et Ψ_n sont de $L^1(\Phi)$, et aussi sont positives, de plus

$$\begin{aligned}
\left|F(w_{n_j}, z_{nj})\right| &\leq H_n \quad \text{p.p}\\
\left|G(w_{n_j}, z_{nj})\right| &\leq \Psi_n \quad \text{p.p}
\end{aligned}$$

Combinons ce résultat avec (5.20) et en appliquant le théorème (5.2.2), on aura bien :

$$\begin{aligned} F(w_{n_j}, z_{nj}) &\rightarrow F(w,z) \qquad \text{dans } L^1(\Phi) \\ G(w_{nj}, z_{nj}) &\rightarrow G(w,z) \qquad \text{dans } L^1(\Phi) \end{aligned}$$

par passage à la limite quand $j \to \infty$ de (p_j) dans $L^1(\Phi)$, on trouve :

$$\begin{cases} w(t,x) = S_{\lambda_1}(t)w_0 + \int_0^t S_{\lambda_1}(t-s)F(w(s),z(s))ds \ \forall t \in [0,T[\\ z(t,x) = S_{\lambda_2}(t)z_0 + \int_0^t S_{\lambda_2}(t-s)G(w(s),z(s))ds \ \forall t \in [0,T[\end{cases}$$

donc (w,z) vérifie (5.4) par conséquent (w,z) est une solution du (5.1)-(5.3) ■

CHAPITRE 6

Comportement asymptotique de la solution d'un système de réaction-diffusion avec matrice de diffusion pleine

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique du système parabolique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f(u,v) & sur \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_3 \Delta u - d_4 \Delta v = g(u,v) & sur \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Lorsque Ω est un domaine régulier et borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$, $x \in \Omega$, $t > 0$ sont fonctions à valeurs réelles, Δ désigne le laplacien, et les constantes de diffusion d_1, d_2, d_3, d_4 sont supposées être non-négative. Également $(d_1 + d_4)^2 < 4d_2d_3$ qui reflète la parabolicité du système.

Système (6.1) est soumis à des conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad\qquad sur \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{6.2}$$

et les données initiales

$$u(.,0) = u_0(.), v(.,0) = v_0(.) \qquad\qquad sur\Omega \tag{6.3}$$

qui sont supposées être non-négatives. En ce qui concerne les functions$f$ et g, nous supposons que l'hypothèse suivante :

(**H1**) $f(r,s)$ et $g(r,s)$ sont continûment différentiables sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, telle que $f(0,s) \geq 0, g(r,0) \geq 0 \forall r, s \geq 0$

Nous savons que le problème (6.1) - (6.3) a une solution globale unique voir [30]. La principale question que nous voulons aborder est le comportement asymptotique des solutions pour le système (6.1) - (6.3). En fait, le sujet du comportement asymptotique des systèmes de réaction-diffusion a reçu beaucoup d'attention dans les dernières décennies et plusieurs résultats remarquables ont été prouvés par certains des principaux experts dans le domaine.

Cette question a été étudiée par de nombreux auteurs en tenant compte des formes particulières des termes non-linéaires f et g .

Dans le cas où la diagonale $d_1 \neq d_4$ et $d_3 = d_2 = 0$, $\Psi(v) \in C^1(\mathbb{R}^+)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u,v) = -u\Psi(v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_4 \Delta v = g(u,v) = u\Psi(v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \lambda_1 \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + (1-\lambda_1)u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \lambda_2 \dfrac{\partial v}{\partial \eta} + (1-\lambda_2)v = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases} \tag{p}$$

Notez que le comportement des solutions globales non-négatives (p) est traitée dans les journaux [12,16]. En particulier, il est prouvé qu'il ya deux constantes positives

u^*, v^* tel que $\|u(t)-u^*\|_\infty \to 0 \quad , \quad \|v(t)-v^*\|_\infty \to 0$ et $u^*\Psi(v^*)=0$ il est évident que $u^* = v^*$où u et v ne vérifie pas condition de Neumann. A.Barabanova [7] a généralisé le procédé de Haraux et Youkana où $\Psi(v)=e^{\alpha v}$ (Méthode d'estimation de l'énergie) puis Rebiai Benachour [37] traite le même cas avec des conditions plus fortes

$$\begin{cases} f(0,\eta)=g(0,\eta)=0 \\ g(\zeta,0)\geq 0, g(\zeta,\eta)\leq \Psi(\eta)f(\zeta,\eta) \\ g(\zeta,\eta)\leq C\Phi(\zeta)e^{\alpha\eta^\beta} \quad C>0 \text{ et } \alpha>0, \Phi\in C^1(\mathbb{R}^+) \text{ et } \Phi(0)=0 \end{cases}$$

où Ψ est une fonction continûment différentiable telle qu'il existe une constante $\beta \geq 1$ $\lim\limits_{\eta\to+\infty} \eta^{\beta-1}\Psi(\eta)=l$ où $l>0$. Collet et Xin [12] ont étudié le même système (p) avec les conditions aux limites sur $\mathbb{R}^n$ avec une matrice de diffusion diagonale et $\Psi(v)=v^m$, où $m\in N^*$. Ils ont prouvé l'existence de solutions globales et ont montré que la norme L^∞ de v ne peut pas croître plus vite que $O(lnt)$. En outre, le système a été étudié par Avrin [2] si $d_3=d_2=0, v=\exp\{-E/v\}, E>0$ et l'espace est la variable $\mathbb{R}$

Dans le cas d'un système triangulaire en fonction de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u = f(u,v) = -u\Psi(v) & \text{sur } \mathbb{R}^+\times\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t} - d_3\Delta u - d_4\Delta v = g(u,v) = u\Psi(v) & \text{sur } \mathbb{R}^+\times\Omega \end{cases}$$

dans le cas du domaine non borné et $\Psi(v)=v^m$ est étudié par Badraoui dans [3,4]. Dans [3], il a montré l'existence d'une solution globale si $v_0(x)\geq \frac{d_3}{d_1-d_4}u_0(x)$ et $d_1>d_4$, $d_3>0$ où $d_1<0$, $d_3<0$. Dans [4], il a prouvé que la norme L^∞ de v ne peut pas croître plus vite que $O(lnt)$. Dans le cas du domaine borné, Kirane [22] ont étudié le comportement asymptotique en utilisant la méthode de la région invariante et la théorie des semi-groupes.

Kouachi [25] a obtenu un résultat sur bornitude uniforme des solutions pour un système comme (SRD) avec une matrice de diffusion pleine satisfaire la loi de l'équilibre. Ce résultat est généralisé par Kouachi après [24] qui a utilisé la notion de régions invariantes et Lyapunov fonctionnelle. Curieusement, moins d'attention a été portée au comportement des solutions lorsque la variable spatiale x tend vers l'infini, malgré l'utilité de ce type de train pour le traitement numérique de ces problèmes. Nous ne sommes pas au courant de l'article Gladnov [16], qui généralise le résultat du comportement x tend vers l'infini avec une équation semi-linéaire posée dans $\mathbb{R}^+$ étudié par Beberns et Fulks [6]. Dans le présent travail, nous considérons le problème (SRD)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f(u,v) & sur\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t} - d_3 \Delta u - d_4 \Delta v = g(u,v) & sur\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & sur\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(.,0) = u_0(.), v(.,0) = v_0(.) & sur\ \Omega \end{cases} \tag{SRD}$$

Nous traitons première et deuxième équations (SRD) comme un système dynamique en $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ et appliquer les techniques de Lyapunov de stabilité de type. Un ingrédient clé dans cette analyse est un résultat qui établit que les orbites du système dynamique sont précompact en $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$. En conséquence de Théorème d'Ascoli, ce sera satisfaite si les orbites sont, par exemple, uniformément bornées dans $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ pour $t > 0$

6.2 Notation et résultats préliminaires

On pose dans ce qui suit $G(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

Définition 6.2.1 *soit* $\{G(t),\ t \geq 0\}$ *est une semi-groupe non linéaire dans l'espace métrique compact* X.

Définition 6.2.2 $O(u_0, v_0) = \{G(t)(u_0, v_0),\ t \geq 0\}$ *est* ***l'orbite autour*** *de* (u_0, v_0)

Définition 6.2.3 *L'ensemble* ***w-limite*** *est définie par*

$$w(u_0, v_0) = \{(u,v) \in X : \exists t_n \to \infty : G(t_n) \to (u,v)\}$$

Inégalité

On sait que $\left(\sqrt{2\varepsilon}a+\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^2\geq 0$ alors $2\varepsilon a^2+\frac{b^2}{2\varepsilon}\geq -2ab$ donc

$$-ab\leq \varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon} \tag{6.4}$$

nous avons

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),\nabla v=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\frac{\partial v}{\partial x_2},...,\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$$

$$|\nabla u|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 et\nabla u\nabla v}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

alors

$$\int_{Q_T}|\nabla u|\,|\nabla v|\,dxdt=\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt$$

remplacer $a=\frac{\partial u}{\partial x_i}\quad b=\frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans (6.4), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt &\geq \sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\left(-\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-\frac{1}{4\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dxdt\\ &= -\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dxdt-\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_T}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dxdt\\ &= -\varepsilon\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt-\frac{1}{4\varepsilon}\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt\end{aligned}$$

alors

$$\int_{Q_T}|\nabla u|\,|\nabla v|\,dxdt\geq -\varepsilon\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt-\frac{1}{4\varepsilon}\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt \tag{6.5}$$

6.3 Résultat de comportement asymptotique

L'étude du comportement asymptotique en temps de la solution du système (6.1)-(6.3) fera l'objet de cette section.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 6.3.1 *La solution $w = (u, v)$ du système (6.1)-(6.3) converge uniformément dans $\bar{\Omega}$ vers le vecteur constant $K = (K_1, K_2)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$*

c.à.d $\begin{pmatrix} u \underset{t\to\infty}{\rightarrow} K_1 \\ v \underset{t\to\infty}{\rightarrow} K_2 \end{pmatrix}$

de plus on a : $K_1 \geq 0, K_2 \geq 0, f(K_1, K_2) = 0$

et $K_1 + K_2 = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega (u_0(x) + v_0(x))\, dx.$

La preuve du théorème(6.3.1) s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 6.3.1 *Soit (u, v) la solution du problème (6.1)-(6.3) alors*

(i)$\int_{Q_T} |\nabla u|^2 \, dxdt < \infty$

(ii)$\int_{Q_T} |\nabla v|^2 \, dxdt < \infty$

où $Q_T = \Omega \times [0, T]$ et $0 < T < \infty$

Preuve. On a $\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u - d_2 \Delta v = f(u, v)$, en intégrant sur $[0, T]$ on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt = d_1 \int_0^T \Delta u dt + d_2 \int_0^T \Delta v dt + \int_0^T f(u(x,t), v(x,t))dt$$

$$u(x,T) - u(x,0) = d_1 \int_0^T \Delta u dt + d_2 \int_0^T \Delta v dt + \int_0^T f(u(x,t), v(x,t))dt$$

et en intégrant une deuxième fois sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega u(x,T)dx - \int_\Omega u(x,0)dx = d_1 \int_\Omega \int_0^T \Delta u dt dx + d_2 \int_\Omega \int_0^T \Delta v dt dx + \int_\Omega \int_0^T f(u(x,t), v(x,t))dt dx$$

On applique la formule de Green à $\int_\Omega \Delta u dx$ et $\int_\Omega \Delta v dx$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla 1 dx \qquad \text{donc} \quad \int_\Omega \Delta u dx = 0 \\ \int_\Omega \Delta v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma - \int_\Omega \nabla v \nabla 1 dx \qquad \text{donc} \quad \int_\Omega \Delta v dx = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega \int_0^T f(u(x,t), v(x,t))dt dx = \int_\Omega u_0(x)dx - \int_\Omega u(x,T)dx < \infty$$

car $u(T) \in C(\overline{\Omega})$

c.à.d

$$\int_{Q_T} f(u(x,t),v(x,t))dtdx < \infty$$

De la même manière $\frac{\partial v}{\partial t} - d_3\Delta u - d_4\Delta v = g\left(u,v\right)$ nous obtenons que

$$\int_{Q_T} g(u(x,t),v(x,t))dtdx < \infty$$

Multiplier maintenant l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u - d_2\Delta v = f\left(u,v\right)$ par u et en intégrant sur Q_T

On a :

$$\int_\Omega\int_0^T u\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dtdx = d_1\int_\Omega\int_0^T u\Delta udtdx + d_2\int_\Omega\int_0^T u\Delta vdtdx + \int_\Omega\int_0^T uf(u(x,t),v(x,t))dtdx$$

en appliquant la formule Green

$$\int_\Omega u\Delta udx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma - \int_\Omega\left|\nabla u\right|^2dx, \qquad \text{donc } \int_\Omega u\Delta udx = -\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2dx$$

et un calcul simple, il devient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega[u^2(x,t)]_0^T dx = -d_1\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2dxdt - d_2\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla u\right|\left|\nabla v\right|dxdt + \int_0^T\int_\Omega u(x,t)f(u(x,t),v(x,t))dxdt$$

c.à.d

$$\int_\Omega u^2(x,T) + 2d_1\int_{Q_T}\left|\nabla u\right|^2dxdt + 2d_2\int_{Q_T}\left|\nabla u\right|\left|\nabla v\right|dxdt = \int_\Omega u_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T}u(x,t)f(u(x,t),v(x,t))dxdt$$

par conséquent

$$\begin{aligned} 2d_1\int_{Q_T}\left|\nabla u\right|^2dxdt + 2d_2\int_{Q_T}\left|\nabla u\right|\left|\nabla v\right|dxdt \ \leq\ & \int_\Omega u_0^2(x)dx \\ & + 2\int_{Q_T}u(x,t)f(u(x,t),v(x,t))dxdt \end{aligned} \tag{6.6}$$

Multiplier l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} - d_3\Delta u - d_4\Delta v = g\left(u,v\right)$ par v et l'intégration sur Q_T est obtenu

$$\int_\Omega\int_0^T v\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)dtdx = d_3\int_\Omega\int_0^T v\Delta udtdx + d_4\int_\Omega\int_0^T v\Delta vdtdx + \int_\Omega\int_0^T vg(u(x,t),v(x,t))dtdx$$

en appliquant la formule de Green

$$\int_\Omega v\Delta vdx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\eta}d\sigma - \int_\Omega\left|\nabla v\right|^2dx, \qquad \text{donc } \int_\Omega v\Delta vdx = -\int_\Omega\left|\nabla v\right|^2dx$$

ainsi

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [v^2(x,t)]_0^T dx = -d_3\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla v|\,dxdt - d_4\int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^2\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega v(x,t)g(u(x,t),v(x,t))dxdt$$

$$\int_\Omega v^2(x,T) + 2d_3\int_{Q_T}|\nabla u|\,|\nabla v|\,dxdt + 2d_4\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt = \int_\Omega v_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T} v(x,t)g(u(x,t),v(x,t))dxdt$$

par conséquent

$$\begin{aligned} 2d_3\int_{Q_T}|\nabla u|\,|\nabla v|\,dxdt + 2d_4\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt \ &\leq \ \int_\Omega v_0^2(x)dx + \\ &\quad 2\int_{Q_T} v(x,t)g(u(x,t),v(x,t))dxdt \end{aligned} \tag{6.7}$$

Remplacer (6.5) dans l'inégalité (6.4) se trouve

$$\begin{aligned} & 2d_1\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt + 2d_2\left(-\varepsilon\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt - \frac{1}{4\varepsilon}\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt\right) \\ \leq\ & 2d_1\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt + 2d_2\int_{Q_T}|\nabla u|\,|\nabla v|\,dxdt \\ \leq\ & \int_\Omega u_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T} u(x,t)f(u(x,t),v(x,t))dxdt \qquad \text{because } (d_2 \geq 0) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (2d_1 - 2\varepsilon d_2)\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt &\leq \frac{d_2}{2\varepsilon}\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt \\ &+ \int_\Omega u_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T} u(x,t)f(u(x,t),v(x,t))dxdt \end{aligned} \tag{6.8}$$

Remplacer (6.5) dans l'inégalité (6.7) se trouve

$$\begin{aligned} & 2d_4\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt + 2d_3\left(-\varepsilon\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt - \frac{1}{4\varepsilon}\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt\right) \\ \leq\ & 2d_4\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt + 2d_3\int_{Q_T}|\nabla u|\,|\nabla v|\,dxdt \\ \leq\ & \int_\Omega v_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T} v(x,t)g(u(x,t),v(x,t))dxdt \qquad \text{car } (d_3 \geq 0) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (2d_4 - \frac{d_3}{2\varepsilon})\int_{Q_T}|\nabla v|^2\,dxdt \ &\leq\ 2d_3\varepsilon\int_{Q_T}|\nabla u|^2\,dxdt \\ &\quad + \int_\Omega v_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T} v(x,t)g(u(x,t),v(x,t))dxdt \end{aligned} \tag{6.9}$$

Nous remplaçons (6.9) dans (6.8) :

$$(2d_4 - \frac{d_3}{2\varepsilon} - \frac{d_2 d_3}{2d_1 - 2\varepsilon d_2}) \int_{Q_T} |\nabla u|^2 \, dxdt \leq \frac{1}{2d_1 - 2\varepsilon d_2} \times A$$

où

$$\begin{aligned} A &= \int_\Omega u_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T} u(x,t)f(u(x,t),v(x,t))dxdt \\ &\quad + \int_\Omega v_0^2(x)dx + 2\int_{Q_T} v(x,t)g(u(x,t),v(x,t))dxdt \end{aligned}$$

puisque

$$\int_\Omega u_0^2(x)dx < \infty, \int_\Omega v_0^2(x)dx < \infty$$

et

$$\int_{Q_T} v(x,t)g(u(x,t),v(x,t))dxdt \leq \|v\|_{L^\infty(Q_T)} \int_{Q_T} g(u(x,t),v(x,t))dxdt < \infty$$

et

$$\int_{Q_T} u(x,t)f(u(x,t),v(x,t))dxdt \leq \|u\|_{L^\infty(Q_T)} \int_{Q_T} f(u(x,t),v(x,t))dxdt < \infty$$

par conséquent (ii)

$$\int_{Q_T} |\nabla v|^2 \, dxdt < \infty$$

on a (6.8), et d'aprés (ii) nous obtenons :

$(2d_1 - 2\varepsilon d_2) \int_{Q_T} |\nabla u|^2 \, dxdt < \infty$, ε pour suffisamment grand pour que

$(2d_1 - 2\varepsilon d_2) > 0 \Rightarrow \varepsilon > \frac{d_1}{d_2}$

donc

$$\int_{Q_T} |\nabla u|^2 \, dxdt < \infty; \forall T > 0$$

Alors u, v sont globallement bornées ■

Preuve. de théorème 6.3.1

D'abord, nous remarquons que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = d_1 \int_\Omega \Delta u dx + d_2 \int_\Omega \Delta v dx + \int_\Omega f(u(x,t),v(x,t))dx$$

Ainsi

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = \int_\Omega f(u(x,t),v(x,t))dx \qquad \text{car } \int_\Omega \Delta u dx = 0 \text{ et } \int_\Omega \Delta v dx = 0$$

et

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)dx = d_3 \int_\Omega \Delta u dx + d_4 \int_\Omega \Delta v dx + \int_\Omega g(u(x,t),v(x,t))dx$$

alors

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)dx = \int_\Omega g(u(x,t),v(x,t))dx \qquad \text{car } \int_\Omega \Delta u dx = 0 \text{ et } \int_\Omega \Delta v dx = 0$$

ce qui implique

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x,t))dx = 0 \quad \text{Si } g = -f$$

comme

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x,t))dx &= \int_\Omega \int_0^t (\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x,t))dtdx \\
&= \int_\Omega [u(x,t) + v(x,t)]_0^t dx \\
&= \int_\Omega [u(x,t) + v(x,t)]dx - \int_\Omega [u_0(x) + v_0(x)]dx = 0
\end{aligned}$$

on déduit que

$$\int_\Omega [u(x,t) + v(x,t)]dx = \int_\Omega [u_0(x) + v_0(x)]dx = 0 \tag{6.10}$$

Intégrant l'équation (6.1) sur Ω on a

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = \int_\Omega f(u(x,t),v(x,t))dx > 0$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx > 0$$

c-à-d. la fonction $t \to \int_\Omega u(x,t)dx$ est croissante et comme Ω est bornée

alors $t \to \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx$ est croissante et d'après la positivité de u on a

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx \geq 0$$

par conséquent comme $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx$ est bornée inférieurement et croissante alors

$$\exists \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx = l_1$$

et même chose pour l'équation (6.2) on a

$$\int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)dx = -\int_\Omega f(u(x,t),v(x,t))dx < 0$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx < 0$$

c.à.d . la fonction $t \to \int_\Omega v(x,t)dx$ est décroissante et comme Ω est bornée

alors $t \to \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x,t)dx$ est décroissante

On sait que la solution v est bornée donc

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x,t)dx < \infty$$

par conséquent $\exists M > 0$ telle que $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x,t)dx \leq M$

comme $\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega v(x,t)dx$ est bornée supérieurement et décroissante alors

$$\exists \lim_{t\to\infty}\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x,t)dx = l_2$$

D'autre part, Les ensembles $\{u(t),\ t \geq 0\}$ et $\{v(t),\ t \geq 0\}$ sont des ensembles précompacts dans $C(\bar{\Omega})$

donc, il existe une suite (t_n), $t_n \to \infty$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} u(t_n) = u_s \quad \text{dans } C(\bar{\Omega})$$

$$\lim_{n\to\infty} v(t_n) = v_s \quad \text{dans } C(\bar{\Omega}).$$

Maintenant , Notons $w(u_0,v_0)$ l'ensemble w-limite ppour (u_0,v_0), Définissons Φ : l'ensemble des solutions du système elliptique

$$\begin{cases} -d_1\Delta u_s - d_2\Delta v_s = f\left(u_s,v_s\right) & sur\ \mathbb{R}^+\times\Omega \qquad (6.11) \\ -d_3\Delta u_s - d_4\Delta v_s = -f\left(u_s,v_s\right) & sur\ \mathbb{R}^+\times\Omega \qquad (6.12) \\ \frac{\partial u_s}{\partial\eta} = \frac{\partial v_s}{\partial\eta} = 0 & sur\ \mathbb{R}^+\times\partial\Omega \end{cases} \qquad ((s))$$

et montrons que $\Phi = \{(K_1,K_2)\}$ où K_1,K_2 sont deux constantes positives; au de fait.

Ajoutons à l'quation (6.11) $d_2\Delta v_s$ on trouve $-d_1\Delta u_s = f\left(u_s,v_s\right) + d_2\Delta v_s$

Multiplions cet équation par u_s et intégrons sur Ω, on obtient

$$-d_1 \int_\Omega u_s \Delta u_s dx = \int_\Omega u_s f(u_s, v_s)\, dx + d_2 \int_\Omega u_s \Delta v_s dx$$

Appliquer la formule de Green :

$$d_1 \int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = \int_\Omega u_s f(u_s, v_s)\, dx + d_2 \int_\Omega |\nabla u_s| \, |\nabla v_s| \, dx$$

Ajoutons à l'quation (6.12) $d_4 \Delta v$ on trouve $-d_3 \Delta u_s = -f(u_s, v_s) + d_4 \Delta v_s$

Multiplions cet équation par u_s et intégrons sur Ω, on obtient

$$-d_3 \int_\Omega u_s \Delta u_s dx = -\int_\Omega u_s f(u_s, v_s)\, dx + d_4 \int_\Omega u_s \Delta v_s dx$$

Appliquer la formule de Green

$$d_3 \int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = -\int_\Omega u_s f(u_s, v_s)\, dx + d_4 \int_\Omega |\nabla u_s| \, |\nabla v_s| \, dx$$

Supposant $d_4 = -d_2$ donc $(d_1 + d_3) \int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = 0$

en déduit que

$$\int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = 0 \Rightarrow \nabla u_s = 0 \Rightarrow u_s = K_1 \tag{6.13}$$

Additionner les deux équations de (s), en multipliant le résultat par v_s et intégrant sur Ω, on trouve

$$-d_1 \int_\Omega v_s \Delta u_s dx - d_2 \int_\Omega v_s \Delta v_s dx - d_3 \int_\Omega v_s \Delta u_s dx - d_4 \int_\Omega v_s \Delta v_s dx = 0$$

$$(-d_1 - d_3) \int_\Omega |\nabla u_s| \, |\nabla v_s| \, dx + (-d_2 - d_4) \int_\Omega |\nabla v_s|^2 \, dx = 0$$

donc $(-d_2 - d_4) \int_\Omega |\nabla v_s|^2 \, dx = 0$ c.à.d

$$\int_\Omega |\nabla v_s|^2 \, dx = 0 \Rightarrow \nabla v_s = 0 \Rightarrow v_s = K_2 \tag{6.14}$$

remplaçant $u = K_1, v = K_2$ dans l'équation (6.11).

Il est clair que $f(K_1, K_2) = 0$

Ci-après, nous allons montrer que $w(u_0, v_0) = \Phi = \{(K_1, K_2)\}$

Nous observons que $w\left(u_0, v_0\right) \neq \varnothing$, car $\left(u_s, v_s\right) \in w\left(u_0, v_0\right)$.

Maintenant, $\forall x \in \Omega, \sigma \in]-1, 1[$ et soit

$$p_n(x,\sigma) = u(x, t_n+\sigma), q_n(x,\sigma) = v(x, t_n+\sigma)$$

multiplier la première équation (6.1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - d_1\frac{\partial u}{\partial t}\Delta u - d_2\frac{\partial u}{\partial t}\Delta v = \frac{\partial u}{\partial t} f\left(u, v\right)$$

et intégrer sur Ω, on trouve

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t})^2 dx - d_1\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Delta u dx - d_2\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Delta v dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} f\left(u, v\right) dx$$

comme

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = d_1\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Delta u dx + d_2\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Delta v dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} f\left(u, v\right) dx$$

intégrer résultat plus $[t_0, +\infty[$, nous avons

$$\int_{t_0}^{+\infty}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt = d_1\int_{t_0}^{+\infty}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Delta u dx dt + d_2\int_{t_0}^{+\infty}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Delta v dx dt + \int_{t_0}^{+\infty}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} f\left(u, v\right) dx dt < \infty$$

donc $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left(t_0, +\infty, L^2\left(\Omega\right)\right)$

$\forall\ \sigma \in]-1, 1[$ nous avons

$$\begin{aligned}
p_n(x,\sigma) - u(x,t_n) &= u(x, t_n+\sigma) - u(x, t_n) \\
&= \int_{t_n}^{t_n+\sigma}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt \\
&\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n+1}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt \quad \text{car} \qquad t_{n-1} < t_n \ \ ,\ \sigma < 1 \ \ t_n+\sigma < t_n+1 \\
&\leq \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n+1}(1)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n+1}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ \text{(par l'inégalité de Cauchy Schwartz)} \\
&\leq \sqrt{2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n+1}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|p_n(x,\sigma) - u(x,t_n)\right|^2 = 2\int_{t_{n-1}}^{t_n+1}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))^2 dt$$

intégrant ces derniers d'inégalité sur Ω donné

$$\int_\Omega \left|p_n(x,\sigma) - u(x,t_n)\right|^2 dx \leq 2\int_\Omega\int_{t_{n-1}}^{t_n+1}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))^2 dt dx$$

nous passons à la limite comme $n \to \infty$, nous avons

$$\|p_n(x,\sigma)-u_s\|^2_{L^2(\Omega)} \le 2\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\int_{t_{n-1}}^{t_n+1}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))^2dtdx = 0$$

alors

$$\|p_n(x,\sigma)-u_s\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Par conséquent, nous allons tous $\sigma \in \left]-1,1\right[$,

$$\|p_n(x,\sigma)-u_s\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \text{ et } \sup_{-1<\sigma<1}\|p_n(x,\sigma)-u_s\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

et par le même procédé, on obtient

$$\sup_{-1<\sigma<1}\|q_n(x,\sigma)-v_s\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

En outre, nous pouvons avoir

$$\sup_{-1<\sigma<1}\|\nabla p_n(x,\sigma)-\nabla u_s\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{-1<\sigma<1}\|\nabla q_n(x,\sigma)-\nabla v_s\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

grâce à la positivité et bornitude de la solution a été

$$\begin{aligned} 0 &\le u(x,t_n+\sigma) \le M \\ 0 &\le v(x,t_n+\sigma) \le N \end{aligned}$$

comme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, nous pouvons conclure, en utilisant le théorème de Lebesgue, qui

$$f(p_n(x,\sigma),q_n(x,\sigma)) \to f(u_s,v_s) \text{ sur } L^2\left(\Omega\times\left]-1,1\right[\right) \text{faiblement}$$

Maintenant, Soit $\xi_i \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ de telle sorte que $\xi_i = 0$ sur $\partial\Omega$ où $i=1,2$

et soit $\gamma \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ de telle sorte que $supp\gamma \subset [-1,1]$, $\int_{-1}^1\gamma(s)ds = 1$ et $\gamma(-1)=\gamma(1)$

Nous multiplions la première équation (6.1) par $\gamma(t-t_n)\xi_1$ et intégrons sur $]t_n-1,t_n+1[\times\Omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_1\frac{\partial u}{\partial t}dxdt - d_1\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta udxdt \\ &-d_2\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta vdxdt \\ =&\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1 f\left(u,v\right)dxdt \end{aligned} \tag{6.15}$$

Calculer l'intégrale$\int_{t_n-1}^{t_n+1}\gamma(t-t_n)\xi_1\frac{\partial u}{\partial t}dt$ par partie, nous trouvons

$$\int_{t_n-1}^{t_n+1}\gamma(t-t_n)\xi_1\frac{\partial u}{\partial t}dt=-\int_{t_n-1}^{t_n+1}\gamma'(t-t_n)\xi_1 u(x,t)dt \tag{6.16}$$

Pour calculer$\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta udx$ en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta udx &= \int_{\partial\Omega}\gamma(t-t_n)\xi_1\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma-\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla udx\\ &= -\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla udx\end{aligned}$$

alors

$$\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta udx=-\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla udx \tag{6.17}$$

pour calculer $\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta vdx$ en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta vdx &= \int_{\partial\Omega}\gamma(t-t_n)\xi_1\frac{\partial v}{\partial\eta}d\sigma-\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla vdx\\ &= -\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla vdx\end{aligned}$$

alors

$$\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1\Delta vdx=-\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla vdx \tag{6.18}$$

injectée (6.16) et (6.17) et (6.18) dans (6.15) est obtenu

$$\begin{aligned}&-\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma'(t-t_n)\xi_1 u(x,t)dxdt+d_1\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla udxdt\\ &+d_2\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla vdxdt-\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_1 f(u,v)\,dxdt\\ =\;& 0\end{aligned} \tag{6.19}$$

Nous multiplions l'équation (6.2) par $\gamma(t-t_n)\xi_2$ et intégrant sur $]t_n-1,t_n+1[\times\Omega,$ nous avons

$$\begin{aligned}&\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_2\frac{\partial v}{\partial t}dxdt-d_3\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_2\Delta udxdt-d_4\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_2\Delta vdxdt\\ =\;& -\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega\gamma(t-t_n)\xi_2 f(u,v)\,dxdt\end{aligned} \tag{6.20}$$

Calculer l'intégrale $\int_{t_n-1}^{t_n+1}\gamma(t-t_n)\xi_2\frac{\partial v}{\partial t}dt$ par partie, nous trouvons

$$\int_{t_n-1}^{t_n+1}\gamma(t-t_n)\xi_2\frac{\partial v}{\partial t}dt=-\int_{t_n-1}^{t_n+1}\gamma'(t-t_n)\xi_2 v(x,t)dt \tag{6.21}$$

pour calculer $\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_2\Delta u dx$ en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_2\Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} \gamma(t-t_n)\xi_2\frac{\partial u}{\partial \eta}d\sigma - \int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_2\nabla u dx \\ &= -\int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_2\nabla u dx\end{aligned}$$

alors

$$\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_2\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_2\nabla u dx \tag{6.22}$$

pour calculer $\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_2\Delta v dx$ en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_2\Delta v dx &= \int_{\partial\Omega} \gamma(t-t_n)\xi_2\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma - \int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_2\nabla v dx \\ &= -\int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_2\nabla v dx\end{aligned}$$

alors

$$\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_1\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_1\nabla v dx \tag{6.23}$$

Injectée (6.21) et (6.22) et (6.23) dans (6.20) est obtenu

$$\begin{aligned}& -\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega \gamma'(t-t_n)\xi_2 v(x,t)dxdt + d_3\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_2\nabla u dxdt \\ & +d_4\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega \nabla\gamma(t-t_n)\xi_2\nabla v dxdt + \int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega \gamma(t-t_n)\xi_2 f(u,v)\,dxdt \\ = & \;\; 0 \end{aligned} \tag{6.24}$$

En faisant le changement de variable suivant

$$\left(\begin{array}{c} \sigma = t-t_n \to d\sigma = dt \\ si\left\{\begin{array}{l} t = t_n - 1 \\ t = t_n + 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{c} \sigma = -1 \\ \sigma = 1 \end{array}\right. \end{array}\right)$$

par conséquent, l'intégrale (6.19) devient

$$\begin{aligned}& \int_{-1}^{+1}\int_\Omega \gamma'(\sigma)\xi_1 p_n(x,\sigma)dxd\sigma - d_1\int_{-1}^{+1}\int_\Omega \nabla\gamma(\sigma)\xi_1\nabla p_n(x,\sigma)dxd\sigma \\ & -d_2\int_{-1}^{+1}\int_\Omega \nabla\gamma(\sigma)\xi_1\nabla q_n(x,\sigma)dxdt + \int_{-1}^{+1}\int_\Omega \gamma(\sigma)\xi_1 f\left(p_n(x,\sigma), q_n(x,\sigma)\right)dxdt \\ = & \;\; 0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Cela vaut également pour l'intégrale (6.24)

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\gamma'(\sigma)\xi_2 q_n(x,\sigma)dxd\sigma - d_3\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\nabla\gamma(\sigma)\xi_2\nabla p_n(x,\sigma)dxd\sigma \\
&-d_4\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\nabla\gamma(\sigma)\xi_2\nabla q_n(x,\sigma)dxdt - \int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\gamma(\sigma)\xi_2 f\left(p_n(x,\sigma),q_n(x,\sigma)\right)dxdt \\
= \; & 0 \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Lebesgue, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\gamma'(\sigma)\xi_1 p_n(x,\sigma)dxd\sigma &= \int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\gamma'(\sigma)\xi_1 u_s dxd\sigma = \int_{-1}^{+1}\gamma'(\sigma)d\sigma\int_{\Omega}\xi_1 u_s dx \\
&= \left[\gamma(\sigma)\right]_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\xi_1 u_s dx = 0 \text{ car } \gamma(1)=\gamma(-1)
\end{aligned}$$

et même méthode pour

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\gamma'(\sigma)\xi_2 q_n(x,\sigma)dxdt &= \int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\gamma'(\sigma)\xi_2 v_s dxd\sigma = \int_{-1}^{+1}\gamma'(\sigma)d\sigma\int_{\Omega}\xi_2 v_s dx \\
&= \left[\gamma(\sigma)\right]_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\xi_2 v_s dx = 0 \text{ car } \gamma(1)=\gamma(-1)
\end{aligned}$$

de l'inégalité (6.25), nous avons

$$-d_1\int_{\Omega}\nabla\xi_1\nabla u_s - d_2\int_{\Omega}\nabla\xi_1\nabla v_s + \int_{\Omega}\xi_1 f\left(u_s,v_s\right)dx = 0$$

et l'inégalité (6.26) donne

$$-d_3\int_{\Omega}\nabla\xi_2\nabla u_s - d_4\int_{\Omega}\nabla\xi_2\nabla v_s - \int_{\Omega}\xi_2 f\left(u_s,v_s\right)dx = 0$$

Mais cette forme est la même chose quand nous multiplions (6.8) par ζ_1 et (6.9) par ζ_2 et intégrant sur Ω

d'où

$$w = \Phi$$

Enfin, la combinaison (6.13) et (6.14) avec (6.10) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left(K_1+K_2\right)dx &= \int_{\Omega}\left(u_0+v_0\right)dx \\
\left(K_1+K_2\right)|\Omega| &= \int_{\Omega}\left(u_0+v_0\right)dx
\end{aligned}$$

c.à.d

$$K_1+K_2 = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\left(u_0+v_0\right)dx$$

la preuve du théorème est terminée. ■

Bibliographie

[1] N. Alikakos; L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations, Comm. Partial Differential Equations 4 (1979), 827–828.

[2] J. D. Avrin; Qualitative Theory for a Model of Laminar Flames with Arbitrary Nonnegative Initial Data, J. Differential Equations 84 (1990), 290-308.

[3] S. Badraoui; Existence of Global Solutions for Systems of Reaction-Diffusion Equations on Unbounded Domains, Electron. J. Diff. Eqns., Vol 2002, No. 74 (2002), 1-10.

[4] S. Badraoui; Large Time Asymptotic Bounds of L^1 Solutions for Some Reaction-Diffusion Equations, Arab J. Math. Sc. Volume 8, Number 25 (2002), 27-39.

[5] P. Baras, J. C. Hassan, L. Veron; Compacité de l'opérateur définissant la solution d'une équation d'évolution non homogène, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 284 (1977), 799–802.

[6] J. W. Beberns, W. Fulks; The small Heat-Loss Problem, J. Diff. Equat. 57 (1985), 324-332.

[7] Billingham, L. Niremberg; The development of travelling waves in quadratic and cubic auto catalysis with uniqual diffusion rates. Trans. R. SOC. Londol, Collège de France. Note Math, 65-129.

[8] S. Bonaved, D. Schmitt; Triangular reaction-diffusion systems with integrable initial data, Nonlinear. Anal 33 (1998), 785–801.

[9] K. Boukerrioua; Existence of global solutions for a system of reaction-diffusion equations having a full matrix Ser. Math.Inform. Vol. 29, No 1 (2014), 91-103.

[10] Brézis-Strauss; Semilinear second order elliptic equations in L^1, J. Math, Japon, 25 (1973).

[11] T.Cazenave, A. Haraux; Introduction aux Problèmes d'Evolution Semi-linéaires, Mathématiques et Applications, Vol. 1, Ellipses, Paris, 1990.

[12] P. Collet, J. Xin; Global Existence and Large Time Asymptotic Bounds of L^1 Solutions of Thermal Diffusive Combustion Systems on Rn, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sc., IV. Ser. 23(1996), 625-642.

[13] T. Diagana; Some remarks on some strongly coupled reaction-diffusion equations. J. Reine. Angew, 2003.

[14] R. Fisher; The advance of advantageous genes, Ann. Eugenics 7 (1937), 335–369.

[15] H. Fujita; On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $\partial u/\partial t = \Delta u + u^{(\sigma+1)}$ J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math. 16 (1966), 105–113.

[16] A. L. Gladnov; Behavior of Solutions of Semilinear Parabolic Equations as x ! 1, Mathematics Notes, Vol 51, No 2 (1990), 124-128.

[17] A. Haraux, M. Kirane; Estimation C^1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5 (1983), 265–280.

[18] A. Haraux, A. Youkana; On a result of K. Masuda concerning reaction-diffusion equations, Tohoku. Math. J. 40 (1988), 159–163.

[19] D. Henry; Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math., 840, Springer Verlag, New York, 1981.

[20] M.A. Herrero, A.A. Lacey and J.J.L. Nelazquez; Global existence for reaction-diffusion systems modelling ignition, Arch. Rational Mech. Anal.142 (1998), 219-251.

[21] S. L. Hollis, R. H. Martin, M. Pierre; Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems, SIAM. J. Math. Anal. 18(3) (1987), 744–761.

[22] I. Kanel, M. Kirane; Global existence and large time behavior of positive solutions to a reaction-diffusion system, Differ. Integral Equ. Appl. 13(1–3) (2000), 255–264.

[23] S. Kouachi; Global existence of solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional, Electron. J. Differential Equations (68) (2001), 1–10.

[24] S. Kouachi; Global existence of solutions in invariant regions for reaction-diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients, Electron. J. Qual. Theory Difer. Equ. 2 (2003), 1-10.

[25] S. Kouachi; Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, Georgian Math. J. 11 (2004), 349-359.

[26] S. Kouachi, A. Youkana; Global existence and asymptotics for a class of reaction-diffusion systems, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49(3), 2001.

[27] R. H. Martin, M. Pierre; Nonlinear reaction-diffusion systems, in Nonlinear Equations in the Applied Sciences, Math. Sci. Eng. Acad. Press, New York 1991.

[28] K. Masuda; On the global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations, Hokkaido Math. J. 12 (1983), 360–370.

[29] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva; Linear and quasi-linear equations of parabolic type", Amer. Math. Soc. 1968.

[30] M.Mebarki, A.Moumeni; Global solution of system reaction-diffusion with full matrix. global journal of mathematical analysis, (2015) , 04-25.

[31] A. Moumeni, N. Barrouk; Existence of global solutions for systems of reaction-diffusion with compact result, International Journal of Pure and Applied MathematicsVolume 102 No 2 (2015), 169-186.

[32] A. Moumeni, N. Barrouk; Triangular reaction-diffusion systems with compact result,Global journal of pure and applied mathematics Volume 11No 6 (2015), 4729-4747

[33] A. Moumeni, L. Salah Derradji; Global existence of solution for reaction-diffusion systems, IAENG, Int. J. Appl. Math. 40(2) (2010), 84–90.

[34] A. Moumeni, L. Salah Derradji; Global existence of solution for reaction-diffusion Systems with non diagonal matrix, IAENG, Int. J. Appl. Math. 40(2) (2012),

[35] J. D. Murray; Mathematical Biologie, 3rd ed., Interdisciplinary Applied Mathematics,Springer Verlag, 2002.

[36] A. Pazy; Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations,Applied Mathematical Siences, Springer–Verlag, New York, 1983.

[37] M. Pierre, D. Schmitt; Blow up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass,SIAM. J. Math. Anal. 42(1) (2000), 93–106.

[38] B. Rebiai, S. Benachour; Global classical solutions for reaction-diffusion systems with nonlinearities of exponential growth, J. Evol. Equ. 10 (2010), 511-527.

[39] F. Roth; Global solutions of reaction-diffusion systems, Lecture Notes in Math. 1072, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[40] J.Smoller; Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.