



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2017

Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques

STABILITÉ DE LA POUTRE DE VON KÁRMÁN

Option
Système Dynamique

Par
OUCIF DALLEL

DIRECTEUR DE THÈSE :	DJEBABLA Abdelhak	M C A.	U.B.M. ANNABA
CO-DIRECTEUR:	BERKANE Ahmed	M C A.	U.B.M. ANNABA
	Devant le jury		
PRESIDENT :	MAZOUZI Said	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	MANSOUR Abdelouaheb	M C A.	U. EL OUED
EXAMINATEUR :	SAKER Hacene	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	BADRAOUI Salah	Prof.	U. GUELMA

Table des matières

Introduction	1
Plan de thèse	6
1 Notions de Base	7
1.1 Espaces de Sobolev	7
1.2 Rappel de quelques inégalités	9
1.3 Produit de convolution	10
1.4 Inégalités intégrales	12
2 Stabilité exponentielle d'une poutre non linéaire	14
2.1 Stabilité d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec deux dissipations de frictions	14
2.1.1 Résultat principal	16
2.2 Stabilité exponentielle de la poutre de von Kármán avec dissipation thermique et de frictionnelle	18
2.2.1 Décroissance exponentielle du système	21
3 Stabilité générale de la poutre de von Kármán avec dissipations visco-élastique et thermique	30
3.1 Position du problème	30
3.2 Résultat principal	31
3.3 Preuve du résultat principal	34
Conclusion	45

Annexe 46

Bibliographie 58

Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements s'adressent à la personne qui m'a proposé le sujet de thèse et qui m'a encadré tout au long de ces années d'étude (2013/2016) le Docteur Djebabla Abdelhak. Je tiens à le remercier pour son enthousiasme, disponibilité et ses conseils. Je garderai en mémoire la confiance et la sympathie qu'il m'a témoignée au cours de ces quatre années de travail. Merci à M. Berkane Ahmed pour ces directives précieuses. Aussi, j'exprime mes remerciements à M. Mazouzi Said, Professeur à l'UBM Annaba d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Merci aussi à M. Saker Hacene, Professeur à l'UBM Annaba et M. Badraoui Salah, Professeur à l'université à Guelma d'avoir accepté d'être membres examinateurs. Merci également au Docteur Mansour Abdelouehab de l'université de Hamma Lakhdar, EL Oued pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie le Professeur Makhoul Ammar, président de la formation doctorale dans laquelle j'ai été admise et j'ai réalisé mes travaux de recherche dans des conditions excellentes. Finalement, j'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier merci à mes parents, mon mari et ma fille.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la stabilisation de la poutre de von Kármán. Cette théorie est en fait, une amélioration de la théorie d'Euler-Bernoulli qui consiste à traiter un problème de la mécanique vibratoire dans le cas où l'inertie de rotation et le cisaillement transversal sont assez significatifs. Ces vibrations sont naturellement indésirables en raison pour leur endommagement et aussi pour leur nature détruisante. Pour cela, des amortissements de différents types ont été élaborés et incorporés directement dans le système, ce qui explique l'ajout de certains termes (termes dissipatifs) dans les équations ou bien sur la frontière. Les amortissements les plus familiers sont les amortissements de friction et les amortissements viscoélastiques. Ainsi, cette théorie a été d'un intérêt certain et a conduit à l'obtention de plusieurs résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique des solutions. En particulier, l'étude de la stabilisation exponentielle ou polynomiale a fait l'objet de plusieurs publications.

Dans ce travail, nous utilisons la technique des multiplicateurs qui se base sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov pour montrer la stabilisation exponentielle d'un système de von Kármán en s'inspirant de la théorie de Green et Naghdi.

Mots-clés : Système de von Kármán, décroissance exponentielle, fonctionnelle de Lyapunov, effet thermal et dissipation thermo-viscoélastique.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the stabilization of the beam of von Kármán. This theory is in fact an improvement of the Euler-Bernoulli theory which is one of the subjects of the vibratory mechanics used in the case where the rotational inertia and transverse shear are significant. These vibrations are naturally undesirable because of their damage and their destroying nature. For this purpose, various types of damping have been developed and incorporated directly into the system, which explains the addition of certain terms (dissipative terms) in the equations or on the boundary (or part of the boundary). The most common depreciation is the friction damping, viscoelastic depreciation (both are low) and depreciation of the strong type. As a result, this theory has stimulated many interests and many results concerning the existence and asymptotic behavior of the solutions have been obtained. In particular, the study of exponential or polynomial stabilization has been the subject of several publications.

In this work, one uses the technique of multipliers which is based on the construction of a Lyapunov functional to show the exponential stabilization of one of the von Kármán system following the theory of Green and Naghdi.

Keywords : Von Kármán system, exponential decay, Lyapunov functional, thermal effect and thermo-viscoelastic damping.

الملخص

في هذه الأطروحة نركز على استقرار عارضة von Kármán . في الواقع هذه لنظرية تحسن نظرية Euler-Bernoulli التي تخص إشكالات الاهتزازات الميكانيكية المستخدمة في حالة العطالة الدورانية والانقطاعات العرضية. هذه الاهتزازات ذات طبيعة غير مرغوب فيها بسبب أضرارها ولهذا تم تطوير ودمج المخفضات ذات أنواع مختلفة مباشرة في النظام، وهو ما يفسر إضافة بعض الأطراف المبددة في المعادلات أو على الحافة المخفضات المعروفة هي مخفضات الاحتكاك والمخفضات اللزجة كلاهما من النوع الضعيف. كما يوجد مخفضات من النوع القوي. لذلك، هذه النظرية قد حفزت الكثير من الاهتمام والكثير من النتائج بشأن الوجود وسلوك التقارب. على وجه الخصوص دراسة الاستقرار الأسي أو الكثير الحدودي التي كانت اهتمام العديد من المنشورات

في هذا العمل نستخدم الطريقة الطاقوية التي تقوم على أساس بناء تابعة Lyapunov لبيان الاستقرار الأسي لنظام von Kármán وفقا لنظرية Naghdi و Green.

كلمات مفتاحية: نظام von Kármán ، تابعة Lyapunov

تأثير حراري ، التناقص الأسي

Introduction

Dans le domaine de l'ingénierie, le phénomène des vibrations apparaît pratiquement dans toutes les structures mécaniques, plusieurs types de ces vibrations sont indésirables car elles ont une influence néfaste sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. Elles peuvent engendrer des fractures, cassures, mal fonctionnement, usure ou même la destruction des structures.

De plus, elles peuvent constituer un danger certain pour l'utilisateur lui-même. Les excitations dynamiques causant ces vibrations sont nombreuses, elles proviennent généralement, soit de l'environnement extérieur, atmosphère, eau et contacts, soit d'un choc avec d'autres structures. L'élimination ou la réduction de ces vibrations est un problème majeur dans les domaines de l'ingénierie, pour cette raison de nombreux appareils tels que les roues à réaction et à inertie, les systèmes rotatifs et autres moteurs électriques sont essentiels pour le bon fonctionnement de ces appareils.

Le schéma suivant représente la déformation d'une poutre non linéaire :

Avec $u(x, t)$ = l'oscillation transversale

et $\varphi(x, t)$ = angle de rotation de la poutre.

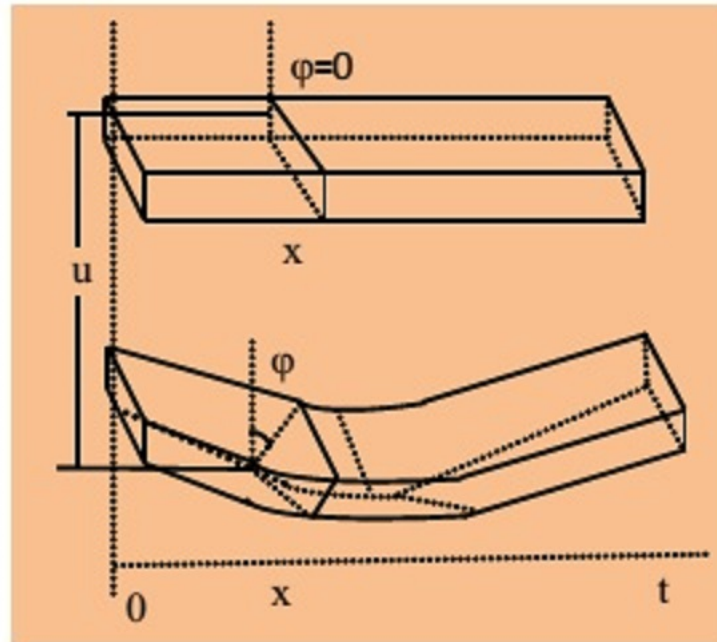


Fig. 0.0.1 : Déformation d'une poutre non linéaire

Ainsi, plusieurs techniques sont utilisées pour limiter les effets de ces vibrations dans ces systèmes. De ce fait, plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens. Par exemple, le problème de stabilité de la poutre de type Euler-Bernoulli a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs qui sont parvenus à élaborer et à développer plusieurs méthodes de stabilisation ou de contrôle que ce soit dans le cas linéaire ou non-linéaire. Pour le premier cas, nous citons les travaux de : M. Rivera [29], Morgül [28] et S. A. Messaoudi et Houari [27]. Pour le cas non-linéaire de type Euler-Bernoulli, par exemple, Lagnese dans [21, 25], a proposé le système couplé de deux équations hyperboliques donné par

$$\begin{cases} \rho A \eta_{tt}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \eta_{xx}(x, t)) - \frac{\partial}{\partial x} (P(x, t) \eta_x(x, t)) = 0, & x \in (0, L), t \geq 0, \\ \rho A \mu_{tt}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) = 0, & x \in (0, L), t \geq 0, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

avec des données initiales et des conditions aux limites appropriées. Ici $\eta(x, t)$ est le déplacement transversal d'un point générique, $\mu(x, t)$ le déplacement longitudinal d'un point générique, EI la rigidité de la poutre, ρA le poids par unité de longueur et

$$P(x, t) := EA \left(\mu_x(x, t) + \frac{1}{2} \eta_x^2(x, t) \right), \quad (0.0.2)$$

représente la tension axiale, où E correspond au module de Young, A , surface en section transversale de la poutre et L , longueur de la poutre. Toujours, avec le même principe, à savoir, supprimer ou atténuer les vibrations indésirables de la structure plusieurs contrôles ont été utilisés. La plupart de ces dispositifs sont des amortisseurs internes et/ou sur la frontière. Par exemple, Perla Menzala et al. [32]. Araruna et al. [1] ont étudié le comportement asymptotique du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho h \psi_{tt} - \frac{\rho h^3}{12} \psi_{ttxx} - \psi_{txx} - [(\eta_x + \frac{1}{2} \psi_x^2) \psi_x]_x + \psi_{xxxx} + \psi_t = 0, \\ \rho h \eta_{tt} - (\eta_x + \frac{1}{2} \psi_x^2)_x + \eta_t = 0, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

dans $(0, L) \times (0, \infty)$. Ce système est complété par des conditions aux limites et des conditions initiales

$$\begin{cases} \psi(0, \cdot) = \psi(L, \cdot) = \psi_x(0, \cdot) = \psi_x(L, \cdot) \\ \quad = \eta_x(0, \cdot) = \eta_x(L, \cdot) = 0, \quad t > 0, \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \quad x \in [0, L], \\ \eta(\cdot, 0) = \eta_0, \quad \eta_t(\cdot, 0) = \eta_1, \quad x \in [0, L]. \end{cases} \quad (0.0.4)$$

Ils ont introduit deux dissipations de friction ψ_t et η_t (faibles), l'une agissant sur la composante longitudinale et l'autre sur l'élément transversal. Aussi, nous constatons qu'il y a un troisième amortissement (forte dissipation) "supplémentaire" donné par le terme $-\psi_{txx}$ dans la composante transversale, cette dissipation est nécessaire lorsque l'inertie de rotation de la poutre est prise en compte. Ainsi, ils ont démontré que le système (0.0.3) décroît de façon exponentielle. Un autre type de dissipation se produit par des effets thermiques. A cet égard, nous nous référons aux travaux de Benabdallah et Lasiecka [2] et Benabdallah et Teniou [3] (Voir aussi [33]), où le système de von Kármán complet est stable de façon exponentielle en couplant le système de deux équations de type équation de la chaleur, l'une pour la composante longitudinale et l'autre pour la composante transversale.

Les parties paraboliques des équations de la chaleur impliquent qu'une perturbation thermique à un point du corps se propage instantanément à travers le corps. Pour faire face à ce phénomène, Green et Naghdi [13 – 16] ont proposé trois modèles différents,

qui permettent la transmission de chaleur sous forme d'ondes thermiques à des vitesses limitées. Ce phénomène est observé quand la poutre est à basse température.

Djebabla et Tatar [7] ont étudié le système de von Kármán suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - D_1 \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx} = 0 \\ w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x + D_2 w_{xxxx} = 0 \\ \theta_{tt} - l \theta_{xx} + K_2 \theta_t + \gamma u_{tx} = 0, \end{cases} \quad (0.0.5)$$

avec les conditions aux limites et aux bords suivants

$$\begin{cases} w(0, \cdot) = w(L, \cdot) = w_x(0, \cdot) = w_x(L, \cdot) = 0, \quad t > 0 \\ u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = \theta_x(0, \cdot) = \theta_x(L, \cdot) = 0, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0, u_t(\cdot, 0) = u_1, w(\cdot, 0) = w_0, \quad x \in [0, L], \\ w_t(\cdot, 0) = w_1, \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \theta_t(\cdot, 0) = \theta_1, \quad x \in [0, L]. \end{cases} \quad (0.0.6)$$

où K_1, K_2, D_1, D_2, l , et γ sont des constantes positives. Ils ont montré que les solutions énergétiques décroissent exponentiellement en couplant le système (à savoir, la composante longitudinale) avec une seule équation avec effet thermique, et ceci, selon la théorie de Green et Naghdi.

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique du système (0.0.5) mais en remplaçant dans la troisième équation la dissipation faible $k_2 \theta_t$ par une dissipation plus faible, dite viscoélastique, donnée par le terme convolutionnel $\beta \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds$, c'est à dire, l'étude du système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - k \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx} = 0, \\ w_{tt} + \tau w_t - k \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x + \sigma w_{xxxx} = 0, \\ \theta_{tt} - l \theta_{xx} + \beta \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds + \gamma u_{tx} = 0, \end{cases} \quad (0.0.7)$$

dans $(0, L) \times (0, \infty)$, avec t désignant la variable du temps. Ici, les coefficients $k, \gamma, \beta, \sigma, l$ et τ sont des constantes positives. Nous considérons le système (0.0.7) avec des conditions aux limites de Dirichlet pour u , Dirichlet-Neumann pour w et Neumann pour θ :

$$\begin{cases} u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = w(0, \cdot) = w(L, \cdot) = 0, \\ w_x(0, \cdot) = w_x(L, \cdot) = \theta_x(0, \cdot) = \theta_x(L, \cdot) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (0.0.8)$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} u(., 0) = u_0, u_t(., 0) = u_1, w(., 0) = w_0, x \in [0, L], \\ w_t(., 0) = w_1, \theta(., 0) = \theta_0, \theta_t(., 0) = \theta_1, x \in [0, L]. \end{cases} \quad (0.0.9)$$

Pour la fonction de relaxation g nous supposerons dans toute la suite les hypothèses suivantes :

(H1) $g : R_+ \rightarrow R_+$ est une fonction différentiable vérifiant

$$g(0) > 0, \quad \lambda = l - \beta \int_0^\infty g(s) ds = l - \beta \bar{g} > 0.$$

(H2) Il existe une fonction différentiable et non croissante : $\varsigma : R_+ \rightarrow R_+$ telle que

$$g'(t) \leq -\varsigma(t) g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Nous démontrons alors que les solutions énergies sont stables de manière générale et que la stabilité exponentielle et polynômiale deviennent un cas particulier, et ceci, en utilisant la méthode des multiplicateurs.

Structure de thèse

Cette thèse comporte trois chapitres.

- **Chapitre 1** : Nous rappelons de quelques notions de base qui nous seront utiles dans la suite.
- **Chapitre 2** : Ce chapitre contient deux sections, dans la première nous étudions le problème d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec deux dissipations de frictions. Un résultat de décroissance exponentielle sera établi. Pour la deuxième, nous démontrons un autre résultat sur la stabilité exponentielle d'une poutre de von Kármán avec une dissipation de friction et une autre thermique.
- **Chapitre 3** : Dans ce chapitre qui constitue l'essentiel de cette thèse, nous établissons la stabilisation d'une poutre de von Kármán amortie par une dissipation qui est, viscoélastique et thermique, moyennant la méthode des multiplicateurs en prouvant la décroissance générale des solutions énergies. Notre résultat constitue en fait, une amélioration du résultat établi dans le chapitre 2.

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions concernant les espaces de Sobolev et certains résultats sur les inégalités dans ce même espace. Aussi, nous donnons brièvement, les définitions et les notations de quelques produits de convolution et quelques inégalités intégrales qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail. Dans ce qui suit, on désignera par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

1.1 Espaces de Sobolev

Nous donnerons tout d'abord un rappèle de quelques définitions concernant les espaces de Sobolev. Nous commençons par les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 Soit Ω un ouvert quelconque non vide de \mathbb{R}^n et $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme suit :

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurables telles que} & (1.1.1) \\ &\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty, \text{ si } 1 \leq p < +\infty \\ &\text{et } \text{sup ess } |f(x)| < +\infty, \text{ si } p = +\infty\} \end{aligned}$$

Théorème 1.1.1 *Les espaces $L^p(\Omega)$, munis des normes suivantes*

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < +\infty \quad (1.1.2)$$

et

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |f(x)|,$$

sont des *espaces de Banach*.

Remarque 1.1.1 *Pour $p = 2$, l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

En effet la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ émane du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad (1.1.3)$$

et ainsi on a

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.4)$$

Théorème 1.1.2 *On suppose Ω borné. Pour tous $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, on a $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.2 *Etant donné $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, nous désignerons par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m,$$

les dérivées $\partial^\alpha f$ (au sens des distributions) $\in L^p(\Omega)$ \}

$$:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad (1.1.5)$$

Théorème 1.1.3 *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p, \quad (1.1.6)$$

est un espace de Banach.

De plus, pour $p = 2$, l'espace de Banach $W^{m,2}(\Omega)$ devient un espace de Hilbert (séparable) que l'on note H^m , avec la norme

$$\|f\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \quad (1.1.7)$$

Théorème 1.1.4 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.1.8) est un espace de Hilbert séparable.

On introduit sur H^m le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle \quad (1.1.8)$$

et la norme associée $\|u\|_{H^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_m}$

Dans le cas $m = 1$, en utilisant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, on définit l'espace de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \text{ tel que } f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (1.1.9)$$

1.2 Rappel de quelques inégalités

Lemme 1.2.1 (Inégalité de Hölder) Soient p et q deux nombres réels conjugués c'est à dire : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a $f.g \in L^1(\Omega)$. En particulier, on a

a) Si $p, q \in]1, +\infty[$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.2.1)$$

b) Si $p = 1, q = +\infty$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)| dx \right) \|g\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.2.2)$$

Remarque 1.2.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas $p = 2, q = 2$.

Lemme 1.2.2 (Inégalité de Young) Soient p et q deux nombres conjugués dans $]1, +\infty[$. Alors, pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q. \quad (1.2.3)$$

En particulier pour $p = q = 2$ on a

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2. \forall \varepsilon > 0 \quad (1.2.4)$$

Lemme 1.2.3 (Inégalité de Poincaré) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Il existe une constante $c > 0$ vérifiant :

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.2.5)$$

où $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Notons qu'à partir de cette inégalité, on montre que $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$, et par conséquent $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx, \quad (1.2.6)$$

où le $\langle \cdot, \cdot \rangle$ signifie le produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

Aussi, on donne l'inégalité de Poincaré habituelle dans $L^2(\Omega)$ à partir du lemme suivant

Lemme 1.2.4 Soit $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C positive vérifiant

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.2.7)$$

1.3 Produit de convolution

Définition 1.3.1 (Produit de convolution) Le produit de convolution de deux fonctions réelles $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, h qui se note généralement $h = (f * g)$ et qui est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x f(t)g(x-t)dt. \forall x \in [0, L] \quad (1.3.1)$$

Remarque 1.3.1 si $f \in L^1(\Omega)$, $g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on a $f * g \in L^p(\Omega)$ tel que $\Omega = [0, L]$ et on montre que

$$\|f * g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.3.2)$$

Remarque 1.3.2 Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes. On définit les opérateurs binaires \diamond et \square respectivement par

$$(f \diamond g)(t) = \int_0^t |f(t-s)| (|g(t) - g(s)|) ds \quad (1.3.3)$$

et

$$(f \square g)(t) = \int_0^t |f(t-s)| |g(t) - g(s)|^2 ds \quad (1.3.4)$$

Proposition 1.3.1 Soient $f \in L^1(0, T)$ et $g \in C(0, T)$. Alors on a

$$[(f \diamond g)(t)]^2 \leq \int_0^t |f(s)| ds (f \square g)(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3.5)$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} [(f \diamond g)(t)]^2 &\leq \left[\int_0^t |f(t-s)| |g(t) - g(s)| ds \right]^2 \\ &= \left[\int_0^t \sqrt{|f(t-s)|} \sqrt{|f(t-s)|} |g(t) - g(s)| ds \right]^2 \\ &\leq \left[\sqrt{\left(\int_0^t |f(t-s)| ds \right)} \sqrt{\left(\int_0^t |f(t-s)| |g(t) - g(s)|^2 ds \right)} \right]^2, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 1.3.1 Soient g et φ deux fonctions de $C^1[0, T]$, alors on a

$$(g * \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} g(t) |\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dg}{dt} \square \varphi \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(g \square \varphi - \left(\int_0^t g(s) ds \right) |\varphi(t)|^2 \right). \quad (1.3.6)$$

La relation (1.3.6) est un résultat immédiat de la dérivée du terme $g \square \varphi$.

1.4 Inégalités intégrales

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs et aussi non dissipatifs. En effet, plusieurs résultats concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants

Lemme 1.4.1 (*Haraux [17], Komornik [20] et Martinez [26]*)

Soient $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et, $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que : $\phi(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$.

Supposons que : $\exists p \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) E^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0) E(s), \quad \forall s > 0. \quad (1.4.1)$$

Alors

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0) e^{1-d\phi(t)} & \forall t > 0 \text{ si } p = 0 \\ E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+p\phi(t)} \right)^{\frac{1}{p}} & \forall t > 0 \text{ si } p > 0, \end{cases} \quad (1.4.2)$$

dans le cas particulier où $\phi(t) = t$ nous déduisons les inégalités suivantes

$$\text{a) } E(t) \leq E(0) e^{1-dt} \quad \forall t > 0 \text{ si } p = 0 \quad (1.4.3)$$

$$\text{b) } E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pt} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall t > 0 \text{ si } p > 0,$$

appelées respectivement, estimation exponentielle (voir Haraux [17]) et estimation polynomiale (voir Komornik [20]).

Lemme 1.4.2 (*M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise [10]*)

Soit $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue (décroissante) vérifiant

$$\int_s^{+\infty} \phi(E(t)) dt \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s > 0, \quad (1.4.4)$$

où d est un réel strictement positif et $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\phi(0) = 0$. Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que

$$E(t) \leq \phi^{-1} \left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t} \right), \quad \forall t > t_0, \quad (1.4.5)$$

où $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\phi(t)} dt, \quad \forall s > 0. \quad (1.4.6)$$

Stabilité exponentielle d'une poutre non linéaire

2.1 Stabilité d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec deux dissipations de frictions

Pendant de nombreuses décennies, la dynamique des vibrations des poutres non-linéaire a été un sujet de grand intérêt dans le domaine de la mécanique des structures. Il y a eu plusieurs approches classiques employées afin de résoudre les problèmes des vibrations pour les équations différentielles non linéaires. Dans la majorité de ces travaux, la déformation axiale a été négligée et la force axiale moyenne est supposée constante sur la longueur de l'élément de poutre. Cependant, pour les équations différentielles non linéaires l'analyse a démontré que le déplacement axial ne peut être négligé. D'où la nécessité au cours de ces dernières années à un développement de modèles plus efficaces pour l'interaction des structures des poutres non linéaires avec des milieux fluides.

Ce chapitre est divisé en deux sous sections principales. Dans la première, nous introduisons le modèle mathématique du comportement dynamique d'une poutre non linéaire (dite poutre d'Euler-Bernoulli) subissant une déformation à la fois transversale et une autre axiale. Le but est d'obtenir une estimation de l'énergie pour la poutre non linéaire excitée par rapport aux forces extérieures réparties le long du rayon en utilisant la mé-

thode des multiplicateurs. Dans la deuxième sous-section, nous allons la même méthode des multiplicateurs pour obtenir une estimation de l'énergie du système de la structure à fluide couplée, en supposant que l'épaisseur de la poutre est constante. Notre but ici, est de construire une nouvelle fonctionnelle, dite de Lyapunov équivalente à l'énergie classique et qui décroît d'une manière exponentielle. Dans cette section, nous décrivons le modèle mathématique non linéaire d'une poutre de longueur L serrée aux points d'extrémité. On note aussi par $u(x, t)$, $w(x, t)$ et $P(x, t)$ le déplacement longitudinal, le déplacement transversal et la tension axiale appliquée sur la poutre gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} + C_1 u_t - K [P(x, t)]_x = 0, & x \in \Omega, t \geq 0, \\ \rho_2 w_{tt} + C_1 w_t - K [P(x, t)w_x]_x + \sigma w_{xxxx} = 0, & x \in \Omega, t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

avec

$$P(x, t) = \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right], \quad x \in \Omega, t \geq 0,$$

où $\Omega = (0, L)$, t désignant la variable (positive) du temps, C_1 le coefficient d'amortissement, K le module de Young, σ le moment d'inertie de la poutre, ρ_1 et ρ_2 sont deux constantes positives. Nous considérons le système (2.1.1) avec des conditions aux limites de Dirichlet pour u et Dirichlet-Neumann pour w

$$\begin{cases} u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = w(0, \cdot) = w(L, \cdot) = 0 \\ w_x(0, \cdot) = w_x(L, \cdot) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1, & x \in \Omega, \\ w(\cdot, 0) = w_0, \quad w_t(\cdot, 0) = w_1, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Dans ce qui suit, nous rappelons sans démonstration le résultat d'existence et d'unicité de la solution du système cité ci-dessus.

Théorème 2.1.1 [2] *Soit $((u_0, u_1), (w_0, w_1)) \in V$ où*

$$V = (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)) \times (H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)),$$

avec

$$H_0^2(0, L) = \{v \in H^2(0, L) : v(0) = v(L) = v_x(0) = v_x(L) = 0\}.$$

Alors le système ((2.1.1) – (2.1.3)) admet une unique solution globale au sens faible (variationnelle) avec

$$(u, u_t, w, w_t) \in C([0, \infty); V).$$

Maintenant, pour définir l'énergie E du système ((2.1.1) – (2.1.3)), on multiplie la première équation par u_t et la deuxième par w_t respectivement, on intègre par parties sur l'intervalle $[0, L]$, on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \rho_1 u_t^2 + \rho_2 w_t^2 + \sigma w_{xx}^2 + K \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx \right] \\ &= -C_1 \int_{\Omega} u_t^2 dx - C_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

alors, l'énergie du premier ordre associée au problème ((2.1.1) – (2.1.3)) est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \rho_1 u_t^2 + \rho_2 w_t^2 + \sigma w_{xx}^2 + K \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 \} dx, \quad t \geq 0. \quad (2.1.5)$$

Nous remarquons d'après (2.1.5), que le système est dissipatif car $\frac{d}{dt} E(t) < 0$. Or, cette inégalité n'implique pas nécessairement la décroissance exponentielle du système. A cet effet, nous devons construire une autre fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lyapunov, notée F , équivalente à la fonctionnelle E au sens : il existe deux constantes positives m, M telles que :

$$mE(t) \leq F(t) \leq ME(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.1.6)$$

et on a l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt} F(t) \leq -CE(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.1.7)$$

avec $C > 0$ et t_0 un instant fixe.

La section suivante contient la preuve du résultat de décroissance de l'énergie du système ((2.1.1) – (2.1.3)).

2.1.1 Résultat principal

Dans cette section, nous donnons le résultat principal sur la décroissance exponentielle pour le système non linéaire ((2.1.1) – (2.1.3)).

Théorème 2.1.2 *Etant donné $((u_0, u_1), (w_0, w_1)) \in V$. Alors, la fonction d'énergie $E(t)$ décroît exponentiellement quand t tend vers l'infini; c'est-à-dire, il existe deux constantes positives α et β indépendantes des conditions initiales telles que*

$$E(t) \leq \alpha E(0)e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Avant de démontrer le résultat de ce chapitre, nous commençons par introduire quelques fonctionnelles et démontrer quelques lemmes qui seront utiles pour la suite de ce chapitre.

Etant donné la fonctionnelle suivante

$$I_1(t) = \int_{\Omega} (\rho_1 u_t u + \frac{\rho_2}{2} w_t w + \frac{C_1}{2} u^2 + \frac{C_1}{4} w^2) dx, \quad t \geq 0, \quad (2.1.8)$$

la dérivée de cette fonction nous fournira les termes négatifs

$$- \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx \quad \text{et} \quad - \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx,$$

qui seront nécessaires pour obtenir $-CE(t)$.

Preuve. Soit (u, w) solution du système ((2.1.1) – (2.1.3)), Alors, la fonctionnelle I_1 satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &\leq -K \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\rho_1 u_t^2 + \frac{\rho_2}{2} w_t^2) dx. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

La dérivée de la fonction I_1 donne

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \int_{\Omega} (-C_1 u_t + K \left(u_x - \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)_x) u dx + \rho_1 \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (-C_1 w_t + K \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x - \sigma w_{xxxx}) \frac{w}{2} dx \\ &\quad + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + C_1 \int_{\Omega} u_t u dx + \frac{C_1}{2} \int_{\Omega} w_t w dx, \end{aligned}$$

après une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= -K \int_{\Omega} \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right] u_x dx - K \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \frac{w_x^2}{2} dx \\ &\quad + \rho_1 \int_{\Omega} u_t^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &= -K \int_{\Omega} \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx + \rho_1 \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx, \end{aligned}$$

ce qui est exactement la relation (2.1.9) ■

Preuve. du théorème 3.1.2. Pour $N > 0$, assez grand, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov F par

$$F(t) = NE(t) + I_1, \quad t \geq 0. \quad (2.1.10)$$

La dérivée de $F(t)$ donne :

$$\begin{aligned} F'(t) \leq & - \left[NC_1 - \frac{\rho_2}{2} \right] \int_{\Omega} w_t^2 dx - [NC_1 - \rho_1] \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ & - K \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - K \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Nous choisissons N assez grand de sorte que (2.1.11) devienne

$$F'(t) \leq -\eta \int_{\Omega} \left[(u_t^2 + w_t^2) + \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 + w_{xx}^2 \right] dx \leq -CE(t), \quad t \geq 0. \quad (2.1.12)$$

Pour certaines positives constantes η, C . Aussi, nous pouvons choisir N encore assez grand tel que

$$mE(t) \leq F(t) \leq ME(t), \quad (2.1.13)$$

avec m et M deux constantes positives. En combinant les relations (2.1.12) et (2.1.13), nous concluons que

$$F'(t) \leq -\beta F(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.14)$$

où $\beta = \frac{C}{m}$. Enfin, en utilisant une intégration simple, nous obtenons

$$F(t) \leq F(0)e^{-\beta t}, \quad t \geq 0, \quad (2.1.15)$$

ce qui donne le résultat. ■

2.2 Stabilité exponentielle de la poutre de von Kármán avec dissipation thermique et de frictionnelle

De nombreuses structures dans plusieurs domaines de l'ingénierie sont formées par une seule ou un grand nombre de poutres. Il existe différents modèles pour ces poutres

en fonction de leur nature et leur type de vibrations. Contrairement à d'autres modèles de base (comme Euler-Bernoulli, Raleigh ou le modèle Timoshenko) le modèle de von Kármán est plus adapté car il tient compte des déplacements transversaux, ainsi que des déplacements longitudinaux pour faire vibrer un corps élancé avec une grande déviation. Le système suivant est un couplage de deux équations hyperboliques proposé par Lagnese dans [21, 25] :

$$\begin{cases} \rho A \eta_{tt}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \eta_{xx}(x, t)) - \frac{\partial}{\partial x} (P(x, t) \eta_x(x, t)) = 0, \\ \rho A \mu_{tt}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) = 0, (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases}$$

ce système est complété par des conditions aux limites et des conditions initiales. Ici, la pression axiale est donnée par l'expression :

$$P(x, t) := EA \left(\mu_x(x, t) + \frac{1}{2} \eta_x^2(x, t) \right), \quad t \geq 0, \quad x \in (0, L),$$

$\eta(x, t)$ représente le déplacement transversal d'un point générique, $\mu(x, t)$ le déplacement longitudinal d'un point générique, EI la rigidité de la poutre ou la rigidité à la flexion, ρA le poids par unité de longueur, E le module de Young, A la surface en section transversale de la poutre et L est la longueur de la poutre.

L'objectif de cette section est l'étude de la stabilité exponentielle d'un système non linéaire, soumis à une dissipation frictionnelle faible donnée par le terme $K_2 \theta_t$ au lieu de la dissipation forte citée dans [1], c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_{tt} - D_1 \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx} = 0 \\ w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x + D_2 w_{xxxx} = 0 \\ \theta_{tt} - l \theta_{xx} + K_2 \theta_t + \gamma u_{tx} = 0, (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Les coefficients K_1 , K_2 , D_1 , D_2 , l et γ sont des constantes positives. Nous considérons le système (2.2.1) avec les conditions aux limites de Dirichlet pour u , Neumann-Dirichlet pour w et Neumann pour θ :

$$\begin{cases} u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = w(0, \cdot) = w(L, \cdot) = 0, \quad t > 0 \\ w_x(0, \cdot) = w_x(L, \cdot) = \theta_x(0, \cdot) = \theta_x(L, \cdot) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} u(., 0) = u_0, & u_t(., 0) = u_1, & w(., 0) = w_0, \\ w_t(., 0) = w_1, & \theta(., 0) = \theta_0, & \theta_t(., 0) = \theta_1. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Théorème 2.2.1 [24] Soit $((u_0, u_1), (w_0, w_1), (\theta_0, \theta_1)) \in V$ ou

$$V = (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)) \times (H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)) \times (H^1(0, L) \times L^2(0, L)),$$

Alors, la solution globale unique est satisfaite

$$(u, u_t, w, w_t, \theta, \theta_t) \in C([0, \infty[; V),$$

l'énergie associée à ce système est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + D_2 w_{xx}^2 + l\theta_x^2 + D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2\} dx.$$

Preuve. Notre objectif dans ce travail est de prouver la décroissance exponentielle des solutions pour la norme de l'énergie. A cet effet, nous multiplions la première équation par u_t , en intégrant par parties sur $\Omega = (0, L)$ on obtient,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u_{tt} - D_1 \left[u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right]_x + \gamma \theta_{tx}) u_t dx \\ &= \int_{\Omega} u_{tt} u_t dx - D_1 \int_{\Omega} \left[u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right]_x u_t dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} u_t dx \\ &= \frac{d}{2dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + D_1 \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2) u_{tx} dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} u_t dx \end{aligned}$$

la seconde par w_t

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x + D_2 w_{xxxx}) w_t dx \\ &= \int_{\Omega} w_{tt} w_t dx + K_1 \int_{\Omega} w_t w_t dx - D_1 \int_{\Omega} \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x w_t dx + D_2 \int_{\Omega} w_{xxxx} w_t dx \\ &= \frac{d}{2dt} \int_{\Omega} w_t^2 dx + K_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{D_2}{2dt} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx + D_1 \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2) w_x w_{tx} dx \end{aligned}$$

et la troisième par θ_t

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\theta_{tt} - l\theta_{xx} + K_2\theta_t + \gamma u_{tx})\theta_t dx \\ &= \int_{\Omega} \theta_{tt}\theta_t dx - l \int_{\Omega} \theta_{xx}\theta_t dx + K_2 \int_{\Omega} \theta_t\theta_t dx + \gamma \int_{\Omega} u_{tx}\theta_t dx \\ &= \frac{d}{2dt} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + \frac{d}{2dt} l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + K_2 \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u_{tx}\theta_t dx \end{aligned}$$

en faisant la somme après une intégration par partie, on obtient

$$\frac{d}{2dt} \int_{\Omega} (u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + D_2 w_{xx}^2 + l\theta_x^2 + D_1 \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]^2) dx + K_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx + K_2 \int_{\Omega} \theta_t^2 dx = 0$$

d'où

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + D_2 w_{xx}^2 + l\theta_x^2 + D_1 \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 \} dx.$$

Par ailleurs, la dérivée de l'énergie sera donnée par

$$\frac{d}{dt} E(t) = -K_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx - K_2 \int_{\Omega} \theta_t^2 dx < 0, \quad t \geq 0. \quad (2.2.4)$$

Il est clair d'après (2.2.4) que le système est dissipatif. ■

2.2.1 Décroissance exponentielle du système

Dans cette section, nous prouvons notre résultat sur la décroissance exponentielle pour le système non linéaire ((2.2.1)–(2.2.3)). Nous commençons par l'introduction de quelques fonctionnelles et par la démonstration de quelques lemmes qui nous seront utiles pour la suite de ce chapitre.

Tout d'abord, définissons la fonctionnelle suivante :

$$I_1(t) = \int_{\Omega} (u_t u + \frac{1}{2} w_t w + \frac{K_1}{4} w^2) dx, \quad t \geq 0, \quad (2.2.5)$$

la dérivée de cette fonction nous fournira les deux termes négatifs

$$- \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx \quad \text{et} \quad - \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx$$

Lemme 2.2.1 Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, en considérant la fonctionnelle I_1 donnée par (2.2.5) ainsi que les solutions de ((2.2.1) – (2.2.3)), on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &\leq -D_1 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{D_2}{2} \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(u_t^2 + \frac{1}{2} w_t^2 \right) dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Preuve. Dérivant la fonction I_1 en utilisant la première et la deuxième équation de (2.2.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (u_{tt} - D_1 \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx}) u dx \\ &= \int_{\Omega} u_{tt} u dx - D_1 \int_{\Omega} \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]_x u dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} u dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} u_t^2 dx - \left[(u_x + \frac{1}{2} w_x^2) u \right]_0^L \\ &\quad + D_1 \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2) u_x dx + \gamma [\theta_t u]_0^L - \gamma \int_{\Omega} \theta_t u_x dx, \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) w_x \right]_x + D_2 w_{xxxx}) \frac{w}{2} dx \\ &= \int_{\Omega} w_{tt} \frac{w}{2} dx + K_1 \int_{\Omega} w_t \frac{w}{2} dx - D_1 \int_{\Omega} \left[(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) w_x \right]_x \frac{w}{2} dx \\ &\quad + D_2 \int_{\Omega} w_{xxxx} \frac{w}{2} dx \\ &= \frac{d}{2dt} \int_{\Omega} w_t w dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{K_1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx + (w(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) w_x) \\ &\quad + \frac{D_1}{2} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx + \frac{D_2}{2} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx, \end{aligned}$$

En sommant on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_t u + \frac{1}{2} w_t w + \frac{K_1}{4} w^2) dx \\ &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_t u_x dx - \frac{D_2}{2} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\ &\quad - D_1 \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2) u_x dx - \frac{D_1}{2} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_1(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} \left[D_1 \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)_x - \gamma \theta_{tx} \right] u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x - D_2 w_{xxxx} - K_1 w_t \right] w dx + \frac{K_1}{2} \int_{\Omega} w_t w dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx - D_1 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) u_x dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_t u_x dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\
 &\quad - \frac{D_1}{2} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx - \frac{D_2}{2} \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx.
 \end{aligned}$$

Ensuite, l'application de l'inégalité de Young nous donne

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_1(t) &\leq -D_1 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{D_2}{2} \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left(u_t^2 + \frac{1}{2} w_t^2 \right) dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat désiré ■

Lemme 2.2.2 Soit (u, w) solution du système ((2.2.1) – (2.2.3)). Alors, la fonctionnelle I_2 définie par

$$I_2(t) = \int_{\Omega} \left(\int_0^x \theta_t(t, y) dy \right) u_t dx - l \int_{\Omega} \theta_x u dx, \quad t \geq 0, \quad (2.2.7)$$

satisfait, pour $\varepsilon_2 > 0$, l'estimation

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_2(t) &\leq -\frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + c_1(\varepsilon_2) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
 &\quad + \varepsilon_2 D_1^2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) dx + \varepsilon_2 [D_1 u_x^2(L) + \theta_t^2(L)],
 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

où

$$c_1(\varepsilon_2) = \frac{l}{4\varepsilon_2} + \gamma + \frac{l^2}{4\varepsilon_2} + \left(\frac{D_1}{4\varepsilon_2} + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} \right) L + \frac{K_2^2}{4\gamma} L^2.$$

Preuve. La dérivation de (2.2.7) entraîne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_2(t) &= \int_{\Omega} \left(\int_0^x [l\theta_{xx} - K_2\theta_t - \gamma u_{tx}] dy \right) u_t dx - l \int_{\Omega} \theta_{tx} u dx \\
&\quad - l \int_{\Omega} \theta_x u_t dx + \int_{\Omega} \left(\int_0^x \theta_t(t, y) dy \right) \left[D_1 \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)_x - \gamma \theta_{tx} \right] dx \\
&= -K_2 \int_{\Omega} \left(\int_0^x \theta_t(t, y) dy \right) u_t dx - \gamma \int_{\Omega} u_t^2 dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
&\quad - D_1 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \theta_t dx + \left(\int_0^L \theta_t dx \right) [D_1 u_x(L) - \gamma \theta_t(L)] + l \int_{\Omega} \theta_t u_x dx,
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_2(t) &\leq -\frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + c_1(\varepsilon_2) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
&\quad + \varepsilon_2 D_1^2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) dx + \varepsilon_2 [D_1 u_x^2(L) + \theta_t^2(L)],
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

■

Maintenant, afin de traiter les termes frontières dans (2.2.8), nous exploitons la fonction

$$q(x) = 2 - \frac{4}{L}x, \quad x \in \Omega$$

Lemme 2.2.3 La fonctionnelle I_3 définie par

$$\begin{aligned}
I_3(t) &= \int_{\Omega} \theta_t q \theta_x dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_x q u_x dx \\
&\quad + \int_{\Omega} w_t q w_x dx + l \int_{\Omega} u_t q u_x dx,
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

ainsi que la solution du système ((2.2.1) – (2.2.3)), satisfait l'estimation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_3(t) &\leq -[\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - D_1 [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{2D_1}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx \\
&\quad + \left(\frac{6D_2}{2L} + k_1 C_p \right) \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx + \left(\frac{2l}{L} + K_2 \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\
&\quad + \left(\frac{2}{L} + K_2 \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
&\quad + \frac{8D_1}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \left(K_1 + \frac{2}{L} \right) \int_{\Omega} w_t^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

où C_p est la constante de Poincaré.

Preuve. Par une dérivation directe on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta_t q \theta_x dx &= l \int_{\Omega} \theta_{xx} q \theta_x dx - K_2 \int_{\Omega} \theta_t q \theta_x dx \\
 &\quad - \gamma \int_{\Omega} u_{tx} q \theta_x dx + \int_{\Omega} \theta_t q \theta_{tx} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_x^2 q_x dx - K_2 \int_{\Omega} \theta_t q \theta_x dx - \gamma \int_{\Omega} u_{tx} q \theta_x dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} [q \theta_t^2]_{x=0}^{x=L} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_t^2 q_x dx \\
 &= -[\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
 &\quad - K_2 \int_{\Omega} \theta_t q \theta_x dx - \gamma \int_{\Omega} u_{tx} q \theta_x dx,
 \end{aligned}$$

de même, nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t q u_x dx &= D_1 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)_x q u_x dx \\
 &\quad - \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx + \int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx \\
 &= D_1 \int_{\Omega} u_{xx} q u_x dx + D_1 \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx \\
 &\quad + \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx + \int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx \\
 &= \frac{D_1}{2} [q u_x^2]_{x=0}^{x=L} - \frac{D_1}{2} \int_{\Omega} q_x u_x^2 dx + D_1 \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx \\
 &\quad - \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_x u_t^2 dx \\
 &\quad - D_1 [u_x^2(L) + u_x^2(0)] - \frac{2D_1}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx \\
 &\quad + D_1 \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx - \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t q w_x dx &= -K_1 \int_{\Omega} w_t q w_x dx + D_1 \int_{\Omega} \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right)_x q w_x dx \\
&\quad - D_2 \int_{\Omega} w_{xxxx} q w_x dx + \int_{\Omega} w_t q w_{tx} dx \\
&= -K_1 \int_{\Omega} w_t q w_x dx - D_1 \int_{\Omega} \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right) (q_x w_x + q w_{xx}) dx \\
&\quad + D_2 \int_{\Omega} w_{xxx} (q_x w_x + q w_{xx}) dx + \frac{1}{2} [q w_t^2]_{x=0}^{x=L} - \frac{l}{2} \int_{\Omega} q_x w_t^2 dx \\
&= -K_1 \int_{\Omega} w_t q w_x dx + \frac{4D_1}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx \\
&\quad - D_1 \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx - \frac{D_1}{2} \int_{\Omega} w_x^2 w_x q w_{xx} dx - \frac{4D_2}{L} \int_{\Omega} w_{xxx} w_x dx \\
&\quad - D_2 [w_{xx}^2(L) + w_{xx}^2(0)] + \frac{2D_2}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx - [w_t^2(L) + w_t^2(0)] \\
&\quad + \frac{2}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\
&= -K_1 \int_{\Omega} w_t q w_x dx + \frac{4D_1}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx \\
&\quad - D_1 \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx - \frac{D_1}{2L} \int_{\Omega} w_x^4 dx - D_2 [w_{xx}^2(L) + w_{xx}^2(0)] \\
&\quad + \frac{6D_2}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx - [w_t^2(L) + w_t^2(0)] + \frac{2}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx
\end{aligned}$$

Enfin, d'après les trois relations précédentes et l'égalité suivante

$$\gamma \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta_x q u_x dx = \gamma \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_x q u_{tx} dx,$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_3(t) &\leq -[\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - D_1 [u_x^2(L) + u_x^2(0)] - [w_t^2(L) + w_t^2(0)] \\
&\quad - D_2 [w_{xx}^2(L) + w_{xx}^2(0)] + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
&\quad - K_2 \int_{\Omega} \theta_t q \theta_x dx + \frac{4D_1}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx \\
&\quad + \frac{2D_1}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx + K_1 \int_{\Omega} w_t q w_x dx \\
&\quad - \frac{D_1}{2L} \int_{\Omega} w_x^4 dx + \frac{6D_2}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx
\end{aligned}$$

Nous concluons par l'utilisation des inégalités de Young et de Poincaré. ■

Lemme 2.2.4 La fonctionnelle I_4 définie par

$$I_4(t) = \int_{\Omega} (\theta_t \theta + K_2 \theta^2 + \gamma u_x \theta) dx, \quad t \geq 0, \quad (2.2.11)$$

ainsi que la solution du système ((2.2.1) – (2.2.3)), satisfait pour tout $\varepsilon_2 > 0$, l'estimation suivante :

$$\frac{d}{dt} I_4(t) \leq -l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}\right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx, \quad t \geq 0 \quad (2.2.12)$$

Preuve. Intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_4(t) &= \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx \\ &= + \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx, \end{aligned}$$

Grace à l'inégalité de Young, on a

$$\gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx \leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx,$$

ainsi,

$$\frac{d}{dt} I_4(t) \leq -l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \left(1 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2}\right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx.$$

■

Maintenant, pour établir le résultat principal de ce travail, on introduit la fonctionnelle de Lyapunov

$$F(t) = NE(t) + \frac{\gamma}{4} I_1 + I_2 + \varepsilon_2 I_3 + I_4, \quad t \geq 0. \quad (2.2.13)$$

Théorème 2.2.2 Supposons que les données initiales sont dans V . Alors, l'énergie $E(t)$ décroît exponentiellement, i.e, il existe deux constante positive C and d indépendamment des données initiales de telle sorte que

$$E(t) \leq CE(0) e^{-dt}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2.14)$$

Preuve. En tenant compte de (2.2.4), (2.2.6), (2.2.8), (2.2.10), (2.2.12) et de la relation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_x^2 dx &= \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) - \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_x^4 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx + \frac{L}{4} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} &- \left[NK_1 - \frac{\gamma}{8} - \varepsilon_2 \left(K_1 + \frac{2}{L} \right) \right] \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &- \left[NK_2 - \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} \right) - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + K_2 \right) - c_1(\varepsilon_2) - \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} \right] \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\ \frac{d}{dt} F(t) &\leq - \left[l - \varepsilon_2 \left(\frac{2l}{L} + K_2 \right) \right] \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \tag{2.2.15} \\ &- \left[\frac{\gamma}{4} - \frac{2\varepsilon_2}{L} \right] \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &- \left[\frac{\gamma}{4} D_1 - \varepsilon_2 \left(D_1^2 + \frac{12D_1}{L} + 4 \right) - \frac{\gamma}{2} \varepsilon_1 \right] \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx \\ &- \left[\frac{\gamma D_2}{8} - \varepsilon_2 \left(\frac{6D_2}{L} + K_1 C_p \right) + \varepsilon_2 \frac{L}{2} \left(1 + \frac{D_1}{L} \right) - \frac{\gamma L}{16} \varepsilon_1 \right] \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx \end{aligned}$$

Ici, nous devons choisir nos coefficients d'une manière appropriée.

Tout d'abord, nous choisissons

$$\varepsilon_2 < \min \left(\frac{\gamma}{8} D_1 \left[D_1^2 + \frac{12D_1}{L} + 4 \right]^{-1}, l \left[\frac{2l}{L} + K_2 \right]^{-1}, \frac{\gamma L}{8}, \frac{\gamma D_2}{16} \left[\frac{6D_2}{L} + K_1 C_p + \frac{L}{2} + \frac{D_1}{2} \right]^{-1} \right).$$

Ensuite, nous prenons ε_1 assez petit tel que

$$\varepsilon_1 < \min \left(\frac{D_1}{4}, \frac{D_2}{L} \right).$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que

$$N > \max \left\{ K_2^{-1} \left[\frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} + c_1(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + K_2 \right) + \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} + 1 \right) \right], K_1^{-1} \left[\frac{\gamma}{8} + \varepsilon_2 \left(K_1 + \frac{2}{L} \right) \right] \right\}.$$

Par conséquent, (2.2.15) prend la forme

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\eta \int_{\Omega} \{ u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + w_{xx}^2 + \theta_x^2 + \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 \} dx. \tag{2.2.16} \\ &\leq -CE(t), \quad \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

pour certaines constantes positives η et C . Aussi, on peut vérifier que

$$\beta_2 E(t) \leq F(t) \leq \beta_1 E(t), \tag{2.2.17}$$

2.2. *Stabilité exponentielle de la poutre de von Kármán avec dissipation thermique et de frictionnelle*

pour certaines constantes positives β_1 et β_2 . La combinaison de (2.2.16) avec le membre de droite de (2.2.17), nous donne

$$F'(t) \leq -dF(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.2.18)$$

pour une certaine constante d positive. Ensuite, une simple intégration de (2.2.18) donne

$$F(t) \leq F(0) e^{-dt}, \quad \forall t \geq t_0.$$

D'où le résultat désiré. ■

Stabilité générale de la poutre de von Kármán avec dissipations viscoélastique et thermique

3.1 Position du problème

Le comportement asymptotique du couplage entre les phénomènes élastiques et thermiques a été étudié par plusieurs auteurs. La plupart de leurs résultats concernent le cas linéaire, voir [5, 9]. Ils ont montré que les plaques de modèles linéaires thermoélastiques (couplage de plaque et chaleur) et le système thermoélastique linéaire standard (couplage entre les équations d'onde et la chaleur) ont des propriétés différentes. Le premier modèle est toujours stable exponentiellement d'une certaine manière (c'est à dire l'énergie tend vers zéro de façon exponentielle lorsque le temps s'approche de l'infini), tandis que le second modèle n'a cette propriété que dans certains cas. Contrairement au cas linéaire, le modèle de von Kármán est adapté aux déplacements transversaux ainsi qu'aux déplacements longitudinaux pour les corps minces vibrants à grande déviation. Les résultats de divers modèles non linéaires ont été obtenus dans [24, 32, 36]. Pour le cas unidimensionnel d'une poutre de von Kármán avec effet thermique, récemment, Djebabla et Tatar

[7] ont construit une fonctionnelle appropriée de Lyapunov et ont prouvé la décroissance exponentielle en utilisant la méthode des multiplicateurs

Dans le présent travail, nous décrivons le modèle mathématique de la poutre non linéaire de longueur L fixée aux points d'extrémité, avec $u(x, t)$ et $w(x, t)$ décrivant les déplacements transversal et longitudinal respectivement d'un point générique. La fonction $\theta(x, t)$ décrit la température affectant le déplacement transversal. Plus précisément, nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - k \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx} = 0, \\ w_{tt} + \tau w_t - k \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x + \sigma w_{xxxx} = 0, \\ \theta_{tt} - l \theta_{xx} + \beta \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds + \gamma u_{tx} = 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

dans $(0, L) \times (0, \infty)$. Les coefficients $k, \gamma, \beta, \sigma, l$ et τ sont des constantes positives. Nous considérons le système (3.1.1) avec des conditions aux limites de Dirichlet pour u , Neumann-Dirichlet pour w et Neumann pour θ :

$$\begin{cases} u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = w(0, \cdot) = w(L, \cdot) = 0, \\ w_x(0, \cdot) = w_x(L, \cdot) = \theta_x(0, \cdot) = \theta_x(L, \cdot) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

aussi nous considérons les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1, \quad w(\cdot, 0) = w_0, \\ w_t(\cdot, 0) = w_1, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \theta_t(\cdot, 0) = \theta_1. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Avant, d'exhiber le résultat de ce chapitre consacré essentiellement à la preuve du résultat de la décroissance des solutions énergies du système ((3.1.1) – (3.1.3)), nous commençons par introduire quelques hypothèses, des fonctionnelles et des résultats donnés par des lemmes qui nous seront utiles pour la suite de ce chapitre.

3.2 Résultat principal

Dans cette section, nous présentons nos hypothèses et nous établissons, sans démonstration, un résultat d'existence globale. Concernant la fonction de relaxation g , nous supposons :

(H1) $g : R_+ \rightarrow R_+$ est une fonction différentiable satisfaisant

$$g(0) > 0, \quad \lambda = l - \beta \int_0^\infty g(s) ds = l - \beta \bar{g} > 0.$$

(H2) Il existe une fonction différentiable et décroissante $\varsigma : R_+ \rightarrow R_+$ satisfaisant

$$g'(t) \leq -\varsigma(t) g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Dans toute la suite, c_0 sera une constante positive générique et nous utilisons aussi les notations suivantes

$$(g * v)(t) = \int_0^t g(t-s)v(s) ds, \quad (3.2.1)$$

$$(g \diamond v)(t) = \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s)) ds, \quad (3.2.2)$$

$$(g \circ v)(t) = \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))^2 ds \quad (3.2.3)$$

pour tout $v \in L^2(\Omega)$. où $\Omega = (0, L)$

Le problème bien posé de ((3.1.1) – (3.1.3)) est établi dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 [24] *Soit $((u_0, u_1), (w_0, w_1), (\theta_0, \theta_1)) \in V$ où*

$$V = (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)) \times (H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)) \times (H^1(0, L) \times L^2(0, L)),$$

Supposons que (H1) et (H2) sont satisfaites. Alors le système ((3.1.1) – (3.1.3)) admet une unique solution globale

$$(u, u_t, w, w_t, \theta, \theta_t) \in C([0, \infty[; V),$$

Maintenant, nous introduisons l'énergie du premier ordre du problème ((3.1.1) – (3.1.3)) donnée par

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \int_\Omega \{u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + \sigma w_{xx}^2 + \left(l - \beta \int_0^t g(s) ds\right) \theta_x^2 \\ & + k \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2\right)^2\} dx + \frac{\beta}{2} \int_\Omega (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Proposition 3.2.2 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), nous avons*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta_t \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(t) ds dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' o \theta_x) dx + \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (g o \theta_x) dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx \right], \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Supposons que (H1) est satisfaite. Alors, il existe une constante positive c_0 tel que

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (v(t) - v(s)) ds \right)^2 dx \leq c_0 \int_{\Omega} (g o v) dx,$$

pour tout $v \in L^2(\Omega)$.

Preuve. Intégrant par parties et utilisant les conditions aux limites, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta_t \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds dx &= - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx \\ &+ \int_{\Omega} \theta_{tx} \int_0^t g(t-s) [\theta_x(t) - \theta_x(s)] ds dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (g o \theta_x) dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx \right] \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' o \theta_x) dx + \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (v(t) - v(s)) ds \right)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^t g^{\frac{1}{2}}(t-s) g^{\frac{1}{2}}(t-s) (v(t) - v(s)) ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\left(\int_0^t g(t-s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (v(t) - v(s))^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &\leq c_0 \int_{\Omega} (g o v) dx, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion de la proposition ■

Lemme 3.2.1 *Il existe c_0 , constante positive, telle que*

$$\int_{\Omega} (\ell \theta_x - \beta (g * \theta_x))^2 dx \leq c_0 \left(\int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \int_{\Omega} (g o \theta_x) dx \right), \quad t \geq 0.$$

Preuve. En utilisant le fait que $(a^2 - b^2) \leq 2a^2 + 2b^2$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (l\theta_x - \beta(g * \theta_x))^2 dx &\leq 2l^2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + 2\beta^2 \int_{\Omega} (g * \theta_x)^2 dx \\
 &\leq 2l^2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + 2\beta^2 \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t))^2 ds dx \\
 &\leq \left(2l^2 + 4\beta^2 \left(\int_0^t g(t-s) ds \right)^2 \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + 4\beta^2 \int_{\Omega} (g \diamond \theta_x)^2 dx \\
 &\leq c_0 \left(\int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx \right).
 \end{aligned}$$

Notre résultat principal est le suivant. ■

Théorème 3.2.1 *Etant donné $((u_0, u_1), (w_0, w_1), (\theta_0, \theta_1)) \in V$. Supposons que (H1) et (H2) sont vérifiées. Alors, il existe deux constantes positives d_1 et d_2 telles que l'énergie de la solution du système ((3.1.1) – (3.1.3)) vérifie*

$$E(t) \leq d_1 \exp(-d_2 \int_{t_0}^t \varsigma(s) ds), \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.2.6)$$

3.3 Preuve du résultat principal

Dans cette section nous établissons et prouvons notre résultat sur la décroissance exponentielle pour le système non linéaire ((3.1.1) – (3.1.3)). Nous commençons par introduire quelques fonctionnelles et établir des résultats préliminaires sous forme de lemmes.

Lemme 3.3.1 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour toute solution du système ((3.1.1) – (3.1.3)), l'énergie vérifie*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\tau \int_{\Omega} w_t^2 dx - \frac{\beta}{2} g(t) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx, \quad t \geq 0. \quad (3.3.1)$$

Preuve. La multiplication de la première équation du système ((3.1.1) – (3.1.3)) par u_t , la seconde par w_t et la troisième par θ_t , puis, utilisant l'intégration par parties sur $(0, L)$ ainsi que la relation (3.2.5), nous obtenons la relation (3.3.1) pour toute solution régulière. ■

Lemme 3.3.2 Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, la fonctionnelle I_1 définie par

$$I_1(t) = \int_{\Omega} \left(u_t u + \frac{1}{2} w_t w + \frac{\tau}{4} w^2 \right) dx, \quad t \geq 0, \quad (3.3.2)$$

vérifie l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &\leq -k \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(u_t^2 + \frac{1}{2} w_t^2 \right) dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve. En dérivant la fonctionnelle I_1 et en utilisant la première et la deuxième équation du système ((3.1.1) – (3.1.3)), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} \left[k \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)_x - \gamma \theta_{tx} \right] u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[k \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x - \sigma w_{xxxx} - \tau w_t \right] w dx + \frac{\tau}{2} \int_{\Omega} w_t w dx \\ &= \int_{\Omega} u_t^2 dx - k \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) u_x dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_t u_x dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &\quad - \frac{k}{2} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx. \end{aligned}$$

Puis, grace à l'inégalité de Young, on a,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &\leq -k \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(u_t^2 + \frac{1}{2} w_t^2 \right) dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx. \end{aligned}$$

D'où le résultat (3.3.3). ■

Lemme 3.3.3 Pour tout $\varepsilon_2 > 0$, la fonctionnelle I_2 définie par

$$I_2(t) = \int_{\Omega} \left(\int_0^x \theta_t(t, y) dy \right) u_t dx - l \int_{\Omega} \theta_x u dx, \quad t \geq 0, \quad (3.3.4)$$

vérifie, pour toute solution du système ((3.1.1) – (3.1.3)), l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(t) &\leq -\frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\ &\quad + c_0 \int_{\Omega} (g \theta_x) dx + \varepsilon_2 k \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) dx \\ &\quad + c_0 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 [k u_x^2(L) - \gamma \theta_t^2(L)], \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Preuve. La dérivée de la fonctionnelle I_2 donne

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_2(t) &= \int_{\Omega} \left(\int_0^x \left[l\theta_{xx} - \beta \int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(s)ds - \gamma u_{tx} \right] ds \right) u_t dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left(\int_0^x \theta_t(t,y) dy \right) \left[k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x - \gamma \theta_{tx} \right] dx \\
 &\quad + l \int_{\Omega} \theta_t u_x dx - l \int_{\Omega} \theta_x u_t dx \\
 &= -\beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t)) ds \right) u_t dx \\
 &\quad - \gamma \int_{\Omega} u_t^2 dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - k \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) \theta_t dx \\
 &\quad + \left(\int_0^L \theta_t dx \right) [k u_x(L) - \gamma \theta_t(L)] + l \int_{\Omega} \theta_t u_x dx.
 \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant le premier terme de la dernière identité. En utilisant l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned}
 &-\beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t)) ds \right) u_t dx \\
 &\leq \frac{\beta^2}{2\gamma} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t))^2 ds dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &\leq \frac{\beta^2}{\gamma} \int_{\Omega} (g\theta_x) dx + \frac{\beta^2}{\gamma} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &\leq c_0 \int_{\Omega} (g\theta_x) dx + c_0 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

■

Afin d'éliminer les termes de la frontière apparaissant dans (3.3.5) nous utilisons la fonction

$$q(x) = 2 - \frac{4}{L}x, \quad x \in \Omega,$$

qui satisfait

$$q(L) = -q(0) = -2$$

et nous prouvons le lemme suivant.

Lemme 3.3.4 *La fonctionnelle I_3 définie par*

$$I_3(t) = \int_{\Omega} (\theta_t + \gamma u_x) q \left(l\theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) \right) dx$$

$$+ \int_{\Omega} w_t q w_x dx + l \int_{\Omega} u_t q u_x dx, \quad t \geq 0, \quad (3.3.6)$$

vérifie, pour toute solution du système ((3.1.1) – (3.1.3)), l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) \leq & - [\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - k [u_x^2(L) + u_x^2(0)] \\ & + \left(\frac{6\tau}{2L} + kC_p \right) \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx + \left(\frac{2l}{L} + \tau \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ & + \left(\frac{2}{L} + \tau \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + \frac{2k}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ & + \frac{8k}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \left(k + \frac{2}{L} \right) \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ & + c_0 \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx - c_0 \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

pour tout $t \geq 0$, où C_p est la constante de Poincaré.

Preuve. La dérivée de I_3 nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta_t + \gamma u_x) q \left(l \theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(l \theta_{xx} - \beta \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds \right) q \left(l \theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right) \right) dx \\ &\quad + l \int_{\Omega} \theta_t q \theta_{tx} dx - \beta \int_{\Omega} \theta_t q \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right)_t dx \\ &\quad + \gamma l \int_{\Omega} u_x q \theta_{tx} dx - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right)_t dx, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

et par une simple intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta_t + \gamma u_x) q \left(l \theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right) \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} q_x (l \theta_x - \beta (g * \theta_x))^2 dx - \frac{l}{2} \int_{\Omega} q_x \theta_t^2 dx \\ &\quad + \frac{l}{2} [q \theta_t^2]_{x=L}^{x=0} - \beta \int_{\Omega} \theta_t q (g \theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\ &\quad + \gamma l \int_{\Omega} u_x q \theta_{tx} dx - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q (g \theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_{\Omega} \left(l \theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right) \right)^2 dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\ &\quad - [\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - \beta \int_{\Omega} \theta_t q (g \theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\ &\quad + \gamma l \int_{\Omega} u_x q \theta_{tx} dx - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q (g \theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
 l \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t q w_x dx &= +kl \int_{\Omega} \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right)_x q w_x dx \\
 &\quad - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x dx - \sigma l \int_{\Omega} w_{xxxx} q w_x dx + l \int_{\Omega} w_t q w_{tx} dx \\
 &= -kl \int_{\Omega} \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right) (q_x w_x + q w_{xx}) dx - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x dx \\
 &\quad + \sigma l \int_{\Omega} w_{xxx} (q_x w_x + q w_{xx}) dx - \frac{l}{2} \int_{\Omega} q_x w_t^2 dx \\
 &= +\frac{4kl}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx - \frac{kl}{2} \int_{\Omega} w_x^2 w_x q w_{xx} dx \\
 &\quad - kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x - \frac{4\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xxx} w_x dx \\
 &\quad + \sigma l \int_{\Omega} w_{xxx} q w_{xx} dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx
 \end{aligned}$$

Ainsi, de la relation,

$$\begin{aligned}
 -\frac{kl}{2} \int_{\Omega} w_x^2 w_x q w_{xx} dx &= -\frac{kl}{4} \int_{\Omega} (w_x)^2 q ((w_x)^2)_x dx \\
 &= -\frac{kl}{2L} \int_{\Omega} w_x^4 dx,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 +\sigma l \int_{\Omega} w_{xxx} q w_{xx} dx &= +\frac{2\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx - \sigma l [w_{xx}^2(L) + w_{xx}^2(L)] \\
 &\leq +\frac{2\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx,
 \end{aligned}$$

nous déduisons

$$\begin{aligned}
 l \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t q w_x dx &\leq +\frac{4kl}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx \\
 &\quad - kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx - \frac{kl}{2L} \int_{\Omega} w_x^4 dx + \frac{2\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\
 &\quad + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x dx.
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
 l \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t q u_x dx &= kl \int_{\Omega} u_{xx} q u_x dx + kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx \\
 &\quad - \gamma l \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx + l \int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx \\
 &= -kl [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{2kl}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx - \gamma l \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx \\
 &\quad + kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Ainsi, d'après les trois relations précédentes ((3.3.8) – (3.3.10)), on obtient,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} I_3(t) &\leq \frac{2}{L} \int_{\Omega} (l\theta_x - \beta(g * \theta_x))^2 dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
 &\quad - [\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - \beta \int_{\Omega} \theta_t q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\
 &\quad - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\
 &\quad - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x + \frac{4kl}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx + \frac{6\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\
 &\quad - kl [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{2kl}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit d'après les inégalités de Young et de Poincaré, ■

Lemme 3.3.5 *La fonctionnelle I_4 définie par*

$$I_4(t) = \int_{\Omega} (\theta_t \theta + \gamma u_x \theta) dx, \quad t \geq 0, \tag{3.3.11}$$

vérifie, pour toute solution du système ((3.1.1) – (3.1.3)) et pour tout $\varepsilon_2 > 0$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} I_4(t) &\leq -\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx \\
 &\quad + \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + c_0 \int_{\Omega} (g\theta_x) dx,
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Preuve. En dérivant la fonctionnelle I_4 et après en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_4(t) &= \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ &\quad + \beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) \theta_x dx + \gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx \\ &= \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \beta \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ &\quad - \beta \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s)) \theta_x dx + \gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx. \end{aligned}$$

Ensuite, comptenu de l'inégalité de Young, nous aurons, pour $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} & -\beta \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s)) \theta_x dx \\ & \leq \delta \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{\beta^2}{4\delta} \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_{\Omega} (g\theta_x) dx. \end{aligned}$$

Aussi pour $\varepsilon_2 > 0$,

$$\gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx \leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx,$$

on en déduit,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_4(t) &\leq -(\lambda - \delta) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx \\ &\quad + \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + \frac{\beta^2}{4\delta} \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_{\Omega} (g\theta_x) dx. \end{aligned}$$

La relation (3.3.12) s'en déduit en prenant $\delta = \frac{\lambda}{2}$. ■

Lemme 3.3.6 *La fonctionnelle I_5 définie par*

$$I_5(t) = - \int_{\Omega} \theta_t (g \diamond \theta) dx, \quad t \geq 0. \quad (3.3.13)$$

vérifie, pour toute solution du système ((3.1.1)–(3.1.3)) et pour tous $\delta, \varepsilon_2 > 0$, l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_5(t) &\leq - \left(\int_0^t g(s)ds - \delta \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + c_0 \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &\quad - \frac{c_0}{\delta} \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx + c_0 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) (g \circ \theta_x)(t), \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Preuve. La dérivation de I_5 donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_5(t) &= - \int_{\Omega} \theta_{tt} (g \diamond \theta) dx - \int_{\Omega} \theta_t (g \diamond \theta)_t dx \\ &= \int_{\Omega} \left[-l\theta_{xx} + \beta \int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(s)ds + \gamma u_{tx} \right] (g \diamond \theta) dx \\ &\quad - \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - \int_{\Omega} \theta_t (g' \diamond \theta_x) dx \end{aligned}$$

intégrons par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_5(t) &= l \int_{\Omega} \theta_x (g \diamond \theta_x) dx - \beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) (g \diamond \theta_x) dx \\ &\quad - \gamma \int_{\Omega} u_t (g \diamond \theta_x) dx - \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - \int_{\Omega} \theta_t (g' \diamond \theta) dx. \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons estimer les termes de cette dernière identité, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré. Ainsi, on obtient, pour tout $\delta > 0$,

$$- \int_{\Omega} \theta_t (g' \diamond \theta) dx \leq \delta \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - \frac{c_0}{\delta} \int_{\Omega} (g' \diamond \theta_x) dx.$$

De même, nous avons pour $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned} -\gamma \int_{\Omega} u_t (g \diamond \theta_x) dx &\leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_{\Omega} (g \diamond \theta_x) dx, \\ l \int_{\Omega} \theta_x (g \diamond \theta_x) dx &\leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_{\Omega} (g \diamond \theta_x) dx. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} & -\beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) (g \diamond \theta) dx \\ & \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s)(\theta_x(s) - \theta_x(t) + \theta_x(t))^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s)(\theta_x(t) - \theta_x(s))^2 dx \right) \right. \\ & \leq c_0 \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} (g \diamond \theta)^2 dx \\ & \leq c_0 \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + c_0 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} (g \diamond \theta_x) dx, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. ■

Passons à la démonstration du Théorème

Preuve. Pour $N_1, N_2, N > 0$, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov par

$$F(t) = NE(t) + \frac{\gamma}{4}I_1 + I_2 + \varepsilon_2 I_3 + N_1 I_4 + N_2 I_5, \quad t \geq 0, \quad (3.3.15)$$

et en tenant compte de (3.3.1), (3.3.3), (3.3.5), (3.3.7), (3.3.12), (3.3.14) et de la relation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_x^2 dx &= \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) - \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_x^4 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx + \frac{L}{4} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} &- \left[N\tau - \frac{\gamma}{8} - \varepsilon_2 \left(k + \frac{2}{L} \right) \right] \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &- \left[N_2 \left(\int_0^t g(s) ds - \delta \right) - N_1 \left(1 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2} \right) - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + \tau \right) - c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} \right] \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\ &- \left[\frac{\lambda N_1}{2} - \varepsilon_2 \left(N_2 c_0 + \frac{2l}{L} + \tau \right) - c_0 \right] \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ \frac{d}{dt} F(t) \leq &- \left[\frac{\gamma}{4} - \varepsilon_2 \left(N_2 + \frac{2}{L} \right) \right] \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &- \left[\frac{\gamma k}{4} - \varepsilon_2 \left(k + \frac{12k}{L} + 2 + 2N_1 \right) - \frac{\gamma}{2} \varepsilon_1 \right] \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx \\ &- \left[\frac{\gamma \sigma}{8} - \varepsilon_2 \left(\frac{6\tau}{2L} + kC_p + \frac{k}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{4} N_1 \right) - \frac{\gamma L}{16} \varepsilon_1 \right] \int_{\Omega} (w_{xx})^2 dx \\ &+ \left[N \frac{\beta}{2} - \frac{c_0}{\delta} N_2 - \varepsilon_2 c_0 \right] \int_{\Omega} (g' o \theta_x) dx \\ &+ \left[N_2 c_0 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + N_1 c_0 + \varepsilon_2 c_0 + c_0 \right] \int_{\Omega} (g o \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Puisque g est continue positive et $g(0) > 0$, alors, pour tout $t_0 > 0$, nous avons

$$\int_0^t g(s) ds \geq \int_0^{t_0} g(s) ds = g_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Tout d'abord, on suppose que $\gamma = \frac{1}{2N_2}$.

Ensuite, on choisit

$$\varepsilon_1 < \min \left(\frac{1}{4}k, \frac{\gamma}{L} \right),$$

et

$$\varepsilon_2 < \min \left(\frac{\gamma}{8} \left(N_2 + \frac{2}{L} \right)^{-1}, \frac{\gamma k}{8} \left(k + \frac{12k}{L} + 2 + 2N_1 \right)^{-1}, \frac{\gamma \sigma}{24} \left(\frac{6\tau}{2L} + kC_p + \frac{k}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{4} N_1 \right)^{-1} \right).$$

Maintenant, nous prenons N_1 suffisamment grand tel que

$$\frac{\lambda N_1}{2} - \varepsilon_2 \left(N_2 c_0 + \frac{2l}{L} + \tau \right) - c_0 > 0.$$

Ensuite, nous choisissons N_2 grand pour que

$$N_2 g_0 - \frac{1}{2} - N_1 \left(1 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2} \right) - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + \tau \right) - c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} > 0.$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que

$$N\tau - \frac{\gamma}{8} - \varepsilon_2 \left(k + \frac{2}{L} \right) > 0,$$

et

$$N \frac{\beta}{2} - c_0 N_2^2 - \varepsilon_2 c_0 > 0.$$

Par conséquent, l'inégalité (3.3.16) devient

$$F'(t) \leq -CE(t) + \eta \int_{\Omega} (g\theta_x) dx, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.3.17)$$

où C, η sont deux constantes positives.

En multipliant (3.3.17) par $\varsigma(t)$ et l'utilisation des hypothèses (H1) et (H2), nous arrivons à

$$\begin{aligned} \varsigma(t) F'(t) &\leq -C\varsigma(t) E(t) + \eta\varsigma(t) \int_{\Omega} (g\theta_x)(t) \\ &\leq -C\xi(t) E(t) - c(g'o\theta_x)(t) \\ &\leq -C\varsigma(t) E(t) - cE'(t), \end{aligned}$$

qu'on écrit

$$[\varsigma(t) F(t) + cE(t)]' - \varsigma'(t) F(t) \leq -C\varsigma(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\varsigma'(t) \leq 0$, on obtient

$$(\varsigma(t) F(t) + cE(t))' \leq -C\varsigma(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Aussi, en notant que

$$R(t) = \varsigma(t) F(t) + cE(t) \sim E(t),$$

nous obtenons, pour une constante positive α ,

$$R'(t) \leq -\alpha \zeta(t) R(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.3.18)$$

d'après une intégration simple

$$E(t) \leq d_1 \exp\left(-d_2 \int_{t_0}^t \zeta(s) ds\right), \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.3.19)$$

D'où le résultat ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons amélioré le résultat prouvé dans le chapitre 2 dont le but est d'obtenir une estimation de l'énergie pour la poutre non linéaire de von Kármán avec deux dissipations, thermique et de frictionnelle. En utilisant la méthode des multiplicateurs on a démontré la décroissance générale énergies des solutions . Cette amélioration c'est traduite par l'introduction d'un amortissement plus faible encore à savoir, la dissipation viscoélastique dans la troisième équation. Toujours en moyennant la méthode de énergie nous avons démontré que lorsque le noyau décroît d'une manière générale, alors les solutions énergies tendent vers zéro d'une manière générale aussi.

Annexe

**GENERAL STABILIZATION FOR THE FULL VON
KÁRMÁN SYSTEM WITH A THERMO-VISCOELASTIC
DAMPING AND A FRICTIONAL DAMPING**

ABDELHAK DJEBABLA¹, DALLEL OUCIF², AND AHMED BERKANE³

ABSTRACT. In this paper we consider a one-dimensional von Kármán system in the presence of a thermo-viscoelastic dissipation acting on the longitudinal component and the frictional damping acting on the transversal component of the beam. by using a suitable Lyapunov function, we establish a general decay result which is not necessarily of exponential or polynomial type.

2010 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION. 49K20, 70K20

KEYWORDS AND PHRASES. General decay, Full von Kármán beam, Thermo-viscoelastic damping.

1. INTRODUCTION

The asymptotic behavior of the coupling between the elastic and heat phenomena has been studied by several authors. Most of the obtained results concern the linear case, see [6, 8] and references therein. They showed that the thermoelastic linear models plate (coupling plate and heat) and the standard linear thermoelastic system (coupling the wave and heat equations) have different properties. The first model is always exponentially stable (namely the energy approaches zero exponentially when time goes to infinity), while the second model has this property only in certain case. Unlike the linear case, the full von Kármán model is suitable if we take into account the transversal displacements as well as the longitudinal displacements for vibrating slender bodies with large deflection. Results for various nonlinear models have been obtained in [4, 19, 23]. For the one-dimensional case of a full von Kármán beam with thermal effect, recently, djebabla and Tatar [7] constructed a suitable functional of Lyapunov and proved the exponential decay using the multipliers method. In the present work, we describe the mathematical model of a nonlinear beam of length L clamped at the end points. Let $u(x, t)$ and $w(x, t)$ be the transverse and the longitudinal displacements of a generic point. The variable $\theta(x, t)$ describes the temperature affecting the transversal displacement. More precisely, we consider the following system

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - k \left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx} = 0, \\ w_{tt} + \tau w_t - k \left[\left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x + \sigma w_{xxxx} = 0, \\ \theta_{tt} - l \theta_{xx} + \beta \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds + \gamma u_{tx} = 0, \end{cases}$$

in $\Omega \times (0, \infty)$, where $\Omega = [0, L]$ and t denoting the (positive) time variable. The coefficients k , γ , β , σ , l , and τ are positive constants. We consider

system (1) under Dirichlet boundary conditions for u , clamped ends for w , and Neumann boundary conditions on θ :

$$(2) \quad \begin{cases} u = 0, & w = 0, & \theta_x = 0, & x = 0, & L, & t > 0 \\ & & & w_x = 0, & x = 0, & L, & t > 0 \end{cases}$$

and the initial data

$$(3) \quad \begin{cases} u(0, \cdot) = u_0, & u_t(0, \cdot) = u_1, & w(0, \cdot) = w_0, \\ w_t(0, \cdot) = w_1, & \theta(0, \cdot) = \theta_0, & \theta_t(0, \cdot) = \theta_1. \end{cases}$$

The plan of the paper is as follows: In the next section we prepare some material needed to prove our result. We present the different functionals by which we modify the classical energy to get an equivalent one. Section 3 is mainly devoted to the statement and proof of the general decay result.

2. PRELIMINARIES

In this section, we present our hypotheses and state, without proof, a global existence result. For the relaxation function g we assume:

(H1) $g : R_+ \rightarrow R_+$ is a differentiable function satisfying

$$g(0) > 0, \quad \lambda = l - \beta \int_0^\infty g(s) ds = l - \beta \bar{g} > 0.$$

(H2) There exists a nonincreasing differentiable function $\zeta : R_+ \rightarrow R_+$ satisfying

$$g'(t) \leq -\zeta(t) g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Along this paper, c_0 is a generic positive constant and we also use the following notations

$$(4) \quad (g * v)(t) = \int_0^t g(t-s)v(s) ds,$$

$$(5) \quad (g \diamond v)(t) = \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s)) ds,$$

$$(6) \quad (gov)(t) = \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))^2 ds,$$

for all $v \in L^2(\Omega)$.

The well-posedness of (1)-(3) is stated in the following proposition.

Proposition 2.1. ([19]) *Let $((u_0, u_1), (w_0, w_1), (\theta_0, \theta_1)) \in V$ where*

$$V = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \times H^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

and

$$H_0^2(0, L) = \{v \in H^2(0, L) : v(0) = v(L) = v_x(0) = v_x(L) = 0\}.$$

Assume that (H1) and (H2) are satisfied; then problem (1)-(3) has a unique global solution $(u, u_t, w, w_t, \theta, \theta_t) \in C([0, \infty); V)$.

Now, we introduce the first-order energy of problem (1)-(3) given by

$$(7) \quad E(u, w, \theta) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + \sigma w_{xx}^2 + \left(l - \beta \int_0^t g(s) ds \right) \theta_x^2 \right. \\ \left. + k \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 \right] dx + \frac{\beta}{2} \int_\Omega (gov) dx.$$

Lemma 2.2. *Under assumptions (H1) and (H2), we have*

$$(8) \quad \int_{\Omega} \theta_t \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(t) ds dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx + \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx \right], \quad \forall t \geq 0.$$

Proof. Integrating by parts and using the boundary conditions, we get

$$\int_{\Omega} \xi_t \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds dx = - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx \\ + \int_{\Omega} \theta_{tx} \int_0^t g(t-s) [\theta_x(t) - \theta_x(s)] ds dx \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx \right] \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx + \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} \theta_x^2(t) dx.$$

Lemma 2.3. *Assume that (H1) holds. Then, there exists a positive constant c_0 such that*

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (v(t) - v(s)) ds \right)^2 dx \leq c_0 \int_{\Omega} (g \circ v) dx,$$

for any $v \in L^2(\Omega)$.

Proof. By Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (v(t) - v(s)) ds \right)^2 dx \\ = \int_{\Omega} \left(\int_0^t g^{\frac{1}{2}}(t-s) g^{\frac{1}{2}}(t-s) (v(t) - v(s)) ds \right)^2 dx \\ \leq \int_{\Omega} \left[\left(\int_0^t g(t-s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (v(t) - v(s))^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ \leq c_0 \int_{\Omega} (g \circ v) dx,$$

which proves the assertion of the lemma.

Lemma 2.4. *There exists a positive constant c_0 such that*

$$\int_{\Omega} (l\theta_x - \beta(g * \theta_x))^2 dx \leq c_0 \left(\int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx \right), \quad t \geq 0$$

Proof. Using the fact that $(a^2 + b^2) \leq 2a^2 + 2b^2$ and lemma 2, we get

$$\int_{\Omega} (l\theta_x - \beta(g * \theta_x))^2 dx \leq 2l^2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + 2\beta^2 \int_{\Omega} (g * \theta_x)^2 dx \\ \leq 2l^2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + 2\beta^2 \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t))^2 ds dx \\ \leq \left(2l^2 + 4\beta^2 \left(\int_0^t g(t-s) ds \right)^2 \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + 4\beta^2 \int_{\Omega} (g \diamond \theta_x)^2 dx \\ \leq c_0 \left(\int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx \right).$$

Our result reads as follows.

Theorem 2.5. *Let $((u_0, u_1), (w_0, w_1), (\theta_0, \theta_1)) \in V$, be given. Assume that (H1) and (H2) hold. Then, there exist two positive constants d_1 and d_2 for which the solution of Problem (1)-(3) satisfies*

$$(9) \quad E(t) \leq d_1 e^{-d_2 \int_{t_0}^t \zeta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0.$$

3. PROOF OF THE MAIN RESULT

In this section we state and prove our result on the general decay, for the nonlinear system (1)-(3). We start by introducing some functionals and stating some lemmas

Lemma 3.1. *Under assumptions (H1) and (H2), the energy satisfies, along the solution of (1)-(3)*

$$(10) \quad \frac{d}{dt} E(t) = -\tau \int_{\Omega} w_t^2 dx - \frac{\beta}{2} g(t) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} (g' o \theta_x) dx, \quad t \geq 0.$$

Proof. Multiplying the first equation of (1)-(3) by u_t , the second by w_t and the third by θ_t then we integrate over $(0, L)$ and using the relation (8), we get (10) for any regular solution.

Lemma 3.2. *For any $\varepsilon_1 > 0$, the functional I_1 defined by*

$$(11) \quad I_1(t) = \int_{\Omega} (u_t u + \frac{1}{2} w_t w + \frac{\tau}{4} w^2) dx, \quad t \geq 0,$$

satisfies, along the solution of (1)-(3), the estimate

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &\leq -k \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2)^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} (u_t^2 + \frac{1}{2} w_t^2) dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx, \end{aligned}$$

for all $t \geq 0$.

Proof. Differentiating the functional I_1 and using the first and the second equation of (1)-(3), we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} [k (u_x + \frac{1}{2} w_x^2)_x - \gamma \theta_{tx}] u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} [k [(u_x + \frac{1}{2} w_x^2) w_x]_x - \sigma w_{xxxx} - \tau w_t] w dx + \frac{\tau}{2} \int_{\Omega} w_t w dx \\ &= \int_{\Omega} u_t^2 dx - k \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2) u_x dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_t u_x dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &\quad - \frac{k}{2} \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2) w_x^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$

Then, the application of Young's inequality yields,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &\leq -k \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2)^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} (u_t^2 + \frac{1}{2} w_t^2) dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \end{aligned}$$

which is exactly (12).

Lemma 3.3. *For any $\varepsilon_2 > 0$, the functional I_2 defined by*

$$(12) \quad I_2(t) = \int_{\Omega} (\int_0^x \theta_t(t, y) dy) u_t dx - l \int_{\Omega} \theta_x u dx, \quad t \geq 0,$$

satisfies, along the solution of (1)-(3), the estimate

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(t) &\leq -\frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\ &+ c_0 \int_{\Omega} (g o \theta_x) dx + \varepsilon_2 k \int_{\Omega} (u_x + \frac{1}{2} w_x^2) dx \\ &+ c_0 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 [k u_x^2(L) - \gamma \theta_t^2(L)], \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Proof. The differentiation of (13) gives

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_2(t) &= \int_{\Omega} \left(\int_0^x \left[l\theta_{xx} - \beta \int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(s)ds - \gamma u_{tx} \right] ds \right) u_t dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left(\int_0^x \theta_t(t,y) dy \right) \left[k \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)_x - \gamma \theta_{tx} \right] dx \\
 &\quad \quad \quad + l \int_{\Omega} \theta_t u_x dx - l \int_{\Omega} \theta_x u_t dx \\
 &= -\beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t)) ds \right) u_t dx \\
 &\quad - \gamma \int_{\Omega} u_t^2 dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - k \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \theta_t dx \\
 &\quad + \left(\int_0^L \theta_t dx \right) [k u_x(L) - \gamma \theta_t(L)] + l \int_{\Omega} \theta_t u_x dx,
 \end{aligned}$$

We now estimate the first term in the last identity, using Young's inequality and lemma 2,

$$\begin{aligned}
 &-\beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t)) ds \right) u_t dx \\
 &\leq \frac{\beta^2}{2\gamma} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t))^2 ds dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &\leq \frac{\beta^2}{\gamma} \int_{\Omega} (g\theta_x) dx + \frac{\beta^2}{\gamma} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &\leq c_0 \int_{\Omega} (g\theta_x) dx + c_0 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

Whence our conclusion follows.

In order to deal with the boundary terms appearing in (14) we exploit the function

$$q(x) = 2 - \frac{4}{L}x, \quad x \in \Omega,$$

to prove the following lemma.

Lemma 3.4. *The functional I_3 defined by*

$$(14) \quad I_3(t) = \int_{\Omega} (\theta_t + \gamma u_x) q \left(l\theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) \right) dx \\ \int_{\Omega} w_t q w_x dx + l \int_{\Omega} u_t q u_x dx, \quad t \geq 0.$$

satisfies, along the solution of (1)-(3), the estimate

$$(15) \quad \begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_3(t) &\leq - [\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - k [u_x^2(L) + u_x^2(0)] \\
 &\quad + \left(\frac{6\tau}{2L} + kC_p \right) \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx + \left(\frac{2k}{L} + \tau \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\
 &\quad + \left(\frac{2}{L} + \tau \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + \frac{2k}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{2}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &\quad + \frac{8k}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \left(k + \frac{2}{L} \right) \int_{\Omega} w_t^2 dx \\
 &\quad + c_0 \int_{\Omega} (g\theta_x) dx - c_0 \int_{\Omega} (g'\theta_x) dx, \quad t \geq 0,
 \end{aligned}$$

for all $t \geq 0$, where C_p is the Poincaré constant.

Proof: A straightforward differentiation leads to

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta_t + \gamma u_x) q \left(l\theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(l\theta_{xx} - \beta \int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(s)ds \right) q \left(l\theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) \right) dx \\
 &\quad + l \int_{\Omega} \theta_t q \theta_{tx} dx - \beta \int_{\Omega} \theta_t q \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right)_t dx \\
 &\quad + \gamma l \int_{\Omega} u_x q \theta_{tx} dx - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right)_t dx.
 \end{aligned}$$

A simple integration by parts, gives

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta_t + \gamma u_x) q \left(l\theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} q_x (l\theta_x - \beta (g * \theta_x))^2 dx - \frac{l}{2} \int_{\Omega} q_x \theta_t^2 dx \\
&\quad + \frac{l}{2} [q\theta_t^2]_{x=L}^{x=0} - \beta \int_{\Omega} \theta_t q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\
(16) \quad & + \gamma l \int_{\Omega} u_x q \theta_{tx} dx - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\
&= \frac{2}{L} \int_{\Omega} \left(l\theta_x - \beta \left(\int_0^t g(t-s)\theta_x(s)ds \right) \right)^2 dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
&\quad - [\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - \beta \int_{\Omega} \theta_t q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\
&\quad + \gamma l \int_{\Omega} u_x q \theta_{tx} dx - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx.
\end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
& l \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t q w_x dx = +kl \int_{\Omega} \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right)_x q w_x dx \\
&\quad - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x dx - \sigma l \int_{\Omega} w_{xxxx} q w_x dx + l \int_{\Omega} w_t q w_{tx} dx \\
&= -kl \int_{\Omega} \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right) (q_x w_x + q w_{xx}) dx - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x dx \\
&\quad + \sigma l \int_{\Omega} w_{xxx} (q_x w_x + q w_{xx}) dx - \frac{l}{2} \int_{\Omega} q_x w_t^2 dx \\
&= +\frac{4kl}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx - \frac{kl}{2} \int_{\Omega} w_x^2 w_x q w_{xx} dx \\
&\quad - kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x - \frac{4\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xxx} w_x dx \\
&\quad + \sigma l \int_{\Omega} w_{xxx} q w_{xx} dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx
\end{aligned}$$

so, from the relation,

$$\begin{aligned}
-\frac{kl}{2} \int_{\Omega} w_x^2 w_x q w_{xx} dx &= -\frac{kl}{4} \int_{\Omega} w_x^2 q (w_x^2)_x dx \\
&= -\frac{kl}{2L} \int_{\Omega} w_x^4 dx,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& +\sigma l \int_{\Omega} w_{xxx} q w_{xx} dx = +\frac{2\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\
& -\sigma l [w_{xx}^2(L) + w_{xx}^2(0)] \leq +\frac{2\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx
\end{aligned}$$

we deduce

$$\begin{aligned}
(17) \quad & l \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t q w_x dx \leq +\frac{4kl}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x^2 dx \\
& -kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx - \frac{kl}{2L} \int_{\Omega} w_x^4 dx + \frac{2\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\
& \quad + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x dx.
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
(18) \quad & l \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t q u_x dx = kl \int_{\Omega} u_{xx} q u_x dx + kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx \\
& \quad - \gamma l \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx + l \int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx \\
&= -kl [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{2kl}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx - \gamma l \int_{\Omega} \theta_{tx} q u_x dx \\
& \quad + kl \int_{\Omega} w_x w_{xx} q u_x dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx.
\end{aligned}$$

Finally, from the previous three relations (17) – (19) we obtain,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_3(t) &\leq \frac{2}{L} \int_{\Omega} (l\theta_x - \beta (g * \theta_x))^2 dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\
&\quad - [\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)] - \beta \int_{\Omega} \theta_t q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx \\
&\quad - \beta \gamma \int_{\Omega} u_x q (g\theta_x - (g' \diamond \theta_x)) dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} w_t^2 dx \\
&\quad - \tau l \int_{\Omega} w_t q w_x + \frac{4kl}{L} \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x^2 dx + \frac{6\sigma l}{L} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\
&\quad - kl [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{2kl}{L} \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{2l}{L} \int_{\Omega} u_t^2 dx
\end{aligned}$$

We conclude by applying the Young and Poincaré inequalities, lemma 2 and lemma 3.

Lemma 3.5. *The functional I_4 defined by*

$$(19) \quad I_4(t) = \int_{\Omega} (\theta_t \theta + \gamma u_x \theta) dx, \quad t \geq 0,$$

satisfies, along the solution of (1)-(3), and for any $\varepsilon_2 > 0$, the following estimate:

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} I_4(t) &\leq -\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx \\ &+ \left(1 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2}\right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + c_0 \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Proof: By Differentiating the functional I_4 and integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_4(t) &= \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ &+ \beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right) \theta_x dx + \gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx \\ &= + \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - l \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \beta \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ &- \beta \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s)) \theta_x dx + \gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx \end{aligned}$$

Next, by Young's inequality, and lemma 2 we obtain, for $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} -\beta \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s)) \theta_x dx &\leq \delta \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ &+ \frac{\beta^2}{4\delta} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned}$$

Also, for $\varepsilon_2 > 0$

$$+\gamma \int_{\Omega} u_x \theta_t dx \leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx,$$

we deduce,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_4(t) &\leq -(\lambda - \delta_1) \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_x^2 dx \\ &+ \left(1 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2}\right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + \frac{\beta^2}{4\delta_1} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned}$$

The relation (21) is established by taking $\delta_1 = \frac{\lambda}{2}$.

Lemma 3.6. *The functional I_5 defined by*

$$(21) \quad I_5(t) = - \int_{\Omega} \theta_t (g \diamond \theta) dx, \quad t \geq 0.$$

satisfies, along the solution of (1)-(3), and for all $\delta, \varepsilon_2 > 0$, the following estimate

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} I_5(t) &\leq - \left(\int_0^t g(s) ds - \delta \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + c_0 \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &- \frac{c_0}{\delta} \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx + c_0 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) (g \circ \theta_x)(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Proof Direct differentiation, using (22), leads to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_5(t) &= - \int_{\Omega} \theta_{tt} (g \diamond \theta) dx - \int_{\Omega} \theta_t (g \diamond \theta)_t dx \\ &= \int_{\Omega} \left[-l \theta_{xx} + \beta \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds + \gamma u_{tx} \right] (g \diamond \theta) dx \\ &\quad - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - \int_{\Omega} \theta_t (g' \diamond \theta_x) dx \\ &= l \int_{\Omega} \theta_x (g \diamond \theta_x) dx - \beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right) (g \diamond \theta_x) dx \\ &- \gamma \int_{\Omega} u_t (g \diamond \theta_x) dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - \int_{\Omega} \theta_t (g' \diamond \theta) dx. \end{aligned}$$

We now estimate the terms in the last identity, using Young and Poincaré inequalities and lemma 2, for all $\delta > 0$,

$$- \int_{\Omega} \theta_t (g' \diamond \theta) dx \leq \delta \int_{\Omega} \theta_t^2 dx - \frac{c_0}{\delta} \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx.$$

Similary, we have for $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned} -\gamma \int_{\Omega} u_t (g \diamond \theta_x) dx &\leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx, \\ l(g \diamond \theta_x) dx &\leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned} &-\beta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) \theta_x(s) ds \right) (g \diamond \theta) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (\theta_x(s) - \theta_x(t) + \theta_x(t))^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s))^2 dx \right) \right. \\ &\leq c_0 \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} (g \diamond \theta)^2 dx \\ &\leq c_0 \varepsilon_2 \int_{\Omega} \theta_x^2 dx + c_0 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx, \end{aligned}$$

which proves the assertion of the lemma.

Proof of Theorem For $N_1, N_2, N_3 > 0$, we define the Lyapunov functional by

$$(23) \quad F(t) = NE(t) + \frac{\gamma}{4} I_1 + I_2 + \varepsilon_2 I_3 + N_1 I_4 + N_2 I_5, \quad t \geq 0,$$

and taking into account (10), (12), (14), (16), (21) and (23) and the relation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_x^2 dx &= \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) - \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_x^4 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right)^2 dx + \frac{L}{4} \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx, \end{aligned}$$

we arrive at

$$(24) \quad \begin{aligned} &-\left[N\tau - \frac{\gamma}{8} - \varepsilon_2 \left(k + \frac{2}{L} \right) \right] \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &-\left[N_2 \left(\int_0^t g(s) ds - \delta \right) - N_1 \left(1 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2} \right) - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + \tau \right) - c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} \right] \int_{\Omega} \theta_t^2 dx \\ &-\left[\frac{\lambda N_1}{2} - \varepsilon_2 \left(N_2 c_0 + \frac{2l}{L} + \tau \right) - c_0 \right] \int_{\Omega} \theta_x^2 dx \\ \frac{d}{dt} F(t) &\leq -\left[\frac{\gamma}{4} - \varepsilon_2 \left(N_2 + \frac{2}{L} \right) \right] \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ &-\left[\frac{\gamma}{4} k - \varepsilon_2 \left(k + \frac{12k}{L} + 2 + 2N_1 \right) - \frac{\gamma}{2} \varepsilon_1 \right] \int_{\Omega} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx \\ &-\left[\frac{\gamma \sigma}{8} - \varepsilon_2 \left(\frac{6\tau}{2L} + kC_p + \frac{k}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{4} N_1 \right) - \frac{\gamma L}{16} \varepsilon_1 \right] \int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \\ &+\left[N \frac{\beta}{2} - \frac{c_0}{\delta} N_2 - \varepsilon_2 c_0 \right] \int_{\Omega} (g' \circ \theta_x) dx \\ &+\left[N_2 c_0 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + N_1 c_0 + \varepsilon_2 c_0 + c_0 \right] \int_{\Omega} (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned}$$

Since g is continuous, positive and $g(0) > 0$, then for any $t_0 > 0$, we have

$$\int_0^t g(s) ds \geq \int_0^{t_0} g(s) ds = g_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

First, suppose that $\delta = \frac{1}{2N_2}$.

Next, we pick

$$\varepsilon_1 < \min \left(\frac{1}{4} k, \frac{\sigma}{L} \right).$$

and

$$\varepsilon_2 < \min \left(\frac{\gamma}{8} \left(N_2 + \frac{2}{L} \right)^{-1}, \frac{\gamma k}{8} \left(k + \frac{12k}{L} + 2 + 2N_1 \right)^{-1}, \frac{\gamma \sigma}{24} \left(\frac{6\tau}{2L} + kC_p + \frac{k}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{4} N_1 \right)^{-1} \right).$$

Now, we choose N_1 large enough such that

$$\frac{\lambda N_1}{2} - \varepsilon_2 \left(N_2 c_0 + \frac{2l}{L} + \tau \right) - c_0 > 0.$$

Then, we select N_2 large so that

$$N_2 g_0 - \frac{1}{2} - N_1 \left(1 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2}\right) - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + \tau\right) - c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) - \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} > 0$$

Finally, we choose N a large enough so that

$$N\tau - \frac{\gamma}{8} - \varepsilon_2 \left(k + \frac{2}{L}\right) > 0,$$

and

$$N\frac{\beta}{2} - c_0 N_2^2 - \varepsilon_2 c_0 > 0.$$

Therefore, (25) becomes

$$(25) \quad F'(t) \leq -CE(t) + \eta \int_{\Omega} (g\theta_x) dx, \quad \forall t \geq t_0,$$

where C, η are two positive constants.

By multiplying (26) by $\zeta(t)$ and using (H1) and (H2), we arrive at

$$\begin{aligned} \zeta(t) F'(t) &\leq -k_0 \zeta(t) E(t) - c \zeta(t) (g\psi_x)(t) \\ &\leq -k_0 \zeta(t) E(t) - c_1 (g'\psi_x)(t) \\ &\leq -k_0 \zeta(t) E(t) - c_1 E'(t), \end{aligned}$$

thus

$$[\zeta(t) F(t) + cE(t)]' - \zeta'(t) L(t) \leq -k_0 \zeta(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Now, by using the fact that $\zeta'(t) \leq 0$, we have

$$(\zeta(t) F(t) + cE(t))' \leq -k_0 \zeta(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Again, by noting that

$$R(t) = \zeta(t) F(t) + cE(t) \sim E(t),$$

we obtain for some positive constant α ,

$$(26) \quad R'(t) \leq -\alpha \zeta(t) R(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

A simple integration of (27) over (t_0, t) leads to

$$(27) \quad R(t) \leq R(0) e^{-c_1 \int_{t_0}^t \zeta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Finally, the assertion of Theorem 5 is then obtained by virtue of the boundedness of E and ζ and the fact that $R \sim E$. \square

REFERENCES

- [1] F. D. Araruna, P. Braz e Silva, and E. Zuazua, Asymptotics and stabilization for dynamic models of nonlinear beams, Proc. Estonian Acad. Sci., 59, (2) (2010), 150–155.
- [2] Bisognin E., Bisognin V., Perla Menzala G. & Zuazua E.; On exponential stability for Von Karman equations in the presence of thermal effects. Preprint 1996.
- [3] A. Benabdallah and I. Lasiecka, Exponential decay rates for a full von Kármán system of dynamic thermoelasticity, J. Diff. Eqns, 160 (2000), 51-93.
- [4] Racke. R.; Existence and regularity of solutions to nonlinear thermoelastic systems. Proceedings of the Workshop on qualitative aspects and applications of nonlinear evolution eqns. Trieste, May 1996.
- [5] A. Favini, M. A. Horn, I. Lasiecka and D. Tartaru, Global existence, uniqueness and regularity of solutions to a von Kármán system with nonlinear boundary dissipation, Diff. Integ. Eqns, 9 (1996), 267–294.
- [6] Dafermos C.; On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity, Arch, Rational Mech. Anal., 29, 241-271, (1968).

- [7] A. Djebabla and N. E. Tatar, Exponential stabilization of the full von Kármán beam by a thermal effect and a frictional damping, *Georgian Math. J.* 20 (2013), 427438
- [8] A. Djebabla and N. Tatar, Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermal effect with an oscillating kernel, *Math. Comput. Modelling* 54 (2011), no. 1-2, 301314.
- [9] Gibson J.S., Rosen G. & Tao G.; Approximation in control of thermoelasticity systems, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 30, No 4, 1163-1189 (1992).
- [10] A. E. Green and P. M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermodynamics, *Proc. Royal Soc. London, A* 432 (1991), 171-194.
- [11] A. E. Green and P. M. Naghdi, On undamped heat waves in an elastic solid, *J. Thermal Stresses* 15 (1992), 253-264.
- [12] A. E. Green and P. M. Naghdi, Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity* 31 (1993), 189-208.
- [13] A. E. Green and P. M. Naghdi, A unified procedure for construction of theories of deformable media. I. Classical continuum physics. II. Generalized continua. III. Mixtures of interacting continua., *Proc. Royal Soc. London, A* 448 (1995), 335-356, 357-377, 379-388.
- [14] M. A. Horn and I. Lasiecka, Uniform decay of weak solutions to a von Kármán plate with nonlinear dissipation, *Differential Integral Equations* 7 (1994), 885-908.
- [15] M. A. Horn and I. Lasiecka, Global stabilization of a dynamic von Kármán plate with nonlinear boundary feedback, *Appl. Math. Optim.* 31 (1995), 57-84.
- [16] J. Lagnese, Boundary stabilization of thin plates, *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, 1989.
- [17] J. Lagnese, Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, *Nonlinear Anal.*, 16 (1991), 35-54.
- [18] J. Lagnese, Modelling and stabilization of nonlinear plates, *International Ser. Num. Math.* 100 (1991), 247-264.
- [19] J. E. Lagnese and G. Leugering, Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback. *J. Diff. Eqns*, 91 (1991), 355-388.
- [20] J. E. Lagnese and J.-L. Lions, *Modelling Analysis and Control of Thin Plates*. RMA 6, Masson, Paris, 1988.
- [21] I. Lasiecka, Uniform stabilizability of a full von Kármán system with nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control Optim.* 36 (4) (1998), 1376-1422.
- [22] I. Lasiecka, Uniform decay rates for a full von Kármán system of dynamics thermoelasticity with free boundary conditions and partial boundary dissipation, *Comm. in Partial Diff. Eqns*, 24 (9-10)(1999), 1801-1847.
- [23] G. Perla Menzala, A. F. Pazoto and E. Zuazua, Stabilization of Berger-Timoshenko's equation as limit of the uniform stabilization of the von Kármán system of beams and plates, *ESAIM, Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 36, No 4, 2002, 657-691.
- [24] G. Perla Menzala and E. Zuazua, Explicit exponential decay rates for solutions of von Kármán's system of thermoelastic plates. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324 (1997), 49-54.
- [25] G. Perla Menzala and E. Zuazua, Timoshenko beam equation as limit of a nonlinear one-dimensional von Kármán system. *Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A* 130 (2000), 855-875.
- [26] J. Puel and M. Tucsnak, Boundary stabilization for the von Kármán equations, *SIAM J. Control Optim.* 33 (1995), 255-273.

LABORATORY OF APPLIED MATHEMATICS,, UNIVERSITY BADJI MOKHTAR, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, P.O. BOX 12, 23000 ANNABA, ALGERIA1
E-mail address: **abdelhak.djebabla@univ-annaba.dz1**

LABORATORY OF APPLIED MATHEMATICS,, UNIVERSITY BADJI MOKHTAR, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, P.O. BOX 12, 23000 ANNABA, ALGERIA2
E-mail address: **dalli18@hotmail.com2**

LABORATORY OF APPLIED MATHEMATICS,, UNIVERSITY BADJI MOKHTAR, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, P.O. BOX 12, 23000 ANNABA, ALGERIA3
E-mail address: **aberkane20052005@yahoo.fr3**

Bibliographie

- [1] F. D. Araruna, P. Braz e Silva and E. Zuazua, Asymptotics and stabilization for dynamic models of nonlinear beams, *Proc. Est. Acad. Sci.* 59 (2010), no. 2, 150–155.
- [2] A. Benabdallah and I. Lasiecka, Exponential decay rates for a full von Kármán system of dynamic thermoelasticity, *J. Differential Equations* 160 (2000), no. 1, 51–93.
- [3] A. Benabdallah and D. Teniou, Exponential stability of a von Kármán model with thermal effects, *Electron. J. Differential Equations* (1998), no. 7
- [4] Bisognin E., Bisognin V., Perla Menzala G. & Zuazua E. ; On exponential stability for von Kármán equations in the presence of thermal effects. Preprint 1996.
- [5] Dafermos C. ; On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermo elasticity, *Arch, Rational Mech. Anal.*, 29, 241-271, (1968).
- [6] A.Djebabla , D.Oucif and A.Barkane.General stabilization for the full Von Kármán system with a thermo-viscoelastic damping and a frictional damping, *Jangjeon vol* 26 , No 3, 435-445 (2016)
- [7] A. Djebabla and N- e. Tatar, Exponential stabilization of the full Von Kármán beam by a thermal effect and a frictional damping, *Georgian Math. J.* 20 (2013), 427-438.
- [8] A. Djebabla and N.e. Tatar, Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermo-visco elastic damping, *Journal of Dynamical and Control systems* 16 (12), (2010), 180-210.
- [9] A. Djebabla and N. Tatar, Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermal effect with an oscillating kernel, *Math. Comput. Modelling* 54 (2011), no. 1-2, 301314.

-
- [10] H.M.Eller, J.E. Lagnese, and S. Nicaise, Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping, *Comput. Appl. Math.* 21 (2002), no. 1, 135–165. Special issue in memory of Jacques-Louis Lions
- [11] A. Favini, M. A. Horn, I. Lasiecka and D. Tataru, Global existence, uniqueness and regularity of solutions to a von Kármán system with nonlinear boundary dissipation, *Differential Integral Equations* 9 (1996), no. 2, 267–294
- [12] J.S. Gibson, G. Rosen & G. Tao; Approximation in control of thermoelasticity systems, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 30., No 4, 1163-1189 (1992).
- [13] A. E. Green and P. M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermo-mechanics, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 432 (1991), no. 1885, 171–194
- [14] A. E. Green and P. M. Naghdi, On undamped heat waves in an elastic solid, *J. Thermal Stresses* 15 (1992), no. 2, 253–264
- [15] A. E. Green and P. M. Naghdi, Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity* 31 (1993), no. 3, 189–208
- [16] A. E. Green and P. M. Naghdi, A unified procedure for construction of theories of deformable media. I. Classical continuum physics, II. Generalized continua, III. Mixtures of interacting continua, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 448 (1995), no.1934, 335–356, 357–377, 379–388.
- [17] A. Haraux, Comportement à l’infini pour une equation d’ondes non lineaire dissipative, *C. R. Acad. Sci.Paris Ser I Math.* 287 (1978), 507-509.
- [18] M. A. Horn and I. Lasiecka, Uniform decay of weak solutions to a von Kármán plate with nonlinear boundary dissipation, *Differential Integral Equations* 7 (1994), no. 3–4, 885–908
- [19] M. A. Horn and I. Lasiecka, Global stabilization of a dynamic von Kármán plate with nonlinear boundary feedback, *Appl. Math. Optim.* 31 (1995), no. 1, 57–84
- [20] V. Komornik : "Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method", Masson, Paris, and John Wiley & Sons, Chicester, 1994.

-
- [21] J. E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates*, SIAM Studies in Applied Mathematics 10, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1989
- [22] J. Lagnese, Modelling and stabilization of nonlinear plates, in : *Estimation and Control of Distributed Parameter Systems (Vorau 1990)*, Internat. Ser. Numer. Math. 100, Birkhäuser, Basel (1991), 247–264.
- [23] J. E. Lagnese, Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, *Nonlinear Anal.* 16 (1991), no. 1, 35–54
- [24] J. E. Lagnese and G. Leugering, Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback, *J. Differential Equations* 91 (1991), no. 2, 355–388
- [25] J. E. Lagnese and J.-L. Lions, *Modelling Analysis and Control of Thin Plates*, *Recherches en Mathématiques Appliquées* 6, Masson, Paris, 1988.
- [26] M. Martinez, (1998) 'What is problem solving?', *Phi Delta Kappan* 79(8),606-609
- [27] S. A. Messaoudi and S. B. Houari, Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III, *JJ. Math. Anal. Appl.* 348 (2008) 298–30
- [28] Ö. Morgül, Boundary control of a Timoshenko beam attached to a rigid body, *Planar Motion*, *Int. J. Control*, 54 (4) (1991), 763-791
- [29] J.E. Muñoz Rivera, S. Jiang, A global existence theorem for the Dirichlet problem in nonlinear n-dimensional viscoelasticity, *Differential Integral Equations* 9 (1996) 791–810.
- [30] I. Lasiecka, Uniform stabilizability of a full von Kármán system with nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control Optim.* 36 (1998), no. 4, 1376–1422..
- [31] I. Lasiecka, Uniform decay rates for full von Kármán system of dynamic thermoelasticity with free boundary conditions and partial boundary dissipation, *Comm. Partial Differential Equations* 24 (1999), no. 9–10, 1801–1847.
- [32] G. Perla Menzala, A. F. Pazoto and E. Zuazua, Stabilization of Berger–Timoshenko’s equation as limit of the uniform stabilization of the von Kármán system of beams and plates, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 36 (2002), no. 4, 657–691.

- [33] G. Perla Menzala and E. Zuazua, Explicit exponential decay rates for solutions of von Kármán's system of thermoelastic plates, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 324 (1997), no. 1, 49–54
- [34] G. Perla Menzala and E. Zuazua, Timoshenko's beam equation as limit of a nonlinear one-dimensional von Kármán system, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 130 (2000), no. 4, 855–875
- [35] J.-P. Puel and M. Tucsnak, Boundary stabilization for the von Kármán equations, *SIAM J. Control Optim.* 33 (1995), no. 1, 255–273
- [36] R. Racke, Existence and regularity of solutions to nonlinear thermo elastic systems. Proceedings of the Workshop on qualitative aspects and applications of nonlinear evolution eqns. Trieste, May 1996.