UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Par

ZOUYED FAIROUZ

PROBLEME AUX LIMITES POUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE ABSTRAITE AVEC CONDITIONS AUX LIMITES NON LOCALES

Directeur du Mémoire : Dr. REBBANI Faouzia M.C.A U.B.M. Annaba

Jury :

DENCHE Mohamed	**Président**	**M.C.A**	**Univ. Constantine**
DJELLIT Ali	**Examinateur**	**C.C.**	**U.B.M. Annaba**
NOUAR Ahmed	**Examinateur**	**C.C.**	**Univ. Skikda**

1997

Résumé

Dans le présent travail on étudie une classe de problèmes aux limites pour une équation différentielle abstraite avec conditions non-locales. En se basant sur la méthode des inégalités énergétiques, on établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution sa dépendance continue par rapport aux données ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres.

Mots clés : *équation différentielle abstraite, inégalité énergétique, conditions non-locales.*

Abstract

In this work we study a class of abstract differential equation with non-local conditions. For the considered problem, we establish the existence and uniqueness of the strong solution and its continue dependence on the data. The proofs are based on energy inequalities and on the density of the range of the operator generated by the considered problem.

Key words : *abstract differential equation, a priori estimate, non-local conditions.*

Table des matières

Introduction

0.1 Analyse Bibliographique

La théorie des équations différentielle à coefficient opérationnels non bornés, dans les espaces de Banach est apparue et a commencé a se developper intensivement dans les années cinquante dans les travaux fondamentaux de E. Hill [31] et K. Yoside [62].

Par une méthode de la théorie des semi-groupes qui se développait remarquablement pendant cette période, a été construire de résolution du problème de Cauchy pour une équation différentielle homogène de premier ordre à coefficient opérationnel A ne dépendant pas de t.

Dans ces travaux et afin d'assurer l'existence de la solution ainsi que la dépendance continue par rapport aux données initiales, certaines conditions ont été imposées sur l'opérateur A.

Les premiers théorèmes d'existence de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles à coefficient opérationnels non-bornés ont été établis dans l'article de T. Kato [56].

Les équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Banach dans le cas ou le domaine de définition de l'opérateur A dépendait de t, ont été étudiées par P.E. Sobolevski [54].

De nouveaux résultats sur l'existence de la solution du problème de Cauchy avec des coefficients opérationnels variables ont été obtenus par H. Tanabe [55] pour les équations d'évolution de type parabolique.

Dans les travaux de P.E. Sobolevski, M.A. Krasnoselslki et S.G. Krein [35, 36] ont été étudiées les conditions pour lesquelles la formule qui donne la solution de l'équation

non homogène à partir de l'équation homogène, définie la solution classique. Une partie importante de ces résultats est décrite dans la monographie de S.G Krein [37].
Indépendamment de la théorie des semi-groupes, les équations différentielles à opérateurs non-bornés dans les espaces de Banach ont été étudiées dans les travaux de M.I. Visik [59] O.A. Ladyzenskaia [58].
Leurs recherches étaient basées sur les inéquations de types variationnel qui lient les normes énergétiques des solutions aux normes correspondantes du membre droit de l'équation. Cette approche a permis de définir une nouvelle notion de solution faible.

Les principaux résultats dans cette section sont décrits dans les monographies de J.L. Lions, E.Magenes [42].
Il aussi important de citer les travaux de Chazarain [15] qui a introduit la théorie spectrale des opérateurs dans des espaces de distributions pour l'étude des problèmes de Cauchy pour des équations d'évolutions abstraites.
Les futures recherches sur l'existence de la solution des équations différentielles opération nelles ainsi que sur l'étude de leurs propriétés spectrales furent poursuivies dans différentess directions e par plusieurs auteurs.

Parmi les principaux résultats nous citons les r ésultats de Y.M. Berezanski [5], V.I. Gorbatchuk [29].
Il est important de signaler les travaux de J.A. Dubinski [20, 21] dans lesquels on donne une classification des équations différentielle opérationnelles d'ordre quelconque à coefficient constants, ainsi que les positions correctes des problèmes et où on étudie l'existence de la solution.
Dans les travaux de N.Y. Yurchuk [63, 64] et V.I. Chesalyn [16, 17] gràce à la méthode des estimations énergétiques est étudiée une classe assez large d'équations différentielles opérationnelles d'ordre supérieur avec une seule variable, sont établis les positions correctes de ces problèmes et sont démontrées l'existence et l'unicité des solutions fortes des problèmes considérés.

Dans les travaux de F. Rebbani [48, 49] sont généralisés les résultats de N.Y. Yurchuk et V.I Chesalyn équations différentielles dépendants de deux variables indépendantes, ce qui a élargi considérablement de classe des équations étudiées.
Le cas n variables a été traité dans le mémoire de B. Labed [39]. Toujours grace à la méthode des inégalités énergétiques a été traitéde problème de Goursat dans [50] pour une équation hyperbolique de second ordre à coefficients opérationnels non bornés dépendant de t.
Ce travail a été inspiré par l'article de N.Y. Yurchuk- N.I. Brich [65] qui ont traité la meme équation mais pour des coefficients opérationnels bornés.
D'autre part des problèmes aux limites avec des conditions initiales non locales ont été étudiés toujours pour une équation hyperbolique de second ordre à coefficient opérationnel par U. Engelman [22]. Ce mémoire est un prolongement de ces résultats dans cette direction.
La signification physique des conditions aux limites non locales a servi de base pour l'intérêt croissant porté a ce type de problème. La modélisation mathématique de problèmes mixtes avec conditions intégrales est rencontrée en théorie de transmission de la chaleur, en théorie des populations, en élasticité, et métallurgie [34, 38].
Les questions liées à ces problèmes sont tellement récentes et variées, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée.
Et par conséquent l'étude de ces problèmes exige chaque fois une étude individuelle d'où l'actualité du sujet.
Plusieurs auteurs ont étudié dans leurs travaux [14], toujours avec comme outils la méthode du potentiel des problèmes mixtes avec conditions non locales pour certaines équations paraboliques de second ordre quasi-linéaires.
Plusieurs résultats ont été obtenus dans les travaux [6] dans lesquels les auteurs ont montré l'existence et l'unicité de la solution pour des problèmes mixtes combinant une condition de Dirichlet et une condition intégrale pour certaines équations paraboliques du second ordre en utilisant la méthode des estimations a priori.
lL est aussi intéressant de citer les trevaux de V.I Chesalyn qui a étudié dans [16] un

problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre impaire avec conditions aux limites, et dans [17], l'équation de Liav, toujours avec des conditions aux limites non-locales.

Conditions non locales

Durant les dernières années, parmi les problèmes aux limites non classiques pour les équations différentielles aux dérivées partielles une place importante est occupée par les problèmes avec des conditions non locales, en particulier les conditions qui relient les valeurs des solutions et leurs dérivées en deux ou plusieurs points intérieurs ou frontières du domaine considéré. Une définition générale de ces conditions et leur classification ont été données, en particulier, par Nakhushev dans [45].

Dans [19] Dezin a montré pour la première fois que pour certaines équations aux dérivées partielles dans certains domaines, le problème aux limites n'est correctement posé que seulement si les conditions utilisées sont non locales. Ce type de conditions non standard reflète une grande réalité dans la modélisation mathématique de quelques problèmes naturels dans plusieurs domaines comme la biotechnologie [52] et la biologie [46].

Ces conditions ont été associées à des problèmes paraboliques et hyperboliques et ont été étudiées par plusieurs auteurs. Quant aux problèmes engendrés par des équations multi-temporelles à conditions aux limites non locales, ils ont été traités une partie par F. Rebbani et al. [48, 49, 50].

0.2 Contenu du mémoire

Le but de la présente thèse est d'étudier certains problèmes aux limites pour des équations opérationnelles de second ordre, elle est composée d'une introduction et de trois chapitres.

Dans l'introduction, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle ainsi que les outils mathématiques nécessaires pour l'étude des problèmes posés.

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites avec des conditions non locales. L'étude est basée sur ce qu'on appelle la méthode des inégalités énergétiques.

On considère dans D=$]0,T_1[\times]0,T_2[$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign(1-|\mu_2|^2)\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign(1-|\mu_1|^2)\frac{\partial u}{\partial t_2} \\ + sign[(1-|\mu_1|^2)(1-|\mu_2|^2)]Au = f(t),\end{aligned} \tag{1}$$

avec les conditions non locales :

$$l_{\mu_1}u = u|_{t_1=0} - \mu_1 u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \quad l_{\mu_2}u = u|_{t_2=0} - \mu_2 u|_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \tag{2}$$

où A est un opérateur non-borné, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ est un paramètre complexe.

Pour ce problème, on établit des théorèmes d'existence, d'unicité de la solution forte, sa dépendance continue par rapport aux données (f, φ, ψ) ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres μ_1 et μ_2.

Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des estimations a priori (méthode des inégalités énergétiques) qui est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique. Elle résulte des idées introduites par J. Leray [40] et L. Garding [26] et de celles développées dans les travaux de N.I. Yurchuk [67, 68, 69].

Elle est caractérisée de la manière suivante :

le problème posé est reécrit sous la forme opérationnelle :

$$Lu = (\mathcal{L}u, l_{\mu 1}u, l_{\mu 2}u) = F.$$

Pour l'opérateur L agissant d'un espace de Banach $\mathbb{B}$ dans un espace de Hilbert $\mathbb{E}$, on établit une estimation a priori de la forme :

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leq c\|Lu\|_{\mathbb{E}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L). \tag{3}$$

Cette inégalité est obtenue en général par une étude détaillée de la forme obtenue en multipliant scalairement l'équation (1) par u ou ses dérivées et une certaine fonction poids.

On montre ensuite que l'opérateur L admet une fermeture $\overline{L}$. La solution de l'équation :

$$\overline{L}u = F, \tag{4}$$

est appelée solution forte du problème considéré.

Par passage à la limite, on prolonge l'estimation (3) aux solutions fortes :

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leq c\|\overline{L}u\|_{\mathbb{E}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L}). \tag{5}$$

A partir de (5) on déduit :

$\imath$) L'unicité de la solution forte et sa dépendance continue des données quand elle existe ;

$\imath\imath$) l'ensemble des images de l'opérateur $\overline{L}$, noté $\mathcal{R}(\overline{L})$ est égal à $\overline{\mathcal{R}(L)}$.

La dernière étape consiste à démontrer l'existence de la solution forte et donc établir la densité de $\mathcal{R}(L)$ dans $\mathbb{E}$.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Opérateurs linéaires

On désigne par :

E et F des espaces de Banach.

$\mathscr{L}(E,F)$ espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de E dans F, muni de la norme $\|A\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}$.

$\mathscr{L}(E)$ espace vectoriel des opérateurs linéaires continus dans E .

H : espace de Hilbert.

Opérateurs bornés

Théorème 1.1.1 [Banach-Steinhaus].

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty, \qquad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty.$$

Théorème 1.1.2 *Soit A un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F. Alors A^{-1} est continu de F dans E.*

Théorème 1.1.3 *Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F. A^{-1} existe et est continu si et seulement si il existe une constante $m > 0$ tel que :*

$$\|Ax\| \geq m \|x\|, \qquad \forall x \in E$$

Opérateurs linéaires non-bornés.

Définition 1.1.1 *On appelle opérateur linéaire non-borné de E dans F toute application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$, à valeurs dans F. $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de A.*

1.2 Operateurs fermés

Définition 1.2.1 *On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.*

Remarque L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe dans E.

Théorème 1.2.1 **[Théorème du graphe fermé]** *Soit A un opérateur linéaire de E dans F. Supposons que le graphe de A est fermé dans $E \times F$. Alors A est continu.*

Définition 1.2.2 *On dit que A est fermable s'il admet un prolongement fermé. Autrement dit A est fermable si l'adhérence $\overline{G(A)}$ de son graphe est un graphe. L'opérateur fermé $\overline{A}$ dont le graphe $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ est appelé fermeture de A.*

Définition 1.2.3 *Soit A un opérateur non-borné à domaine dense. On va définir un opérateur non-borné $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset E^* \to F^*$ comme suit. On pose*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in F^*;\ \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\| \ \forall u \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Etant donné $v \in \mathcal{D}(A^*)$, on considère l'application $g : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(u) = \langle v, Au\rangle, \ u \in \mathcal{D}(A).$$

La fonctionnelle g peut être prolongée de façon unique en une application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$|f(u)| \leq c\,\|u\|\,,\ \forall u \in E.$$

Par suite $f \in E^*$. On pose : $A^*v = f$.
L'opérateur A^* est appelé l'adjoint de A. La relation qui lie A et son adjoint A^* est donnée par :

$$\langle v, Au\rangle_{F^*,F} = \langle A^*v, u\rangle_{E^*,E}\,,\quad \forall u \in \mathcal{D}(A),\ \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Proposition 1.2.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné à domaine dense. Alors A^* est fermé i.e. $G(A^*)$ est fermé dans $F^* \times E^*$.*

Théorème 1.2.2 *Soit A un opérateur fermé de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans E. Si A admet un inverse $A^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$, alors $(A^*)^{-1}$ existe et est borné de plus :*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Corollaire 1.2.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathcal{D}(A) = E$
(ii) A est borné
(iii) $\mathcal{D}(A^*) = F^*$
(iv) A^* est borné.
Dans ces conditions on a :

$$\|A\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathscr{L}(F^*,E^*)}$$

Théorème 1.2.3 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathcal{R}(A)$ est fermé,
(ii) $\mathcal{R}(A^*)$ est fermé,
(iii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^{\perp}$,

(iv) $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$.

Théorème 1.2.4 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ *un opérateur non-borné, fermé, avec* $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est surjectif,*

(ii) il existe une constante $C > 0$ *telle que :*

$$\|v\| \leq C \|A^*v\|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

(iii) $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$ *et* $\mathcal{R}(A^*)$ *est fermé.*

Théorème 1.2.5 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ *un opérateur non borné, fermé, avec* $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A^* *est surjectif,*

(ii) il existe une constante $C' > 0$ *telle que :*

$$\|u\| \leq C' \|Au\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

(iii) $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ *et* $\mathcal{R}(A)$ *est fermé.*

Corollaire 1.2.2 *Soit* A *un opérateur non-borné dans* E*, fermé, avec* $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. *L'opérateur* A *admet un inverse borné* A^{-1} *sur* E *si et seuleument s'il existe deux constantes* k_1 *et* k_2 *telles que :*

$$\|u\| \leq k_1 \|Au\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$\|u\| \leq k_2 \|A^*u\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^*).$$

Opérateurs auto-adjoints

Définition 1.2.4 *Soient* H *un espace de Hilbert et* A *un opérateur dans* H *de domaine dense* $\mathcal{D}(A)$*.On dit que* A *est auto-adjoint si* $A^* = A$ *.i.e.* $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ *et* $(v, Au) = (Av, u), \forall u, v \in \mathcal{D}(A)$.

Proposition 1.2.2 *Un opérateur auto-adjoint est fermé.*

Proposition 1.2.3 *Soit* A *un opérateur auto-adjoint inversible. Alors* A^{-1} *est auto-adjoint.*

Méthode de prolongement par rapport au paramètre

Théorème 1.2.6 *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach et L_0, L_1 deux opérateurs linéaires bornés de E_1 dans E_2. Pour tout $r \in [0,1]$, on pose :*

$$L_r = (1-r)L_0 + rL_1.$$

On suppose qu'il existe $k > 0$ telle que :

$$\|u\|_{E_1} \leq k \|L_r u\|_{E_2},$$

où $r \in [0,1]$. Alors L_1 est un isomorphisme entre E_1 et E_2 si et seulement si L_0 est un isomorhisme entre E_1 et E_2.

D'autres notions et inégalités seront utilisées telle que l'ε inégalité :

$$2|\mathrm{Re}(x,y)| \leq \varepsilon |x|^2 + \varepsilon^{-1} |y|^2, \qquad \varepsilon > 0.$$

Chapitre 2

Inégalité de l'énergie et corollaires

2.1 Position du problème

Soit $D =]0, T_1[\times]0, T_2[$ un rectangle borné $\mathbb{R}^2$ de variable $t = (t_1, t_2)$ et soit H un espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont respectivement notés par $|.|$ et $(.,.)$.

On considère dans H l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign(1 - |\mu_2|^2)\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign(1 - |\mu_1|^2)\frac{\partial u}{\partial t_2} \\ + sign[(1 - |\mu_1|^2)(1 - |\mu_2|^2)]Au = f(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

où u et f sont des fonctions de variables $t = (t_1, t_2) \in D$ et à valeurs dans H, μ_1 et μ_2 sont des paramètres complexes, avec $|\mu_i| \neq 1$, $(i = 1, 2)$.

A est un opérateur linéaire, non-borné dans H et à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ partout dense dans H. De plus A est auto-adjoint et vérifie la condition :

Condition $(\mathcal{A})$:

$$(Av, v) \geq c_0|v|^2, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A), \forall t \in \overline{D},$$

où c_0 est une constante positive indépendante de u.

A l'équation (1.1) on associe les conditions aux limites non locales suivantes :

$$\begin{cases} l_{\mu_1}u = u|_{t_1=0} - \mu_1 u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ l_{\mu_2}u = u|_{t_2=0} - \mu_2 u|_{t_2=T_2} = \psi(t_1). \end{cases} \tag{2.2}$$

La fonction ψ (resp. φ) est définie de $[0, T_1]$ (resp. $[0, T_2]$) à valeurs dans H.

Les fonctions φ et ψ vérifient la condition de compatibilité suivante :

$$\varphi(0) - \mu_2\varphi(T_2) = \varphi(0) - \mu_1\psi(T_1). \tag{2.3}$$

2.2 Inégalité de l'énergie et corollaires

Introduisons tout d'abord certains espaces fonctionnels nécessaires pour l'étude du problème considéré.

On définit dans l'espace vectoriel $\mathcal{D}(A)$ la norme

$$|u|_1 = |Au|,$$

on obtient l'espace de Hilbert W^1.

De manière analogue, on définit dans l'espace $\mathcal{D}(A^{1/2})$ la norme

$$|u|_{1/2} = |A^{1/2}u|,$$

on obtient ainsi l'espace de Hilbert $W^{1/2}$.

Remarques

Les opérateurs A et $A^{1/2}$ sont bornés de W^1 et $W^{1/2}$ respectivement dans H.

D'après les propriétés de l'opérateur A on a les inclusions topologiques suivantes :

$$W^1 \subset W^{1/2} \subset H.$$

W^1 est partout dense dans $W^{1/2}$ et dans H.

De plus, on a les inclusions suivantes :

$$L_2(D; W^1) \subset L_2(D; W^{1/2}) \subset L_2(D; H).$$

On note par $H^{1,1}(D; W^1)$ l'espace obtenu en complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{D}; W^1\right)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{1,1}^2 = \int\limits_D \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|_1^2 + |u|_1^2 \right] dt.$$

Soit $H^1([0,\, T_1]\,; W^{1/2})$ l'espace obtenu par complétion de l'espace $\mathcal{C}^\infty([0,\, T_1]\ ; W^{1/2}\ )$ par rapport à la norme

$$\| \psi \|_1^2 = \int_0^{T_1} \left(\left| \psi' \right|^2 + |\psi|_{1/2}^2 \right) dt_1.$$

De manière analogue on construit l'espace $H^1([0,\, T_2]\,; W^{1/2})$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_0^{T_2} \left(\left| \varphi' \right|^2 + |\varphi|_{1/2}^2 \right) dt_2.$$

En complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty \left(\overline{D}; W^1 \right)$ par rapport à la norme

$$\||u|\|_1^2 = \left(\beta\left(\mu\right)\right)^2 \sup_{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in D} \left[\|u\left(\tau_1, .\right)\|_1^2 + \|u\left(., \tau_2\right)\|_1^2 \right],$$

où

$$\beta\left(\mu\right) = \frac{\min\left(\left|1 - |\mu_1|^2\right|, \left|1 - |\mu_2|^2\right| \right)}{\left(1 + |\mu_1|^2\right)\left(1 + |\mu_2|^2\right)},$$

on obtient l'espace $\mathbb{E}_\mu^1$.

Notons par $\mathbb{E}$ l'espace de Hilbert

$$\mathbb{E} = L_2\left(D; H\right) \times \hat{H}^1\left([0, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times \hat{H}^1\left([0, T_1]\,; W^{1/2}\right)$$

composé des éléments $F = (f, \varphi, \psi)$ tels que la norme

$$\||F|\|^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_2^2$$

est finie.

$L_2(D; H)$ est l'espace des fonctions définies de D à valeurs dans H et à carré intégrable, muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle = \int_D (., .)dt$ et de la norme correspondante notée par $\|.\|$.
$\hat{H}^1\left([0, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times \hat{H}^1\left([0, T_1]\,; W^{1/2}\right)$ est le sous-espace fermé de
$H^1\left([0, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times H^1\left([0, T_1]\,; W^{1/2}\right)$ composé des éléments (φ, ψ), vérifiant (1.3).

Estimation a priori

Soit $L_{\mu}=(\mathcal{L},l_{1\mu},l_{2\mu})$ l'opérateur engendré par l'équation (1.1) et les conditions aux limites (1.2), agissant de $\mathbb{E}_{\mu}^{1}$ dans $\mathbb{E}$ et à domaine de définition $\mathcal{D}(L_{\mu})=H^{1,1}\left(D;W^{1}\right)$. Pour l'opérateur L_{μ} on établit le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Pour tout élément $u\in H^{1,1}\left(D;W^{1}\right)$, on a l'inégalité :*

$$\left|\left|\left| u \right|\right|\right|_{1}^{2}\leq\ C\left|\left|\left| L_{\mu}u\right|\right|\right|^{2}, \tag{2.4}$$

où C est une constante positive indépendante de u et de μ.

Pour démontrer le théorème 1.3.1 on introduit le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soient $|.|$ la norme de H (ou de W^{1} ou de $W^{1/2}$), g une fonction de variable $t\in[0,T]$ à valeurs dans H, μ est un nombre complexe de module $|\mu|\neq 1$ et soit h tel que :*

$$h=g(0)-\mu g(T). \tag{2.5}$$

Alors pour $|\mu|<1$, on a l'inégalité :

$$|g(0)|^{2}-\frac{1}{2}\left(1+|\mu|^{2}\right)|g(T)|^{2}\leq\frac{\left(1+|\mu|^{2}\right)}{\left(1-|\mu|^{2}\right)}|h|^{2}, \tag{2.6}$$

et pour $|\mu|>1$, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(1+|\mu|^{2})\,|g(T)|^{2}-|g(0)|^{2}\leq\frac{\left(1+|\mu|^{2}\right)}{\left(|\mu|^{2}-1\right)}|h|^{2}. \tag{2.7}$$

Preuve.

Si $|\mu|<1$, de (1.5) on a l'inégalité :

$$|g(0)|^{2}\leq|\mu|^{2}(1+\varepsilon)\,|g(T)|^{2}+(1+\varepsilon^{-1})\,|h|^{2},$$

en prenant

$$\varepsilon=\frac{1-|\mu|^{2}}{2\,|\mu|^{2}}$$

, on obtient l'inégalité (1.6).

Si $|\mu|>1$, de (1.5) on a l'inégalité :

$$|\mu|^{2}\,|g(T)|^{2}\leq(1+\varepsilon)\,|g(0)|^{2}+(1+\varepsilon^{-1})\,|h|^{2},$$

en prenant

$$\varepsilon = \frac{|\mu|^2 - 1}{|\mu|^2 + 1}$$

, on obtient l'inégalité (1.7). $\square$

Démonstration du théorème 1.3.1.

Multipliant scalairement dans H l'équation (1.1) par l'expression

$$Mu = sign\left(1 - |\mu_2|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign\left(1 - |\mu_1|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_2},$$

on obtient :

$$sign\left(1 - |\mu_2|^2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right) + sign\left(1 - |\mu_2|^2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right)$$
$$= 2\mathrm{Re}(\mathcal{L}u, Mu) - 2\,|Mu|^2 \tag{2.8}$$

Intégrant l'inégalité (1.8) dans les rectangles $]0,\tau_1[\times]0,\tau_2[$, $]\tau_1,T_1[\times]\tau_2,T_2[$, $]0,\tau_1[\times]\tau_2,T_2[$ et $]\tau_1,T_1[\times]0,\tau_2[$ respectivement, $(0<\tau_1<T_1, \quad 0<\tau_2<T_2)$, on obtient les égalités :

$$\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_1 = 2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u, Mu)dt$$
$$+\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(0,t_2)\,dt_2 - 2\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt, \tag{2.9}$$

$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 = 2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u, Mu)dt$$
$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2 - 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt, \tag{2.10}$$

$$-\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 = 2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u, Mu)dt$$
$$-\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,t_2)\,dt_2 - 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt, \tag{2.11}$$

$$\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 - \int_{0}^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 = 2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u, Mu)dt$$

$$+\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 \;-\int_{0}^{\tau_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2 - 2\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt, \qquad (2.12)$$

où $F_i(t) = sign\left(1-|\mu_{3-i}|^2\right)\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right),\ \ (i=1,2)\,.$

On multiplie l'égalité (1.10) par $\frac{1}{4}(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)$, (1.11) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)$ et (1.12) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)$ puis, on somme les trois égalités obtenues avec l'égalité (1.9), on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right)\left[\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right)\left[\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 + \frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]$$

$$= 2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt + \frac{1}{4}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt + \frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt$$

$$+\int_0^{\tau_1}\left[F_1(t_1,0) - \frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)F_1(t_1,T_2)\right]dt_1$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_{\tau_1}^{T_1}\left[F_1(t_1,0) - \frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)(F_1(t_1,T_2)\right]dt_1$$

$$+\int_0^{\tau_2}\left[F_2(0,t_2) - \frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)\int_{\tau_2}^{T_2}\left[F_2(0,t_2) - \frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2.$$

$$-\left[2\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right.$$

$$\left.+(1+|\mu_1|^2)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt+\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right]. \tag{2.13}$$

On pose

$$\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right)\left(\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)dt_1+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)dt_1\right),$$

$$\mathscr{I}_2(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right)\left(F_2(\tau_1,t_2)dt_2+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)dt_2\right),$$

$$\mathscr{I}_3(\tau_1,\tau_2)=2\mathrm{Re}\left(\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt+\frac{1}{4}\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{\tau_1}\int_{\tau_2}^{T_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\int_0^{\tau_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt,\right.$$

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2)=\int_0^{\tau_2}\left[F_2(0,t_2)-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}\left[F_2(0,t_2)-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2,$$

$$\mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2)=\int_0^{\tau_1}\left[F_1(t_1,0)-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)F_1(t_1,T_2)\right]dt_1+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\left[F_1(t_1,0)-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)F_1(t_1,T_2)\right]dt_1,$$

$$\mathscr{I}_6(\tau_1,\tau_2)=\left[2\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right.$$

$$\left.+(1+|\mu_1|^2)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt+\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right].$$

L'égalité (1.13) peut être écrite sous la forme :

$$\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{I}_2(\tau_1,\tau_2)=\mathscr{I}_3(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2)-\mathscr{I}_6(\tau_1,\tau_2), \tag{2.14}$$

comme $\mathscr{I}_6$ est positif, (1.14) devient :

$$\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_2\leq\mathscr{I}_3+\mathscr{I}_4+\mathscr{I}_5, \tag{2.15}$$

On minore le membre gauche et on majore le membre droit de (1.15), en utilisant des estimations élémentaires ainsi que le lemme 1.3.1, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2)=\\
&\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right) sign\left(1-|\mu_1|^2\right)\left\{\int_0^{\tau_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1} dt_2\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1} dt_2\right\}\\
&+\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right) sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\left\{\int_0^{\tau_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right\},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2)=\\
&\frac{1}{2}\left|1-|\mu_1|^2\right|\left\{\int_0^{\tau_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1} dt_2\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1} dt_2\right\}\\
&+\frac{1}{2}\left|1-|\mu_2|^2\right|\left\{\int_0^{\tau_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right\}.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2}\left(1+|\mu_i|^2\right)\geq\frac{1}{2}$, $(i=1,2)$ il résulte :

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_2\geq\frac{1}{4}\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)&\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1} dt_2\right.\\
&\left.+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right).
\end{aligned}\tag{2.16}$$

Revenant au membre droit.

on a :

$$\mathscr{I}_3 \leq \frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} 2\,|(\mathcal{L}u, Mu)|\,dt. \tag{2.17}$$

Pour majorer les termes $\mathscr{I}_4$ et $\mathscr{I}_5$, considèrons les deux cas suivants :

(i) $|\mu_2| < 1$,

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_4 \;=\; & \int_0^{\tau_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=0} - \frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=T_2}\right.\\ + \;& \left.|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=0} - \frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=T_2}\right)dt_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}&\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=0} - \frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=T_2}\right.\\ &+ \left.|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=0} - \frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=T_2}\right)dt_1.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.6) du lemme 1.3.1, il vient :

$$\mathscr{I}_4 \leq \frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\int_0^{\tau_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{t_2=0} - \mu_2\,\frac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{t_2=T_2}\right|^2 + \left|u|_{t_2=0} - \mu_2\,u|_{t_2=T_2}\right|_{1/2}^2\right)dt_1$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{t_2=0} - \mu_2\,\frac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{t_2=T_2}\right|^2 + \left|u|_{t_2=0} - \mu_2\,u|_{t_2=T_2}\right|_{1/2}^2\right)dt_1,$$

d'après les conditions (1.2) on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_4 \;\leq\; & \left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\left[\int_0^{\tau_1}\left(|\psi'|^2+|\psi|_{1/2}^2\right)dt_2 + \int_{\tau_1}^{T_1}\left(|\psi'|^2+|\psi|_{1/2}^2\right)dt_2\right] \\ \leq\; & \left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\,\|\psi\|_1^2.\end{aligned} \tag{2.18}$$

(ii) $|\mu_2| > 1$.

En utilisant l'inégalité (1.7) du lemme 1.3.1, on obtient :

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2) \leq \left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{|\mu_2|^2-1}\,\|\psi\|_1^2. \tag{2.19}$$

De (1.18) et (1.19) il en résulte que pour $|\mu_2| \neq 1$,

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2) \leq \left(1+|\mu_1|^2\right) \frac{1+|\mu_2|^2}{\left|1-|\mu_2|^2\right|} \|\psi\|_1^2 . \tag{2.20}$$

D'une manière similaire, on obtient la majoration :

$$\mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2) \leq \left(1+|\mu_2|^2\right) \frac{1+|\mu_1|^2}{\left|1-|\mu_1|^2\right|} \|\varphi\|_2^2 . \tag{2.21}$$

En sommant les inégalités (1.20) et (1.21) membre à membre on obtient :

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2) \leq \left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right) \frac{\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}. \tag{2.22}$$

En combinant les inégalités (1.16), (1.17) et (1.22), il résulte :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1} dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right) \\
&\leq \left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|(\mathcal{L}u, Mu)|dt \\
&+\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

En utilisant l'ε-inégalité on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1} dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right) \\
&\leq \left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}|\mathcal{L}u|^2\,dt \\
&+\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\left(\varepsilon_1^{-1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 dt+\varepsilon_2^{-1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 dt\right) \\
&+\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Divisant l'inégalité (1.24) par $\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)$, et choisissant :

$$\varepsilon_i=\frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)T_{3-i}}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}, \qquad (i=1,2),$$

on obtient :

$$\frac{\beta(\mu)}{4}\left(\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1+\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2\right)$$
$$\leq \frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}|\mathcal{L}u|^2\,dt$$
$$+\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2dt$$
$$+\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}. \tag{2.25}$$

Pour majorer le terme

$$\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2dt,$$

on intègre l'inégalité (1.25) par rapport à τ_i de 0 à T_i, $(i=1,2)$ puis, on divise par T_1T_2 on obtient :

$$\frac{\beta(\mu)}{4T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2dt+\frac{\beta(\mu)}{4T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2dt$$
$$\leq \frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|\mathcal{L}u|^2\,dt\right.$$
$$+\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2dt$$
$$+\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}, \tag{2.26}$$

d'où, il vient :

$$\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2dt$$
$$\leq \frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|\pounds u|^2\,dt\right.$$
$$+\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}. \tag{2.27}$$

En utilisant l'inégalité (1.27), l'estimation (1.25) devient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\beta(\mu)}{4}\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1} dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right)\\
&\qquad\leq \frac{16\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|\mathcal{L}u|^2\,dt\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{2\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}\right.. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Multipliant (1.28) par

$$
\frac{4\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}{\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)},
$$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\beta(\mu)^2\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1} dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2} dt_1\right)\\
&\qquad\leq 64(T_1+T_2)\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}|\mathcal{L}u|^2\,dt+8\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right). \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Le membre droit de (1.29) ne dépend pas de τ, donc en passant au sup sur $\tau\in D$, on obtient ainsi l'inégalité (1.4), où $C=64(T_1+T_2+1)$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.3.1.

2.3 Fermeture de l'opérateur L_μ

Proposition 2.3.1 *L'opérateur L_μ admet une fermeture de domaine de définition $\mathcal{D}(\overline{L_\mu}) = \overline{\mathcal{D}(L_\mu)}$.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(L_\mu)$ telle que :

$$u_n \to 0 \text{ dans } \mathbb{E}^1_\mu \text{ et } \; L_\mu u_n \to F = (v_1, \varphi_1, \psi_1) \text{ dans } \mathbb{E}, \text{ quand } n \to \infty.$$

On montre que $F = (0, 0, 0)$.

Comme les opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont continus, on a alors :

$$l_{1\mu}u_n \to 0 \text{ et } l_{2\mu}u_n \to 0, \text{ quand n} \to \infty,$$

ce qui entraine que $\varphi_1 = \psi_1 = 0$.

Il reste à montrer que $v_1 = 0$.

Soit w un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(D; W^1)$, on a :

$$\langle v_1, w\rangle = \int\limits_D (v_1, w)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} (\mathcal{L}u_n, w)dt =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \left(u_n, \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} - Mw + sign\left[\left(1-|\mu_2|^2\right)\left(1-|\mu_1|^2\right)\right] Aw\right) dt = 0,$$

où $Mw = sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + sign\left(1-|\mu_1|^2\right)\dfrac{\partial w}{\partial t_2}$.

Donc $\langle v_1, w\rangle = 0$, pour tout $w \in C_0^\infty(D; W^1)$, qui est dense dans $L_2(D; H)$, ce qui implique que $v_1 = 0$.

D'où l'opérateur L_μ est fermable, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.3.1. □

Comme les fonctions $u \in \mathcal{D}(\overline{L_\mu})$ sont des limites des fonctions $u_n \in \mathcal{D}(L_\mu)$, alors on peut prolonger l'inégalité (1.4) aux solutions fortes par passage à la limite, soit

$$|||\, u\, |||_1^2 \leq C \left|\left|\left|\overline{L_\mu}\, u\right|\right|\right|^2; \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{L_\mu}). \tag{$\mathcal{K}$}$$

D'où on déduit :

Corollaire 2.3.1 *La solution forte du problème* (1.1)-(1.2) *quand elle existe est unique et dépend continûment du second membre* $F \in \mathbb{E}$.

Preuve. L'unicité de la solution est dûe à l'inégalité $(\mathcal{K})$.

Pour la dépendance continue de la solution forte des $F \in \mathbb{E}$, on suppose qu'il existe une solution forte $u = \left(\overline{L_\mu}\ \right)^{-1} F$ du problème $\overline{L_\mu} u = F$ et si de plus $\widetilde{u} = \left(\overline{L_\mu}\ \right)^{-1} \widetilde{F}$ est une autre solution du même problème, avec second membre $\widetilde{F}$, on a :

$$|||\, u - \widetilde{u}\, |||_1^2 \leq C \left|\left|\left|\overline{L_\mu}\ \ (u - \widetilde{u})\right|\right|\right|^2 = C \left|\left|\left|F - \widetilde{F}\right|\right|\right|^2,$$

ce qui signifie qu'une faible variation du second membre F n'entraîne qu'une faible variation de la solution. □

Corollaire 2.3.2 *L'opérateur* $\overline{L_\mu}$ *admet un inverse borné sur son image* $\mathcal{R}(\overline{L_\mu})$.

Corollaire 2.3.3 *L'ensemble* $\mathcal{R}(\overline{L_\mu})$ *est fermé dans* $\mathbb{E}$ *et* $\mathcal{R}(\overline{L_\mu}) = \overline{\mathcal{R}(L_\mu)}$.

Preuve. D'après la définition de $\overline{L_\mu}$, on a $\mathcal{R}(\overline{L_\mu}) \subset \overline{\mathcal{R}(L_\mu)}$.

On établit l'inclusion inverse.

Soit $F \in \overline{\mathcal{R}(L_\mu)}$, alors il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{E}_\mu^1$ telle que :

$$|||L_\mu u_n - F||| \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

On a :

$$|||u_p - u_q|||_1 \leq \sqrt{C}\, |||L_\mu u_p - L_\mu u_q)|||\,, \text{ quand } \ p \text{ et } \ q \to \infty.$$

Ainsi u_n converge vers un élément $u \in \mathbb{E}_\mu^1$ et $\overline{L_\mu}\ u = F$. □

Ce corollaire nous permet d'affirmer que pour établir l'existence de la solution forte du problème (1.1)-(1.2), il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_\mu)$ dans $\mathbb{E}$.

Chapitre 3

Existence de la solution forte

3.1 Existence de la solution forte

Théorème 3.1.1 *L'ensemble $\mathcal{R}(L_\mu)$ est dense dans $\mathbb{E}$.*

Preuve. Soit $V = (v, \varphi_1, \psi_1)$ un élément orthogonal à $\mathcal{R}(L_\mu)$, alors pour tout $u \in H^{1,1}(D; W^1)$ on a :

$$\langle L_\mu u, V \rangle_E = \langle \mathcal{L}u, v \rangle + \langle l_{\mu_1} u, \varphi_1 \rangle_1 + \langle l_{\mu_2} u, \psi_1 \rangle_1 = 0.$$

On démontre que $V = (0, 0, 0)$.
Comme $l_{\mu_1},\ l_{\mu_2}$ sont indépendants et les ensembles des images de ces opérateurs sont partout denses dans les espaces correspondants, alors pour démontrer que $V = (0, 0, 0)$, il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Si pour tout $v \in L_2(D; H)$, on a*

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D; W) = \left\{ u \in H^{1,1}(D; W^1) : l_{\mu_1} u = 0,\ l_{\mu_2} u = 0 \right\}.$$

Alors $v = 0$.

Preuve. on a

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + Mu + sign\left[\left(1 - |\mu_2|^2\right)\left(1 - |\mu_1|^2\right)\right] Au, v \right\rangle = 0, \tag{3.1}$$

on pose $\delta_i = \left(1 - |\mu_i|^2\right), \ (i = 1, 2)$ et

$$v = A \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 A h}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad Ah = w,$$

où h peut être considéré comme une fonction arbitraire de $\widetilde{H}_0^{1,1}(D;W^1)$ avec

$$\widetilde{H}_0^{1,1}(D;W^1) = \left\{u \in H^{1,1}(D;W^1) : \widetilde{l_{\mu_1}}u = 0,\ \widetilde{l_{\mu_2}}u = 0\right\}$$

et w est la solution du problème :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} = v, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \widetilde{l_{\mu_1}}w = \overline{\mu_1}\ w|_{t_1=0} - w|_{t_1=T_1} = 0, \\ \widetilde{l_{\mu_2}}w = \overline{\mu_2}\ w|_{t_2=0} - w|_{t_2=0} = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

En remplaçant v par $A\dfrac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}$ dans (1.30), on a :

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign\,(\delta_2)\,\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign\,(\delta_1)\,\frac{\partial u}{\partial t_2} + sign\,(\delta_1\delta_2)\,Au, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} \right\rangle = 0,\ \forall u \in H_0^{1,1}(D;W^1). \tag{3.4}$$

D'après les égalités :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = \left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right), \tag{3.5}$$

$$\left(sign(\delta_2)\frac{\partial u}{\partial t_1}, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_2)A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right), \tag{3.6}$$

$$\left(sign(\delta_1)\frac{\partial u}{\partial t_{21}}, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1)A\frac{\partial h}{\partial t_2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_1)A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right), \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\left(sign(\delta_1\delta_2)Au, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial t_2}\left(Au, sign(\delta_1\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right) \\ -\frac{\partial}{\partial t_1}\left(A\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right) &+ \left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right),\end{aligned} \tag{3.8}$$

on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign\,(\delta_2)\,\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign\,(\delta_1)\,\frac{\partial u}{\partial t_2} + sign\,(\delta_1\delta_2)\,Au, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} \right\rangle$$

$$= \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) dt +$$

$$+\int_0^{T_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1 + \int_0^{T_1}\left(Au, sign(\delta_1\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1$$

$$+\int_0^{T_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1)A\frac{\partial h}{\partial t_2}\right)\Bigg|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 - \int_0^{T_2}\left(A\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_2$$

$$-\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}, sign(\delta_2)\frac{\partial^2 h}{\partial t_1\partial t_2}\right)dt - \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}, sign(\delta_1)\frac{\partial^2 h}{\partial t_1\partial t_2}\right)dt$$

$$+\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right)dt = 0. \tag{3.9}$$

Comme $u \in H_0^{1,1}(D;W^1)$ et $h \in \widetilde{H}_0^{1,1}(D;W^1)$, alors on a :

$$u|_{t_1=0} = \mu_1\, u|_{t_1=T_1}\,, \quad u|_{t_2=0} = \mu_2\, u|_{t_2=T_2}$$

$$\overline{\mu_1}\, h|_{t_1=0} = h|_{t_1=T_1}\,, \quad \overline{\mu_2}\, h|_{t_2=0} = h|_{t_2=T_2}\,,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\mu_2\,\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=T_2}, sign(\delta_2)A\,\frac{\partial h}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=0}\right)\Bigg|$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=T_2}, sign(\delta_2)\overline{\mu_2}A\,\frac{\partial h}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=0}\right)\Bigg|$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2},$$

il résulte :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0. \tag{3.10}$$

Par un calcul similaire on obtient :

$$\left(Au, sign(\delta_1\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0, \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1) A\frac{\partial h}{\partial t_2}\right)\Bigg|_{t_1=0}^{t_1=T_1} = 0, \tag{3.12}$$

$$\left(A\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2) Ah\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0. \tag{3.13}$$

Alors de (1.38)-(1.42) il vient :

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}, \frac{\partial^2 h}{\partial t_1\partial t_2} - sign(\delta_2)\frac{\partial h}{\partial t_1} - sign(\delta_1)\frac{\partial h}{\partial t_2} + sign(\delta_1\delta_2)Ah\right) = 0.\ \forall u \in H_0^{1,1}(D;W^1) \tag{3.14}$$

Comme $u \in H^{1,1}(D;W^1)$ alors l'ensemble $\left\{A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right\}$ est dense dans $L_2(D;H)$, ce qui nous permet de déduire à partir de (1.43) :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t_1\partial t_2} - sign(\delta_2)\frac{\partial h}{\partial t_1} - sign(\delta_1)\frac{\partial h}{\partial t_2} + sign(\delta_1\delta_2)Ah = 0 \tag{3.15}$$

Soit $\widetilde{L}_\mu$ l'opérateur engendré par l'équation

$$\widetilde{\mathcal{L}}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2} - sign(\delta_2)\frac{\partial u}{\partial t_1} - sign(\delta_1)\frac{\partial u}{\partial t_2} + sign(\delta_1\delta_2)Au, \tag{3.16}$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \widetilde{l_{\mu_1}}u &= \overline{\mu_1}\ u|_{t_1=0} - u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ \widetilde{l_{\mu_2}}u &= \overline{\mu_2}\ u|_{t_2=0} - u|_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \end{aligned} \tag{3.17}$$

et $\mathbb{E}_1$ est l'espace de Hilbert

$$\mathbb{E}_1 = L_2(D,H) \times \widetilde{H^1}([0,T_1],W^1) \times \widetilde{H^1}([0,T_1],W^1)$$

où $\widetilde{H^1}([0,T_1],W^1) \times \widetilde{H^1}([0,T_1],W^1)$ est le sous-espace fermé de $H^1([0,T_1],W^1) \times H^1([0,T_1],W^1)$ composé des éléments (φ,ψ) vérifiant la condition :

$$\overline{\mu_2}\varphi(0) - \varphi(T_2) = \overline{\mu_1}\psi(0) - \psi(T_1).$$

Pour l'opérateur $\widetilde{L}_\mu = (\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{l_{\mu_1}}, \widetilde{l_{\mu_2}})$ de domaine de définition $\mathcal{D}(\widetilde{L}_\mu) = H^{1,1}(D;W^1)$ agissant de $\mathbb{E}_\mu^1$ dans $\mathbb{E}_1$, on établit le lemme suivant :

Lemme 3.1.2 *Pour tout élément $u \in H^{1,1}(D;W^1)$ on a l'estimation :*

$$|||u|||_1 \leq C_1 \left|\left|\left|\widetilde{L}_\mu u\right|\right|\right|, \quad \forall\ u \in H^{1,1}(D;W^1), \tag{3.18}$$

où C_1 est une constante positive indépendante de u et de μ.

Preuve. Multipliant scalairement dans H l'équation (1.45) par l'expression

$$M_1 u = -sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_1} - sign\left(1-|\mu_1|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_2},$$

Puis intégrant l'égalité obtenue dans les rectangles $]0,\tau_1[\times]0,\tau_2[$, $]\tau_1,T_1[\times]\tau_2,T_2[$, $]0,\tau_1[\times]\tau_2,T_2[$ et $]\tau_1,T_1[\times]0,\tau_2[$ respectivement, on obtient les quatre égalités suivantes

$$\begin{aligned} -\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 - \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_1 &= 2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\widetilde{\mathcal{L}}u, M_1u)dt \\ -\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 - \int_0^{\tau_2} F_2(0,t_2)\,dt_2 &- 2\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}|M_1u|^2\,dt, \end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} +\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2 &= 2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u, M_1u)dt \\ +\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,t_2)\,dt_2 &- 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|^2\,dt, \end{aligned}\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} +\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 &= 2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u, M_1u)dt \\ +\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,t_2)\,dt_2 &- 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}|M_1u|^2\,dt, \end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} -\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 &= 2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u, M_1u)dt \\ -\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2 &- 2\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|^2\,dt, \end{aligned}\tag{3.22}$$

Multipliant (1.48) par $\frac{1}{4}(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)$, (1.50) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)$ et (1.51) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)$, en sommant les quatre égalités obtenues, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right)\left[\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right)\left[\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2+\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt+2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt$$

$$+(1+|\mu_1|^2)\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt+\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_0^{\tau_1}\left[(F_1(t_1,T_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)(F_1(t_1,0)\right]dt_1$$

$$+\int_{\tau_1}^{T_1}\left[(F_1(t_1,T_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)(F_1(t_1,0)\right]dt_1$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)\int_0^{\tau_2}\left[F_2(T_1,t_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(0,t_2)\right]dt_2$$

$$+\int_{\tau_2}^{T_2}\left[F_2(T_1,t_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(0,t_2)\right]dt_2.$$

$$-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}|M_1u|\,dt-\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|\,dt$$

$$-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}|M_1u|\,dt-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|\,dt.$$

Puis, en utilisant des techniques analogues à celles utilisées pour démontrer le théorème 1.3.1 on établit l'inégalité (1.47).

On revient à (1.44), de (1.47) on déduit que $h=0$ d'où $v=0$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.4.1. □

D'où le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1 *Pour tout élément $F=(f,\varphi,\psi)\in\mathbb{E}$, il existe une seule solution forte du problème* (1.1)-(1.2) *et est vérifié l'inégalité suivante :*

$$|||u|||_1 \leq C\,|||L_\mu u|||\,,\ \forall u \in H^{1,1}(D;W^1), \tag{3.23}$$

où C *est une constante positive indépendante de* u *et de* μ.

3.2 Continuité de la solution par rapport aux paramètres

Soit $\mu_n = (\mu_{1n}, \mu_{2n})$ une suite convergente vers $\overset{0}{\mu} = \left(\overset{0}{\mu}_1, \overset{0}{\mu}_2\right)$ avec $|\mu_{in}| \neq 1$, pour tout n et $\left|\overset{0}{\mu}_i\right| \neq 1$, (i=1,2).

Soit $\mathbb{E}^1$ l'espace obtenu en complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{D}; W^1)$ par rapport à la norme

$$|||u|||^2_{\mathbb{E}^1} = \sup_{\tau \in D} \left[\int_0^{T_1} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + |u|^2_{1/2} \right)_{t_2 = \tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + |u|^2_{1/2} \right)_{t_1 = \tau_1} dt_2 \right].$$

Théorème 3.2.1 *Soit* $(\mu_{1n}, \mu_{2n}) \underset{n\to\infty}{\to} \left(\overset{0}{\mu}_1, \overset{0}{\mu}_2\right)$, *alors* $\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} \to \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}$ *au sens de la convergence simple.*

Preuve. Pour démontrer ce théorème, il suffit d'établir les propriétés suivantes :

i)

$$\sup \left\| (L_{\mu_n})^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}^1)} < \infty$$

ii)

$$\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} \to \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} \text{ dans un espace } \mathscr{M} \text{ dense dans } \mathbb{E}.$$

D'après l'inégalité $(\mathcal{K})$ pour l'opérateur L_{μ_n} on a l'estimation : :

$$|||u|||^2_1 \leq C \left|\left|\left| \overline{L_{\mu_n}} u \right|\right|\right|^2 , \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\mu_n}}). \tag{3.24}$$

Comme la constante C ne dépend pas de μ_n et la norme de $\mathbb{E}^1_{\mu_n}$ est minorée par la norme de $\mathbb{E}^1$ avec une constante qui ne dépend pas de μ_n, alors à partir de (1.53) on obtient :

$$|||u|||^2_{E^1} \leq C' \left|\left|\left| \overline{L_{\mu_n}} u \right|\right|\right|^2 , \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\mu_n}}), \tag{3.25}$$

où C' est une constante positive indépendante de u et de μ_n.

Posant $\mathscr{M} = \mathcal{R}(L_{\overset{0}{\mu}})$. Pour $F \in \mathscr{M}$, on a :

$$\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \in \mathcal{D}(\overline{L_{\mu_n}})$$

De l'inégalité (1.54) on déduit :

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1}F-\left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|^2_{E^1}\leq C'\left|\left|\left|F-\overline{L_{\mu_n}}\left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|^2\ , \qquad (3.26)$$

Posant $\left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}F=h$. Alors pour n suffisamment grand, on a :

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1}F-\left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|^2_{E^1}\leq C'\left|\left|\left|\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}h-\overline{L_{\mu_n}}h\right|\right|\right|^2_{E^1}$$

$$\leq C'[\left|\overset{0}{\mu}_1-\mu_{1n}\right|^2\|h\|^2_1|_{t_1=T_1}+\ \left|\overset{0}{\mu}_2-\mu_{2n}\right|^2\|h\|^2_1|_{t_2=T_2}]. \qquad (3.27)$$

De l'inégalité (1.56) on déduit :

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1}F-\left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|^2_{E^1}\to 0 \text{ quand } \mu_{1n}\to\overset{0}{\mu}_1 \text{ et } \ \mu_{2n}\to\overset{0}{\mu}_2\ \forall F\in\mathscr{M}.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.5.1.

3.3 Exemple

Soit l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign(1-|\mu_2|^2)\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign(1-|\mu_1|^2)\frac{\partial u}{\partial t_2}$$
$$+sign[(1-|\mu_1|^2)(1-|\mu_2|^2)]\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,t), \quad (1)$$

avec les conditions non locales :

$$l_{\mu_1} u = u|_{t_1=0} - \mu_1 u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \quad (2)$$

où $t=(t_1,t_2)\in D=(0,T_1)\times(0,T_2)$, et $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}_n$, $(x,t)\in(\Omega\times D)$.

Posons $H=L_2(\Omega)$ espace des fonctions a carré inté grable sur Ω.

$D(A)=C_0^2(\Omega)$ l'espace des fonctions deux fois continument différentiables nulle sur la frontière de Ω.

$D(A)$ est dense dans l'espace de Hilbert $L_2(\Omega)$.

Les fonctions a_{ij} sont telles que :

i $a_{ij}\in C^1(\bar{\Omega})$,

ii $a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ \forall i,j=1,n.$

La propriété (1.2) devient :

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\xi_i,\xi_i) \geq a_0\sum_{i=1}^{n} \mid \xi_i \mid^2 .$$

Où $a_0^{1/2} \mid a_{ii}^{1/2} \mid$. Définissons à présent les espaces nécessaires à l'étude du problème considéré.

On munit $D(A)$ de la norme :

$$\mid u \mid_1^2 = \int_\Omega \mid \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) \mid^2 dx,$$

on obtient l'epace de Hilbert W^1.

De même on obtient l'epace de Hilbert $W^{1/2}$, en munissant $D(A^{1/2})$ de la norme :

$$\mid u \mid_{1/2}^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \mid a_{ii}^{1/2}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^2 dx + 2 \sum_{i,j=1,i<j}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx,$$

Dans ce cas l'opérateur $L_\mu = (\mathcal{L}, l_{\mu_1}, l_{\mu_2})$ agit de $D(L_\mu \subset E_\mu^1$.

où E_μ^1 est l'espace obtenu par complétion de $C^\infty(\bar{D}, W^1)$ par rapport à la norme.

$$\begin{aligned}
\||| u \|||_1^2 = \sup_{\tau \in D} [\int_0^{T_2} \int_{\Omega} (\mid \frac{\partial u}{\partial t_2}(x, \tau_1, t_2 \mid^2) \\
+ \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ii}^{1/2}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, \tau_1, t_2) \mid^2 \\
+2 \sum_{i,j=1,\imath<j}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}))dxdt_2 \\
+ \int_0^{T_1} \int_{\Omega} (\mid \frac{\partial u}{\partial t_1}(x, t_1, \tau_2) \mid^2 \\
+ \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ii}^{1/2}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, \tau_1, t_2) \mid^2 \\
+2 \sum_{i,j=1,\imath<j}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j})dxdt_1]
\end{aligned}$$

$D(L_\mu) = H^{1,1}(D, W)$ est le compl ète de l'epace $C^\infty(\bar{D}, W^1)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned}
\| u \|_{1,1}^2 = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_{\Omega} \mid \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial t_1 \partial t_2}) \mid^2 dxdt_1dt_2 \\
+ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_{\Omega} \mid \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t_1}) \mid^2 dxdt_1dt_2 \\
+ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_{\Omega} \mid \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t_2}) \mid^2 dxdt_1dt_2 \\
+ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_{\Omega} \mid \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) \mid^2 dxdt_1dt_2
\end{aligned}$$

L'espace des données E est l'espace

$$E = L_2(D, L_2(\Omega)) \times \hat{H}^1([0, T_2], W^{1/2}) \times \hat{H}^1([0, T_1], W^{1/2})$$

composé des éléments $F=(f,\varphi,\psi)$ telle que la norme :

$$\||\, F\, \||^2=\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_\Omega \mid f(x,t)\mid^2 dxdt_1dt_2$$

$$+\int_0^{T_2}(\int_\Omega \mid \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\mid^2 dx++2\sum_{i=1}^n\int_\Omega \mid a_{ii}^{1/2}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mid^2 dx$$

$$+\sum_{i,j=1?\, i<j}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx)dt_2$$

$$+\int_0^{T_1}(\int_\Omega \mid \frac{\partial\psi}{\partial t_1}\mid^2 dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega \mid a_{ii}^{1/2}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\mid^2 dx$$

$$+2\sum_{i,j=1?\, i<j}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx)dt_1$$

est finie.

Pour le problème posé, on établit le théoréme suivant :

Théorème 3.3.1 *Pour tout élément $F=(f,\varphi,\psi)\in E$, il existe une seule solution $u=\left(\overline{L_\mu}\ \right)^{-1}F=\left(\overline{L_\mu^{-1}}\ \right)F$ du problème (3)-(4) et est réalisée l'inégalité suivante :*

$$\sup_{\tau\in D}[\int_0^{T_2}\int_\Omega(\mid \frac{\partial u}{\partial t_2}(x,\tau_1,t_2\mid^2)$$

$$+\sum_{i=1}^n \mid a_{ii}^{1/2}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,\tau_1,t_2)\mid^2$$

$$+2\sum_{i,j=1,\imath<j}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}))dxdt_2$$

$$+\int_0^{T_1}\int_\Omega(\mid \frac{\partial u}{\partial t_1}(x,t_1,\tau_2)\mid^2$$

$$+\sum_{i=1}^n \mid a_{ii}^{1/2}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,\tau_1,t_2)\mid^2$$

$$+2\sum_{i,j=1,\imath<j}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j})dxdt_1]$$

$$\leq C\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_\Omega \mid f(x,t)\mid^2 dxdt_1dt_2$$

$$+\int_0^{T_2}(\int_\Omega \mid \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\mid^2 dx + +2\sum_{i=1}^n\int_\Omega \mid a_{ii}^{1/2}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mid^2 dx$$

$$+\sum_{i,j=1?\, i<j}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx)dt_2$$

$$+\int_0^{T_1}(\int_\Omega \mid \frac{\partial\psi}{\partial t_1}\mid^2 dx + \sum_{i=1}^n\int_\Omega \mid a_{ii}^{1/2}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\mid^2 dx$$

$$+2\sum_{i,j=1?\, i<j}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx)dt_1$$

où C est une constante positive indépendante de u, f, φ, ψ, μ_1 et μ_2.

Conclusion Dans le travail considéré on s'est intéressé à une équation différentielle hyperbolique de second ordre endtheorem à coefficient opérationnel non borné avec conditions aux limites non locales, dépendant de deux paramètres complexes ce qui a permis d'étudier de manière globale une classe très large d'équations aux dérivées partielles.

Pour cette famille de problémes, on a pu établir des théorèmes d'existence, d'unicité, de dépendance continue de la solution par rapport au second membre et par rapport aux paramètres.

Pour ce type d'équations les recherches peuvent se poursuivre en considérant A comme un opérateur dépendant de la variable t et aussi en introduisant dans les conditions aux limites des opérateurs qui dépendent des paramètres complexes.

Bibliographie

[1] S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), 121-139.

[2] È. M. Aksen, *The quasi-inversion method for some hyperbolic equations*, Diff. Uravn., **27** (1991), No. 6, 1089-1092, (Russian).

[3] È. M. Aksen, N.I. Yurchuk, *An a priori estimate for the quasi-inversion method.* Diff. Uravn., **29** (1993), No. 8, 1447-1450, (Russian). [Translation in Differential Equations **29** (1993), No. 8, 1254-1256].

[4] E.F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Springer-Verlag, (1961).

[5] Y.A. Berezanski, *Opérateurs auto-adjoints dans les espaces de fonctions à une infinité de variabes*, Naukava Dunk, Kiev (1978).

[6] N. Benouar, N.I. Yurchuk, *Mixed problem with integral condition for parabolic equations with Bessel operator differential'nye*, Uravneniya. Vol. 27. N 12. 2094-2098. (1991).

[7] A.V. Bitsadze A.A. Samarskii, *On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 185, No. 4, 739-740 (1969).

[8] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Some new boundary value problems for a class of partial differential equations. Part I*, Diff. Uravn., **4**, (1968), 1081-1101, (Russian). [English. transl-Diff. Equat., 770-775].

[9] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *A mixed problem for certain pluri-parabolic differential equations*, Diff. Uravn., **6** (1970), 1624-1630 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 1234-1239].

[10] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Goursat Problem for abstract linear differential equation of second order*, Diff. Urav., Vol. **7** (1971), No. **7**, 1001-1030 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 770-779].

[11] A. Bensoussan, P.L. Chow and J.-L. Lions, *Filtering theory for stochastic processes with two-dimensional time parameter*, Math. Comput. Simulation **22** (1980), No. 3, 213-221.

[12] L. Byszewski, V. Lakshmikantham, *Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space*, Appl. Anal., **40** No. 1 (1991), 11-19.

[13] A. Brenner, *The Mixed Problems For Multidimensional Time Polyparabolic Operators*, http ://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/95/95-322.ps.gz.

[14] J.R. Cannon, Y. Lin, J. Vander Hook, *A quasi-linear parabolic equation with non-local boundary condition*, Rend, Mat. Appl. (7), 9, 239-264, (1989).

[15] J. Chazarain, *Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problèmes mixtes*, J. of fonctional analysis. 7, 386-446, 1971.

[16] V.I. Chesalyn, *Problème pour une équation différentielle opérationnelle d'ordre impaire conditions aux limites non-locales.*, Diff. Urav. T. 13, N3, P. 468-476, (1977).

[17] V.I. Chesalyn, N.Y. Yurchuk, *Problème avec conditions aux limites non locales pour des équations abstraites de Liav*,IZV.

AKAD. NAUK. BSSR. N6 Série Phys-Math. 1973.

[18] V.I. Chesalyn,

A problem with nonlocal boundary conditions for certain abstract hyperbolic equations, Diff. Uravn., **15** (1979), No. 11, 2104-2106, (Russian).

[19] A.A. Dezin, *General questions in theory of boundary value problems*, Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag, (1980).

[20] J.A. Dubinski, *On abstract theorem and its applications to boundary value problems for non classical equations*, Mat. Sbornik, 79 (1969), P. 91,117.

[21] J.A. Dubinski, *On abstract theorem and its applications to boundary value problems for non classical equations*, Mat. Sbornik, vol. 90 (132), P. 1-21, (1973). Traduction, Math, USSR. Sbornik,

[22] U. Engelman, *Problème aux limites pour des équations aux dérivées partielles hyperboliques opérationnelles de second ordre avec conditions aux limites non locales.* Diff. Urav. T. XI N9. 1975. Journ. of Math. and Mech., **11** (1962), 859-889.

[23] A. Friedmann, *The Cauchy problem in Several time variables*, Journ. of Math. and Mech., **11** (1962), 859-889.

[24] A. Friedmann, W. Littman, *Partially characteristic boundary problems for hyperbolic equations*, Journ. of Math. and Mech., **12** (1963), 213-224.

[25] H.O. Fattorini, *The abstract Goursat problem*, Pacific. J. Math., Vol. **37** (1971), No. 1, 51-83.

[26] L. Garding, *Cauchy's Problem for hyperbolic equations*, University of chicago, Lectures notes, (1957).

[27] N.S. Gencev, *On ultraparabolic equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR., **151**, No. 2 (1963), 265-268.

[28] S.G. Gindikin, *A generalization of parabolic differential operators to the case of multi-dimensional time*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., **173** (1967), 499-502, (Russian).

[29] V.I. Gorbatchuk, M.L. Gorbatchuk, *Problèmes aux limites pour les équations différentielle opérationnelles*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., **173** (1967), 499-502, (Russian).

[30] J. Hadamard, *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*,Yale Uni Press, New Haven, 1923.

[31] E. Hill, P. Phillips, *Fonctionnal analysis and semi-groups* A.M.S. Call. Pub. 31. 1957.

[32] P. Hillion, *The Goursat problem for the homogenous wave equation*. J. Math. Phys, **31** (1990), 1939-1941.

[33] A.M. Il′in, *On certain class of ultraparabolic equation*, Dok. Akad. Nauk SSSR., **159**, No. 6 (1964), 1214-1217.

[34] N. I. Ionkin, *Solution of the boundary value problem for the heat equation with nonclassical boundary condition*. Differential equartions, 13, 294-304 (1977).

[35] M.A. Krasnolski,S.G. Krein, P.E. Sobolevski. *On Differential Equations with Unbounded operators in Banach Spaces*, Dok. Akad. Nauk. S.S.S.R. 111 (1956) 19-22.

[36] M.A. Krasnolski,S.G. Krein, P.E. Sobolevski. *On Differential Equations with Unbounded operators in Hilbert Spaces*, Dok. Akad. Nauk. S.S.S.R. 111 (1957) 590-993.

[37] S.G. Krein. *Linear Differential Equations in Banach Space*, American Mathematical Society, Providence, RI (1971).

[38] N. Keyettz. *Applied mathematical demography*, Berlin-Heidelberg. New-York. Springer (1977).

[39] B. Labed, *Problème aux limites pour une classe d'équations aux dérivées partielles à coefficient opérationnelle.*, Mémoire de Magister, Annaba, (1993).

[40] J. Leray, *Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients*, Priston, Just for Adv. Study., 1952.

[41] J. L. Lions, *Equations différentielles opérationnelles et problemes aux limites*, Berlin, Springer, 1961.

[42] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Paris. Dunod. 1968.

[43] V.P. Mikhailov, *The analytic solutions of Goursat problem for the system of differential equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady **115** (1957), 450-453].

[44] V.P. Mikhailov, Non-analytical solutions of Goursat's problem for a system of differential equations in two independent variables, Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady **117** (1957), 759-762].

[45] A.M. Nakhushev, *On non local problems with shift and their connection with loaded connection*, Differents. Uravn., 21, No. 1, 92-101. (1985).

[46] A.M. Nakhushev, *Equations of mathematical biology [in Russian]*, Vysshaya Shkola, Moscow (1995).

[47] S.G. Pyatkov, *Solvability of boundary value problems for an ultraparabolic equation : in Nonclassical Equations and Equations of Mixed Type*, Sbornik Nauchnikh Trudov, Institute of Mathematics, Novosibirsk, (1990), 182-197, (Russian).

[48] F. Rebbani, V. I. Chesalyn *Problèmes aux limites pour des équations différentielles opérationnelles d'ordre impaire dans le rectangle.* Uzvestra. Akad. Nauk. BSSR, série phys. Math. Nauk N3. 1985.

[49] F. Rebbani, V. I. Chesalyn *Problèmes aux limites pour certaines équations différentielles opérationnelles dans le rectangle.* Doklady. Acad. Nauk BSSR. T.30. N 12. 1986. P. 1061-1063.

[50] F. Rebbani, A. Guezane-Lakoud, *Problèmes aux limites pour une équation différentielle opérationnelle de second ordre.* Conférence Maghrébine sur les équations différentielles, 18-20 Décembre (1994), Annaba.

[51] W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw-hill Inc., New-York, (1991).

[52] K. Schugerl, *Bioreaction engineering. Reactions nvolving microorganisms and cells, in : Fundamentals, Thermodynamics, Formal Kinetics, Idealized reactors types and operation modes*, vol. 1, Wiley (1987).

[53] R.E. Showalter, *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations*, Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier (1983).

[54] P.E. Sobolevski, *On the equations of parabolic type in a Banach space*, Moscow. Math. Soc. Ser. 2.49. 1966, 297-350.

[55] H. Tanabe, *Evolution equations of parabolic type*, Proc. Japan ; Acad. 1961. T. 34. N 10. P610-613.

[56] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelber, (1995).

[57] P.N. Vabishchevich, *Nonlocal parabolic problem and inverse heat problem*, P.N.. Differents. Uravn., 17, No. 7, 1193-1199 (1981).

[58] M.I. Visik, K.O.A. Ladyzenskaia, *Problème aux limites pour des équations aux dérivées partielles et quelques classes d'équations opérationnelles*, Uspehi Mat. Nauk. T11. N 16. P.41-97. A.M.S. Transl. 10 (2). (1958).

[59] M.I. Visik, *Problème de Cauchy pour une équation à coefficients opérationnels, problèmes aux limites mixtes pour des systèmes d'équations différentielles et méthodes approchée de leur résolution.* Math. Sbornik. 36 P. 51-148. 1958.

[60] V.S. Vladimirov, Yu. N. Drozhzhinov, *Generalized Cauchy problem for an ultraparabolic equation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **31** (1967), 1341-1360, (Russian). [English transl : Math. USSR-Izvestija, **1**, 1285-1304].

[61] R. Volevič, S. G. Gindikin, *The Cauchy problem for ultraparabolic problems*, Diff. Eqs.**II**, MATH USSR SB., (1969), **7** (2), 205-226.

[62] J. Yosida, *On differentiability and representation of one parameter sem-groups of linear operators.* J. Math. Soc. Japan T.1 N1, P. 15-21, 1948.

[63] N.Y. Yurchuk, *Estimation a priori des solutions de problème aux limites pour certaines équationss différentielles opérationnelles*, Diff. Urav., T. 12, N4, 7-39, (1976).

[64] N.Y. Yurchuk, *Problèmes aux limites pour des équations à coefficient opérationnels dépendant d'un paramètre.* , Diff. Urav., T. 12, N9, 1645-1661, (1976).

[65] N.I. Yurchuk, N.I. Brich, *Problème de Goursat pour une équation différentielle linéaire abstraite de second ordre*, Diff. Urav. Tome 7. N6, (1971).

[66] N.Y. Yurchuk, *Mixed problem with integral condition for certain parabolic equations*, Differentsial'nye, Uravneniya. Vol. 22, N22. 2117-2126 (1986).

[67] N.Y. Yurchuk, *The Goursat problem for second order hyperbolic equations of special kind*, Diff. Uravn., **4** (1968), (a), 1333-1345, (Russian). [English transl : Diff. Equat., 694-700].

[68] N.Y. Yurchuk, *A partialy characteristic mixed boundary value problem with Goursat initial conditions for linear equations with two-dimensional time*, Diff. Uravn., **5** (1969), (b), 898-910, (Russian). [English Trans : Diff. Equat., 652-661].

[69] N.Y. Yurchuk, *The method of energy inequalities in the study of operator-differential equations*, Dissertation, Moscow, (1981).