



Année : 2008

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Mécanique

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT**

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE ET ACOUSTIQUE D'UN PONT DE LA CHAUSSEE LORS DU PASSAGE DES VÉHICULES

Option : **Construction Mécanique**

Par : **Abdelouahab REZAIGUIA**

DIRECTEUR DE THESE : Nouredine OUELAA Pr. Université de Guelma

DEVANT LE JURY

PRESIDENT	Kamel CHAOUI	Pr	Université d'Annaba
EXAMINATEURS	Mohamed GUENFOUD	Pr	Université de Guelma
	Nacer HAMZAOU	Pr	INSA de Lyon, France
	Abdelhamid MILOUDI	MC	USTHB d'Alger
	Abdelaziz AMIRAT	MC	Université d'Annaba

Remerciements

Je tiens à remercier et à présenter mes reconnaissances à mon directeur de thèse Professeur Ouelaa Nouredine de l'université de Guelma qui m'a donné la possibilité d'élaborer cette intéressante thèse dans le domaine de la dynamique. Grâce à son aide, son expérience, ses conseils et sa patience cette recherche m'a apporté beaucoup de savoir.

Je tiens à remercier aussi Le Professeur Chaoui Kamel de l'université d'Annaba pour son acceptation d'être le président de jury de ma thèse malgré ses multiples occupations. Mes vifs remerciements aussi pour tous les membres de jury : Professeur Guenfoud Mohamed de l'université de Guelma, Professeur Hamzaoui Nacer de l'INSA de Lyon, Docteur Miloudi Abdelhamid de l'USTHB d'Alger et Docteur Amirat Abdelaziz de l'université d'Annaba pour leur acceptation d'examiner mon travail.

J'exprime mes vifs remerciements à tous les responsables et les administrateurs de l'université d'Annaba qui ont géré mon dossier durant six ans, particulièrement Docteur Mekhilef Slimane et demoiselle Dalila du département de mécanique.

Je remercie aussi tous mes collègues de l'université de Guelma, particulièrement ceux du département de mécanique : Docteur Djamâa Mohamed Chérif; Docteur Guenfoud Salah; Monsieur Djebala Abderrazek et ceux de l'INSA de Lyon qui chacun à sa manière a contribué à la réalisation de ce travail.

Enfin, mes vifs remerciements pour toute ma famille, notamment mon épouse pour m'avoir aidé dans la rédaction de la thèse et qui m'a toujours encouragé et m'a apporté le soutien moral à accomplir et finir ce travail.

Résumé

L'analyse du comportement dynamique des ponts lors du passage des véhicules est un sujet qui a fait l'objet de réflexions auparavant et continue d'être d'actualité. Les véhicules traversants les ponts à grandes vitesses peuvent engendrer des effets dynamiques importants et doivent être étudiés en simulant effectivement les réponses dynamiques du pont et des véhicules. L'un des objectifs de cette simulation est de déterminer les facteurs d'amplification dynamique qui majorent les effets statiques pour vérifier les états limites des dalles de roulement. Ce problème d'amplification dynamique reste sensible et préoccupant du fait de l'augmentation du trafic routier, tant sur le plan des intensités et de la fréquence de passage, que sur celui des vitesses de circulation.

Dans ce contexte, nous présentons une modélisation vibroacoustique d'un pont de la chaussée multi-travées lors du passage d'un véhicule avec la prise en compte de l'interaction dynamique pont-véhicule et des irrégularités aléatoires du profil de la chaussée.

Le chapitre premier présente une introduction sur la problématique du comportement vibroacoustique des ponts lors du passage des véhicules et des trains. Une synthèse bibliographique est donnée sur les différentes recherches qui ont été menées dans ce domaine pour étudier la dynamique des ponts et pour modéliser les forces d'interaction.

Au chapitre deux, on a complété la modélisation vibratoire d'un pont ferroviaire lors du passage d'un train, travail réalisé pendant la préparation du diplôme de Magister, par l'introduction des irrégularités aléatoires du profil de chemin de roulement ainsi qu'une étude acoustique permettant le calcul du bruit de roulement rayonné par le pont. Le pont est modélisé par une poutre continue dont les appuis intermédiaires sont modélisés par des ressorts linéaires de grandes rigidités. Chaque wagon du train est modélisé par deux systèmes oscillants à deux degrés de liberté. L'approche modale et l'intégration numérique de Newmark sont utilisées pour la résolution des équations du mouvement. Plusieurs résultats sont présentés et validés.

Nous présentons dans le troisième chapitre, une étude vibratoire d'un pont de chaussée à une seule travée lorsqu'il est soumis à l'action d'un véhicule qui est modélisé par des forces ou des masses mobiles. Le pont est modélisé par une plaque rectangulaire mince, de matériau isotrope, simplement appuyé sur deux bords et libre sur les autres bords. Les vibrations du pont sont régies par une équation aux dérivées partielles sur la base des hypothèses de Kirchhoff,

Table des matières

Résumé	
Chapitre 1 : Introduction et synthèse bibliographique	1
Chapitre 2 : Comportement vibroacoustique d'un pont ferroviaire lors du passage d'un train	8
2.1 Introduction	8
2.2 Modélisation vibratoire d'un pont ferroviaire lors du passage d'un train	8
2.2.1 Modélisation	8
2.2.2 Équations du mouvement du model de véhicule	10
2.2.3 Forces d'interaction pont-train	10
2.2.4 Modélisation des irrégularités de la voie de roulement	10
2.2.5 Équation du mouvement du pont	12
2.2.6 Équation du mouvement du pont dans la base modale	13
2.2.7 Équation du mouvement de la masse du véhicule dans base modale	15
2.2.8 Résolution numérique des équations du mouvement	16
2.2.9 Algorithme de résolution	18
2.3 Détermination du bruit de roulement dû au passage du train sur le pont	19
2.3.1 Introduction	19
2.3.2 Equation d'Helmoltz	19
2.3.3 Application pour le cas du pont	20
2.4 Exemple numérique de validation	22
2.5 Application au cas d'un pont ferroviaire	24
2.5.1 Influence des irrégularités de la voie de roulement	26
2.5.2 Influence de l'ordre du véhicule	29
2.5.3 Influence de la vitesse de roulement	32
2.5.4 Influence de l'amortissement dans la suspension du train	35
2.5.5 Influence du nombre d'appuis intermédiaires	36
2.5.6 Influence de la position des appuis intermédiaires	39
2.5.7 Influence du nombre de véhicules	41
2.5.8 Résultats de la partie acoustique	42
2.6 Conclusions	45
Chapitre 3 : Comportement dynamique d'un pont de chaussée sollicité par des forces et des masses mobiles	47
3.1 Introduction	47
3.2 Modélisation	47
3.3 Équations du mouvement	47
3.4 Fréquences et modes propres du pont	48
3.4.1 Approche modale	48
3.4.2 Approche de Rayleigh-Ritz	51

Notations et symboles

A_r	Coefficient de rugosité spectrale
a_1, a_2	Excentricités
a_{ij}	Amplitudes modales
α_m	Rapport de masses
α_v	Rotation du bloc rigide du véhicule (roulis)
b	Largeur du pont
β_{ij}	Paramètres de fréquence
c	Constante d'amortissement du pont
c_v	Amortissement dans la suspension du véhicule v
C_{ij}, c_{ij}	Amortissements modaux, amortissements généralisés
c_{pi}	Amortissement dans le pneu i du véhicule
c_{si}	Amortissement dans la suspension i du véhicule
$[C_v]$	Matrice d'amortissement du véhicule
$[C^*]$	Matrice d'amortissement généralisé du pont
D	Rigidité de flexion du pont
D_x, D_y	Rigidités de flexion du pont selon x et y respectivement
D_{xy}	Rigidité de torsion du pont
δ	Opérateur de Dirac
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
Δ	Opérateur de Laplace
Δt	Pas du temps
$\Delta \omega$	Pas de fréquence
$\Delta x, \Delta y$	Pas d'espace selon x et y respectivement
Δp	Variation de la pression acoustique
E	Module d'élasticité
E_x, E_y	Modules d'élasticité selon x et y respectivement
E_c, E_d	Energies cinétique et de déformation élastique du pont respectivement
ε	Tolérance de convergence
F	Force d'excitation
F_0	Force mobile
F_k	$k^{\text{ème}}$ force mobile
F_v	Force d'interaction pont-véhicule v
F_{pk}^{int}	Force d'interaction entre la $k^{\text{ème}}$ roue du véhicule et le pont
F_j, F_{ij}	Forces modales
f_{ij}	Fréquences propres du pont
$\{F_g\}$	Vecteur des forces de pesanteur
$\{F_p^{\text{int}}\}$	Vecteur des forces d'interactions agissantes sur le pont

Chapitre 1

Introduction et synthèse bibliographique

Le comportement vibroacoustique des ponts lors du passage des véhicules et des trains est un problème important dans l'ingénierie. Du point de vue vibration, la circulation des véhicules et des trains à grande vitesse peut engendrer des effets dynamiques importants et doit être étudiée en simulant effectivement le déplacement du pont et des véhicules. Ce dernier aspect, lié au fonctionnement des ponts, a fait l'objet de réflexions auparavant et continue d'être d'actualité. Le problème de l'amplification des efforts pour des effets dynamiques reste sensible et préoccupant du fait de l'augmentation du trafic routier ou ferroviaire, tant sur le plan des intensités et de la fréquence de passages, que sur celui des vitesses de circulation. Du point de vue acoustique, l'étude du bruit rayonné par le passage des véhicules sur des ponts de la chaussée ou d'un train sur un pont de chemin de fer, permet d'évaluer sa nuisance sur les habitations environnante.

Depuis un siècle, plusieurs recherches ont été menées pour étudier la dynamique des ponts et pour modéliser les forces d'interaction pont-train. Les premières études ont été consacrées au développement de solutions analytiques pour des ponts à une seule travée excités par des cas simples de forces en mouvement [1-5]. Avec le développement de l'outil informatique, les chercheurs ont développé des solutions numériques pour résoudre les problèmes de ponts excités par des forces [6-8] et des masses mobiles [9-11]. Yang et al. [12], ont développé un élément d'interaction pont-véhicule par la méthode de condensation dynamique. L'élément développé est utilisé pour étudier le comportement dynamique d'un pont ferroviaire posé sur deux appuis simples lors du passage d'un train. Cheng et al. [13], ont étudié l'interaction dynamique pont-véhicule avec la prise en compte des irrégularités de la voie de roulement. Dans cette étude, la détermination des fréquences et des modes propres de vibration du pont est basée sur la méthode de rigidité dynamique. Les résultats qui sont présentés concernent une poutre sur deux appuis simples, excitée par un modèle de véhicule à deux degrés de liberté en mouvement. Au et al. [14], ont étudié l'influence de la vitesse de roulement sur le facteur d'amplification dynamique d'un pont ferroviaire à haubans lors du

passage d'un train avec la prise en compte des irrégularités du rail de roulement. Ce train est composé d'un certain nombre de wagons dont plusieurs modèles de divers degrés de liberté sont étudiés. Jianzhong et al. [15], ont étudié la résonance vibratoire d'un pont modélisé par une poutre simplement appuyée, lors du passage d'un train à grande vitesse. Deux modèles dynamiques pour le train sont présentés pour calculer la réponse dynamique du pont. Dans le premier modèle, le train est modélisé par un convoi de charges mobiles. Dans le deuxième modèle, le train est modélisé par une série de modèle dynamique d'interaction pont-véhicule à deux degrés de liberté. Les résultats prouvent que la résonance pour les ponts de courtes travées et de travées moyennement longues, peut se produire sous une vitesse de passage élevée du train.

Plusieurs modèles mathématiques de véhicules ferroviaires ont été développés au fil des ans. On retrouve des modèles simplistes et aussi des modèles très complexes avec une grande quantité de degrés de liberté. Certains sont en deux dimensions alors que d'autres sont en trois dimensions. Certains considèrent le bloc principal du wagon comme rigide alors que d'autres le modélisent comme une poutre flexible, le système d'amortissement peut être considéré comme linéaire ou non linéaire, etc. Jianlin et al. [16,17] ont étudié les vibrations latérales d'un pont ferroviaire à haubans, suspendu par des câbles, traversé par un wagon de transport avec la prise en compte des irrégularités transversales et longitudinales de la voie de roulement, en utilisant l'analyse spectrale fréquentielle. Le wagon de transport est modélisé par un modèle de véhicule à 21 degrés de liberté, composé de la masse de wagon, les essieux et les bogies. Des résultats théoriques à mi-portée du pont sont présentés et comparés avec des résultats mesurés. En outre, le comportement dynamique du même type du pont mais à longue travée, traversé par le même type de wagon est analysé. Les auteurs prouvent que les vibrations latérales du pont ont une faible influence sur les vibrations du wagon. Les vibrations de la masse du wagon sont principalement provoquées par les irrégularités transversales de la voie de roulement et le bondissement des bogies est provoqué par les irrégularités longitudinales.

L'amplification dynamique est un phénomène important dans la conception et l'analyse des structures de type pont. On décrit ce phénomène comme étant la réponse dynamique de la structure par rapport à la réponse statique de cette même structure. L'amplification dynamique causée par les

trains varie selon plusieurs facteurs, parmi ces facteurs, on trouve la rugosité des rails, les irrégularités périodiques et singulières de la surface de roulement, les irrégularités sur les roues directement, la masse du véhicule, la vitesse, la rigidité et l'amortissement du système de suspension, etc. La structure a une réponse dynamique qui peut varier en fonction de la longueur des portées, des fréquences naturelles de vibration, de types d'appuis, de l'interaction sol-structure, de l'état de la structure étudiée et de son amortissement structural, etc. [18].

Quand un train traverse un pont à des vitesses moins de 250 km/h, la source principale du bruit rayonné par le train est le bruit de roulement [19]. Dans cet article, le bruit émis par un pont ferroviaire est présenté. Les sources de bruit, distribuées le long du pont de chemin de fer sont considérées comme des dipôles. Les résultats numériques du bruit rayonné par le train sont présentés et comparés avec les résultats mesurés. Wang et al. [20], ont fait des essais sur le pont de RSA à Sydney pour mesurer le bruit rayonné par le pont qui est environ 90 dB(A) à une distance de 5.5 m de la travée centrale du pont.

Plusieurs chercheurs modélisent les ponts de chaussée par des plaques minces, isotropes ou orthotropes et les véhicules par des forces, des masses ou des systèmes dynamiques mobiles. Leur but est d'étudier les effets dynamiques provoqués par le trafic routier sur les ponts afin de prédire les facteurs d'amplifications dynamiques qui majorent les effets statiques, utilisés pour la vérification des états limites des dalles de roulement. Gbadeyan et Oni [21], ont présenté plusieurs résultats analytiques du comportement dynamique des plaques rectangulaires sous charge mobiles. Humar et Kashif [22], ont étudié le problème de l'interaction dynamique pont-véhicules et ont identifié les paramètres influençant la réponse dynamique du pont. Dans cette étude, le pont est modélisé par des éléments plaques rectangulaires orthotropes et le véhicule par un système masse-ressort en mouvement. Shadnam et al. [23], ont étudié le comportement dynamique des plaques sous l'influence des masses mobiles. Les auteurs ont conclu que les effets dus aux masses mobiles sont importants et doivent être tenus en compte dans la réponse dynamique des plaques.

Une étude de l'interaction dynamique pont-véhicule pour les ponts routiers a été présentée par Hanchi et al. [24], en deux parties. La première partie présente une méthode générale de l'analyse dynamique des ponts avec la prise en compte de l'interaction pont-véhicule-rugosité. Ils ont utilisé la méthode

Chapitre 2

Comportement vibroacoustique d'un pont ferroviaire lors du passage d'un train

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une modélisation vibroacoustique d'un pont ferroviaire à plusieurs travées lors du passage d'un train. La modélisation vibratoire tient compte de l'interaction pont-train et des irrégularités de la voie de roulement. Le pont est modélisé par une poutre continue dont les supports intermédiaires sont modélisés par des ressorts linéaires de grande rigidité. Le train est modélisé par une série de wagons en mouvement. Chaque wagon est modélisé par deux véhicules chacun à deux degrés de liberté. A l'aide de la méthode modale, on détermine deux équations de mouvement couplées pour le système pont-train. La résolution de ces équations s'effectue d'une manière découplée par la méthode de Newmark. La pression acoustique rayonnée par le pont due au passage du train est obtenue par la résolution de l'équation d'Helmoltz avec comme source d'excitation les accélérations distribuées le long du pont qui sont considérées comme des monopôles.

2.2 Modélisation vibratoire d'un pont ferroviaire lors du passage d'un train

2.2.1 Modélisation

La figure 2.1 représente un modèle générale pont-train. Le pont est modélisé par une poutre continue équivalente, de longueur l , de masse linéique $\bar{m}$, de moment d'inertie I et de module d'Young E , simplement appuyée aux extrémités. Les na appuis intermédiaires d'abscisses $x = S_p$ ($p = 1, 2, \dots, na$) sont modélisés par des ressorts linéaires de grande rigidité et de même raideur k (voir figure 2.2). Le train est modélisé par plusieurs wagons traversant le pont à une vitesse constante V . Chaque wagon est modélisé par deux véhicules chacun possède deux degrés de liberté. La masse du $v^{\text{ème}}$ véhicule est notée M_v et la masse de sa roue m_v . Ces deux masses sont liées par un ressort de raideur k_v et un amortisseur de constante d'amortissement c_v . Le déplacement vertical du pont est noté par $w(x,t)$. La position horizontale d'un point sur le pont est notée $x(t)$ et les irrégularités de la voie de roulement sont représentées par la fonction $r(x)$. Les déplacements verticaux des masses M_v et m_v sont $y_{1v}(t)$ et $y_{2v}(t)$ respectivement.

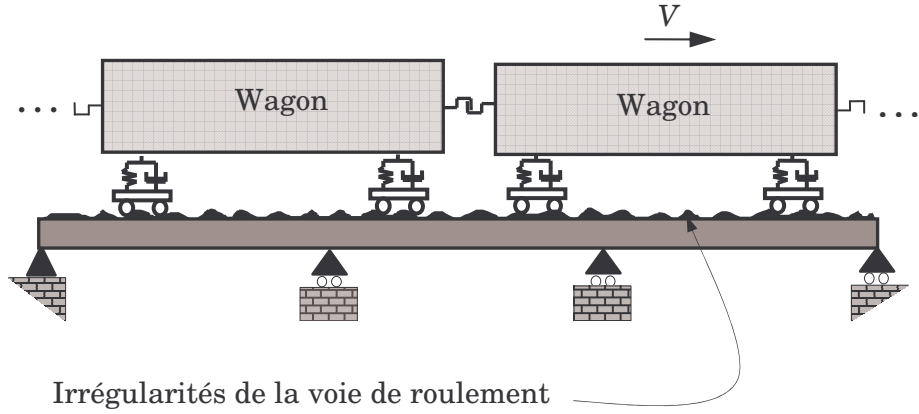


Figure 2.1 : Modèle général pont-train

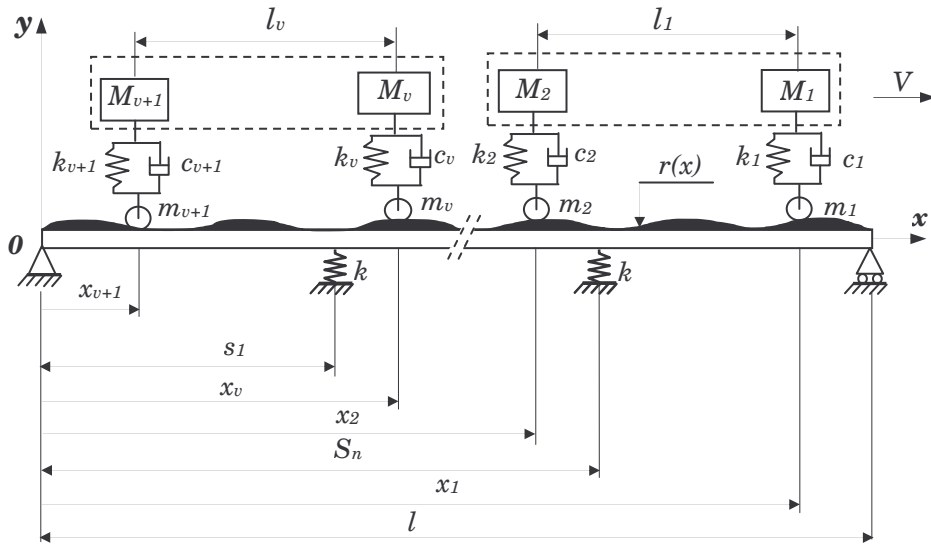


Figure 2.2 : Poutre continue sous l'effet d'un convoi de véhicules à deux degrés de liberté mobiles

2.2.2 Équations du mouvement du model de véhicule

Les équations du mouvement du modèle de véhicule à deux degrés de liberté sont obtenues en appliquant la loi fondamentale de la dynamique pour chacune des masses M_v et m_v . Les équations résultantes sont :

$$\begin{bmatrix} m_v & 0 \\ 0 & M_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{1v} \\ \ddot{y}_{2v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_v & -c_v \\ -c_v & c_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_{1v} \\ \dot{y}_{2v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_v & -k_v \\ -k_v & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{1v} \\ y_{2v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

où F_v est la force d'interaction dynamique entre la masse m_v et la poutre (Voir figure 2.3).

2.2.3 Forces d'interaction pont-train

A partir de l'équation (2.1), en rajoutant la contribution statique, on peut déterminer la force d'interaction en chaque point de contact pont-véhicule v :

$$F_v(t) = (M_v + m_v)g + m_v \ddot{y}_{1v} + M_v \ddot{y}_{2v}, \quad v = 1, 2, \dots, nv \quad (2.2)$$

avec le déplacement, la vitesse et l'accélération verticaux de la masse m_v respectivement sont :

$$y_{1v}(t) = w(x_v(t), t) + r(x_v(t)) \quad (2.3)$$

$$\dot{y}_{1v}(t) = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial r}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=x_v(t)} \quad (2.4)$$

$$\ddot{y}_{1v}(t) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) \Bigg|_{x=x_v(t)} \quad (2.5)$$

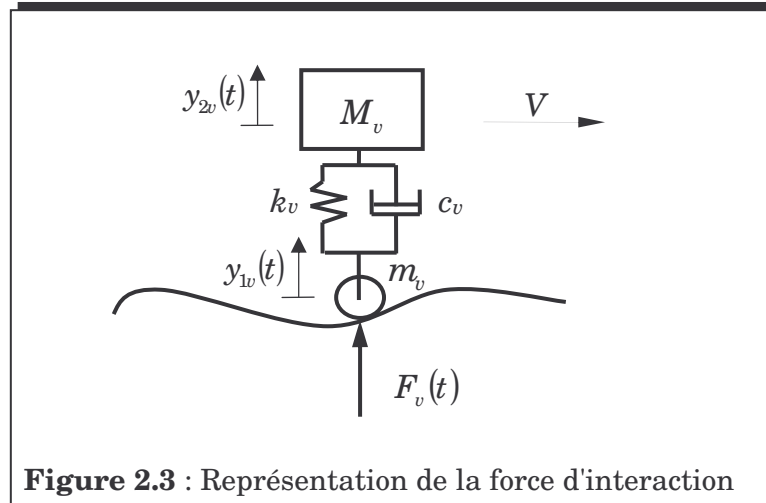


Figure 2.3 : Représentation de la force d'interaction

2.2.4 Modélisation des irrégularités de la voie de roulement

Les irrégularités aléatoires de la voie de roulement sont dues essentiellement aux erreurs lors de la construction des rails, à l'usure et aux mauvais entretiens. Ces irrégularités perturbent le mouvement vertical du train et provoquent du bruit et d'impact dynamique très importants. Il existe deux types d'approches pour définir les caractéristiques probabilistes des irrégularités aléatoires d'une route : l'approche basée sur la fonction d'auto-corrélation et l'approche basée sur la densité spectrale. Cheung et al.[33], ont modélisé le profil de la voie de roulement par une fonction harmonique avec la prise en compte de deux paramètres: la hauteur et la longueur du profil. Xia et al.[34], ont simulé les défauts de la voie de roulement comme une fonction sinusoïdale avec certain amplitude et phase aléatoire. On peut modéliser le profil de la surface de roulement par un processus aléatoire stationnaire

gaussien, caractérisé par une densité spectrale de puissance (DSP) qui permet de décrire la qualité de surface de roulement. Plusieurs courbes de DSP relatives aux chemins de fer ont été développées dans différents pays [18]. La fonction spectrale dans le domaine fréquentiel S_r (en fonction de la fréquence spatiale $f_s = \omega_s/2\pi$), associée à ce processus est donnée par l'expression suivante :

$$S_r(\omega_s) = \begin{cases} A_r \left(\frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-\alpha_1} & \text{pour } \omega_s \leq \omega_{s0} \\ A_r \left(\frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-\alpha_2} & \text{pour } \omega_s > \omega_{s0} \end{cases} \quad (2.6)$$

où $A_r = A_r(\omega_{s0})$ est le coefficient de rugosité spectrale (valeur de la densité spectrale), qui caractérise l'état de la voie de roulement (m^3/cycle), ω_{s0} est la pulsation de discontinuité ($\omega_{s0} = 1/2\pi \text{ cycle/m}$), α_1 et α_2 sont des exposants de rugosité spectrale. Une proposition pour la classification de la rugosité des ponts a été développée sur la base d'un paramètre du spectre $A_r(\omega_{s0})$ avec un exposant constant $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ [35].

La densité spectrale est alors donnée par :

$$S_r(\omega_s) = A_r \left(\frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-2} \quad (2.7)$$

La fonction de densité spectrale de puissance $S_r(\omega_k)$ est représentée dans un graphique où l'échelle est logarithmique. Une représentation approximative d'un profil aléatoire gaussien peut être obtenu à partir d'une DSP. Cette représentation considère que le profil résulte de la somme d'un nombre infini de sinusoïdes de phase aléatoire θ_k indépendantes et uniformément distribuées entre 0 et 2π

$$r(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4S_r(\omega_{sk})\Delta\omega_s} \cos(\omega_{sk}x + \theta_k) \quad (2.8)$$

où N est le nombre de points de discrétisation en fréquence, ω_{sk} est le nombre d'ondes ($\omega_{sk} = 2\pi k/L_c \text{ cycle/m}$) et $\Delta\omega = 2\pi/L_c$. L'expression de la valeur discrète de la densité spectrale de puissance est:

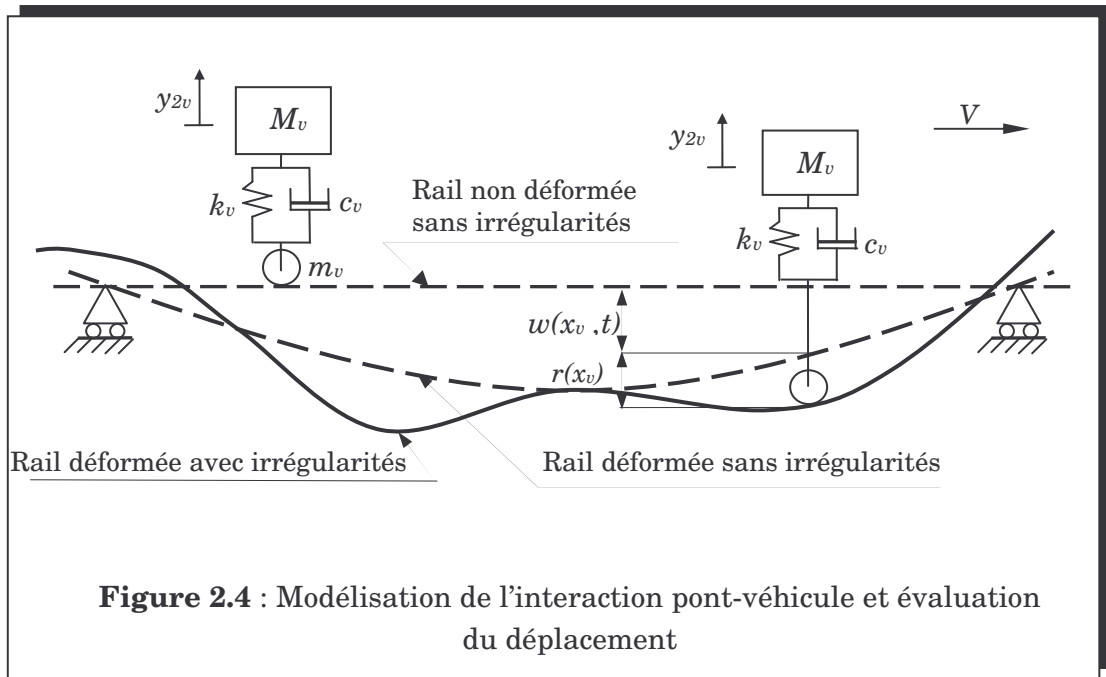
$$S_r(\omega_{sk}) = A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right)^{-2} \quad (2.9)$$

Remplaçons $S_r(\omega_{sk})$ par sa valeur discrète dans l'expression (2.8), on obtient:

$$r(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right) \frac{2\pi}{L_c} \cos(\omega_{sk} x + \theta_k)} \quad (2.10)$$

où L_c est la longueur totale d'échantillonnage qui en général égale la longueur total du pont multipliée par 2 (m), l est la longueur du pont considéré (m), x est la position horizontale sur la rail (m).

La figure 2.4 montre l'interaction pont-véhicules avec la prise en compte des irrégularités de la voie de roulement.



2.2.5 Équation du mouvement du pont

L'équation du mouvement transversal en flexion pure du pont (poutre continue) s'écrit :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + k \sum_{p=1}^{na} w(x,t) \delta(x - x_p) = - \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \delta(x - x_v) \quad (2.11)$$

où $\bar{m}$, c , E et I sont respectivement la masse par unité de longueur, la constante d'amortissement visqueux, le module de Young et le moment d'inertie du pont, δ est l'opérateur de Dirac. La masse $\bar{m}$ et le moment d'inertie I sont indépendants de x , car on suppose que les irrégularités de la voie de roulement sont petites, donc cela ne modifie pas sensiblement la masse linéique et l'inertie du pont.

2.2.6 Équation du mouvement du pont dans la base modale

En utilisant la méthode modale, la solution de l'équation (2.11) peut être exprimée par :

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (2.12)$$

où n est le nombre de modes nécessaires pour la convergence de la série modale, $\phi_i(x)$ sont les modes propres de vibration libre du pont et $q_i(t)$, les coordonnées généralisées. Il faut noter ici que l'analyse reste tributaire de la propriété d'orthogonalité des modes propres qui garantit le découplage des réponses modales. La série (2.12) peut être tronquée pour ne retenir que les modes susceptibles d'être excités dans la pratique. Remplaçons l'expression modale (2.12) dans l'équation (2.11), puis multiplions cette dernière par $\phi_j(x)$ et l'intégrons à travers la longueur du pont, on obtient :

$$\begin{aligned} & \bar{m} \int_0^l \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \phi_j(x) dx \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + c \int_0^l \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \phi_j(x) dx \frac{dq_i(t)}{dt} \\ & + \left(EI \int_0^l \sum_{i=1}^n \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} \phi_j(x) dx + k \int_0^l \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{na} \phi_i(x) \phi_j(x) \delta(x - x_p) dx \right) q_i(t) \\ & = - \int_0^l \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \delta(x - x_v) \phi_j(x) dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les modes propres sont orthonormés, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \bar{m} \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \\ & c \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 2 \xi_j \omega_j \delta_{ij} \\ & EI \int_0^l \frac{d^4 \phi_i}{dx^4} \phi_j(x) dx = \omega_j^2 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, $\xi_j = c_j / c_{jcr}$, ω_j sont respectivement le facteur d'amortissement et la pulsation propre du mode j , c_{jcr} est l'amortissement modal critique. On tient compte des relations d'orthogonalité (2.14), les termes dans l'équation (2.13), avec $i \neq j$ disparaissent et il reste j équations modales découplées.

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \left(\omega_j^2 + k \sum_{p=1}^{na} \phi_i(s_p) \phi_j(s_p) \right) q_j = F_j(t) \quad (2.15)$$

avec la force modale du mode j s'écrit :

$$F_j(t) = - \int_0^l \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \delta(x - x_v) \phi_j(x) dx = - \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \phi_j(x_v) \quad (2.16)$$

Remplaçons l'expression (2.12) dans les expressions (2.3 à 2.5), on obtient :

$$y_{1v} = r(x_v) + \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) q_j \quad (2.17)$$

$$\dot{y}_{1v} = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \dot{q}_j + V \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) q_j + V r'(x_v) \quad (2.18)$$

$$\ddot{y}_{1v} = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \ddot{q}_j + 2V \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) \dot{q}_j + V^2 \sum_{j=1}^n \phi''_j(x_v) q_j + V^2 r''(x_v) \quad (2.19)$$

Remplaçons l'expression (2.19) dans l'expression (2.2), la force d'interaction en chaque point de contact v s'écrit :

$$\begin{aligned} F_v(t) = & (M_v + m_v)g + M_v \ddot{y}_{2v} + m_v \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \ddot{q}_j + 2V m_v \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) \dot{q}_j \\ & + m_v V^2 \sum_{j=1}^n \phi''_j(x_v) q_j + V^2 m_v r''(x_v) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Remplaçons (2.20), dans (2.16), on obtient:

$$\begin{aligned} F_j(t) = & - \sum_{v=1}^{nv} \phi_j(x_v) \left((M_v + m_v)g + M_v \ddot{y}_{2v} + m_v \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \ddot{q}_j \right. \\ & \left. + 2V m_v \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) \dot{q}_j + V^2 m_v \sum_{j=1}^n \phi''_j(x_v) q_j + V^2 m_v r''(x_v) \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Remplaçons maintenant (2.21), dans l'équation modale (2.15), après factorisation, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) + \sum_{v=1}^{nv} M_v \phi_i(x_v(t)) \ddot{y}_{2v}(t) = P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

avec

$$m_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{v=1}^{nv} m_v \phi_i(x_v) \phi_j(x_v) \quad (2.23)$$

$$c_{ij} = 2\xi_j \omega_j \delta_{ij} + 2V \sum_{v=1}^{nv} m_v \phi_i(x_v) \phi_j'(x_v) \quad (2.24)$$

$$k_{ij} = \omega_j^2 \delta_{ij} + k \sum_{p=1}^{na} \phi_i(s_p) \phi_j(s_p) + V^2 \sum_{v=1}^{nv} m_v \phi_i(x_v) \phi_j''(x_v) \quad (2.25)$$

$$P_i = - \sum_{v=1}^{nv} (M_v + m_v) g \phi_i(x_v) - V^2 \sum_{v=1}^{nv} m_v r''(x_v) \phi_i(x_v) \quad (2.26)$$

L'équation (2.22), sous forme matricielle s'écrit :

$$[M^*] \{\ddot{q}\} + [C^*] \{\dot{q}\} + [K^*] \{q\} + [\phi][M] \{\ddot{y}_2\} = \{P^*\} \quad (2.27)$$

avec

$$[M^*] = [m_{ij}]; [C^*] = [c_{ij}]; [K^*] = [k_{ij}]; \{P^*\} = \{P_i(t)\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

$$[\phi] = [\phi_i(x_v)]; [M] = \text{diag}[M_v]; \{\ddot{y}_2\} = \{\ddot{y}_{2v}\} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad v = 1, 2, \dots, nv \quad (2.29)$$

Les expressions m_{ij} , c_{ij} , k_{ij} et P_i sont respectivement les masses, les amortissements, les raideurs et les forces généralisées. Dans les expressions (2.23)-(2.26), on retrouve des quantités généralisées indépendantes du temps correspondant à la partie immobile du problème (la poutre et ces appuis), et des quantités qui en dépendent, correspondant à la partie mobile du train (les points de contacts glissants). Ces dernières quantités rendent le problème non linéaire.

2.2.7 Équation du mouvement de la masse du véhicule dans la base modale

D'après le système d'équations (2.1), l'équation du mouvement de la masse M_v s'écrit :

$$M_v \ddot{y}_{2v}(t) + c_v (\dot{y}_{2v}(t) - \dot{y}_{1v}(t)) + k_v (y_{2v}(t) - y_{1v}(t)) = 0 \quad (2.30)$$

Tenir compte des expressions (2.3) et (2.4), l'équation (2.30) projetée dans la base modale (2.12), prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} M_v \ddot{y}_{2v}(t) + c_v \dot{y}_{2v}(t) + k_v y_{2v}(t) - \sum_{j=1}^n c_v \phi_j(x_v(t)) \dot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^n (k_v \phi_j(x_v(t)) + c_v V \phi_j'(x_v(t))) q_j(t) \\ = k_v r(x_v(t)) + c_v V r'(x_v(t)), \quad v = 1, 2, \dots, nv \end{aligned} \quad (2.31)$$

L'équation (2.31), sous forme matricielle s'écrit :

$$[M]\{\ddot{y}_2\} + [C]\{\dot{y}_2\} + [K]\{y_2\} - [C][\phi]^T \{\dot{q}\} - ([K][\phi]^T + V[C][\phi']^T)\{q\} = [K]\{r\} + V[C]\{r'\}, \quad (2.32)$$

avec

$$[M] = \text{diag}[M_v]; [C] = \text{diag}[c_v]; [K] = \text{diag}[k_v]; \{r\} = \{r(x_v)\}, v=1,2,\dots,nv \quad (2.33)$$

Regroupons les équations de mouvement (2.27) et (2.32) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [M^*] & [\Phi][M] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}\} \\ \{\ddot{y}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^*] & [0] \\ -[C][\Phi]^T & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\dot{y}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^*] & [0] \\ -[K][\Phi]^T - V[C][\Phi']^T & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{y_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P^*\} \\ [K]\{r\} + V[C]\{r'\} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Pour résoudre les équations couplées du mouvement pont-Train, il y a deux méthodes: la méthode couplée qui consiste à coupler les DDL physiques des véhicules avec les variables modales du pont (eq. 2.34) en utilisant la méthode modale et l'intégration directe, la méthode découplée qui consiste à résoudre les deux systèmes d'équations couplés (2.27) et (2.32) d'une manière découplée. Dans ce cas, un processus de calcul itératif cherche l'équilibre dynamique des forces d'interactions entre le pont et les véhicules à chaque instant. On résout le système d'équations couplées (2.27) et (2.32), d'une manière découplée par la méthode de Newmark dont les inconnues sont les q_j ($j = 1, \dots, n$), et y_{2v} ($v = 1, \dots, nv$).

2.2.8 Résolution numérique des équations du mouvement

Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicules (2.27) et (2.32), nous utilisons la méthode de Newmark. L'équation du mouvement du pont (2.27) à $t + \Delta t$ s'écrit :

$$[M^*]\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + [C^*]\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} + [K^*]\{q\}_{t+\Delta t} + [\phi][M]\{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{P^*\}_{t+\Delta t} \quad (2.35)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés respectivement sont (voir annexe 1)

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{q}\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (2.36)$$

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{q}\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (2.37)$$

Où γ et β sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark, Δt et le pas du temps d'intégration.

Remplaçons les expressions (2.36) et (2.37) dans (2.35), après factorisation on obtient :

$$[S] \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + [C^*] \{\dot{q}^*\}_{t+\Delta t} + [K^*] \{q^*\}_{t+\Delta t} + [M_2^*] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{P^*\}_{t+\Delta t} \quad (2.38)$$

avec

$$[S] = [M^*] + \gamma \Delta t [C^*] + \beta \Delta t^2 [K^*] ; [M_2^*] = [\phi] [M] \quad (2.39)$$

$$\{\dot{q}^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{q}\}_t \quad (2.40)$$

$$\{q^*\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_t \quad (2.41)$$

Multiplions (2.38) par $[S]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} - [U] \{\dot{q}^*\}_{t+\Delta t} - [V] \{q^*\}_{t+\Delta t} - [Z] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} \quad (2.42)$$

avec

$$\{P\}_{t+\Delta t} = [S]^{-1} \{P^*\}_{t+\Delta t} ; [U] = [S]^{-1} [C^*] ; [V] = [S]^{-1} [K^*] ; [Z] = [S]^{-1} [M_2^*] \quad (2.43)$$

L'équation du mouvement de la masse M_v à $t + \Delta t$ s'écrit :

$$[M] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{y}_2\}_{t+\Delta t} + [K] \{y_2\}_{t+\Delta t} - [C] [\phi]^T \{\dot{q}\}_{t+\Delta t} - ([K] [\phi]^T + V [C] [\phi']^T) \{q\}_{t+\Delta t} = [K] \{r\}_{t+\Delta t} + V [C] \{r'\}_{t+\Delta t} \quad (2.44)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les vitesses et les déplacements des véhicules respectivement sont :

$$\{\dot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{\dot{y}_2\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{y}_2\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} \quad (2.45)$$

$$\{y_2\}_{t+\Delta t} = \{y_2\}_t + \Delta t \{\dot{y}_2\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{y}_2\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} \quad (2.46)$$

Remplaçons les expressions (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.44), après factorisation, on obtient :

$$[T] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{y}_2^*\}_{t+\Delta t} + [K] \{y_2^*\}_{t+\Delta t} - [A] \{\dot{q}\}_{t+\Delta t} - [G] \{q\}_{t+\Delta t} = \{R\}_{t+\Delta t} \quad (2.47)$$

avec

$$[T] = [M] + \gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K] ; [A] = [C] [\phi]^T ; [G] = [K] [\phi]^T + V [C] [\phi']^T \quad (2.48)$$

$$\{R\}_{t+\Delta t} = [K] \{r\}_{t+\Delta t} + V [C] \{r'\}_{t+\Delta t} \quad (2.49)$$

$$\{\dot{y}_2^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{y}_2\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{y}_2\}_t \quad (2.50)$$

$$\{y_2^*\}_{t+\Delta t} = \{y_2\}_t + \Delta t \{\dot{y}_2\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{y}_2\}_t \quad (2.51)$$

Multiplions l'équation (2.47) par $[T]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{R^*\}_{t+\Delta t} - [T^*]\{\dot{y}_2^*\}_{t+\Delta t} - [U^*]\{y_2^*\}_{t+\Delta t} + [A^*]\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} + [G^*]\{q\}_{t+\Delta t} \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \{R^*\}_{t+\Delta t} &= [T]^{-1}\{R\}_{t+\Delta t}; [T^*] = [T]^{-1}[C]; [U^*] = [T]^{-1}[K]; \\ [A^*] &= [T]^{-1}[A]; [G^*] = [T]^{-1}[G] \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.2.9 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution comprend deux boucles, la première est celle des pas du temps et la seconde correspond aux itérations (figure 2.4). On calcule le vecteur des accélérations généralisées du pont à partir de l'équation (2.42), une fois ce vecteur est calculé, on peut calculer à partir des expressions (2.36) et (2.37), les déplacements et les vitesses généralisés du pont. On calcule les accélérations, vitesses et déplacements verticaux des véhicules par les expressions (2.52), (2.45) et (2.46). Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicules (2.27) et (2.32), nous allons utiliser une approximation de la configuration de la structure au pas du temps courant en fonction de la configuration précédente, puis on fait un test de convergence entre le vecteur $\{\ddot{y}_2\}^{k+1}$ de l'itération $k+1$ et $\{\ddot{y}_2\}^k$ de l'itération k précédente :

$$\left| \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^{k+1} - \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^k \right| / \left| \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^{k+1} \right| \leq \varepsilon \quad (2.54)$$

Si cette condition est vérifiée, on passe au pas du temps suivant, si non, on passe à l'itération suivante tel que le vecteur $\{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^{k+1}$ devient une approximation de l'itération prochaine et on refait le calcul jusqu'à la convergence.

-
- Lecture des données $l, \bar{m}, E, I, M_v, m_v, k_v, g, n, na, \xi_v, \gamma, \beta, \varepsilon$
 - Entrer le nombre de véhicules nv et la vitesse du train V
 - Calcul des pulsations et des modes propres du pont ω_j, ϕ_j
 - Choix du pas du temps Δt
 - Initialiser : $\{q\}_0 = \{\dot{q}\}_0 = \{\ddot{q}\}_0 = \{0\}$ Pont
 - $\{y_2\}_0 = \{\dot{y}_2\}_0 = \{\ddot{y}_2\}_0 = \{0\}$ Véhicules
-

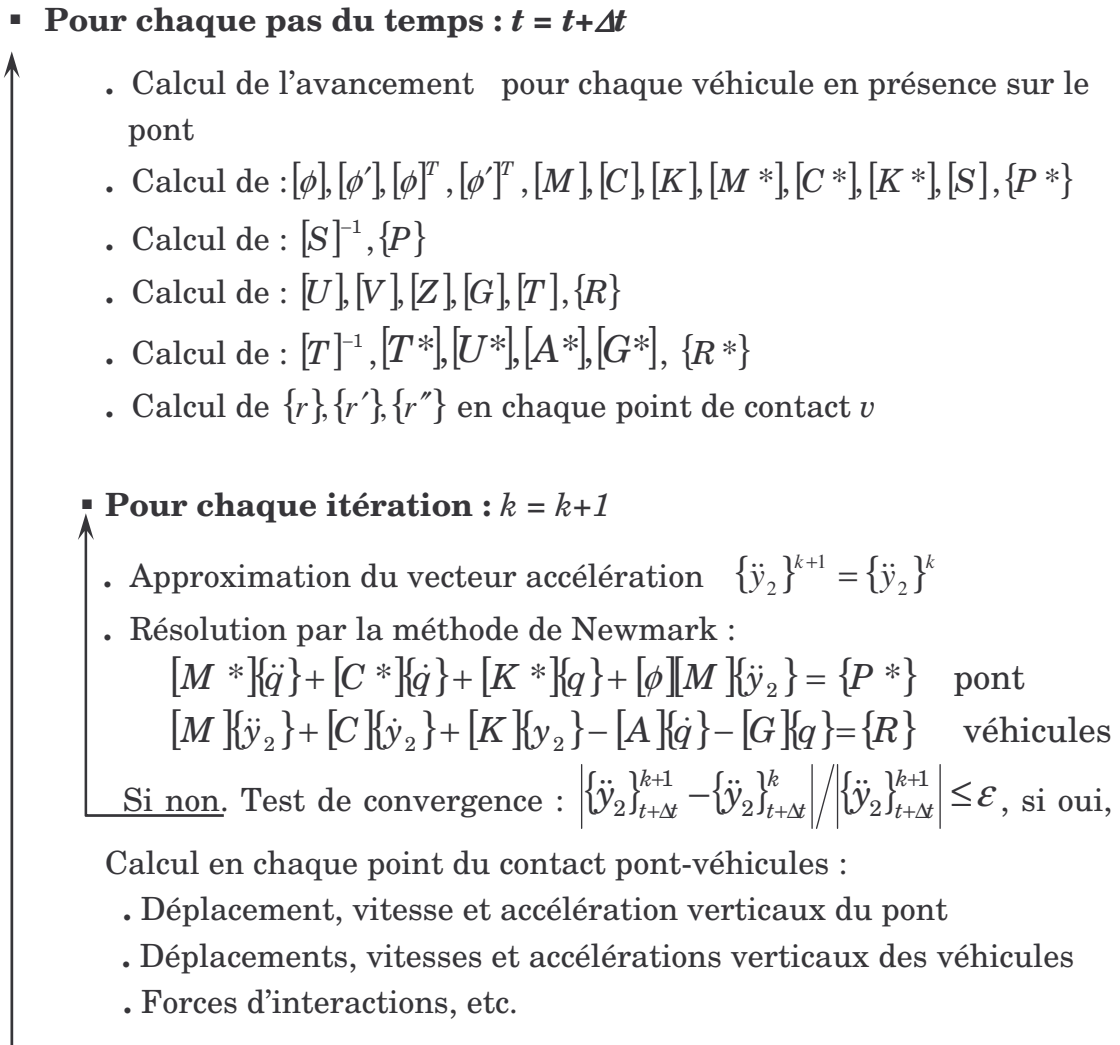


Figure 2.4 : Algorithme de résolution de l'interaction pont-véhicules

2.3 Détermination du bruit de roulement dû au passage du train sur le pont

2.3.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous présentons une étude du bruit rayonné par le passage d'un train sur un pont de chemin de fer, dont le but est d'évaluer sa nuisance sonore. Pour cela, nous résoudrons l'équation d'Helmoltz. Les sources d'excitation sont les accélérations en tous points du pont calculées dans la partie vibratoire. Ces accélérations sont considérées comme des sources monopôlaires distribuées le long du pont.

2.3.2 Equation d'Helmoltz

La production d'un son est définie à partir d'un élément de volume de milieu continu, qui passe d'un état d'équilibre à un état perturbé. Cette perturbation provoque des ondes sonores qui se propagent dans le milieu.

Isolons un espace de volume V , traversé par un débit acoustique $Q(M,t)$, à un point $M(x,y,z)$, et dans lequel existe des sources acoustiques (figure 2.5).

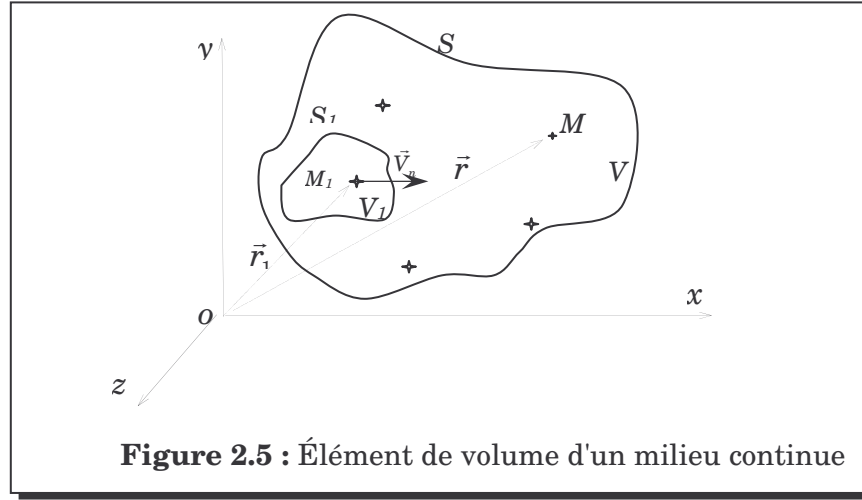


Figure 2.5 : Éléments de volume d'un milieu continu

Dans la figure 2.5, $M_1(x_1, y_1, 0)$ est le point d'émission, $M(x, y, z)$, est le point de réception (d'écoute), $\vec{r}_1$ est la position du point M_1 , $\vec{r}$ est la position du point M , et $\vec{V}_n$ est la vitesse normale vibrante au point M_1 . La variation de la pression acoustique au point M est donnée par l'équation d'Helmoltz suivante [36]:

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = \underbrace{\text{div} \vec{F}}_{\text{Termes sources}} - \frac{\partial Q(M, t)}{\partial t} \quad (2.55)$$

où $\Delta p(M, t)$ est la variation de la pression acoustique au point M , $\vec{F}$ est la variation des forces volumiques, $Q(M, t)$ est la variation du débit acoustique au point M , λ est la vitesse de propagation des ondes sonores (célérité du son), Δ est l'opérateur Laplacien.

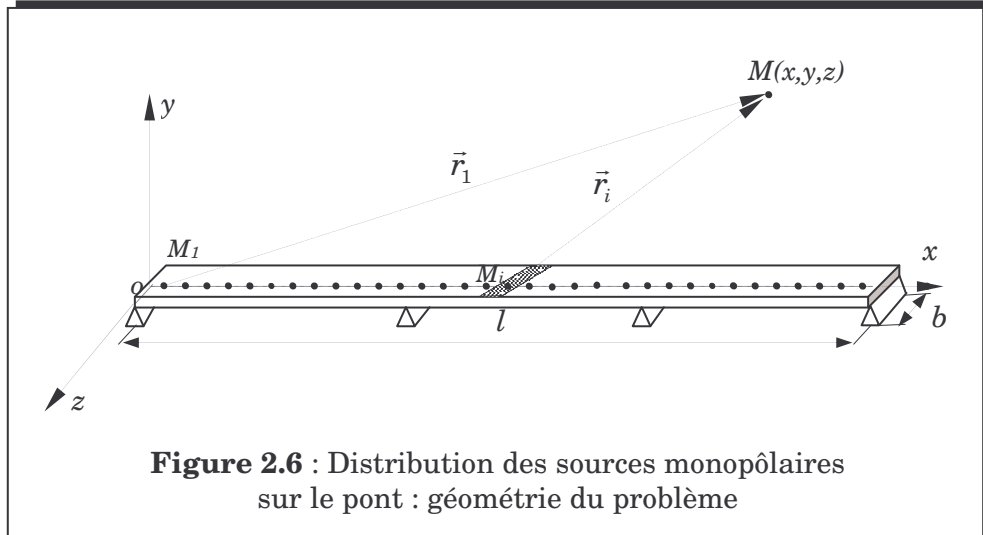
2.3.3 Application pour le cas du pont

On considère les accélérations en chaque point du pont comme des sources monopôlaires (figure 2.6). On suppose que les forces volumiques sont nulles (les termes sont alors introduits via les conditions aux limites sur la surface), l'équation d'Helmoltz devient:

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q(M, t)}{\partial t} \quad (2.56)$$

En prenant dans un premier temps, une seule source placée en M_1 .

$$Q(M, t) = \bar{Q}(M, t) \delta(M - M_1) \quad (2.57)$$



On remplace (2.57) dans (2.56), on obtient :

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial \bar{Q}(M, t)}{\partial t} \delta(M - M_1) \quad (2.58)$$

où $\delta(M - M_1)$ est la distribution volumique de Dirac de la source appliquée en M_1 .

Pour trouver la réponse impulsionnelle liée à l'équation (2.58), on va chercher une fonction $\Delta g(M, t)$ appelée fonction de Green et l'utiliser pour trouver la pression acoustique au point M .

$$\Delta g(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 g(M, t)}{\partial t^2} = \delta(t) \delta(M) \quad (2.59)$$

où $\delta(t) \delta(M)$ est l'excitation unitaire. Faisons la transformée de Fourier de l'équation (2.59), on obtient:

$$TF \left(\Delta g(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 g(M, t)}{\partial t^2} \right) = \delta(M) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Delta \tilde{g}(r_1, \omega) + \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \tilde{g}(r_1, \omega) = \delta(M) \quad (2.60)$$

La solution de (2.60) est comme suite [36]:

$$\tilde{g}(r_1, \omega) = -\frac{1}{4\pi r_1} e^{-j\omega \frac{r_1}{\lambda}} \quad (2.61)$$

La transformée inverse de (2.61) donne :

$$g(M, t) = -\frac{1}{4\pi r_1} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \left(t - \frac{r_1}{\lambda} \right)} d\omega \right)}_{=\delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda}\right)} = -\frac{1}{4\pi r_1} \delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda}\right) \quad (2.62)$$

où r_1/λ est le temps de propagation de l'onde sonore du point M_l au point M . La solution de (2.58) est sous la forme suivante [37,38]:

$$p(M, t) = - \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} g\left(t - \frac{r_1}{\lambda} - \tau\right) dV d\tau \quad (2.63)$$

Remplaçons maintenant (2.62) dans (2.63), on obtient:

$$\begin{aligned} p(M, t) &= \frac{1}{4\pi r_1} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} \delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda} - \tau\right) dV d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi r_1} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda} - \tau\right) dS d\tau \\ &= \frac{\rho_0 S_e}{4\pi r_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left(t - \frac{r_1}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air. La génération de (2.64), pour plusieurs sources placées en M_i donne :

$$p(M, t) = \frac{\rho_0 S_e}{4\pi} \sum_{i=1}^{ns} \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left(t - \frac{r_i}{\lambda}\right) \quad (2.65)$$

La taille de la surface élémentaire S_e de chaque source acoustique dépend du nombre de point de discrétisation acoustique ns , choisi pour mailler la longueur du pont l : $S_e = bl/ns$, où b représente la largeur du pont. La distance entre les points M et M_i est :

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2} \quad (2.66)$$

2.4 Exemple numérique de validation

Dans cet exemple, nous étudions le comportement dynamique d'une poutre sur deux appuis simples (figure 2.7) sous l'effet d'un véhicule mobile à un degré de liberté. On compare les résultats obtenus avec ceux de Yang et Yau [12].

Données de la poutre	Données du véhicule
$l = 25$ m	$M_v = 5750$ kg
$\bar{m} = 2303$ kg/m	$C_v = 0$
$E = 2.87 \times 10^9$ N/m ²	$k_v = 1.595 \times 10^6$ N/m
$I = 2.9$ m ⁴	$V = 100$ km/h

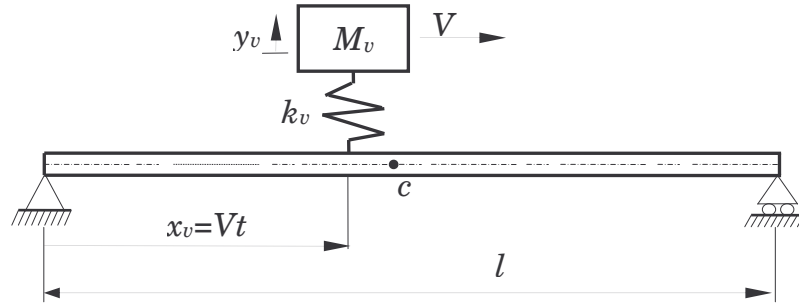


Figure 2.7 : Véhicule mobile avec un degré de liberté

Les figures 2.8 et 2.9, représentent respectivement le déplacement et l'accélération verticaux au centre c de la poutre en fonction du temps de parcours. Sur les figures 2.10 et 2.11, on représente le déplacement et l'accélération verticaux du véhicule (masse M_v) en fonction du temps. On remarque que les résultats obtenus à partir de la présente étude sont en excellente concordance avec ceux obtenus par Yang et Yau [12].

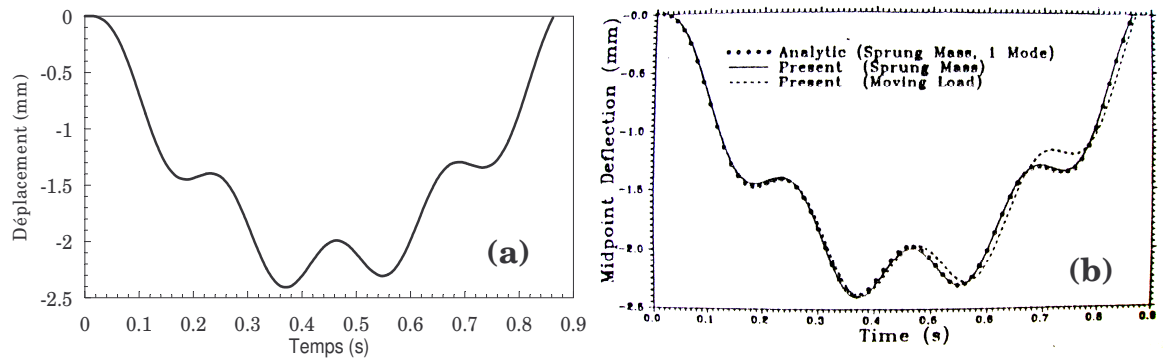


Figure 2.8 : Variation du déplacement vertical au milieu de la poutre en fonction du temps, (a) : notre étude, (b) : référence [12]

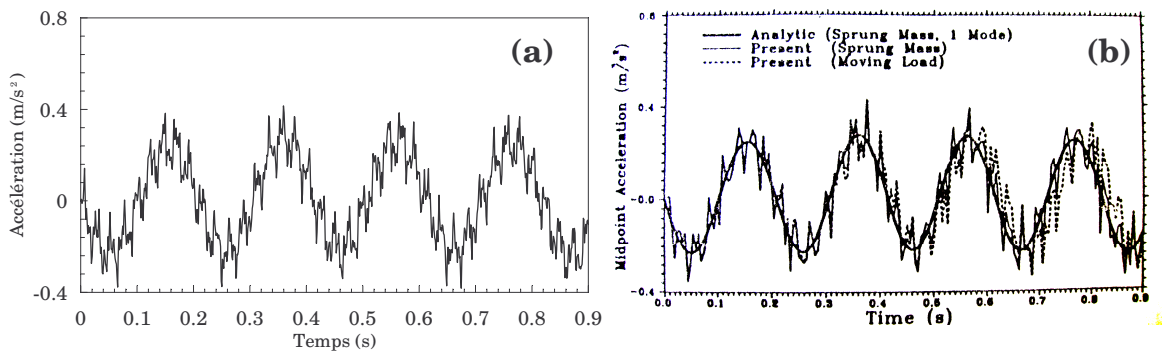


Figure 2.9: Variation de l'accélération verticale au milieu de la poutre en fonction du temps, (a) : notre étude, (b) : référence [12]

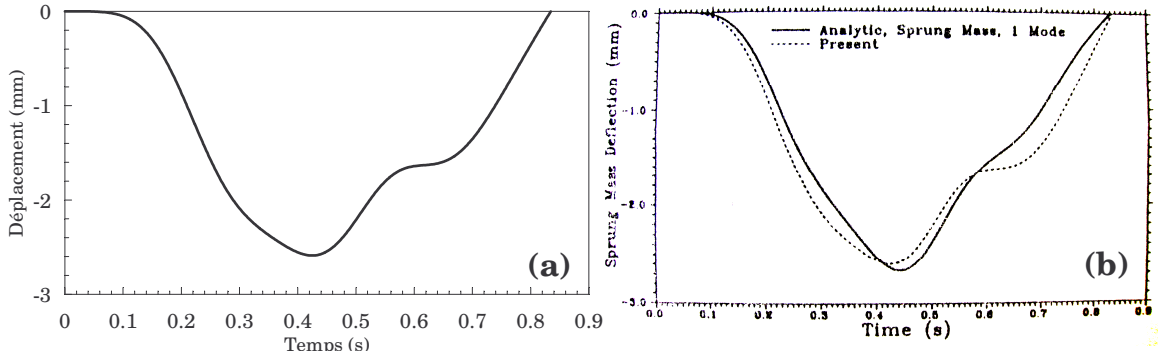


Figure 2.10 : Déplacement vertical de la masse M_v , (a) : notre étude, (b) : référence [12]

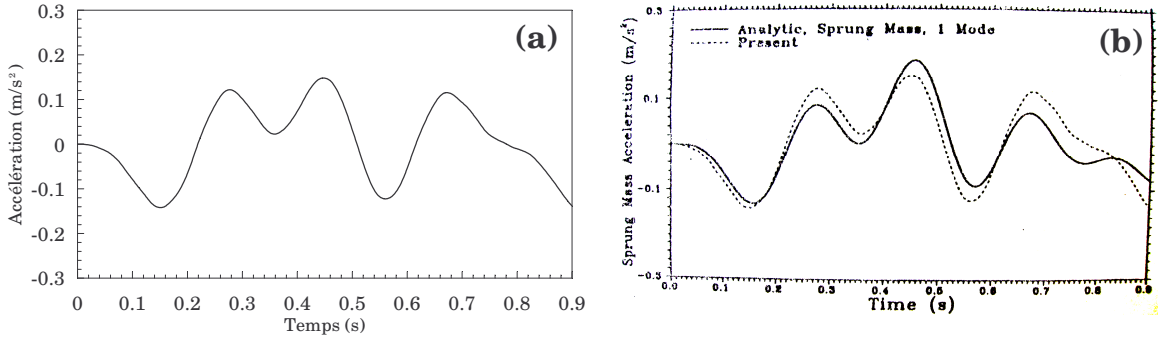
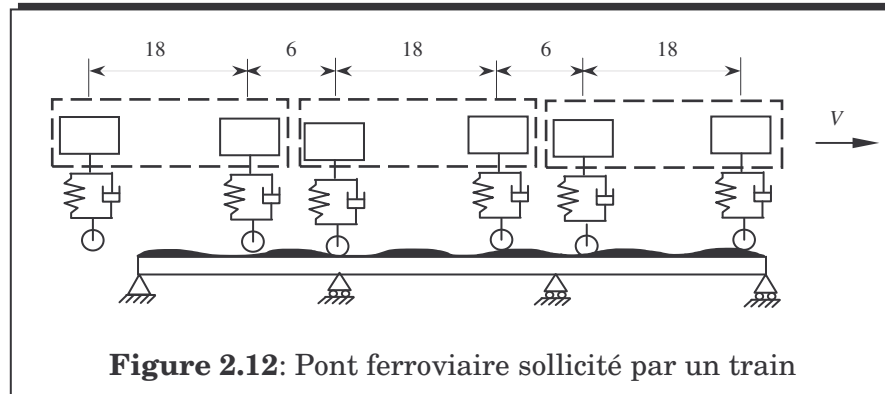


Figure 2.11 : Accélération verticale de la masse M_v , (a) : notre étude, (b) : référence [12]

2.5 Application au cas d'un pont ferroviaire

Dans cet exemple, nous étudions l'influence de l'amortissement, du nombre d'appuis intermédiaires et de l'espacement entre eux, du nombre de wagons, des irrégularités de la voie de roulement et de la vitesse de roulement sur le comportement dynamique du pont et du train ainsi que sur les forces d'interactions. Nous calculons la pression acoustique rayonnée par le passage du train à un point d'écoute M . On a choisi un train de trois wagons (six véhicules) à espacement régulier non uniforme et un pont avec deux appuis intermédiaires (voir figure 2.12). Les caractéristiques du pont sont : $l = 60$ m, $\bar{m} = 34088$ kg/m, $E = 29.43 \times 10^9$ N/m², $I = 3.81$ m⁴, $\xi_j = 5$ %. On a choisi le nombre de point de discrétisation en fréquence $N = 180$ et une rail en bon état ($A_r = 10^{-8}$). La rigidité des appuis intermédiaires est $k = 10^{11}$ N/m. Les caractéristiques de chaque véhicule mobile sont : $M_v = 17600$ kg, $m_v = 4400$ kg, $k_v = 9.12 \times 10^6$ N/m, $c_v = 8.6 \times 10^4$ Ns/m ($\xi_v = 12.5$ %) [12]. Le programme élaboré en langage FORTRAN permet la résolution des équations du mouvement pont-train, d'une manière découplée, en utilisant l'algorithme de l'accélération moyenne de Newmark ($\gamma = 0.5$ et $\beta = 0.25$). Ce schéma est inconditionnellement stable. Le pas du temps d'intégration numérique dépend de la vitesse de passage du train ($\Delta t = \Delta x / V$). Le pas de discrétisation spatial est $\Delta x = 0.05$ m. La convergence des résultats dépend du nombre de modes, des conditions limites du pont et du nombre d'appuis intermédiaires et de leurs rigidités.

Pour un pont avec deux appuis intermédiaires, la convergence est obtenue pour six modes de vibration.



Les pulsations propres du pont sont calculées par: $\omega_{p,i} = \gamma_i^2 \sqrt{EI / ml_1^4}$, où l_1 est la longueur de la travée centrale, γ_i est un paramètre sans dimension qui dépend des conditions aux limites, du nombre de modes et d'appuis intermédiaires. Le tableau 1 montre les six premières pulsations propres du pont pour $na = 0, 1$ et 2 .

$na = 0$			$na = 1$		$na = 2$	
Mode	γ	$\omega_{p,i}$	γ	$\omega_{p,i}$	γ	$\omega_{p,i}$
1	3,14	4,97	3,14	19,89	3,14	44,69
2	6,28	19,88	3,92	31,07	3,55	57,27
3	9,42	44,75	6,28	79,55	4,29	83,59
4	12,57	79,60	7,06	100,67	4,71	100,56
5	15,71	124,33	9,42	178,97	6,70	203,65
6	18,85	179	10,21	210,07	7,43	249,92

Tableau 1 : Pulsations propres du pont

Sur la base de l'expression (2.10), des irrégularités aléatoires du rail, nous présentons sur la figure 2.13, le profil aléatoire de la voie de roulement.

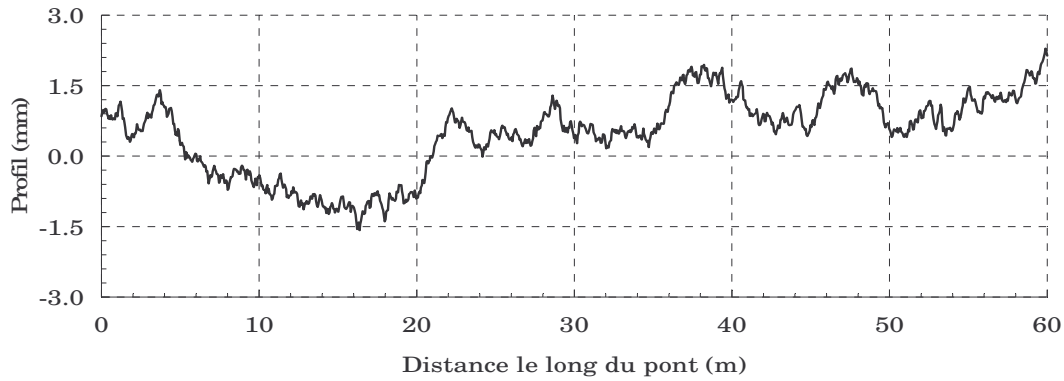


Figure 2.13 : Profil des irrégularités de la voie de roulement générée par une densité spectrale de puissance

2.5.1 Influence des irrégularités de la voie de roulement

Les figures 2.14 a et b, montrent l'influence des irrégularités de la voie de roulement sur la force d'interaction pont-véhicule 1. On constate que pour une voie sans irrégularités (figure 2.14a), la variation de l'amplitude de la force d'interaction est très faible (d'environ 175 N), en comparaison avec celle d'une voie de roulement avec irrégularités (figure 2.14b), où cette variation est très importante (d'environ 45000 N).

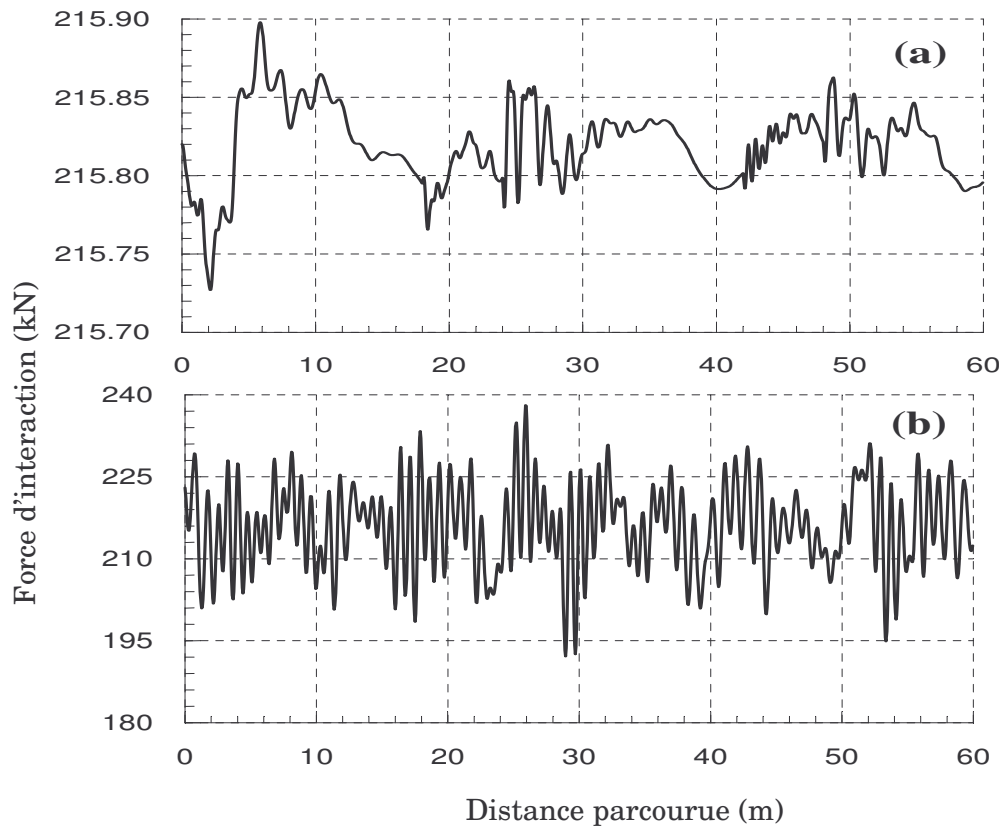


Figure 2.14 : Influence des irrégularités de la voie de roulement sur la force d'interaction pont-véhicule 1, $V = 20$ m/s, (a) : sans irrégularités, (b) : avec irrégularités

Chapitre 2

Comportement vibroacoustique d'un pont ferroviaire lors du passage d'un train

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une modélisation vibroacoustique d'un pont ferroviaire à plusieurs travées lors du passage d'un train. La modélisation vibratoire tient compte de l'interaction pont-train et des irrégularités de la voie de roulement. Le pont est modélisé par une poutre continue dont les supports intermédiaires sont modélisés par des ressorts linéaires de grande rigidité. Le train est modélisé par une série de wagons en mouvement. Chaque wagon est modélisé par deux véhicules chacun à deux degrés de liberté. A l'aide de la méthode modale, on détermine deux équations de mouvement couplées pour le système pont-train. La résolution de ces équations s'effectue d'une manière découplée par la méthode de Newmark. La pression acoustique rayonnée par le pont due au passage du train est obtenue par la résolution de l'équation d'Helmoltz avec comme source d'excitation les accélérations distribuées le long du pont qui sont considérées comme des monopôles.

2.2 Modélisation vibratoire d'un pont ferroviaire lors du passage d'un train

2.2.1 Modélisation

La figure 2.1 représente un modèle générale pont-train. Le pont est modélisé par une poutre continue équivalente, de longueur l , de masse linéique $\bar{m}$, de moment d'inertie I et de module d'Young E , simplement appuyée aux extrémités. Les na appuis intermédiaires d'abscisses $x = S_p$ ($p = 1, 2, \dots, na$) sont modélisés par des ressorts linéaires de grande rigidité et de même raideur k (voir figure 2.2). Le train est modélisé par plusieurs wagons traversant le pont à une vitesse constante V . Chaque wagon est modélisé par deux véhicules chacun possède deux degrés de liberté. La masse du $v^{\text{ème}}$ véhicule est notée M_v et la masse de sa roue m_v . Ces deux masses sont liées par un ressort de raideur k_v et un amortisseur de constante d'amortissement c_v . Le déplacement vertical du pont est noté par $w(x,t)$. La position horizontale d'un point sur le pont est notée $x(t)$ et les irrégularités de la voie de roulement sont représentées par la fonction $r(x)$. Les déplacements verticaux des masses M_v et m_v sont $y_{1v}(t)$ et $y_{2v}(t)$ respectivement.

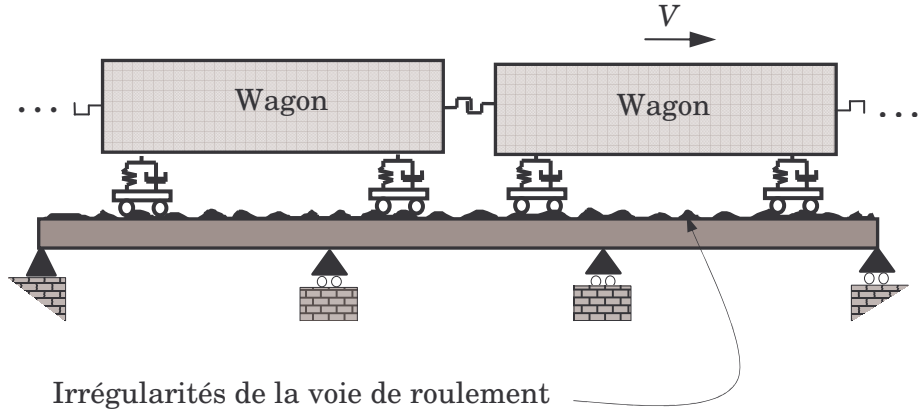


Figure 2.1 : Modèle général pont-train

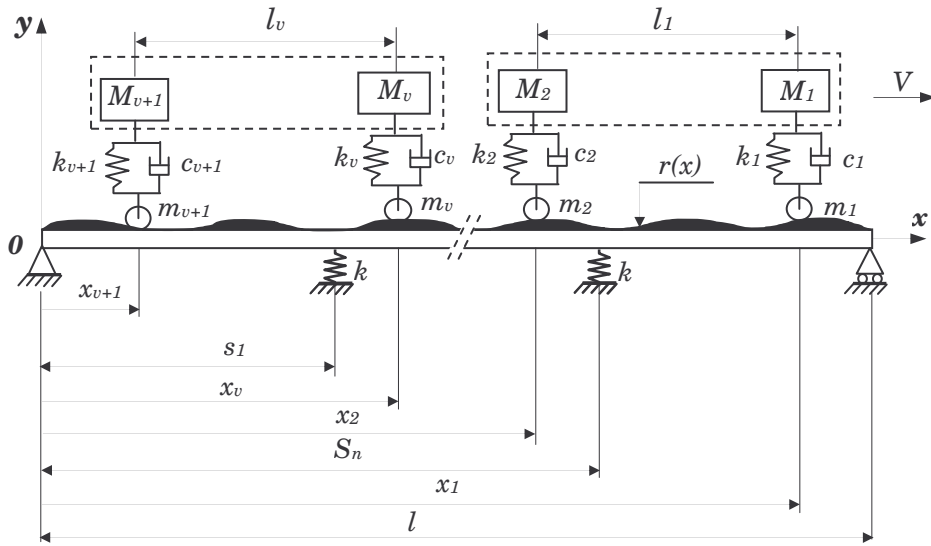


Figure 2.2 : Poutre continue sous l'effet d'un convoi de véhicules à deux degrés de liberté mobiles

2.2.2 Équations du mouvement du model de véhicule

Les équations du mouvement du modèle de véhicule à deux degrés de liberté sont obtenues en appliquant la loi fondamentale de la dynamique pour chacune des masses M_v et m_v . Les équations résultantes sont :

$$\begin{bmatrix} m_v & 0 \\ 0 & M_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{1v} \\ \ddot{y}_{2v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_v & -c_v \\ -c_v & c_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_{1v} \\ \dot{y}_{2v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_v & -k_v \\ -k_v & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{1v} \\ y_{2v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

où F_v est la force d'interaction dynamique entre la masse m_v et la poutre (Voir figure 2.3).

2.2.3 Forces d'interaction pont-train

A partir de l'équation (2.1), en rajoutant la contribution statique, on peut déterminer la force d'interaction en chaque point de contact pont-véhicule v :

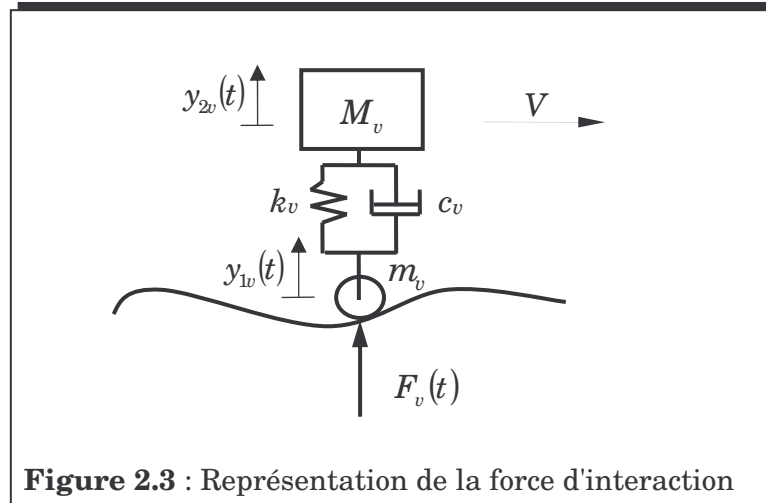
$$F_v(t) = (M_v + m_v)g + m_v \ddot{y}_{1v} + M_v \ddot{y}_{2v}, \quad v = 1, 2, \dots, nv \quad (2.2)$$

avec le déplacement, la vitesse et l'accélération verticaux de la masse m_v respectivement sont :

$$y_{1v}(t) = w(x_v(t), t) + r(x_v(t)) \quad (2.3)$$

$$\dot{y}_{1v}(t) = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial r}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=x_v(t)} \quad (2.4)$$

$$\ddot{y}_{1v}(t) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) \Bigg|_{x=x_v(t)} \quad (2.5)$$



2.2.4 Modélisation des irrégularités de la voie de roulement

Les irrégularités aléatoires de la voie de roulement sont dues essentiellement aux erreurs lors de la construction des rails, à l'usure et aux mauvais entretiens. Ces irrégularités perturbent le mouvement vertical du train et provoquent du bruit et d'impact dynamique très importants. Il existe deux types d'approches pour définir les caractéristiques probabilistes des irrégularités aléatoires d'une route : l'approche basée sur la fonction d'auto-corrélation et l'approche basée sur la densité spectrale. Cheung et al.[33], ont modélisé le profil de la voie de roulement par une fonction harmonique avec la prise en compte de deux paramètres: la hauteur et la longueur du profil. Xia et al.[34], ont simulé les défauts de la voie de roulement comme une fonction sinusoïdale avec certain amplitude et phase aléatoire. On peut modéliser le profil de la surface de roulement par un processus aléatoire stationnaire

gaussien, caractérisé par une densité spectrale de puissance (DSP) qui permet de décrire la qualité de surface de roulement. Plusieurs courbes de DSP relatives aux chemins de fer ont été développées dans différents pays [18]. La fonction spectrale dans le domaine fréquentiel S_r (en fonction de la fréquence spatiale $f_s = \omega_s/2\pi$), associée à ce processus est donnée par l'expression suivante :

$$S_r(\omega_s) = \begin{cases} A_r \left(\frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-\alpha_1} & \text{pour } \omega_s \leq \omega_{s0} \\ A_r \left(\frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-\alpha_2} & \text{pour } \omega_s > \omega_{s0} \end{cases} \quad (2.6)$$

où $A_r = A_r(\omega_{s0})$ est le coefficient de rugosité spectrale (valeur de la densité spectrale), qui caractérise l'état de la voie de roulement (m^3/cycle), ω_{s0} est la pulsation de discontinuité ($\omega_{s0} = 1/2\pi \text{ cycle/m}$), α_1 et α_2 sont des exposants de rugosité spectrale. Une proposition pour la classification de la rugosité des ponts a été développée sur la base d'un paramètre du spectre $A_r(\omega_{s0})$ avec un exposant constant $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ [35].

La densité spectrale est alors donnée par :

$$S_r(\omega_s) = A_r \left(\frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-2} \quad (2.7)$$

La fonction de densité spectrale de puissance $S_r(\omega_k)$ est représentée dans un graphique où l'échelle est logarithmique. Une représentation approximative d'un profil aléatoire gaussien peut être obtenu à partir d'une DSP. Cette représentation considère que le profil résulte de la somme d'un nombre infini de sinusoïdes de phase aléatoire θ_k indépendantes et uniformément distribuées entre 0 et 2π

$$r(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4S_r(\omega_{sk})\Delta\omega_s} \cos(\omega_{sk}x + \theta_k) \quad (2.8)$$

où N est le nombre de points de discrétisation en fréquence, ω_{sk} est le nombre d'ondes ($\omega_{sk} = 2\pi k/L_c \text{ cycle/m}$) et $\Delta\omega = 2\pi/L_c$. L'expression de la valeur discrète de la densité spectrale de puissance est:

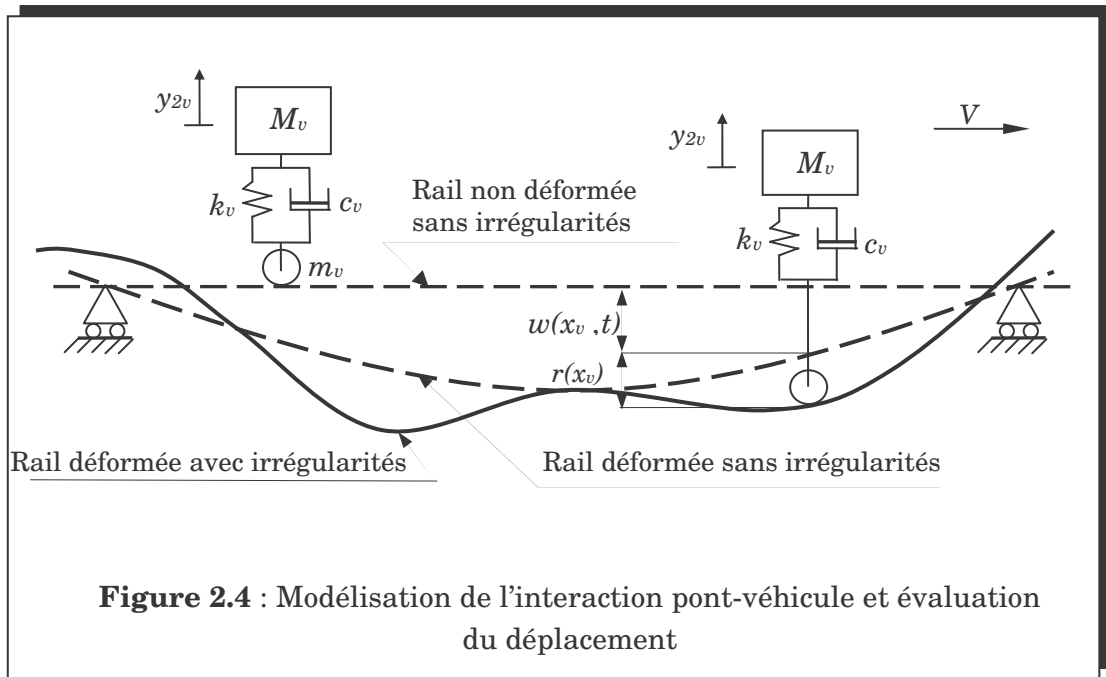
$$S_r(\omega_{sk}) = A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right)^{-2} \quad (2.9)$$

Remplaçons $S_r(\omega_{sk})$ par sa valeur discrète dans l'expression (2.8), on obtient:

$$r(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right) \frac{2\pi}{L_c} \cos(\omega_{sk} x + \theta_k)} \quad (2.10)$$

où L_c est la longueur totale d'échantillonnage qui en général égale la longueur total du pont multipliée par 2 (m), l est la longueur du pont considéré (m), x est la position horizontale sur la rail (m).

La figure 2.4 montre l'interaction pont-véhicules avec la prise en compte des irrégularités de la voie de roulement.



2.2.5 Équation du mouvement du pont

L'équation du mouvement transversal en flexion pure du pont (poutre continue) s'écrit :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + k \sum_{p=1}^{na} w(x,t) \delta(x-x_p) = - \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \delta(x-x_v) \quad (2.11)$$

où $\bar{m}$, c , E et I sont respectivement la masse par unité de longueur, la constante d'amortissement visqueux, le module de Young et le moment d'inertie du pont, δ est l'opérateur de Dirac. La masse $\bar{m}$ et le moment d'inertie I sont indépendants de x , car on suppose que les irrégularités de la voie de roulement sont petites, donc cela ne modifie pas sensiblement la masse linéique et l'inertie du pont.

2.2.6 Équation du mouvement du pont dans la base modale

En utilisant la méthode modale, la solution de l'équation (2.11) peut être exprimée par :

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (2.12)$$

où n est le nombre de modes nécessaires pour la convergence de la série modale, $\phi_i(x)$ sont les modes propres de vibration libre du pont et $q_i(t)$, les coordonnées généralisées. Il faut noter ici que l'analyse reste tributaire de la propriété d'orthogonalité des modes propres qui garantit le découplage des réponses modales. La série (2.12) peut être tronquée pour ne retenir que les modes susceptibles d'être excités dans la pratique. Remplaçons l'expression modale (2.12) dans l'équation (2.11), puis multiplions cette dernière par $\phi_j(x)$ et l'intégrons à travers la longueur du pont, on obtient :

$$\begin{aligned} & \overline{m} \int_0^l \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \phi_j(x) dx \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + c \int_0^l \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \phi_j(x) dx \frac{dq_i(t)}{dt} \\ & + \left(EI \int_0^l \sum_{i=1}^n \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} \phi_j(x) dx + k \int_0^l \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{na} \phi_i(x) \phi_j(x) \delta(x - x_p) dx \right) q_i(t) \\ & = - \int_0^l \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \delta(x - x_v) \phi_j(x) dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les modes propres sont orthonormés, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \overline{m} \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \\ & c \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 2 \xi_j \omega_j \delta_{ij} \\ & EI \int_0^l \frac{d^4 \phi_i}{dx^4} \phi_j(x) dx = \omega_j^2 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, $\xi_j = c_j / c_{jcr}$, ω_j sont respectivement le facteur d'amortissement et la pulsation propre du mode j , c_{jcr} est l'amortissement modale critique. On tient compte des relations d'orthogonalité (2.14), les termes dans l'équation (2.13), avec $i \neq j$ disparaissent et il reste j équations modales découplées.

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \left(\omega_j^2 + k \sum_{p=1}^{na} \phi_i(s_p) \phi_j(s_p) \right) q_j = F_j(t) \quad (2.15)$$

avec la force modale du mode j s'écrit :

$$F_j(t) = - \int_0^l \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \delta(x - x_v) \phi_j(x) dx = - \sum_{v=1}^{nv} F_v(t) \phi_j(x_v) \quad (2.16)$$

Remplaçons l'expression (2.12) dans les expressions (2.3 à 2.5), on obtient :

$$y_{1v} = r(x_v) + \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) q_j \quad (2.17)$$

$$\dot{y}_{1v} = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \dot{q}_j + V \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) q_j + V r'(x_v) \quad (2.18)$$

$$\ddot{y}_{1v} = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \ddot{q}_j + 2V \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) \dot{q}_j + V^2 \sum_{j=1}^n \phi''_j(x_v) q_j + V^2 r''(x_v) \quad (2.19)$$

Remplaçons l'expression (2.19) dans l'expression (2.2), la force d'interaction en chaque point de contact v s'écrit :

$$\begin{aligned} F_v(t) = & (M_v + m_v)g + M_v \ddot{y}_{2v} + m_v \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \ddot{q}_j + 2V m_v \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) \dot{q}_j \\ & + m_v V^2 \sum_{j=1}^n \phi''_j(x_v) q_j + V^2 m_v r''(x_v) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Remplaçons (2.20), dans (2.16), on obtient:

$$\begin{aligned} F_j(t) = & - \sum_{v=1}^{nv} \phi_j(x_v) \left((M_v + m_v)g + M_v \ddot{y}_{2v} + m_v \sum_{j=1}^n \phi_j(x_v) \ddot{q}_j \right. \\ & \left. + 2V m_v \sum_{j=1}^n \phi'_j(x_v) \dot{q}_j + V^2 m_v \sum_{j=1}^n \phi''_j(x_v) q_j + V^2 m_v r''(x_v) \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Remplaçons maintenant (2.21), dans l'équation modale (2.15), après factorisation, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) + \sum_{v=1}^{nv} M_v \phi_i(x_v(t)) \ddot{y}_{2v}(t) = P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

avec

$$m_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{v=1}^{nv} m_v \phi_i(x_v) \phi_j(x_v) \quad (2.23)$$

$$c_{ij} = 2\xi_j \omega_j \delta_{ij} + 2V \sum_{v=1}^{nv} m_v \phi_i(x_v) \phi_j'(x_v) \quad (2.24)$$

$$k_{ij} = \omega_j^2 \delta_{ij} + k \sum_{p=1}^{na} \phi_i(s_p) \phi_j(s_p) + V^2 \sum_{v=1}^{nv} m_v \phi_i(x_v) \phi_j''(x_v) \quad (2.25)$$

$$P_i = - \sum_{v=1}^{nv} (M_v + m_v) g \phi_i(x_v) - V^2 \sum_{v=1}^{nv} m_v r''(x_v) \phi_i(x_v) \quad (2.26)$$

L'équation (2.22), sous forme matricielle s'écrit :

$$[M^*] \{\ddot{q}\} + [C^*] \{\dot{q}\} + [K^*] \{q\} + [\phi][M] \{\ddot{y}_2\} = \{P^*\} \quad (2.27)$$

avec

$$[M^*] = [m_{ij}]; [C^*] = [c_{ij}]; [K^*] = [k_{ij}]; \{P^*\} = \{P_i(t)\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

$$[\phi] = [\phi_i(x_v)]; [M] = \text{diag}[M_v]; \{\ddot{y}_2\} = \{\ddot{y}_{2v}\} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad v = 1, 2, \dots, nv \quad (2.29)$$

Les expressions m_{ij} , c_{ij} , k_{ij} et P_i sont respectivement les masses, les amortissements, les raideurs et les forces généralisées. Dans les expressions (2.23)-(2.26), on retrouve des quantités généralisées indépendantes du temps correspondant à la partie immobile du problème (la poutre et ces appuis), et des quantités qui en dépendent, correspondant à la partie mobile du train (les points de contacts glissants). Ces dernières quantités rendent le problème non linéaire.

2.2.7 Équation du mouvement de la masse du véhicule dans la base modale

D'après le système d'équations (2.1), l'équation du mouvement de la masse M_v s'écrit :

$$M_v \ddot{y}_{2v}(t) + c_v (\dot{y}_{2v}(t) - \dot{y}_{1v}(t)) + k_v (y_{2v}(t) - y_{1v}(t)) = 0 \quad (2.30)$$

Tenir compte des expressions (2.3) et (2.4), l'équation (2.30) projetée dans la base modale (2.12), prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} M_v \ddot{y}_{2v}(t) + c_v \dot{y}_{2v}(t) + k_v y_{2v}(t) - \sum_{j=1}^n c_v \phi_j(x_v(t)) \dot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^n (k_v \phi_j(x_v(t)) + c_v V \phi_j'(x_v(t))) q_j(t) \\ = k_v r(x_v(t)) + c_v V r'(x_v(t)), \quad v = 1, 2, \dots, nv \end{aligned} \quad (2.31)$$

L'équation (2.31), sous forme matricielle s'écrit :

$$[M]\{\ddot{y}_2\} + [C]\{\dot{y}_2\} + [K]\{y_2\} - [C][\phi]^T \{\dot{q}\} - ([K][\phi]^T + V[C][\phi']^T)\{q\} = [K]\{r\} + V[C]\{r'\}, \quad (2.32)$$

avec

$$[M] = \text{diag}[M_v]; [C] = \text{diag}[c_v]; [K] = \text{diag}[k_v]; \{r\} = \{r(x_v)\}, v=1,2,\dots,nv \quad (2.33)$$

Regroupons les équations de mouvement (2.27) et (2.32) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [M^*] & [\Phi][M] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}\} \\ \{\ddot{y}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^*] & [0] \\ -[C][\Phi]^T & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\dot{y}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^*] & [0] \\ -[K][\Phi]^T - V[C][\Phi']^T & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{y_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P^*\} \\ [K]\{r\} + V[C]\{r'\} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Pour résoudre les équations couplées du mouvement pont-Train, il y a deux méthodes: la méthode couplée qui consiste à coupler les DDL physiques des véhicules avec les variables modales du pont (eq. 2.34) en utilisant la méthode modale et l'intégration directe, la méthode découplée qui consiste à résoudre les deux systèmes d'équations couplés (2.27) et (2.32) d'une manière découplée. Dans ce cas, un processus de calcul itératif cherche l'équilibre dynamique des forces d'interactions entre le pont et les véhicules à chaque instant. On résout le système d'équations couplées (2.27) et (2.32), d'une manière découplée par la méthode de Newmark dont les inconnues sont les q_j ($j = 1, \dots, n$), et y_{2v} ($v = 1, \dots, nv$).

2.2.8 Résolution numérique des équations du mouvement

Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicules (2.27) et (2.32), nous utilisons la méthode de Newmark. L'équation du mouvement du pont (2.27) à $t + \Delta t$ s'écrit :

$$[M^*]\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + [C^*]\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} + [K^*]\{q\}_{t+\Delta t} + [\phi][M]\{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{P^*\}_{t+\Delta t} \quad (2.35)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés respectivement sont (voir annexe 1)

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{q}\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (2.36)$$

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{q}\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (2.37)$$

Où γ et β sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark, Δt et le pas du temps d'intégration.

Remplaçons les expressions (2.36) et (2.37) dans (2.35), après factorisation on obtient :

$$[S] \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + [C^*] \{\dot{q}^*\}_{t+\Delta t} + [K^*] \{q^*\}_{t+\Delta t} + [M_2^*] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{P^*\}_{t+\Delta t} \quad (2.38)$$

avec

$$[S] = [M^*] + \gamma \Delta t [C^*] + \beta \Delta t^2 [K^*] ; [M_2^*] = [\phi] [M] \quad (2.39)$$

$$\{\dot{q}^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{q}\}_t \quad (2.40)$$

$$\{q^*\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_t \quad (2.41)$$

Multiplions (2.38) par $[S]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} - [U] \{\dot{q}^*\}_{t+\Delta t} - [V] \{q^*\}_{t+\Delta t} - [Z] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} \quad (2.42)$$

avec

$$\{P\}_{t+\Delta t} = [S]^{-1} \{P^*\}_{t+\Delta t} ; [U] = [S]^{-1} [C^*] ; [V] = [S]^{-1} [K^*] ; [Z] = [S]^{-1} [M_2^*] \quad (2.43)$$

L'équation du mouvement de la masse M_v à $t + \Delta t$ s'écrit :

$$[M] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{y}_2\}_{t+\Delta t} + [K] \{y_2\}_{t+\Delta t} - [C] [\phi]^T \{\dot{q}\}_{t+\Delta t} - ([K] [\phi]^T + V [C] [\phi']^T) \{q\}_{t+\Delta t} = [K] \{r\}_{t+\Delta t} + V [C] \{r'\}_{t+\Delta t} \quad (2.44)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les vitesses et les déplacements des véhicules respectivement sont :

$$\{\dot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{\dot{y}_2\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{y}_2\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} \quad (2.45)$$

$$\{y_2\}_{t+\Delta t} = \{y_2\}_t + \Delta t \{\dot{y}_2\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{y}_2\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} \quad (2.46)$$

Remplaçons les expressions (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.44), après factorisation, on obtient :

$$[T] \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{y}_2^*\}_{t+\Delta t} + [K] \{y_2^*\}_{t+\Delta t} - [A] \{\dot{q}\}_{t+\Delta t} - [G] \{q\}_{t+\Delta t} = \{R\}_{t+\Delta t} \quad (2.47)$$

avec

$$[T] = [M] + \gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K] ; [A] = [C] [\phi]^T ; [G] = [K] [\phi]^T + V [C] [\phi']^T \quad (2.48)$$

$$\{R\}_{t+\Delta t} = [K] \{r\}_{t+\Delta t} + V [C] \{r'\}_{t+\Delta t} \quad (2.49)$$

$$\{\dot{y}_2^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{y}_2\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{y}_2\}_t \quad (2.50)$$

$$\{y_2^*\}_{t+\Delta t} = \{y_2\}_t + \Delta t \{\dot{y}_2\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{y}_2\}_t \quad (2.51)$$

Multiplions l'équation (2.47) par $[T]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t} = \{R^*\}_{t+\Delta t} - [T^*]\{\dot{y}_2^*\}_{t+\Delta t} - [U^*]\{y_2^*\}_{t+\Delta t} + [A^*]\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} + [G^*]\{q\}_{t+\Delta t} \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \{R^*\}_{t+\Delta t} &= [T]^{-1}\{R\}_{t+\Delta t}; [T^*] = [T]^{-1}[C]; [U^*] = [T]^{-1}[K]; \\ [A^*] &= [T]^{-1}[A]; [G^*] = [T]^{-1}[G] \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.2.9 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution comprend deux boucles, la première est celle des pas du temps et la seconde correspond aux itérations (figure 2.4). On calcule le vecteur des accélérations généralisées du pont à partir de l'équation (2.42), une fois ce vecteur est calculé, on peut calculer à partir des expressions (2.36) et (2.37), les déplacements et les vitesses généralisés du pont. On calcule les accélérations, vitesses et déplacements verticaux des véhicules par les expressions (2.52), (2.45) et (2.46). Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicules (2.27) et (2.32), nous allons utiliser une approximation de la configuration de la structure au pas du temps courant en fonction de la configuration précédente, puis on fait un test de convergence entre le vecteur $\{\ddot{y}_2\}^{k+1}$ de l'itération $k+1$ et $\{\ddot{y}_2\}^k$ de l'itération k précédente :

$$\left| \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^{k+1} - \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^k \right| / \left| \{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^{k+1} \right| \leq \varepsilon \quad (2.54)$$

Si cette condition est vérifiée, on passe au pas du temps suivant, si non, on passe à l'itération suivante tel que le vecteur $\{\ddot{y}_2\}_{t+\Delta t}^{k+1}$ devient une approximation de l'itération prochaine et on refait le calcul jusqu'à la convergence.

-
- Lecture des données $l, \bar{m}, E, I, M_v, m_v, k_v, g, n, na, \xi_v, \gamma, \beta, \varepsilon$
 - Entrer le nombre de véhicules nv et la vitesse du train V
 - Calcul des pulsations et des modes propres du pont ω_j, ϕ_j
 - Choix du pas du temps Δt
 - Initialiser : $\{q\}_0 = \{\dot{q}\}_0 = \{\ddot{q}\}_0 = \{0\}$ Pont
 - $\{y_2\}_0 = \{\dot{y}_2\}_0 = \{\ddot{y}_2\}_0 = \{0\}$ Véhicules
-

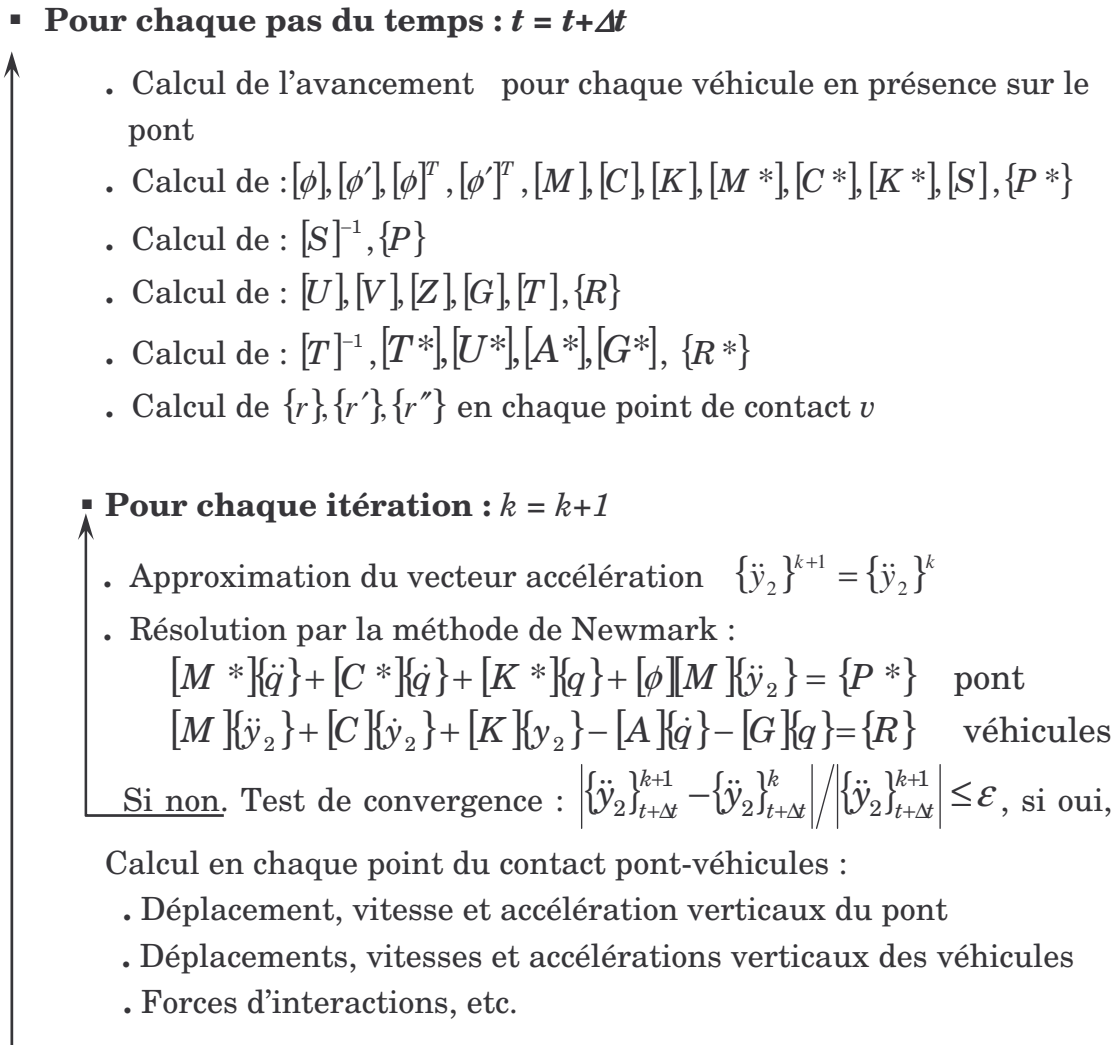


Figure 2.4 : Algorithme de résolution de l'interaction pont-véhicules

2.3 Détermination du bruit de roulement dû au passage du train sur le pont

2.3.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous présentons une étude du bruit rayonné par le passage d'un train sur un pont de chemin de fer, dont le but est d'évaluer sa nuisance sonore. Pour cela, nous résoudrons l'équation d'Helmoltz. Les sources d'excitation sont les accélérations en tous points du pont calculées dans la partie vibratoire. Ces accélérations sont considérées comme des sources monopôlaires distribuées le long du pont.

2.3.2 Equation d'Helmoltz

La production d'un son est définie à partir d'un élément de volume de milieu continu, qui passe d'un état d'équilibre à un état perturbé. Cette perturbation provoque des ondes sonores qui se propagent dans le milieu.

Isolons un espace de volume V , traversé par un débit acoustique $Q(M,t)$, à un point $M(x,y,z)$, et dans lequel existe des sources acoustiques (figure 2.5).

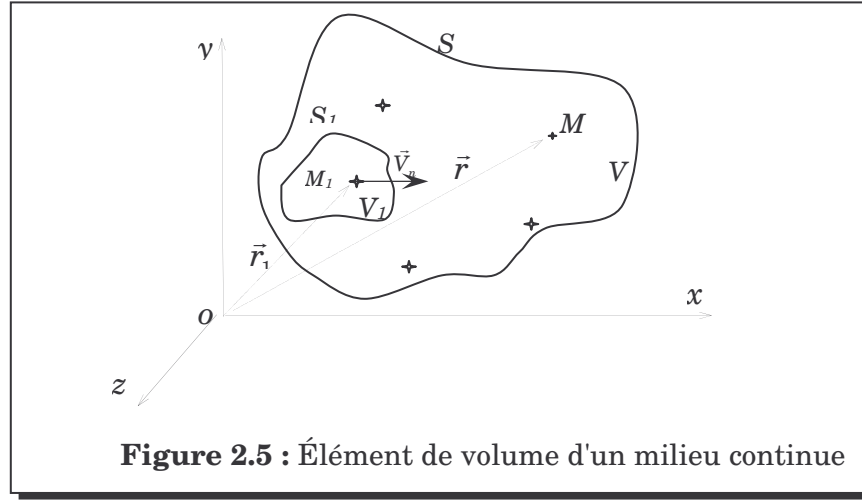


Figure 2.5 : Éléments de volume d'un milieu continu

Dans la figure 2.5, $M_1(x_1, y_1, 0)$ est le point d'émission, $M(x, y, z)$, est le point de réception (d'écoute), $\vec{r}_1$ est la position du point M_1 , $\vec{r}$ est la position du point M , et $\vec{V}_n$ est la vitesse normale vibrante au point M_1 . La variation de la pression acoustique au point M est donnée par l'équation d'Helmoltz suivante [36]:

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = \underbrace{\text{div} \vec{F}}_{\text{Termes sources}} - \frac{\partial Q(M, t)}{\partial t} \quad (2.55)$$

où $\Delta p(M, t)$ est la variation de la pression acoustique au point M , $\vec{F}$ est la variation des forces volumiques, $Q(M, t)$ est la variation du débit acoustique au point M , λ est la vitesse de propagation des ondes sonores (célérité du son), Δ est l'opérateur Laplacien.

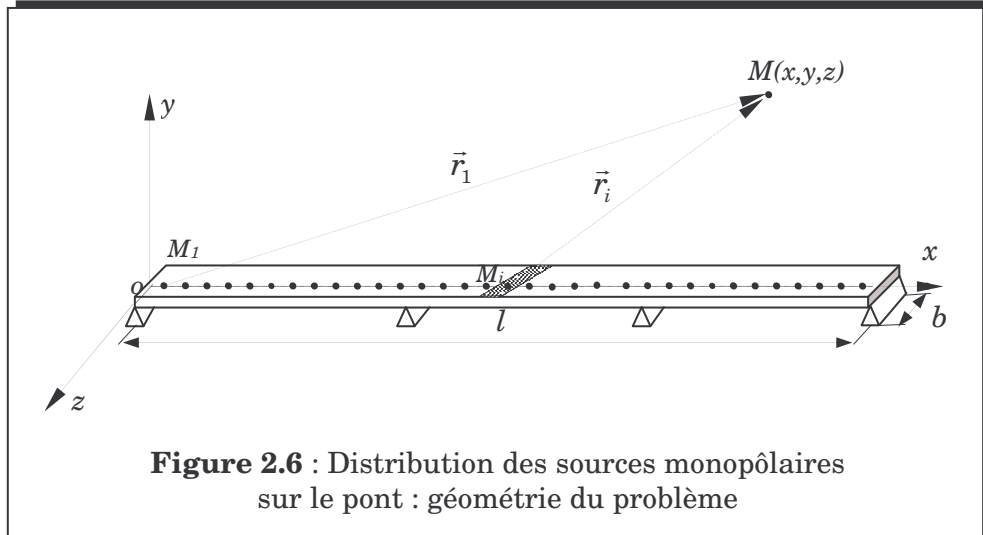
2.3.3 Application pour le cas du pont

On considère les accélérations en chaque point du pont comme des sources monopôlaires (figure 2.6). On suppose que les forces volumiques sont nulles (les termes sont alors introduits via les conditions aux limites sur la surface), l'équation d'Helmoltz devient:

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q(M, t)}{\partial t} \quad (2.56)$$

En prenant dans un premier temps, une seule source placée en M_1 .

$$Q(M, t) = \bar{Q}(M, t) \delta(M - M_1) \quad (2.57)$$



On remplace (2.57) dans (2.56), on obtient :

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial \bar{Q}(M, t)}{\partial t} \delta(M - M_1) \quad (2.58)$$

où $\delta(M - M_1)$ est la distribution volumique de Dirac de la source appliquée en M_1 .

Pour trouver la réponse impulsionnelle liée à l'équation (2.58), on va chercher une fonction $\Delta g(M, t)$ appelée fonction de Green et l'utiliser pour trouver la pression acoustique au point M .

$$\Delta g(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 g(M, t)}{\partial t^2} = \delta(t) \delta(M) \quad (2.59)$$

où $\delta(t) \delta(M)$ est l'excitation unitaire. Faisons la transformée de Fourier de l'équation (2.59), on obtient:

$$TF \left(\Delta g(M, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 g(M, t)}{\partial t^2} \right) = \delta(M) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Delta \tilde{g}(r_1, \omega) + \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \tilde{g}(r_1, \omega) = \delta(M) \quad (2.60)$$

La solution de (2.60) est comme suite [36]:

$$\tilde{g}(r_1, \omega) = -\frac{1}{4\pi r_1} e^{-j\omega \frac{r_1}{\lambda}} \quad (2.61)$$

La transformée inverse de (2.61) donne :

$$g(M, t) = -\frac{1}{4\pi r_1} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \left(t - \frac{r_1}{\lambda} \right)} d\omega \right)}_{=\delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda}\right)} = -\frac{1}{4\pi r_1} \delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda}\right) \quad (2.62)$$

où r_1/λ est le temps de propagation de l'onde sonore du point M_l au point M . La solution de (2.58) est sous la forme suivante [37,38]:

$$p(M, t) = - \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} g\left(t - \frac{r_1}{\lambda} - \tau\right) dV d\tau \quad (2.63)$$

Remplaçons maintenant (2.62) dans (2.63), on obtient:

$$\begin{aligned} p(M, t) &= \frac{1}{4\pi r_1} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} \delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda} - \tau\right) dV d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi r_1} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta\left(t - \frac{r_1}{\lambda} - \tau\right) dS d\tau \\ &= \frac{\rho_0 S_e}{4\pi r_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left(t - \frac{r_1}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air. La génération de (2.64), pour plusieurs sources placées en M_i donne :

$$p(M, t) = \frac{\rho_0 S_e}{4\pi} \sum_{i=1}^{ns} \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left(t - \frac{r_i}{\lambda}\right) \quad (2.65)$$

La taille de la surface élémentaire S_e de chaque source acoustique dépend du nombre de point de discrétisation acoustique ns , choisi pour mailler la longueur du pont l : $S_e = bl/ns$, où b représente la largeur du pont. La distance entre les points M et M_i est :

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2} \quad (2.66)$$

2.4 Exemple numérique de validation

Dans cet exemple, nous étudions le comportement dynamique d'une poutre sur deux appuis simples (figure 2.7) sous l'effet d'un véhicule mobile à un degré de liberté. On compare les résultats obtenus avec ceux de Yang et Yau [12].

Données de la poutre	Données du véhicule
$l = 25$ m	$M_v = 5750$ kg
$\bar{m} = 2303$ kg/m	$C_v = 0$
$E = 2.87 \times 10^9$ N/m ²	$k_v = 1.595 \times 10^6$ N/m
$I = 2.9$ m ⁴	$V = 100$ km/h

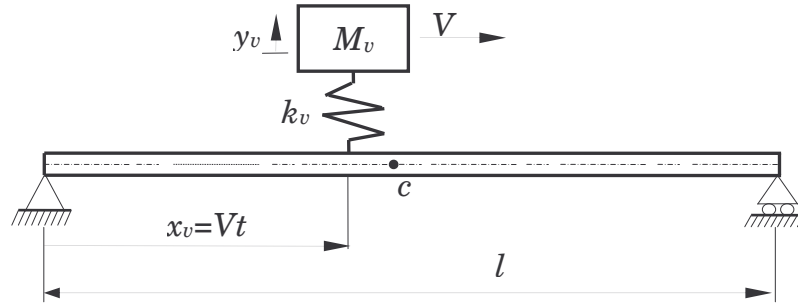


Figure 2.7 : Véhicule mobile avec un degré de liberté

Les figures 2.8 et 2.9, représentent respectivement le déplacement et l'accélération verticaux au centre c de la poutre en fonction du temps de parcours. Sur les figures 2.10 et 2.11, on représente le déplacement et l'accélération verticaux du véhicule (masse M_v) en fonction du temps. On remarque que les résultats obtenus à partir de la présente étude sont en excellente concordance avec ceux obtenus par Yang et Yau [12].

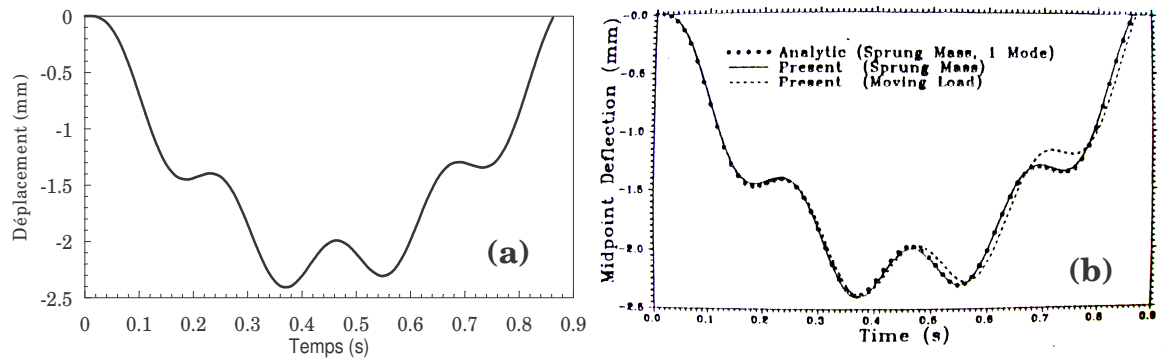


Figure 2.8 : Variation du déplacement vertical au milieu de la poutre en fonction du temps, (a) : notre étude, (b) : référence [12]

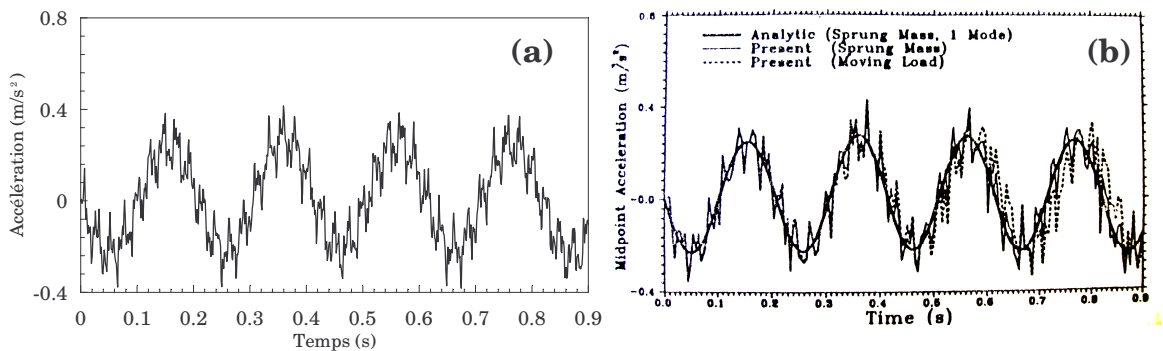


Figure 2.9: Variation de l'accélération verticale au milieu de la poutre en fonction du temps, (a) : notre étude, (b) : référence [12]

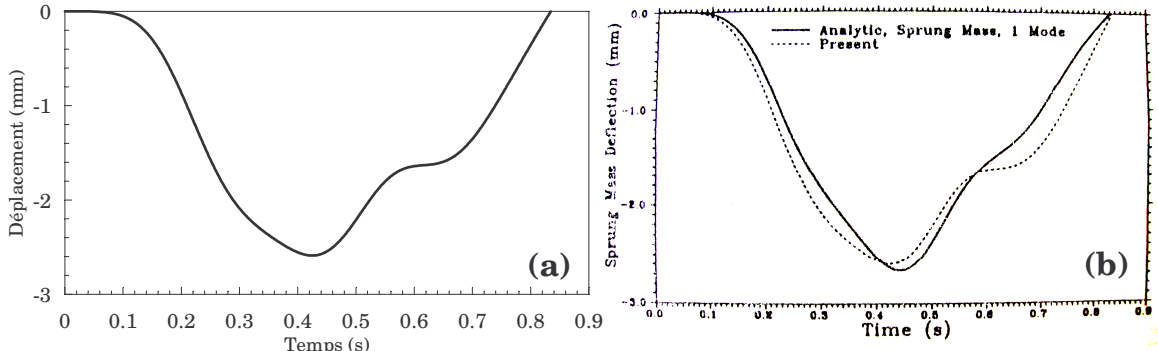


Figure 2.10 : Déplacement vertical de la masse M_v , (a) : notre étude, (b) : référence [12]

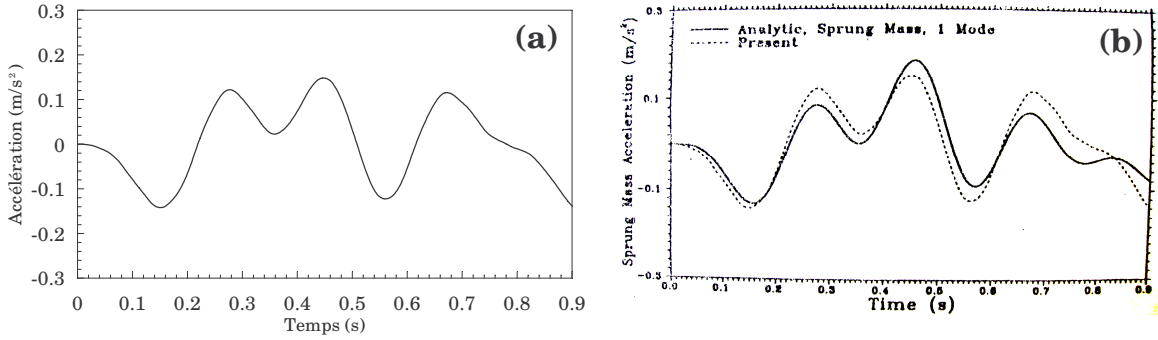
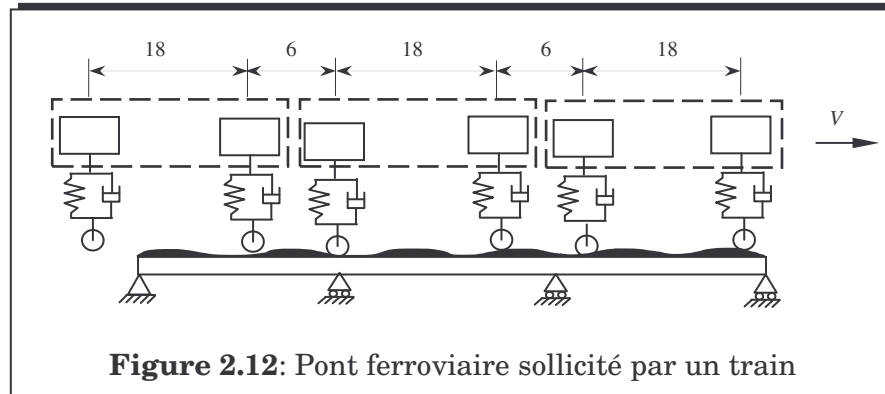


Figure 2.11 : Accélération verticale de la masse M_v , (a) : notre étude, (b) : référence [12]

2.5 Application au cas d'un pont ferroviaire

Dans cet exemple, nous étudions l'influence de l'amortissement, du nombre d'appuis intermédiaires et de l'espacement entre eux, du nombre de wagons, des irrégularités de la voie de roulement et de la vitesse de roulement sur le comportement dynamique du pont et du train ainsi que sur les forces d'interactions. Nous calculons la pression acoustique rayonnée par le passage du train à un point d'écoute M . On a choisi un train de trois wagons (six véhicules) à espacement régulier non uniforme et un pont avec deux appuis intermédiaires (voir figure 2.12). Les caractéristiques du pont sont : $l = 60$ m, $\bar{m} = 34088$ kg/m, $E = 29.43 \times 10^9$ N/m², $I = 3.81$ m⁴, $\xi_j = 5$ %. On a choisi le nombre de point de discrétisation en fréquence $N = 180$ et une rail en bon état ($A_r = 10^{-8}$). La rigidité des appuis intermédiaires est $k = 10^{11}$ N/m. Les caractéristiques de chaque véhicule mobile sont : $M_v = 17600$ kg, $m_v = 4400$ kg, $k_v = 9.12 \times 10^6$ N/m, $c_v = 8.6 \times 10^4$ Ns/m ($\xi_v = 12.5$ %) [12]. Le programme élaboré en langage FORTRAN permet la résolution des équations du mouvement pont-train, d'une manière découplée, en utilisant l'algorithme de l'accélération moyenne de Newmark ($\gamma = 0.5$ et $\beta = 0.25$). Ce schéma est inconditionnellement stable. Le pas du temps d'intégration numérique dépend de la vitesse de passage du train ($\Delta t = \Delta x / V$). Le pas de discrétisation spatial est $\Delta x = 0.05$ m. La convergence des résultats dépend du nombre de modes, des conditions limites du pont et du nombre d'appuis intermédiaires et de leurs rigidités.

Pour un pont avec deux appuis intermédiaires, la convergence est obtenue pour six modes de vibration.



Les pulsations propres du pont sont calculées par: $\omega_{p,i} = \gamma_i^2 \sqrt{EI / ml_1^4}$, où l_1 est la longueur de la travée centrale, γ_i est un paramètre sans dimension qui dépend des conditions aux limites, du nombre de modes et d'appuis intermédiaires. Le tableau 1 montre les six premières pulsations propres du pont pour $na = 0, 1$ et 2 .

$na = 0$			$na = 1$		$na = 2$	
Mode	γ	$\omega_{p,i}$	γ	$\omega_{p,i}$	γ	$\omega_{p,i}$
1	3,14	4,97	3,14	19,89	3,14	44,69
2	6,28	19,88	3,92	31,07	3,55	57,27
3	9,42	44,75	6,28	79,55	4,29	83,59
4	12,57	79,60	7,06	100,67	4,71	100,56
5	15,71	124,33	9,42	178,97	6,70	203,65
6	18,85	179	10,21	210,07	7,43	249,92

Tableau 1 : Pulsations propres du pont

Sur la base de l'expression (2.10), des irrégularités aléatoires du rail, nous présentons sur la figure 2.13, le profil aléatoire de la voie de roulement.

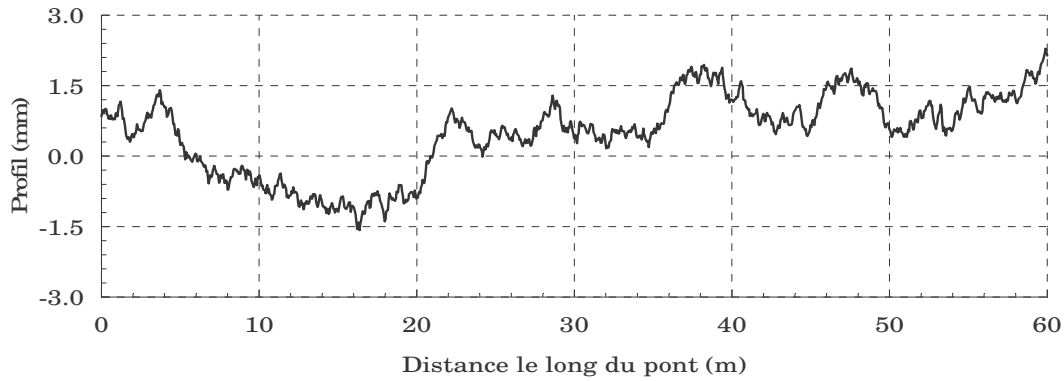


Figure 2.13 : Profil des irrégularités de la voie de roulement générée par une densité spectrale de puissance

2.5.1 Influence des irrégularités de la voie de roulement

Les figures 2.14 a et b, montrent l'influence des irrégularités de la voie de roulement sur la force d'interaction pont-véhicule 1. On constate que pour une voie sans irrégularités (figure 2.14a), la variation de l'amplitude de la force d'interaction est très faible (d'environ 175 N), en comparaison avec celle d'une voie de roulement avec irrégularités (figure 2.14b), où cette variation est très importante (d'environ 45000 N).

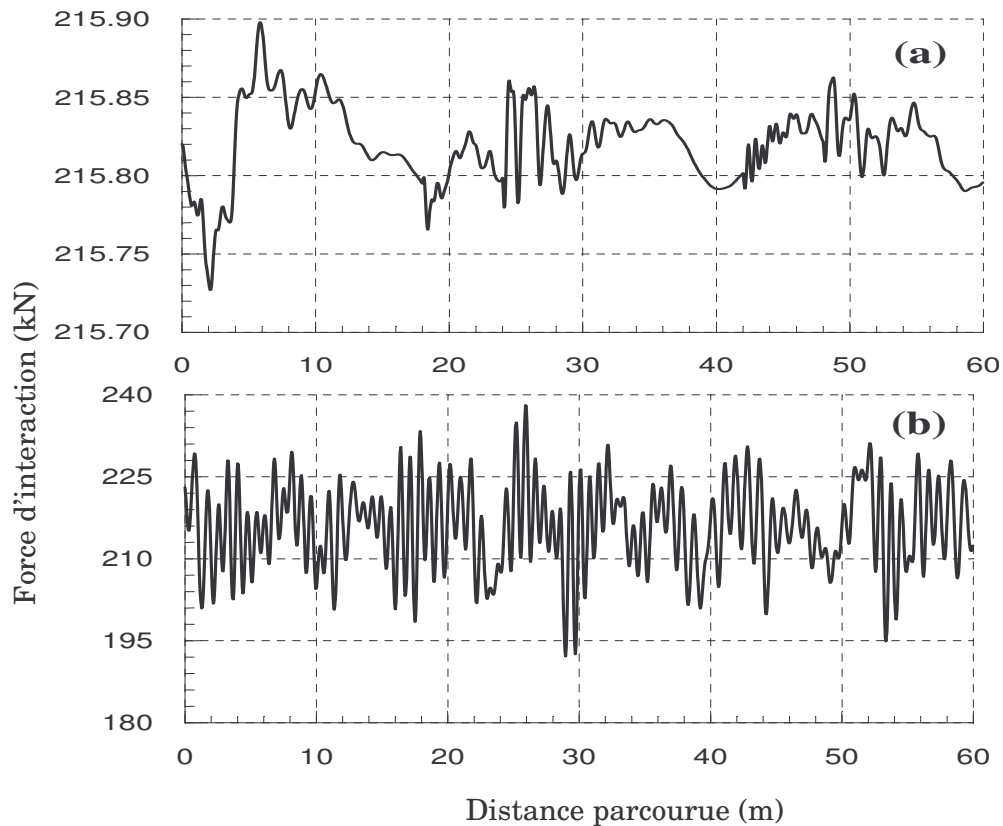


Figure 2.14 : Influence des irrégularités de la voie de roulement sur la force d'interaction pont-véhicule 1, $V = 20$ m/s, (a) : sans irrégularités, (b) : avec irrégularités

Chapitre 4

Comportement vibroacoustique d'un pont de chaussée multi travées sollicité par un véhicule mobile

4.1 Introduction

Le phénomène de l'interaction dynamique pont-véhicule, lors du passage d'un véhicule sur un pont, est très complexe car plusieurs facteurs entre en jeu. Les facteurs importants intervenant dans l'interaction dynamique pont-véhicule qu'on doit les tenir compte lors de la modélisation sont : la structure du pont, le véhicule comme source d'excitation et les irrégularités de la chaussée comme interface entre le véhicule et le pont.

Dans ce chapitre, le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope, multi-travées. Le véhicule est modélisé par un système dynamique H20-44 à sept (07) degrés de liberté conformément à la norme AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials)[43]. Les irrégularités de la chaussée sont modélisées par une fonction aléatoire. La méthode modale et la méthode d'intégration numérique de Newmark sont également utilisées pour la résolution des équations du mouvement. Nous utilisons un algorithme de résolution des équations de mouvement pont-véhicule d'une manière découplé et selon un calcul itératif. La pression acoustique rayonnée par le pont, due au passage du véhicule est obtenue en résolvant l'équation d'Elmoltz avec comme source d'excitations, les accélérations verticales sur toute la chaussée du pont. Ces accélérations sont considérées comme des monopôles. Deux exemples numériques sont présentés et validés à la fin de ce chapitre.

4.2 Nature des vibrations générées sur les ponts par le passage des véhicules

4.2.1 Phénomène de vibration

Considérons un véhicule qui circule à vitesse constante v_x sur une chaussée horizontale parfaitement lisse d'un pont. À l'approche du pont, le véhicule exerce sous ces pneus une force constante qui correspond à ça charge statique. Dès l'entré du véhicule sur le pont et à chaque instant t , le véhicule se trouve à la position $x = v_x t$ le long du pont ce qui provoque la déformation du pont et la modification du profil de la chaussée. En prenant l'hypothèse que le véhicule reste en contact permanent avec le pont, les déplacements relatifs des extrémités des ressorts, qui modélisent la suspension du véhicule, changent et par conséquent les amplitudes des forces d'interactions sous les pneus

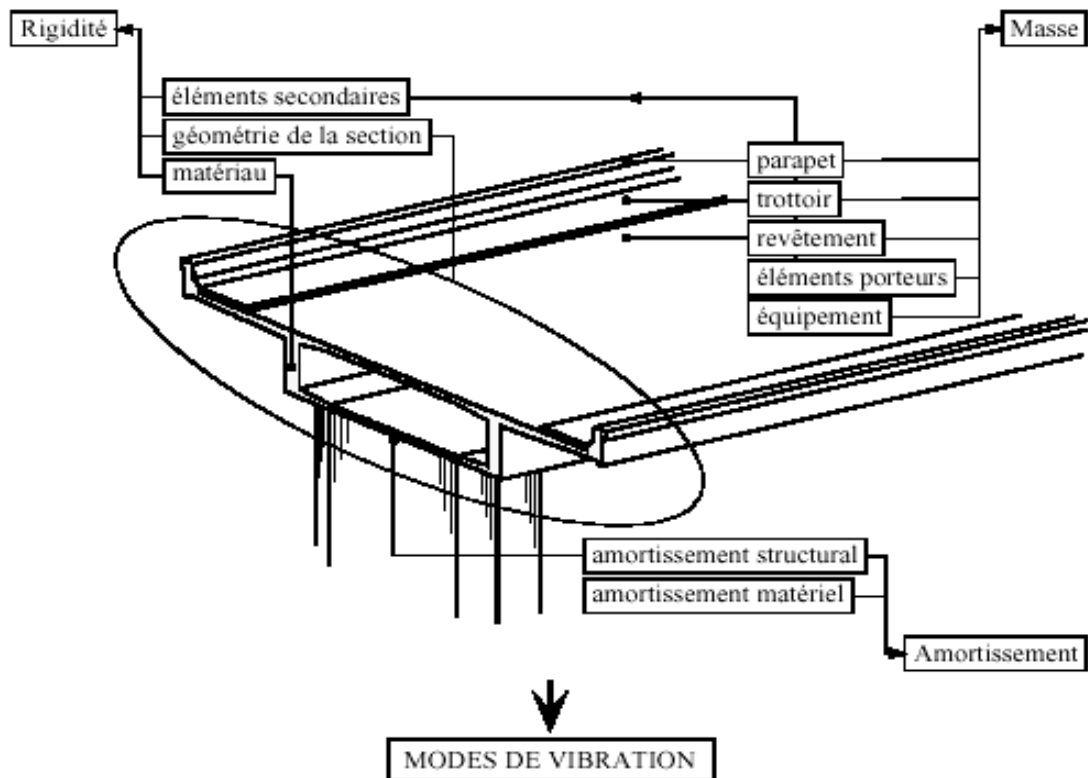
changent aussi. En plus des forces élastiques, le pont est sollicité en vibration par les forces d'inerties et d'amortissement de ce dernier. Le mouvement vertical du pont et le profil de la chaussée influent sur le mouvement du véhicule à cause des suspensions qui subissent à nouveau des déplacements relatifs de leurs extrémités. La configuration d'équilibre du véhicule amène une variation de l'intensité des charges appliquées, perturbant à nouveau l'équilibre du pont. Ce phénomène d'interaction dynamique se poursuit tout au long du parcours du véhicule jusqu'à sa sortie complète du pont. Après le passage du véhicule, le pont retrouve peu à peu sa position de repos à cause des forces d'amortissement.

4.2.2 Le pont

Chaque pont a un comportement dynamique et statique spécifique à cause de sa géométrie particulière. Les principales caractéristiques d'un pont sont (figure 4.1): la masse, la rigidité et l'amortissement. La masse est un facteur important pour calculer les fréquences de vibration d'un pont. Elle comporte tous les équipements de ce dernier.

Le type de matériau, les dimensions et le type de section déterminent la rigidité du pont. Les ponts dont la section est formée d'un caisson, assurent une plus grande rigidité en flexion transversale et en torsion. Les ponts composés de poutres indépendantes ont une rigidité faible et sont sensibles en vibration transversale [44].

L'amortissement caractérise la dissipation de l'énergie lors des vibrations du pont. On distingue l'amortissement matériel et l'amortissement structural. L'amortissement matériel caractérise la dissipation de l'énergie dans le matériau au niveau moléculaire. L'amortissement structural correspond à la dissipation de l'énergie aux interfaces entre les parties distinctes du pont (les joints, les appuis, les liaisons, etc.). Il est donc de nature frictionnel. La méthode la plus utilisée pour déterminer l'amortissement, dans le domaine des ponts, est celle de la diminution des vibrations libres [43] qui permet d'évaluer le décrétement logarithmique. Cette approche admet que l'amortissement global est essentiellement de type *visqueux*, c'est-à-dire que l'amplitude du mouvement diminue de façon exponentielle avec le nombre de cycles. L'amortissement diminue les oscillations surtout en hautes fréquences.



4.2.3 Le profil de la chaussée

Le profil de la chaussée est l'interface entre le véhicule mobile et le pont. C'est un élément de grande importance, car il provoque les oscillations du véhicule mobile, ce qui active les forces d'inertie et d'amortissement, en augmentant sensiblement les forces d'interaction pont-véhicules. On outre, les irrégularités de la route provoquent le bruit routier.

On distingue le profil statique qui représente les irrégularités de la chaussée en fonction de la position et le profil dynamique qui correspond aux déflexions causées par les charges appliquées sur le pont. Le profil statique est constitué de : les dénivellations (sauts) aux appuis, la rugosité du revêtement, les défauts d'alignement (discontinuités) des travées, les tassements d'appuis, les déformées dues au fluage et les contre-flèches non compensées (figure 4.2). C'est un processus aléatoire.

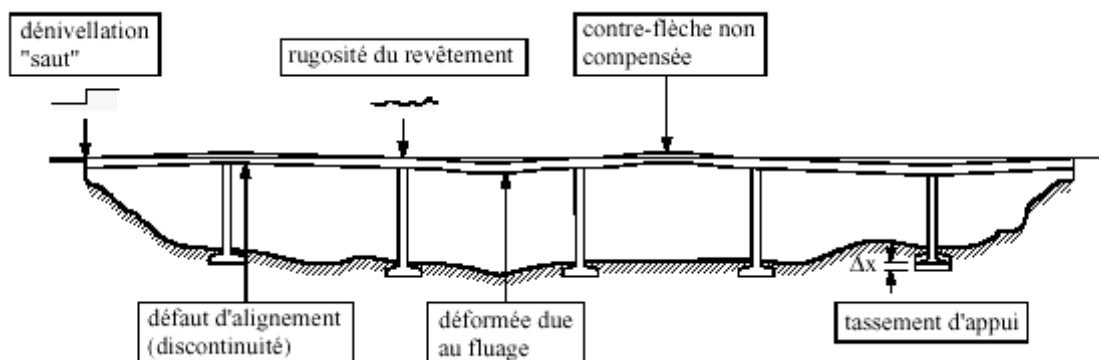


Figure 4.2 : Profil statique d'un pont

4.2.4 Les véhicules

Lors de l'étude du comportement dynamique des ponts de chaussée, les poids lourds (camions) sont les véhicules les plus utilisés à cause de leur masse élevée. On distingue plusieurs modèles de camions. Chaque modèle a une géométrie particulière.

La suspension d'un camion est caractérisée par sa rigidité et son amortissement. On distingue deux systèmes de suspensions : les systèmes pneumatiques et les systèmes composés de lames d'acier. Les suspensions à lames d'acier sont plus répandues, mais la tendance actuelle est plutôt favorable aux systèmes pneumatiques qui sont opérationnels pour toutes intensités de l'amplitude des vibrations [44].

Le pneu est caractérisé par le nombre et la disposition des couches de caoutchouc ainsi que la pression d'air de gonflage, ce qui influe sur leur rigidité et amortissement et par conséquent sur les vibrations du véhicule.

Quatre types d'oscillations caractérisent le mouvement d'un véhicule :

- Le bondissement (pompage) : correspond au mouvement vertical de la masse du véhicule.
- Le tangage : c'est le mouvement d'un véhicule autour de son axe transversal.
- Le roulis : c'est le balancement du véhicule autour de son axe longitudinal.
- Le sauttillement : caractérise le mouvement vertical des essieux du véhicule.

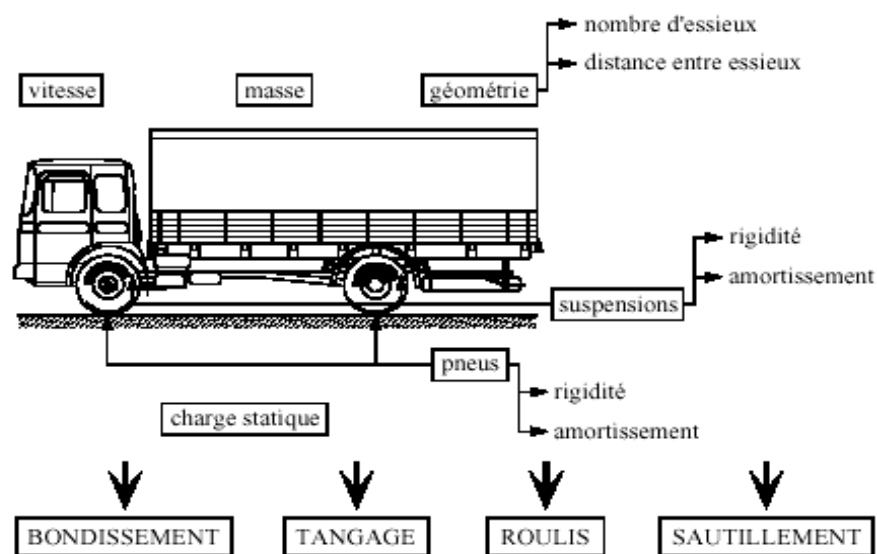


Figure 4.3 : Eléments d'un véhicule

4.2.5 Interaction des éléments contribuant au phénomène de vibration

Les paramètres qui sont décrits dans les paragraphes précédents ont non seulement une influence directe sur les vibrations du pont lors du passage du véhicule, mais ont aussi une interaction avec d'autres facteurs.

La variation du rapport entre la masse du véhicule et celle du pont fait varier les fréquences de vibration du pont, car la distribution des masses du véhicule sur le pont varie en fonction du temps. Ce rapport des masses dépend aussi du rapport de fréquences entre les fréquences du véhicule et la fréquence fondamentale du pont.

Lorsqu'une force harmonique sollicite un système, on observe de grandes amplitudes de vibrations en cas de résonance. Dans le cas d'un pont, on parle du phénomène de quasi-résonance, car les vibrations forcées ne durent pas suffisamment pour que la résonance se développe.

L'influence de la vitesse de roulement du véhicule est indissociable de l'espacement entre les essieux du véhicule et du profil de la chaussée. La vitesse et l'espacement entre les essieux déterminent les fréquences de passage du véhicule. Le mouvement vertical du véhicule est beaucoup plus influencé par la vitesse et l'état de la chaussée [44].

4.3 Modélisation

Afin de valider nos résultats, nous allons prendre le même pont et le même modèle de véhicule étudié dans les références [27,28], avec les mêmes hypothèses.

4.3.1 Hypothèses de modélisation

Les hypothèses suivantes constituent la base du développement mathématique.

1. Le pont est modélisé par une plaque rectangulaire orthotrope, multi-travées, continue sur les appuis, simplement appuyée en $x = 0$ et $x = l$ et libre en $y = 0$ et $y = b$.
2. Le pont a un comportement élastique linéaire et les effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation) sont négligés.
3. Les appuis intermédiaires sont linéaires, rigides et orthogonaux aux bords libres du pont.

4. Le véhicule (camion), est modélisé par un modèle dynamique H20-44 à sept (07) degrés de liberté conformément à la norme AASHTO.
5. Les pneus du véhicule demeurent en contact permanent avec la chaussée.
6. Le glissement relatif du corps rigide du camion par rapport aux essieux est considéré négligeable.
7. Les rotations (tangage et roulis) du véhicule sont considérées petites.
8. Le comportement des amortisseurs du véhicule est linéaire
9. Comme les dimensions (longueur et largeur) du pont sont beaucoup plus grandes par rapport à son épaisseur, la théorie des plaques minces est utilisée.

4.3.2 Modélisation du pont

Dans le cas des ponts dont la section est formée d'un caisson, la méthode des éléments finis convient le mieux pour mailler correctement la structure du pont. Le logiciel d'éléments finis "CLEF", développé par le GIREF (Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Eléments Finis) de l'Université Laval, peut effectué des simulations de passage des véhicules sur les ponts [44].

Dans cette étude, le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope à trois travées (figure 4.4). Sur la base des hypothèses (1), (2) et (9), l'équation du mouvement du pont peut être sous la forme suivante [45] :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{\text{int}} \delta(x - x_k(t), y - y_k(t)) \quad (4.1)$$

Dans l'équation (4.1), $D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction x , $D_y = E_y h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction y , $H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$ est la rigidité de flexion équivalente, c est le coefficient d'amortissement du pont, F_{pk}^{int} est la force d'interaction entre la $k^{\text{ème}}$ roue du véhicule et le pont, $(x_k(t), y_k(t))$ est la position de la $k^{\text{ème}}$ force d'interaction sur le pont, ν_{xy} et ν_{yx} sont les coefficients de Poisson selon les directions x et y respectivement, $D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$ est la rigidité de torsion, G_{xy} est le module de cisaillement, E_x et E_y sont les modules d'Young selon les directions x et y respectivement.

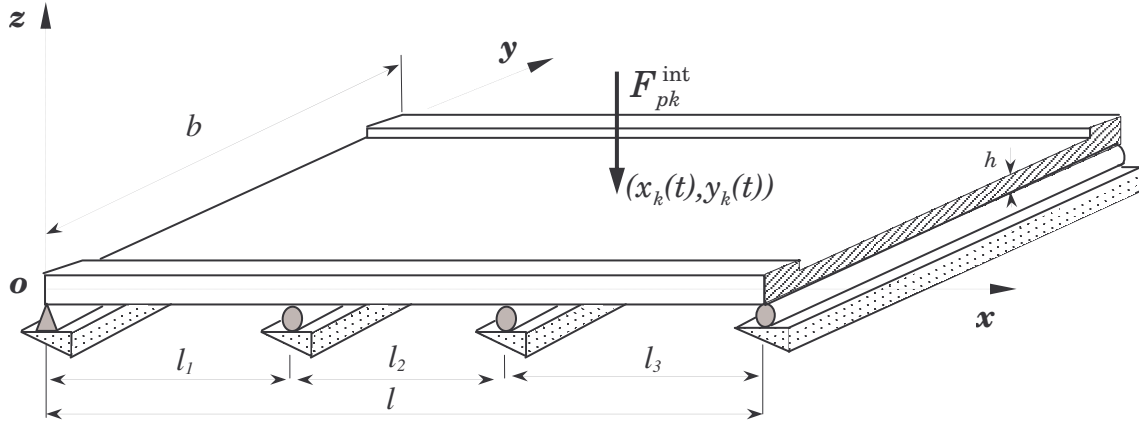


Figure 4.4 : Pont modélisé par une plaque mince orthotrope, à trois travées, continue aux appuis

Si le véhicule se déplace le long du pont, les $y_k(t)$ sont constantes. Comme la vitesse de roulement est considérée constante, donc $x_k(t) = v_x t_k$.

La résolution de l'équation du mouvement (4.1) est menée par la méthode de superposition modale.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (4.2)$$

Où $\phi_{ij}(x, y)$ sont les déformées propres d'une plaque mince orthotrope, multi-travées auxquelles sont associées les pulsations propres ω_{ij} .

On procédant de la même manière que dans le chapitre 3 (paragraphe 3.5.1), en remplaçant l'expression (4.2) dans l'équation (4.1), on obtient :

$$M_{ij} \ddot{q}_{ij} + C_{ij} \dot{q}_{ij} + K_{ij} q_{ij} = F_{ij} \quad (4.3)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \iint_S \bar{m} \phi_{ij}^2(x, y) ds \\ C_{ij} &= \iint_S c \phi_{ij}^2(x, y) ds = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} \\ K_{ij} &= \iint_S \left(D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{ij} ds = M_{ij} \omega_{ij}^2 \\ \xi_{ij} &= c / 2\bar{m} \omega_{ij} \\ F_{ij} &= - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{\text{int}} \delta(x - x_k, y - y_k) \phi_{ij}(x, y) ds \\ &= - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{\text{int}}(x_k, y_k) \phi_{ij}(x_k, y_k) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3.3 Fréquences et déformées propres du pont

L'analyse des vibrations libres d'un pont de chaussée est la première étape essentielle pour étudier les vibrations forcées de ce pont. Cette analyse vibratoire permet de déterminer les fréquences et les déformées propres de vibrations. Pour déterminer les fréquences et les déformées propres du pont, considérons l'équation conservative du mouvement en vibration libre de ce dernier.

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (4.5)$$

En vibration libre, le déplacement vertical du pont peut s'exprimer par [28]:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_{ij}(x, y) e^{j\omega_{ij}t} \quad (4.6)$$

ω_{ij} et $\phi_{ij}(x, y)$ sont respectivement les pulsations et les déformées propres du pont multi-travées, a_{ij} sont les amplitudes modales, t est le temps.

On remplace l'expression (4.6) dans l'équation (4.5), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left[-\bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij}(x, y) + D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right] e^{j\omega_{ij}t} = 0$$

Pour déterminer les déformées propres du pont, on doit résoudre donc l'équation spatiale suivante:

$$D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij}(x, y) = 0 \quad (4.7)$$

Plusieurs auteurs [27,28] utilisent la méthode variationnelle de Rayleigh-Ritz pour déterminer les fréquences et les déformées propres du pont en employant les déformées propres des poutres comme fonctions d'approximation. Ces auteurs décomposent $\phi_{ij}(x, y)$ comme étant le produit de deux fonctions admissibles $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(y)$ qui sont respectivement : les déformées propres d'une poutre continue en appuis simples et les déformées propres d'une poutre libre. Cependant, des centaines d'intégrales doivent être évalué pour calculer les matrices de masse et de rigidité du pont, pour résoudre le problème aux fréquences et déformées propres. Dans la présente étude, on considère que selon la direction x , les déformées propres du pont sont celles d'une poutre continue en appuis simples et selon la direction y , les déformées propres sont présentées par une fonction $h_{ij}(y)$ vérifiant les conditions aux limites d'une plaque aux bords libres $y = 0$ et $y = b$ du pont comme dans [40] :

$$\phi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) h_{ij}(y) \quad (4.8)$$

Nous prenons le cas d'un pont à trois travées. Les déformées propres selon x sont ceux d'une poutre à trois travées qui sont (voire annexe 4) :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} A_{1i} \left(\sin k_i x - \frac{\sin k_i l_1}{\operatorname{sh} k_i l_1} \operatorname{sh} k_i x \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_{2i} \left(\sin k_i (x - l_1) - \frac{\sin k_i l_2}{\operatorname{sh} k_i l_2} \operatorname{sh} k_i (x - l_1) \right) + B_{2i} (\cos k_i (x - l_1) \\ \quad - \operatorname{ch} k_i (x - l_1) + \frac{\operatorname{ch} k_i l_2 - \cos k_i l_2}{\operatorname{sh} k_i l_2} \operatorname{sh} k_i (x - l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_{3i} \left(\sin k_i (l - x) - \frac{\sin k_i l_3}{\operatorname{sh} k_i l_3} \operatorname{sh} k_i (l - x) \right), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (4.9)$$

L'équation (4.7) doit être vérifiée quelque soit x , mais sa résolution pour chaque valeur de x est pratiquement impossible, pour cette raison, nous proposons de la vérifier au sens de la moyenne, ce qui représente l'originalité principale que nous introduisons dans ce type de problème. Remplaçons donc l'expression (4.8) dans l'équation (4.7), puis multiplions par $\varphi_i(x)$ et intégrons sur la longueur du pont, on obtient :

$$D_y \frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} \int_0^l \varphi_i^2 dx + 2H \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} \int_0^l \varphi_i'' \varphi_i dx + (D_x k_i^4 - \overline{m} \omega_{ij}^2) h_{ij} \int_0^l \varphi_i^2 dx = 0 \quad (4.10)$$

Divisons (4.10) par $D_y \int_0^l \varphi_i^2 dx$, on obtient :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} + \frac{2H}{D_y} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} \frac{\int_0^l \varphi_i'' \varphi_i dx}{\int_0^l \varphi_i^2 dx} + \left(\frac{D_x k_i^4 - \overline{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) h_{ij} = 0 \quad (4.11)$$

La dérivée deuxième des déformées propres (4.9) est :

$$\varphi_i''(x) = \begin{cases} -k_i^2 A_{1i} \left(\sin k_i x + \frac{\sin k_i l_1}{\operatorname{sh} k_i l_1} \operatorname{sh} k_i x \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ -k_i^2 A_{2i} \left(\sin k_i (x - l_1) + \frac{\sin k_i l_2}{\operatorname{sh} k_i l_2} \operatorname{sh} k_i (x - l_1) \right) - k_i^2 B_{2i} (\cos k_i (x - l_1) \\ \quad + \operatorname{ch} k_i (x - l_1) - \frac{\operatorname{ch} k_i l_2 - \cos k_i l_2}{\operatorname{sh} k_i l_2} \operatorname{sh} k_i (x - l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ -k_i^2 A_{3i} \left(\sin k_i (l - x) + \frac{\sin k_i l_3}{\operatorname{sh} k_i l_3} \operatorname{sh} k_i (l - x) \right), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (4.12)$$

De (4.9) et (4.12), on remarque que $\varphi_i''(x) = -k_i^2 \psi_i(x)$. L'équation (4.11) devient alors :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - \frac{2Hk_{1i}^2}{D_y} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left(\frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) h_{ij} = 0 \quad (4.13)$$

Avec :

$$k_{1i} = k_i \sqrt{\int_0^l \psi_i \varphi_i dx / \int_0^l \varphi_i^2 dx} \quad (4.14)$$

La forme générale de la solution de l'équation différentielle (4.13) est :

$$h_{ij}(y) = A_{ij} e^{s_{ij} y} \quad (4.15)$$

On remplace (4.15) dans (4.13), on obtient

$$s_{ij}^4 - \frac{2Hk_{1i}^2}{D_y} s_{ij}^2 + \frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} = 0 \quad (4.16)$$

Les solutions de (4.16) sont :

$$\begin{aligned} s_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{Hk_{1i}^2 + \sqrt{H^2 k_{1i}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} = \pm r_{1ij} \\ s_2 &= \pm j \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{Hk_{1i}^2 - \sqrt{H^2 k_{1i}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} = \pm jr_{2ij} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les nombres d'ondes r_{1ij} et r_{2ij} sont liés par les pulsations ω_{ij} . Afin d'alléger l'écriture, on omet les indices ij dans r_{1ij} et r_{2ij} . Remplaçons (4.17) dans (4.15), nous obtenons (voir chapitre 3, paragraphe 3.4):

$$h_{ij}(y) = C_{ij} \sin r_{2y} + D_{ij} \cos r_{2y} + E_{ij} \sinh r_{1y} + F_{ij} \cosh r_{1y} \quad (4.18)$$

C_{ij} , D_{ij} , E_{ij} et F_{ij} sont des constantes d'intégration. Elles sont déterminées par l'application des conditions aux limites aux bords libres $y = 0$ et $y = b$. Sur ces bords, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls, alors

$$\begin{aligned} D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) + \nu_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0, t) &= 0 \\ - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, 0, t) + (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, 0, t) \right) &= 0 \\ D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b, t) + \nu_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, b, t) &= 0 \\ - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, b, t) + (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, b, t) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

En tenant compte des expressions (4.6) et (4.8), les conditions aux limites (4.19) prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(0) - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(0) &= 0 \\
 D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(0) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(0) &= 0 \\
 D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(b) - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(b) &= 0 \\
 D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(b) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(b) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

En appliquant les conditions aux limites (4.20) à l'expression (4.18), on obtient le système suivant (on omet les indices ij dans r_{1ij} , r_{2ij} , α_{ij} , θ_{ij} , γ_{ij} , et χ_{ij}) :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \theta \\ \gamma & 0 & \chi & 0 \\ \alpha \sin r_2 b & \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{sh} r_1 b & \theta \operatorname{ch} r_1 b \\ \gamma \cos r_2 b & -\gamma \sin r_2 b & \chi \operatorname{ch} r_1 b & \chi \operatorname{sh} r_1 b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ij} \\ D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -D_y r_2^2 - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 \\
 \theta &= D_y r_1^2 - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 \\
 \gamma &= -D_y r_2^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_2 k_{1i}^2 \\
 \chi &= D_y r_1^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_1 k_{1i}^2
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

L'annulation du déterminant de la matrice du système (4.21) permet d'aboutir à l'équation aux fréquences propres suivante.

$$2\alpha\theta\chi(\cos r_2 b \operatorname{ch} r_1 b - 1) + (\theta^2 \gamma^2 - \alpha^2 \chi^2) \sin r_2 b \operatorname{sh} r_1 b = 0 \tag{4.23}$$

Pour chaque valeur de k_i ($i = 1, \dots, n$), on calcul la valeur de k_{1i} et à l'aide du logiciel Mathématique, on détermine les racines r_1 ou r_2 de l'équation aux fréquences (4.23). Les expressions (4.17) permettent de calculer les pulsations ω_{ij} . Pour déterminer les déformées propres du pont, on fait la même chose comme dans le chapitre 3. Donc les déformées propres du pont à trois travées sont :

$$\phi_{ij}(x, y) = \phi_i(x) \{ \sin r_2 y + D_{ij} \cos r_2 y + E_{ij} \operatorname{sh} r_1 y + F_{ij} \operatorname{ch} r_1 y \} \tag{4.24}$$

Les expressions de D_{ij} , E_{ij} et F_{ij} sont présentées dans le chapitre 3.

4.3.4 Modélisation du véhicule mobile

4.3.4.1 Schémas du modèle de véhicule

Afin de décrire fidèlement le mouvement du véhicule, ce dernier est modélisé par un modèle dynamique à sept degrés de liberté (hypothèse 4, figures 4.5 et 4.6). Ce modèle est similaire à celui utilisé par Zhu [27] et Marcheseillo [28]. Le bloc rigide du camion possède trois degrés de liberté qui sont :

z_v : correspond au bondissement

θ_v : correspond au tangage

α_v : correspond au roulis

Le sauttillement et le roulis des essieux de l'avant et de l'arrière sont présentés par quatre degrés de liberté qui sont:

z_1, z_2 : les déplacements verticaux des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

θ_1, θ_2 : les rotations des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

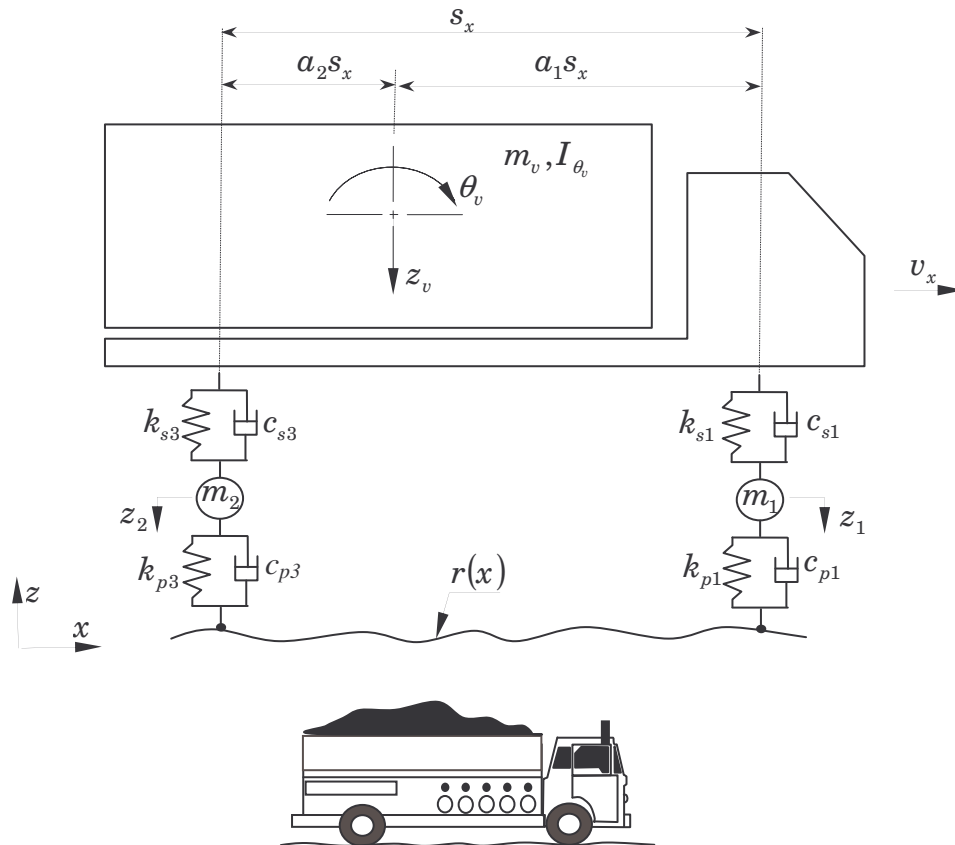


Figure 4.5 : Vue de profil du modèle de véhicule

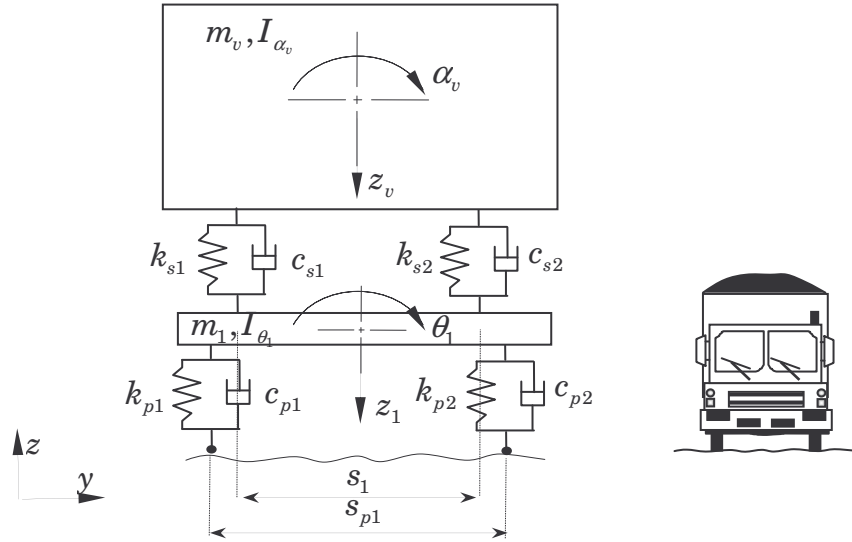


Figure 4.6 : Vue de face avant du modèle de véhicule

Le vecteur des degrés de liberté du véhicule est :

$$\{Z_v\} = \{z_v, \theta_v, \alpha_v, z_1, \theta_1, z_2, \theta_2\}^T \quad (4.25)$$

Avec :

m_1, m_2 : les masses des roues avec les essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

$m_v, I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}$: la masse et les moments d'inertie du bloc rigide du camion

$I_{\theta_1}, I_{\theta_2}$: les moments d'inertie des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

$k_{pi}, i = 1, 2, \dots, 4$: les rigidités dans les pneus

$c_{pi}, i = 1, 2, \dots, 4$: les amortissements dans les pneus

$k_{si}, i = 1, 2, \dots, 4$: les rigidités dans les suspensions

$c_{si}, i = 1, 2, \dots, 4$: les amortissements dans les suspensions

s_{p1}, s_{p2} : les espacements entre les points de contact des pneus de l'avant et de l'arrière respectivement

s_1, s_2 : les espacements entre les essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

4.3.4.2 Schémas d'équilibre dynamique des forces

Les équations du mouvement du modèle de véhicule sont obtenues en appliquant le principe d'équilibre dynamique des forces. Les déplacements verticaux du modèle de véhicule sont calculés à partir de sa position d'équilibre statique. Sur la figure 4.7, nous présentons les forces exercées sur le véhicule.

Pour déterminer les forces d'interaction pont-véhicule, on détermine pour chaque point de contact pont-véhicule, les déplacements des extrémités des ressorts qui modélisent les pneus.

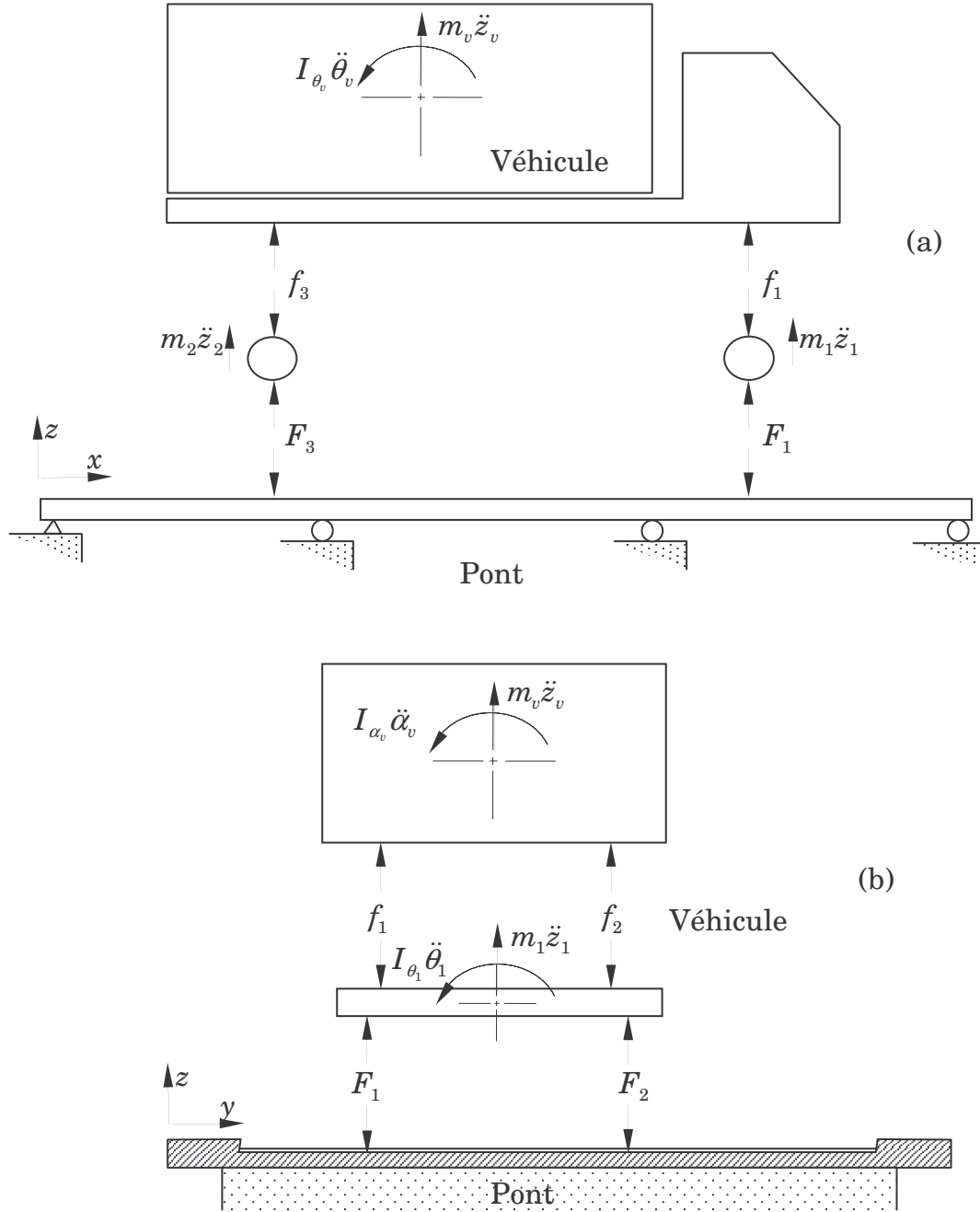


Figure 4.7 : Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments, (a): vue de profil, (b): vue de face avant

Les forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus sont :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= k_{p1} \left(z_1 - \frac{1}{2} s_{p1} \theta_1 - (w_1 + r_1) \right) + c_{p1} \left(\dot{z}_1 - \frac{1}{2} s_{p1} \dot{\theta}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1) \right) \\
 F_2 &= k_{p2} \left(z_1 + \frac{1}{2} s_{p1} \theta_1 - (w_2 + r_2) \right) + c_{p2} \left(\dot{z}_1 + \frac{1}{2} s_{p1} \dot{\theta}_1 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2) \right) \\
 F_3 &= k_{p3} \left(z_2 - \frac{1}{2} s_{p2} \theta_2 - (w_3 + r_3) \right) + c_{p3} \left(\dot{z}_2 - \frac{1}{2} s_{p2} \dot{\theta}_2 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3) \right) \\
 F_4 &= k_{p4} \left(z_2 + \frac{1}{2} s_{p2} \theta_2 - (w_4 + r_4) \right) + c_{p4} \left(\dot{z}_2 + \frac{1}{2} s_{p2} \dot{\theta}_2 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4) \right)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Avec :

$$\dot{w}_i + \dot{r}_i = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{x_i, y_i} + v_x \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right|_{x_i, y_i} \right), i = 1, \dots, 4 \tag{4.27}$$

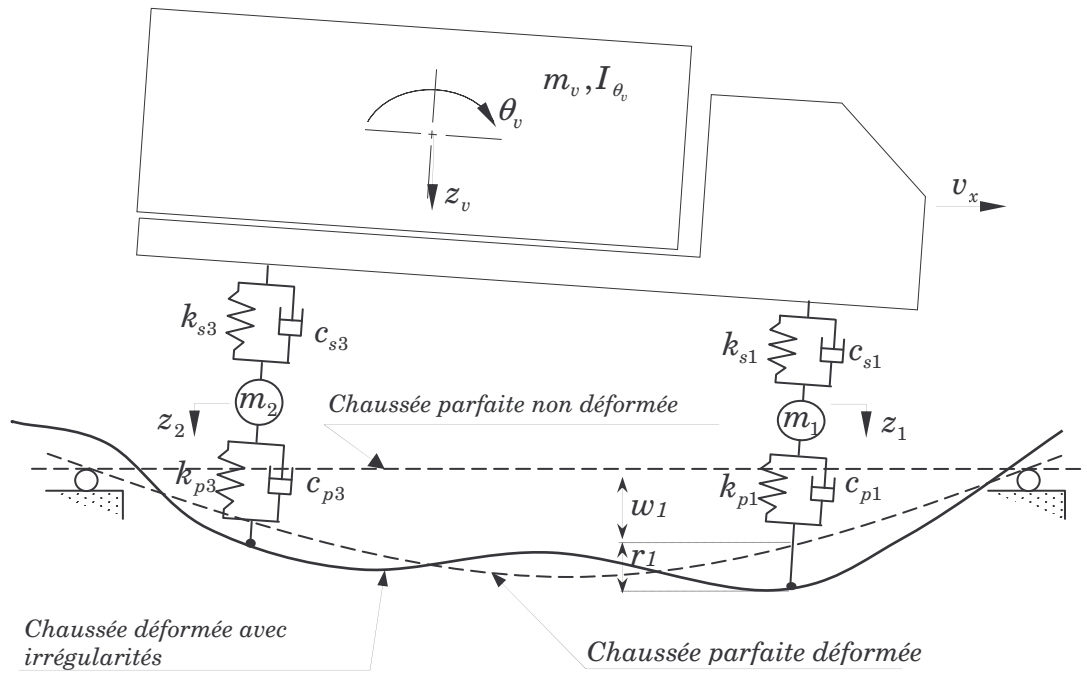


Figure 4.8 : Déformation du point de contact pont-véhicule avec la prise en compte de la rugosité

Les différents termes dans (4.26) sont définis comme suite:

$w_i, i = 1, \dots, 4$: le déplacement vertical du pont au point de contact i
 ($w_i = w(x_i(t), y_i)$)

$r_i, i = 1, \dots, 4$: la rugosité du profil statique du pont au point de contact i
 ($r_i = r(x_i(t))$)

La détermination des déplacements des extrémités des ressorts qui modélisent la suspension du véhicule permet de déterminer les forces dans ces suspensions qui sont :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k_{s1} \left(z_v + a_1 s_x \theta_v - \frac{1}{2} s_1 \alpha_v - z_1 + \frac{1}{2} s_1 \theta_1 \right) + c_{s1} \left(\dot{z}_v + a_1 s_x \dot{\theta}_v - \frac{1}{2} s_1 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_1 + \frac{1}{2} s_1 \dot{\theta}_1 \right) \\
 f_2 &= k_{s2} \left(z_v + a_1 s_x \theta_v + \frac{1}{2} s_1 \alpha_v - z_1 - \frac{1}{2} s_1 \theta_1 \right) + c_{s2} \left(\dot{z}_v + a_1 s_x \dot{\theta}_v + \frac{1}{2} s_1 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_1 - \frac{1}{2} s_1 \dot{\theta}_1 \right) \\
 f_3 &= k_{s3} \left(z_v - a_2 s_x \theta_v - \frac{1}{2} s_2 \alpha_v - z_2 + \frac{1}{2} s_2 \theta_2 \right) + c_{s3} \left(\dot{z}_v - a_2 s_x \dot{\theta}_v - \frac{1}{2} s_2 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_2 + \frac{1}{2} s_2 \dot{\theta}_2 \right) \\
 f_4 &= k_{s4} \left(z_v - a_2 s_x \theta_v + \frac{1}{2} s_2 \alpha_v - z_2 - \frac{1}{2} s_2 \theta_2 \right) + c_{s4} \left(\dot{z}_v - a_2 s_x \dot{\theta}_v + \frac{1}{2} s_2 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_2 - \frac{1}{2} s_2 \dot{\theta}_2 \right)
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le vecteur des forces dues aux effets de la gravité est :

$$\{F_g\} = \{(m_v a_1 + m_1)g/2, (m_v a_1 + m_1)g/2, (m_v a_2 + m_2)g/2, (m_v a_2 + m_2)g/2\}^T \quad (4.29)$$

En rajoutant la contribution statique, le vecteur des forces d'interactions du pont agissant sur le véhicule devient:

$$\{F_p^{int}\} = \{F_g\} + \{F_p\} \quad (4.30)$$

Avec

$$\{F_p\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^T \quad (4.31)$$

4.3.4.3 Equations du mouvement

Les équations du mouvement du modèle de véhicule à sept degrés de liberté sont obtenues en appliquant la loi d'équilibre dynamique des forces ou des moments pour chaque degré de liberté.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } z_v : \quad & m_v \ddot{z}_v + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 \\
 \text{Pour } \theta_v : \quad & I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v + a_1 s_x (f_1 + f_2) - a_2 s_x (f_3 + f_4) = 0 \\
 \text{Pour } \alpha_v : \quad & I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v + \frac{1}{2} s_1 (f_2 - f_1) + \frac{1}{2} s_2 (f_4 - f_3) = 0 \\
 \text{Pour } z_1 : \quad & m_1 \ddot{z}_1 + F_1 + F_2 - f_1 - f_2 = 0 \\
 \text{Pour } \theta_1 : \quad & I_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} s_{p1} (F_2 - F_1) + \frac{1}{2} s_1 (f_1 - f_2) = 0 \\
 \text{Pour } z_2 : \quad & m_2 \ddot{z}_2 + F_3 + F_4 - f_3 - f_4 = 0 \\
 \text{Pour } \theta_2 : \quad & I_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} s_{p1} (F_4 - F_3) + \frac{1}{2} s_2 (f_3 - f_4) = 0
 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Remplaçons les expressions des forces (4.26) et (4.28) dans les équations (4.32), après réarrangement et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_v^{\text{int}}\} \quad (4.33)$$

Où $\{F_v^{\text{int}}\}$ est le vecteur des forces d'interactions appliquées sur le véhicule, $[M_v]$, $[C_v]$ et $[K_v]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité du modèle de véhicule qui sont données dans l'annexe 5.

4.3.5 Modélisation des irrégularités de la voie de roulement

Le profil statique de la voie de roulement en chaque point de contact pont-véhicule est modélisé par une fonction aléatoire notée $r(x)$ (voir chapitre 2, paragraphe 2.2.4) :

$$r(x_i) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right) \frac{2\pi}{L_c}} \cos(\omega_{sk} x_i + \theta_k), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.34)$$

4.3.6 Intégration numérique des équations du mouvement

Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicule, nous utilisons le schéma d'intégration de Newmark (annexe 1). À l'instant $t + \Delta t$, l'équation (4.31) qui régie le mouvement du véhicule s'écrit :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{\text{int}}\}_{t+\Delta t} \quad (4.35)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses respectivement sont :

$$\{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{Z}_v\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (4.36)$$

$$\{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (4.37)$$

γ et β sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark, Δt est le pas du temps d'intégration. Remplaçons les expressions (4.36) et (4.37) dans l'équation (4.35), après factorisation on obtient :

$$[S_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{\text{int}}\}_{t+\Delta t} \quad (4.38)$$

Avec :

$$[S_v] = [M_v] + \gamma \Delta t [C_v] + \beta \Delta t^2 [K_v] \quad (4.39)$$

$$\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (4.40)$$

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (4.41)$$

Multiplions l'équation (4.38) par $[S_v]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{P_v\}_{t+\Delta t} - [U_v]\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} - [V_v]\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} \quad (4.42)$$

Avec :

$$\{P_v\}_{t+\Delta t} = [S_v]^{-1}\{F_v^{\text{int}}\}_{t+\Delta t}; [U_v] = [S_v]^{-1}[C_v]; [V_v] = [S_v]^{-1}[K_v] \quad (4.43)$$

De même, l'équation du mouvement du pont (4.3), à l'instant $t+\Delta t$ s'écrit :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + \omega_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.44)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés du pont, à l'instant $t+\Delta t$ sont:

$$q_{ij}^{(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.45)$$

$$\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \gamma \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.46)$$

Remplaçons les expressions (4.45) et (4.46) dans l'équation (4.44), on obtient :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \left(\frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} - 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} - \omega_{ij}^2 q_{ij}^{*(t+\Delta t)} \right) / \left(1 + 2\Delta t \xi_{ij}\omega_{ij} + \beta \Delta t^2 \omega_{ij}^2 \right) \quad (4.47)$$

Avec :

$$\begin{aligned} q_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)} \\ \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

4.3.7 Calcul de la pression acoustique rayonnée par le pont

Le calcul de la pression acoustique rayonnée par le pont, lors du passage du véhicule, requiert la connaissance de la distribution des vitesses normales $\vec{v}_n$, vibrantes sur toute la surface du pont. La longueur du pont est divisée en N_x intervalles égales ($l = N_x \Delta x$), sa largeur est divisée en N_y intervalles égales ($b = N_y \Delta y$). La surface élémentaires d'une source de bruit est : $S_e = \Delta x \Delta y$. Donc le nombre de sources est $N_x \times N_y$. On considère les accélérations en chaque point du pont, calculées dans la partie vibratoire, comme des sources monopôlaires, la pression acoustique $p(x, y, z, t)$ à un point dans l'espace (figure 4.9), est donnée par (voir chapitre 2, paragraphe 2.3) :

$$p(x, y, z, t) = \frac{\rho_0 S_e}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left(x_i, y_j, t - \frac{r_{ij}}{\lambda} \right) \quad (4.49)$$

ρ_0 est la densité de l'air, λ est la célérité du son.

Sur la figure 4.9, $\vec{r}_s$ désigne la position de la source élémentaire sur la surface du pont, $\vec{r}_1$ le point dans l'espace où l'on désire calculer $p(x, y, z, t)$, et $\vec{r}$ la distance entre ces deux points qui s'exprime par :

$$r_{ij} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + z^2} \quad (4.50)$$

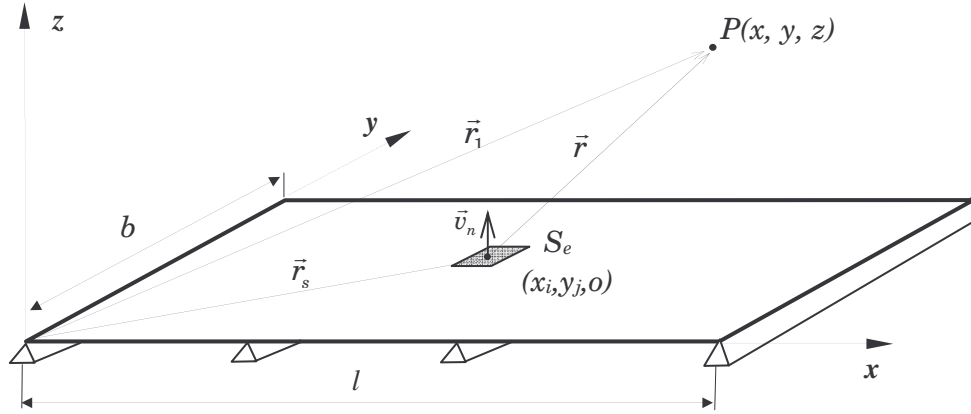


Figure 4.9 : Système d'axes et de coordonnées : géométrie du problème

L'accélération en chaque point sur le pont est :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left(x_i, y_j, t - \frac{r_{ij}}{\lambda} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \phi_{kl}(x_i, y_j) \ddot{q}_{kl} \left(t - \frac{r_{ij}}{\lambda} \right) \quad (4.51)$$

Remplaçons l'expression (4.51) dans l'expression (4.49), on obtient l'expression finale de la pression acoustique :

$$p(x, y, z, t) = \frac{\rho_0 S_e}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{1}{r_{ij}} \phi_{kl}(x_i, y_j) \ddot{q}_{kl} \left(t - \frac{r_{ij}}{\lambda} \right) \quad (4.52)$$

4.3.8 Algorithme de résolution

- Lecture des données du pont : $l, b, h, E_x, E_y, v_{xy}, v_{yx}, c_p, \rho, l_1, l_2, l_3$
- Lecture des données du véhicule : $m_1, m_2, m_v, s_1, s_2, s_{p1}, s_{p2}, s_x, a_1, a_2, I_{\theta 1}, I_{\theta 2}, I_{\theta v}, I_{\alpha v}, k_{pi}, c_{pi}, k_{si}, c_{si}, i=1,2, \dots, 4$
- Lecture des données de la chaussée : $A_r, N, \theta_k, k=1, \dots, N,$

Calcul préliminaire

- Calcul de : $D_x, D_y, H, D_{xy}, G_{xy}, \bar{m}$
- Choix du nombre de modes : n, m
- Calcul des fréquences et des modes propres : ω_{ij}, ϕ_{ij}
- Choix de la vitesse de roulement : v_x
- Choix du pas de temps Δt , des paramètres γ, β , et de la tolérance ε
- Calcul des masses, des rigidités et des amortissements modaux du pont : M_{ij}, C_{ij}, K_{ij}

- Calcul des matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du véhicule: $[M_v]$, $[C_v]$, $[K_v]$
- Choix des conditions initiales: Pont : $\{q\}_0$, $\{\dot{q}\}_0$, $\{\ddot{q}\}_0$, Véhicules : $\{Z_v\}_0$, $\{\dot{Z}_v\}_0$, $\{\ddot{Z}_v\}_0$
- Détermination des positions des roues selon y : $y, k=1, \dots, 4$

Pour chaque pas du temps $t = t + \Delta t$:

- Détermination de la position du véhicule sur le pont : $x_k = v_x t_k, k=1, 2, \dots, 4$
- Calcul en chaque point de contact k : $r(x_k)$, $r'(x_k)$
- Calcul des déplacements et vitesses du pont et du véhicule:
 $\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t$; $\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t$
 $q_{ij}^{*(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)}$; $\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)}$

Pour chaque itération : $\bar{k} = \bar{k} + 1$

- Approximation des déplacements, vitesses et accélérations du pont et du véhicule à partir de l'itération précédente
- Calcul en chaque point de contact k : $w(x_k, y_k)$, $\dot{w}(x_k, y_k)$, $\dot{r}(x_k)$
- Calcul des forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus : F_1, F_2, F_3, F_4 , et du vecteur $\{F_v^{int}\}$
- Résolution par la méthode de Newmark :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_v^{int}\}$$
- Calcul du vecteur des forces dues aux effets de la gravité : $\{F_g\}$
- Calcul du vecteur des forces d'interactions du pont agissant sur le véhicule :
 $\{F_p^{int}\} = \{F_g\} + \{F_p\}$, avec $\{F_p\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^T$
- Résolution par la méthode de Newmark :

$$\ddot{q}_{ij} + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij} + \omega_{ij}^2 q_{ij} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}$$
, avec $F_{ij} = -\sum_{k=1}^4 F_{pk}^{int}(x_k, y_k) \phi_{ij}(x_k, y_k)$
- Calcul du déplacement du pont :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t)$$
- Test de convergence :

Si non $\left| \frac{w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t) - w^{(\bar{k})}(x, y, t)}{w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t)} \right| \leq \varepsilon$ Si oui alors :
- Calcul des paramètres dynamiques voulus.
- Calcul de la pression acoustique rayonnée par le pont.

4.4 Résultats et interprétations

4.4.1 Exemple de validation

Afin de vérifier la modélisation et l'algorithme de résolution présentés dans ce chapitre, nous avons fait une validation numérique avec un exemple étudié par Zhu et al. [27], et Marchesiello et al. [28]. Le pont est modélisé par une plaque isotrope à trois travées c'est-à-dire $D_x = D_y = H = Eh^3/12(1-\nu^2) = D$, $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$, $D_{xy} = (1-\nu)D/2$ et $G_{xy} = E/2(1+\nu) = G$. Les données du pont sont les suivantes [28] :

$l = 79.2$ m, $l_1 = l_2 = l_3 = 26.4$ m, $b = 10.7$ m, $h = 0.95$ m, $E = 14.54 \times 10^{10}$ N/m², $\rho = 2375$ kg/m³, $\nu = 0.3$

Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique à sept degrés de liberté conformément à la norme AASHTO. Voici les paramètres utilisés pour ce modèle [28] :

$$m_v = 17000 \text{ kg}, m_1 = 600 \text{ kg}, m_2 = 1000 \text{ kg},$$

$$I_{\theta} = 9 \times 10^4 \text{ kgm}^2, I_{\omega} = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^2, I_{\theta 1} = 550 \text{ kg m}^2, I_{\theta 2} = 600 \text{ kg m}^2$$

$$S_x = 4.73 \text{ m}, S_{p1} = S_{p2} = 2.05 \text{ m}, S_1 = S_2 = 1.41 \text{ m}, a_1 = 0.67, a_2 = 0.33,$$

$$k_{s1} = k_{s2} = 1.16 \times 10^5 \text{ N/m}, k_{s3} = k_{s4} = 3.73 \times 10^5 \text{ N/m},$$

$$k_{p1} = k_{p2} = 7.85 \times 10^5 \text{ N/m}, k_{p3} = k_{p4} = 15.7 \times 10^5 \text{ N/m},$$

$$c_{s1} = c_{s2} = 2.5 \times 10^4 \text{ Ns/m}, c_{s3} = c_{s4} = 3.5 \times 10^4 \text{ Ns/m},$$

$$c_{p1} = c_{p2} = 100 \text{ Ns/m}, c_{p3} = c_{p4} = 200 \text{ Ns/m}.$$

Dans cet exemple, nous avons validé le calcul des fréquences et des modes propres ainsi que le calcul de la réponse dynamique du pont. La détermination des valeurs de k_i est bien présentée dans l'annexe 3. Dans le tableau 4.1, nous présentons les dix premières valeurs de k_i et de k_{li} .

Tableau 4.1 : Valeurs de k_i et de k_{li}

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_i	0.1189	0.1347	0.1627	0.2380	0.2540	0.2814	0.3570	0.3730	0.4001	0.4760
k_{li}	0.1189	0.1237	0.1327	0.2380	0.2419	0.2541	0.3570	0.3610	0.3735	0.4760

Les huit premières fréquences propres du pont à trois travées sont présentées dans le tableau 4.2. On constate une légère dispersion entre les fréquences calculées par notre étude et celles trouvées dans les références [27,28] et [42]*.

Tableau 4.2 : Fréquences propres du pont à trois travées [Hz]

Mode	Ordre des fréq.	Réf.[27]	Réf.[28]	Réf.[42]*	Notre étude
1	1,1	4.90	4.79	4.90	4.86
2	2,1	6.29	6.19	6.30	6.31
3	3,1	9.21	9.11	9.26	9.32
4	1,2	15.04	16.65	15.05	17.06
5	2,2	15.95	17.55	16.00	18.13
6	4,1	17.98	19.37	18.21	19.71
7	3,2	19.67	19.57	19.68	20.48
8	5,1	22.44	22.16	22.59	22.57

* Citée par [27]

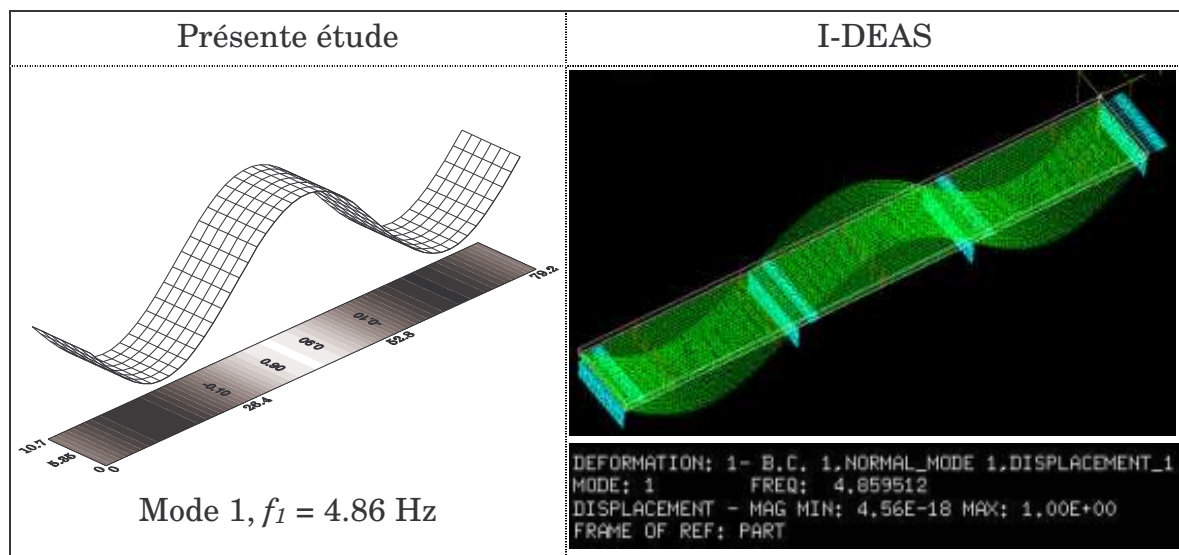
Nous comparons dans ce qui suit les fréquences et les modes propres obtenues par notre approche avec ceux obtenues par le logiciel de calcul des structures par éléments finis (I-DEAS). Nous avons maillée la dalle de roulement du pont par 4020 éléments coques. L'analyse de la comparaison des résultats présentés dans le tableau 4.3, des résultats obtenus numériquement par I-DEAS et ceux obtenus par notre approche basé sur la méthode modale, montre :

- Une très bonne concordance concernant les modes de flexion de bas rang. Elle est parfaite pour la fréquence du premier mode de vibration. Sachant que la contribution de ce mode est importante dans la réponse dynamique du pont.
- L'erreur devient significative pour les modes de flexion plus élevés et surtout les modes combinés flexion-torsion. Cela s'explique par l'influence des effets secondaires de cisaillement et d'inertie de rotation sur les modes de rang plus élevés, puisque les deux rapports largeur et longueur d'une travée du pont sur sa hauteur reste faible (11 et 28 respectivement) ce qui rend la contribution de ces deux effets non négligeables. Notons que la théorie des plaques minces n'est valable que si le rapport entre une dimension latérale du pont (longueur d'une travée ou largeur) sur sa hauteur est comprise entre 10 et 80.
- Certaines fréquences des modes de flexion sont très proches d'autres fréquences des modes de torsion (par exemple, les modes 4.1 et 3.2). Vue que l'erreur dans les fréquences des modes de torsion, est élevé par rapport l'erreur dans les fréquences des modes de flexion, l'ordre des modes est inversé.

Tableau 4.3 : Comparaison des fréquences propres avec I-DEAS

Modes	Ordre des fréquences	Fréquences propres; [Hz]		Erreur [%]
		I-DEAS	Notre étude	
1	1,1	4.86	4.86	0.00
2	2,1	6.26	6.31	0.79
3	3,1	9.20	9.32	1.28
4	1,2	16.57	17.06	2.87
5	2,2	17.40	18.13	4.02
6	3,2	19.30	20.48	5.76
7	4,1	19.54	19.71	0.86
8	5,1	22.28	22.57	1.28
9	6,1	27.32	27.84	1.90
10	4,2	37.05	38.25	3.13
11	5,2	38.89	40.25	3.37
12	6,2	42.74	44.73	4.44
13	7,1	43.89	44.68	1.76
14	8,1	47.81	48.91	2.24
15	9,1	54.85	56.44	2.81
16	7,2	63.99	66.48	3.74

Sur la figure 4.10, nous présentons les huit premiers modes propres du pont en utilisant l'expression (4.20), puis nous comparons ces modes avec ceux obtenus par le logiciel I-DEAS. On constate une bonne concordance entre les modes.



Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Conclusions

Cette étude avait pour objectif, la modélisation du comportement vibroacoustique d'un pont de la chaussée multi-travées lors du passage des véhicules avec la prise en compte de l'interaction dynamique pont-véhicules et des irrégularités du profil de la chaussée. Pour cela, nous avons complété la modélisation vibratoire d'un pont de chemin de fer lors du passage d'un train; travail réalisé pendant la préparation du diplôme de Magister; par l'introduction des irrégularités aléatoires du profil du chemin de roulement et le calcul du bruit rayonné par le pont dû au passage du train. Ce travail a fait l'objet de d'une publication internationale dans le journal *Applied Acoustics* (N°67, 2006, 461-475).

Pour étudier les vibrations d'un pont de la chaussée multi-travées, on a commencé par un cas simple d'un pont isotrope à une seule travée, excité par un véhicule roulant. Ce dernier est modélisé par des forces et des masses mobiles. Nous arrivons à la fin à la modélisation bidimensionnelle du comportement vibroacoustique d'un pont de la chaussée multi-travées excité par un véhicule roulant. Le tablier du pont est modélisé par une plaque orthotrope à plusieurs travées. Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique mobile H20-44 à sept degrés de liberté conformément à la norme AASHTO.

Sur la base de ces modélisations, nous avons élaboré plusieurs programmes en langage FORTRAN, permettant la résolution numérique des équations du mouvement dans les différents cas étudiés. Cette résolution est basée sur la méthode modale et l'intégration directe par la méthode de Newmark. Plusieurs exemples numériques sont présentés et validés. Sur la base des résultats obtenues et l'analyse de ces résultats, présentées aux chapitres deux, trois et quatre de cette thèse, nous avons tiré les conclusions suivantes :

1. La comparaison des résultats obtenus montre une excellente concordance avec les résultats de la bibliographie et de la simulation numérique sur le logiciel de calcul dynamique des structures.
2. Dans le cas d'un pont de chemin de fer, la présence du profil de rugosité perturbe grandement le mouvement vertical du train. L'amplitude et le nombre des aspérités de ce profil influent également et d'une manière très importante sur le facteur d'amplification dynamique FAD.

Références bibliographiques

- [1] Timoshenko S.P., 1922, "the forced vibration of bridges", Philosophical Magazine, Vol. 6, 1018.
- [2] Ayer R. S, Ford G., et Jacobsen L, S., 1950, "Transverse vibration of two Span beam under the action of a moving constant force", American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, p.1-12.
- [3] Belbali F., Boudebza A., 2002, "Comportement dynamique des poutres sollicitée par des forces, des masses et des systèmes dynamiques mobiles", Mémoire de PFE, Université de Guelma.
- [4] Yang Y.B., Lin C.W., 2004, "Vehicle–bridge interaction dynamics and potential applications", Journal of Sound and Vibration, Article en presse.
- [5] Henchi K., 1995, "Analyse dynamique des ponts par éléments finis sous les sollicitations des véhicules mobiles", thèse de Doctorat, Université de technologie de Compiègne.
- [6] Katz R., Lee C. W., Ulsoy A. G., Scott R. A., 1987, "Dynamic stability and response of a beam subject to a deflection dependent moving load", ASME, Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 109, p. 361-365
- [7] Lee H. P., 1994, "Dynamic response of a beam with intermediate point constraints subjected to a moving load", Journal of Sound and Vibration, Vol. 3, p. 361-368.
- [8] Henchi K., Dhatt G., Talbot M., Fafard M., 1997, "Dynamic behavior of multispan beams under moving loads", Journal of Sound and Vibration, Vol. 1, p. 33-45.
- [9] Nilson H. D., Conover R. A., 1971, "Dynamic stability of a beam carrying moving masses", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, p. 1003-1006.
- [10] Benedetti G. A., 1974, "Dynamic stability of a beam loaded by a sequence of moving mass particles", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, p. 1069-1071.
- [11] Lee H. P., 1996, "Dynamic response of a beam on multiple supports with a moving mass", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 3, p. 303-312.
- [12] Yang Y. B., Yau J. D., "Vehicle-bridge interaction element for dynamic analysis", Journal of Structural Engineering, Vol. 11, 1997, p. 1512-1518.
- [13] Cheng Y. S., Au, F. T. K., Cheung Y. K., Zheng D. Y., 1999, "On the separation between moving vehicles and bridge", Journal of Sound and Vibration, Vol. 5, p. 781-801.
- [14] Au F. T. K., Wang J. J., Cheung Y. K., 2001, "Impact study of cable-stayed bridge under Railway traffic using various models", Journal of Sound and Vibration, Vol. 240(3), p. 447-465

Annexe 1

Méthode de Newmark

La méthode de Newmark est une méthode d'intégration numérique à un pas. On y calcul l'état d'un système à un instant donné $t + \Delta t$ en fonction de l'état connu à l'instant t par la formule de Taylor :

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{q}\}_t + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \{q^{(n)}\}_t + \{R_n\} \quad (1.1)$$

avec $\{R_n\}$ est le reste du développement de l'ordre n :

$$\{R_n\} = \frac{1}{n!} \int_t^{t+\Delta t} \{q^{(n+1)}\}_\tau (t + \Delta t - \tau)^n d\tau \quad (1.2)$$

La formule (1.1) permet de calculer la vitesse et le déplacement à l'instant $t + \Delta t$:

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + \int_t^{t+\Delta t} \{\ddot{q}\}_\tau d\tau \quad (1.3)$$

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + \int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - \tau) \{\ddot{q}\}_\tau d\tau$$

L'approximation consiste donc à calculer les intégrales dans (1.3), de l'accélération. Pour ce faire, exprimons $\{\ddot{q}\}_\tau$ dans l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ en fonction de $\{\ddot{q}\}_t$ et $\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t}$ aux bornes de l'intervalle :

$$\{\ddot{q}\}_t = \{\ddot{q}\}_\tau + \{q^{(3)}\}_\tau (t - \tau) + \{q^{(4)}\}_\tau \frac{(t - \tau)^2}{2} + \dots \quad (1.4)$$

$$\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\ddot{q}\}_\tau + \{q^{(3)}\}_\tau (t + \Delta t - \tau) + \{q^{(4)}\}_\tau \frac{(t + \Delta t - \tau)^2}{2} + \dots$$

Multiplions les équations (1.4) par $1 - \gamma$ et par γ respectivement on obtient :

$$(1 - \gamma)\{\ddot{q}\}_t = (1 - \gamma)\{\ddot{q}\}_\tau + (1 - \gamma)\{q^{(3)}\}_\tau (t - \tau) + (1 - \gamma)\{q^{(4)}\}_\tau \frac{(t - \tau)^2}{2} + \dots \quad (1.5.a)$$

$$\gamma\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = \gamma\{\ddot{q}\}_\tau + \gamma\{q^{(3)}\}_\tau (t + \Delta t - \tau) + \gamma\{q^{(4)}\}_\tau \frac{(t + \Delta t - \tau)^2}{2} + \dots \quad (1.5.b)$$

Ajoutons (1.5.a) à (1.5.b) on obtient :

$$\{\ddot{q}\}_\tau = (1 - \gamma)\{\ddot{q}\}_t + \gamma\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + \{q^{(3)}\}_\tau (\tau - \gamma\Delta t - t) + O(\Delta t^2 \{q^{(4)}\}_\tau) \quad (1.6)$$

Annexe 2

Détermination de la solution de l'équation modale

Pour trouver la forme de la solution de l'équation modale

$$\ddot{q}_{ij} + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij} + \omega_{ij}^2 q_{ij} = F_{ij}(t) / M_{ij} \quad (2.1)$$

nous utilisons la méthode du calcul opérationnel (méthode de convolution).
L'équation auxiliaire de l'équation (2.1) est :

$$\tilde{q}_{ij}(P)(P^2 + 2\xi_{ij}\omega_{ij}P + \omega_{ij}^2) = \tilde{q}_{ij}(0)P + \dot{\tilde{q}}_{ij}(0) + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\tilde{q}_{ij}(0) + \frac{\tilde{F}_{ij}(P)}{M_{ij}} \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) peut s'écrire:

$$\tilde{q}_{ij}(P) = \frac{\tilde{q}_{ij}(0)P + \dot{\tilde{q}}_{ij}(0) + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\tilde{q}_{ij}(0)}{P^2 + 2\xi_{ij}\omega_{ij}P + \omega_{ij}^2} + \frac{\tilde{F}_{ij}(P)}{M_{ij}(P^2 + 2\xi_{ij}\omega_{ij}P + \omega_{ij}^2)} \quad (2.3)$$

On a

$$\frac{\tilde{q}_{ij}(0)P + \dot{\tilde{q}}_{ij}(0) + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\tilde{q}_{ij}(0)}{P^2 + 2\xi_{ij}\omega_{ij}P + \omega_{ij}^2} \xrightarrow{\cdot} e^{-\xi_{ij}\omega_{ij}t} \left\{ q_{ij}(0)\cos(\hat{\omega}_{ij}t) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\xi_{ij}\omega_{ij}q_{ij}(0)}{\hat{\omega}_{ij}} \sin(\hat{\omega}_{ij}t) \right\} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{M_{ij}(P^2 + 2\xi_{ij}\omega_{ij}P + \omega_{ij}^2)} \xrightarrow{\cdot} \frac{e^{-\xi_{ij}\omega_{ij}t}}{\hat{\omega}_{ij}M_{ij}} \sin(\hat{\omega}_{ij}t) \quad (2.5)$$

où $\hat{\omega}_{ij} = \omega_{ij}\sqrt{1 - \xi_{ij}^2}$ est la pulsation propre amortie du pont.

Pour trouver la solution du deuxième terme du deuxième membre de l'équation (2.3), nous appliquons le théorème de convolution suivant [41] :

Si $\tilde{F}_1(P)$ et $\tilde{F}_2(P)$ sont les images des fonctions $F_1(t)$ et $F_2(t)$,
alors $\tilde{F}_1(P) \tilde{F}_2(P)$ est l'image de $\int_0^t F_1(\tau)F_2(t - \tau)d\tau$

On pose

$$\tilde{F}_1(P) = \tilde{F}_{ij}(P)$$

$$\tilde{F}_2(P) = \frac{1}{M_{ij}(P^2 + 2\xi_{ij}\omega_{ij}P + \omega_{ij}^2)}$$

Annexe 3

Complément du paragraphe 3.5.7 du chapitre 3

Lorsque le pont est excité par une masse mobile, l'équation du mouvement s'écrit:

$$[M^*] \{\ddot{q}\} + [C^*] \{\dot{q}\} + [K^*] \{q\} = \{P^*\} \quad (3.1)$$

Avec

$$\{q\} = \{q_{11} \cdots q_{1m} \cdots q_{n1} \cdots q_{nm}\}^T \quad (3.2)$$

$$[M^*] = \text{Diag}(M_{11} \cdots M_{1m} \cdots M_{n1} \cdots M_{nm})$$

$$+ M \begin{bmatrix} \phi_{11}^2 \cdots \phi_{11}\phi_{1m} \cdots \phi_{11}\phi_{n1} \cdots \phi_{11}\phi_{nm} \\ \vdots \\ \phi_{1m}\phi_{11} \cdots \phi_{1m}^2 \cdots \phi_{1m}\phi_{n1} \cdots \phi_{1m}\phi_{nm} \\ \vdots \\ \phi_{n1}\phi_{11} \cdots \phi_{n1}\phi_{1m} \cdots \phi_{n1}^2 \cdots \phi_{n1}\phi_{nm} \\ \vdots \\ \phi_{nm}\phi_{11} \cdots \phi_{nm}\phi_{1m} \cdots \phi_{nm}\phi_{n1} \cdots \phi_{nm}^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$[C^*] = 2\text{Diag}(\xi_{11}\omega_{11}M_{11} \cdots \xi_{1m}\omega_{1m}M_{1m} \cdots \xi_{n1}\omega_{n1}M_{n1} \cdots \xi_{nm}\omega_{nm}M_{nm})$$

$$+ 2Mv_x \begin{bmatrix} \phi_{11}\phi'_{11} \cdots \phi_{11}\phi'_{1m} \cdots \phi_{11}\phi'_{n1} \cdots \phi_{11}\phi'_{nm} \\ \vdots \\ \phi_{1m}\phi'_{11} \cdots \phi_{1m}\phi'_{1m} \cdots \phi_{1m}\phi'_{n1} \cdots \phi_{1m}\phi'_{nm} \\ \vdots \\ \phi_{n1}\phi'_{11} \cdots \phi_{n1}\phi'_{1m} \cdots \phi_{n1}\phi'_{n1} \cdots \phi_{n1}\phi'_{nm} \\ \vdots \\ \phi_{nm}\phi'_{11} \cdots \phi_{nm}\phi'_{1m} \cdots \phi_{nm}\phi'_{n1} \cdots \phi_{nm}\phi'_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Annexe 4

Fréquences et modes propres d'une poutre continue en appuis simples

Pour déterminer les fréquences et les modes propres d'une poutre continue (multi-travées), (figure 4.1), il faut déterminer les fréquences et les modes propres pour chaque travée avec la prise en compte des conditions aux limites et de continuités aux appuis intermédiaires. L'expression du mode i pour la vibration transversale dans la travée r est :

$$\varphi_{ri}(x_r) = A_{ri} \sin k_{ri} x_r + B_{ri} \cos k_{ri} x_r + C_{ri} \operatorname{sh} k_{ri} x_r + D_{ri} \operatorname{ch} k_{ri} x_r, \quad r=1,2,\dots,nt \quad (4.1)$$

A_{ri} , B_{ri} , C_{ri} et D_{ri} , sont les constantes d'intégrations, elles sont fonction de la $i^{\text{ème}}$ pulsation propre ω_{ri} de la travée r , nt est le nombre de travées, $k_{ri}^4 = \bar{m}_r \omega_{ri}^2 / EI_r$ est un paramètre de fréquence, $\bar{m}_r$, I_r sont respectivement la masse par unité de longueur et le moment d'inertie polaire de la travée r , E est le module d'Young.

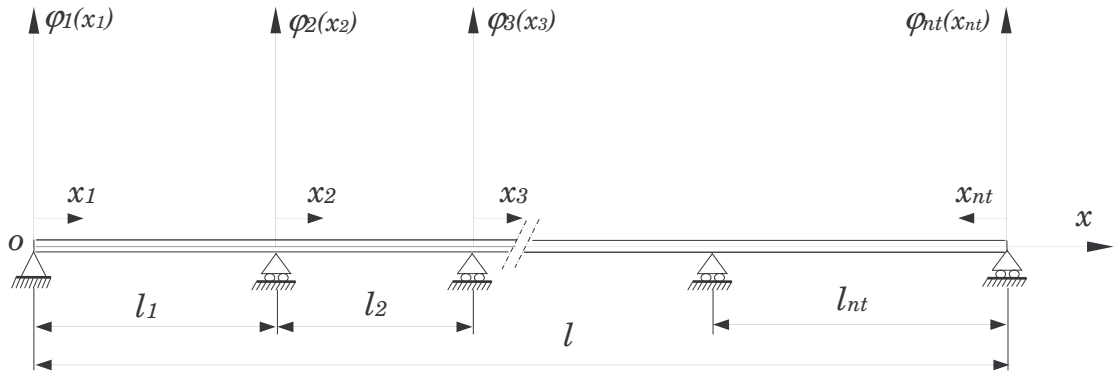


Figure 4.1: Poutre continue avec $nt-1$ appuis intermédiaires simples

Cas d'une poutre à trois travées

Considérons le cas d'une poutre à trois travées (figure 4.2), possédant les mêmes propriétés suivantes : module d'Young, masse par unité de longueur et moment d'inertie polaire. Les modes propres de chaque travée r sont :

$$\varphi_{ri}(x_r) = A_{ri} \sin k_{ri} x_r + B_{ri} \cos k_{ri} x_r + C_{ri} \operatorname{sh} k_{ri} x_r + D_{ri} \operatorname{ch} k_{ri} x_r, \quad r=1,2,3 \quad (4.2)$$

A_{ri} , B_{ri} , C_{ri} et D_{ri} , sont déterminées par l'application des conditions aux limites de la poutre et des conditions de continuité aux appuis intermédiaires 1 et 2.

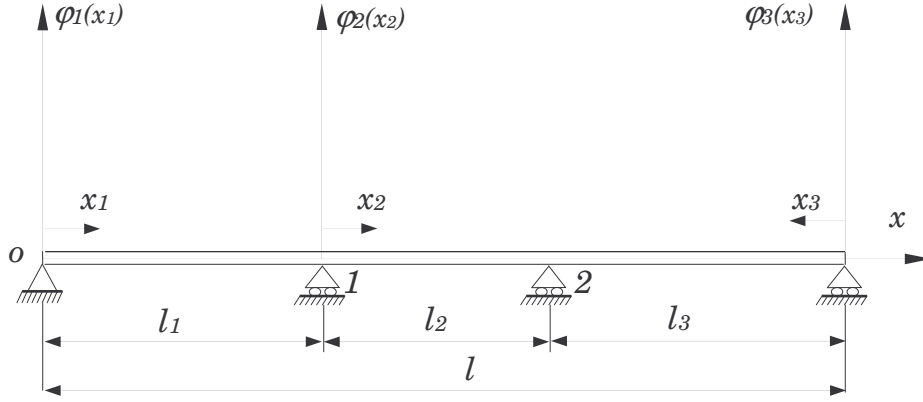


Figure 4.2: Poutre continue avec 2 appuis intermédiaires simples

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \varphi_r(x_r)|_{x_r=0} = \varphi_r(x_r)|_{x_r=l_r} = 0, \quad r = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=0} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Les conditions de continuité au niveau des appuis intermédiaires sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=l_1} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=l_3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=l_2} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=l_3} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Il y a donc huit conditions aux limites et quatre conditions de continuité. En appliquant ces conditions à l'expression (4.2), après des simplifications, on obtient (on omet l'indice i pour alléger l'écriture) :

▪ **Les modes propres**

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(l-x) - \theta_3 \operatorname{sh} k(l-x)), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (4.4)$$

Annexe 5

Complément du paragraphe 4.3.4 du chapitre 4

Sous forme matricielle, les équations du mouvement du modèle de véhicule à sept degrés de liberté s'écrivent:

$$[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_v^{\text{int}}\} \quad (5.1)$$

Avec

$$\{Z_v\} = \{z_v, \theta_v, \alpha_v, z_1, \theta_1, z_2, \theta_2\}^T \quad (5.2)$$

$$\{F_v^{\text{int}}\} = \left\{ 0, 0, 0, -F_1 - F_2, \frac{1}{2}s_{p1}(F_1 - F_2), -F_3 - F_4, \frac{1}{2}s_{p2}(F_3 - F_4) \right\}^T \quad (5.3)$$

$$[M_v] = \text{Diag}(m_v, I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}, m_1, I_{\theta_1}, m_2, I_{\theta_2}) \quad (5.4)$$

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{v11} & c_{v12} & c_{v13} & c_{v14} & c_{v15} & c_{v16} & c_{v17} \\ & c_{v22} & c_{v23} & c_{v24} & c_{v25} & c_{v26} & c_{v27} \\ & & c_{v33} & c_{v34} & c_{v35} & c_{v36} & c_{v37} \\ & & & c_{v44} & c_{v45} & c_{v46} & c_{v47} \\ & & & & c_{v55} & c_{v56} & c_{v57} \\ & & \text{Symétrique} & & & c_{v66} & c_{v67} \\ & & & & & & c_{v77} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{v11} & k_{v12} & k_{v13} & k_{v14} & k_{v15} & k_{v16} & k_{v17} \\ & k_{v22} & k_{v23} & k_{v24} & k_{v25} & k_{v26} & k_{v27} \\ & & k_{v33} & k_{v34} & k_{v35} & k_{v36} & k_{v37} \\ & & & k_{v44} & k_{v45} & k_{v46} & k_{v47} \\ & & & & k_{v55} & k_{v56} & k_{v57} \\ & & \text{Symétrique} & & & k_{v66} & k_{v67} \\ & & & & & & k_{v77} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Annexe 6

Calcul d'une plaque équivalente au tablier du pont

Nous présentons dans cette annexe, une méthode très simple qui permet de trouver une plaque orthotrope (figure 6.1), équivalente au tablier du pont-poutre de la figure 4.14 du chapitre 4. Cette méthode est basée sur les notions des fractions volumiques ou massiques de renfort au sein d'un matériau composite. Le tablier du pont est considéré comme un matériau composite composé d'une portion de béton (la dalle de roulement) et d'une portion d'acier (les raidisseurs et les entretoises). Les données du pont sont présentées au chapitre 4, paragraphe 4.5.2.

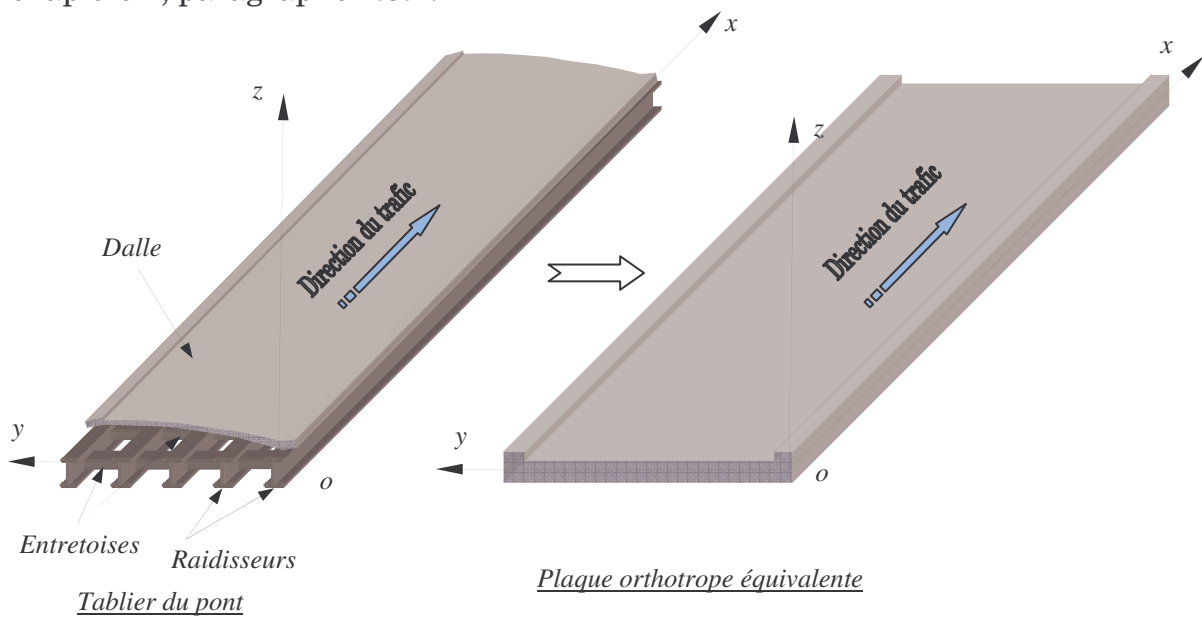


Figure 6.1 : Modélisation du tablier du pont par une plaque orthotrope équivalente

Masse et volume de la dalle de roulement :

$$M_b = \rho_b l b h = 3000 \times 78 \times 13.715 \times 0.2 = 641862 \text{ kg}$$

$$V_b = \frac{M_b}{\rho_b} = 213.954 \text{ m}^3$$

Section, masse et volume d'un raidisseur :

$$S_r = 0.405 \times 0.018 \times 2 + 0.01111 \times 1.49 = 0.03113 \text{ m}^2$$

$$M_r = \rho_r S_r l = 7850 \times 0.03113 \times 78 = 19063.287 \text{ kg}$$

$$V_r = \frac{M_r}{\rho_r} = 2.4284 \text{ m}^3$$

Masse et volume d'une entretoise :

$$M_e = \rho_e S_e b_e = 7850 \times 0.001548 \times 10.972 = 133.329 \text{ kg}$$