

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University -
Annaba



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques

Option : Equations différentielles aux dérivées partielles

TITRE

Etude d'un problème des ondes perturbé par un facteur
d'amortissement

Par: Hacene Bennour

Sous la direction de: Said Mohamed said

Devant le jury

PRESIDENT :	Haiour Mohamed	Professeur	U.B.M. ANNABA
ENCADREUR:	Said Mohamed said	MCA	U.K.M. OUARGLA
CO ENCADREUR	Saker Hacene	MCA	U.B.M.ANNABA
EXAMINATEUR :	Guerfi Amara	MCA	U.K.M. OURGLA
EXAMINATEUR :	Mansour Abdelouahab	MCA	U. E L OUED
EXAMINATEUR :	Nisse Lamine	MCA	U.B.M. ANNABA

Année : 2014 / 2015

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Mohamed said Said Maitre de Conférence de L'université Kasdi Merbah Ouargla, Directeur de thèse d'avoir accepté d'être mon encadreur. Je lui suis très reconnaissant d'avoir toujours été présent et de m'avoir, par ses remarques judicieuses, amené à faire preuve d'exigence et de pédagogie scientifique.

Je tiens à remercier vivement également Hacene Saker Maitre de Conférence de L'université Badji Mokhtar Annaba, Co-Directeur de thèse d'avoir accepté d'être mon co-encadreur.

Je tiens évidemment à remercier très vivement le Professeur Mohamed Haiour de L'université Badji Mokhtar Annaba pour l'honneur qu'il m'a fait d'être en président du Jury de soutenance.

Je tiens aussi à remercier vivement le professeur Nisse Lamine de L'université Badji Mokhtar Annaba, le Maitre de Conférence Mansour Abdelwahab de L'université d'El-oued, le Maitre de Conférence Guerfi Amara de L'université Kasdi Merbah Ouargla.

Pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire part au Jury et d'avoir consacré de leur temps pour examiner mon travail,

Parmi les choses qui ont rendu possible l'aboutissement de ce travail, c'est aussi la qualité du cadre professionnel. Je tiens, aussi à adresser mes remerciements à tout le personnel du département de Mathématique. La compétence et la bonne humeur qui y régissent dans ce dernier ont contribué quotidiennement à rendre le climat du travail de recherche plus agréable.

Merci également à ma famille et mes amis.

Table des matières

0.1	Large Notation	11
0.2	Espaces fonctionnels abstraits	11
0.3	Espaces fonctionnels concret	11
1	Quelques résultats de base	13
1.1	Espaces fonctionnels	13
1.2	Notions fondamentales	15
2	Principaux résultats	23
2.1	Équation des ondes	23
2.2	Équation des ondes amorties	24
2.3	Position du problème	24
2.4	Théorème d'existence et d'unicité	25
2.5	Démonstration de l'existence d'au moins une solution	26
2.6	Théorème d'unicité	31
2.7	Un résultat de regularité	33
2.8	Existence de la solution	34
2.9	Unicité de la solution	37
2.10	Semi-discrétisation et inéquations variationnelles	39
2.11	Semi - discrétisation	40
2.12	L'existence de la solution	42
2.13	Démonstration de l'unicité	56
2.14	Notations et hypothèses.	56
2.15	Etude d'une application des équations des ondes amorties	66
2.16	Conclusion	69

Résumé

Ce travail de thèse s'inscrit dans le domaine des équations différentielle aux dérivées partielles, on étudié les équations d'évolutions :

Nous allons particulièrement étudier l'équation des ondes perturbée par un facteur d'amortissement.

Avec des conditions de Dirichlet dans un ouvert borné dans \mathbb{R}^n .

Les étapes de base dans la résolution de ce problème sont :

L'obtention d'estimations a priori,

L'utilisation de ces estimations.

Et nous distinguerons les méthodes suivantes :

- (i) Méthode de compacité,
- (ii) Méthode de monotonie,
- (iii) Méthode de régularisation,
- (iv) Méthode itératives d'approximation,

et naturellement, l'utilisation simultanée de ces méthodes dans la résolution du problème.

Pour résoudre l'équation des ondes perturbée par un facteur d'amortissement. Nous rappelons d'abord les principales notations, nous introduirons quelques espaces fonctionnels.

Ensuite nous définirons les notions et les résultats suivants. On va chercher et trouver u solution du problème dans l'espace $L^\infty(0, T; V)$ on a besoin de la dérivée $\frac{u}{\partial t}$ soit dans l'espace, et on donne le Lemme 1.2.1., le Lemme 1.2.2. est un résultat sur les inéquations différentielles.

Ensuite on se donne un opérateur A défini seulement sur K , donc $A : K \rightarrow V$ on distingue deux cas, selon K est borné ou non.

Commençons par le cas borné dans le Théorème 1.2.4. Et nous passons à la situation où K n'est pas borné dans le Théorème 1.2.5. Maintenant on donne la position du problème de l'équation des ondes amorties dans $\Omega \times]0, T[$ où T fini et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et Γ la frontière de Ω , on supposera que assez régulière, on désigne par $Q = \Omega \times]0, T[$ le cylindre de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, et par Σ la frontière latérale de Q .

On cherche une fonction $u(x, t)$ à solution de l'équation des ondes amorties posée., la fonction cherchée doit vérifier en outre les conditions aux limites et

les conditions initiales alors en fait, on démontre le Théorème d'existence par la méthode de Faedo- Galerkin on utilise les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré l'existence d'une solutions dans $[0, t]$ puis en fait des estimations a priori qui montreront que $t = T$.

on passe à la limite grâce au Théorème de compacité. L'unicité est établie à l'aide d'une des méthodes classiques.

Pour justifiée la conclusion d'unicité on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperbolique linéaire alors la suite u_m des solutions approchées converge vers u .

Une question naturelle est maintenant celle de la régularité de la solution. On démontre par la méthode de Faedo - Galerkin l'existence de la solution, on part des solutions approchées avec cette fois pour une base d'un autre espace de Sobolev avec une estimation a priori supplémentaire.

De même l'unicité elle est établie par une des méthodes classique. Pour justifier la conclusion d'unicité on utilise un précede classique dans le cas des équations hyperbolique linéaire.

On applique une semi- discrétisation en la variable de temps pour trouver l'existence de la solution alors on définit les suites u^n par un système d'inéquation variationnelle elliptique, admettant une solution unique par application du Théorème 1.2.5. On trouve que le suite u^n demeure dans un ensemble borné de $L^\infty(0, T; V)$ et le dérivée demeure dans un ensemble borné de $L^\infty(0, T; H)$. Il reste à montré les propriétés de continuité $u \in \mathcal{C}([0, T]; V)$, $u' \in \mathcal{C}([0, T]; H)$. Alors nous donnons le Lemme 2.15.2. montre que u est faiblement continu de $[0, T]$ dans V et nous donnons le Lemme 2.15.3. montre que u est continue de $[0, T]$ dans V' le Lemme 2.15.2. avec $u \in L^\infty(0, T; V)$, $u' \in L^\infty(0, T; H)$ signifie que u' est continue faiblement de $[0, T]$ dans H . Et nous donnons du Lemme 2.15.4. On déduit que u est contine sur $[0, T]$.

En conjonction avec les propriétés ci- dessus de continuité faible, nous concluons que $u \in \mathcal{C}([0, T]; V)$ et $u' \in \mathcal{C}([0, T]; H)$. Ensuite, on démontre les inégalités du Théorème 2.13.1. $\forall v \in \mathcal{C}([0, T]; V)$, $v' \in \mathcal{C}([0, T]; H)$, $v'' \in L^2(0, T; V')$ où $v(t) \in K$, presque partout, $v'(t) \in H$.

Pour démontré l'unicité de la solution l'étape naturelle est d'essayer d'approcher des équations hyperboliques par des équations paraboliques c'est la regularisation parabolique nous avons appliqué cette méthode à des inéquations d'évolutions de type hyperbolique.

Ensuite, on donne une application numérique sur l'étude de l'équation des ondes perturbée par un facteur d'amortissement.

Introduction

- 1) Dans ce travail on développe quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires. Les méthodes étudiées ici sont introduites à partir d'exemples concrets et notamment :
Le problème aux limites linéaires classiques intervenant en Mécanique ou en Physique :
Équation des ondes perturbées par un facteur d'amortissement.
Avec des conditions de Dirichlet dans un ouvert borné dans \mathbb{R}^n .
Ce problème a son origine dans un phénomène physique, on étudie un modèle qui décrit les vibrations transversales d'une membrane Ω fixée à ses extrémités et en présence d'amortissement η .
Ce problème a été déjà étudié par de nombreux auteurs.
Par exemple en [1] et [3] et [8].
Les étapes de base dans la résolution de ce problème sont :
 - a) L'obtention d'estimations a priori,
 - b) L'utilisation de ces estimations.
- 2) Il n'ya, pour l'instant, aucune méthode générale d'obtention de estimations a priori.
Les estimations a priori les plus simples proviennent de l'origine physique des problèmes.
On les retrouve généralement en multipliant les équations à résoudre par des combinaisons linéaires des inconnues et par des intégrations par parties convenables.
Pour des estimations a priori supplémentaires on peut multiplier les équations par des expressions non linéaires en les inconnues.
On peut également obtenir des estimations a priori assez fines par la méthode de décomposition.
De façon générale, il ya une profonde différence du point de vue des estimations a priori entre les problèmes aux limites linéaires et non linéaires. Alors que dans les premiers, il ya dans l'immense majorité des cas connus une infinité d'estimations a priori, on trouve en général très peu d'estimations a priori dans les problèmes non linéaires.

Cette difficulté est également liée à celle de la régularité : lorsqu'on a pu démontrer que l'on a affaire à un problème non linéaire bien posé dans une certaine classe fonctionnelle, il est en général faux que si les données sont très régulières, il en est de même de la solution. Le choix du cadre fonctionnel où l'on essaie de résoudre le problème est donc absolument crucial.

3) Une fois choisi le cadre fonctionnel, il faut utiliser les estimations pour la résolutions du problème.

Nous distinguerons les méthodes suivantes :

- (i) Méthode de compacité,
- (ii) Méthode de monotonie,
- (iii) Méthode de régularisation,
- (iv) Méthode itératives d'approximation,

et naturellement, l'utilisation simultanée dans un problème, de ces méthodes.

Méthode (i)

La méthode dite de compacité est utilisée de façon aussi directe que possible :

1) On construit des solutions approchées par réductions à la dimension finie, par exemple par la méthode de Galerkin dans le cas stationnaire, ou de Faedo- Galerkin dans le cas d'évolution, on obtient alors l'existence des solutions approchées par utilisation :

- i) Dans le cas stationnaire, d'un théorème du point fixe,
- ii) Dans le cas d'évolution, d'un théorème d'existence de solution d'un système d'équations différentielles ordinaires,

2) On passe ensuite à la limite sur la dimension, en ayant ici à surmonter une difficulté essentielle :

Les opérateurs non linéaires rencontrés ne sont pas en général faiblement continus et il faut donc démontrer que la famille des solutions approchées grâce aux estimations a priori est compacte dans une topologie forte convenable pour laquelle l'opérateur est continu.

Les outils sont donc ici les théorèmes de compacité de l'injection d'un espace de Sobolev d'ordre $\alpha = 1$, dans un espace de Sobolev d'ordre $< \alpha$ c'est à dire d'ordre 0 et des résultats du même type élaborés.

Méthode(ii)

Lorsque l'opérateur a des propriétés de monotonie du type de la propriété des fonctions différentiables convexes sur un espace de Banach on peut passer à la limite sur la dimension avec des estimations a priori moins fortes que celles nécessaires dans la méthode de compacité.

La méthode de monotonie, lorsqu'elle est applicable, est d'utilisation plus facile que la méthode de compacité.

Par ailleurs, c'est dans le cadre de cette méthode que l'on peut étudier les inéquations variationnelles auxquelles on peut étendre un grand nombre de propriétés établies pour les équations.

Méthode(iii)

Dans les méthodes **(i)** et **(ii)**, on obtient de la même manière les solutions approchées essentiellement par la méthode de Galerkin puis l'on passe à la limite soit par compacité, soit par monotonie ou par mélange des deux méthodes.

Dans les méthodes **(iii)** et **(iv)** on change la méthode d'approximation, en utilisant la compacité ou (et) la monotonie pour le passage à la limite.

Dans la méthode **(iii)**, on régularise les équations, en les approchant par des équations meilleures déjà résolues.

Entrent dans ce cadre les méthodes de viscosité, de régularisation elliptique, de régularisation parabolique.

Méthode(iv)

Les méthodes itératives d'approximation sont surtout celles issues de l'analyse Numérique.

Citons :

- 1) La méthode des approximations successives, la méthode de Newton.

Le choix des espaces étant ici encore absolument fondamental,

- 2) Les méthodes de discrétisation différences finies,

- 3) Les méthodes de décomposition.

Ces méthodes permettent de résoudre des problèmes qui ne semblent pas susceptibles d'être résolus par les méthodes antérieures.

- 4) Il faut bien noter que les méthodes d'approximation ne sont pas équivalentes entre elles.

En effet les estimations a priori sont établies sur l'équation donnée et il faut choisir un procédé d'approximation permettant d'obtenir, sur les solutions des équations approchées, au moins autant d'estimations a priori que sur le problème initial.

En résumé, pour la résolution d'un problème donné, la démarche suivie est :

- i) Choix du cadre fonctionnel,

- ii) Choix de la méthode d'approximation,

- iii) Passage à la limite

- 5) Les méthodes indiquées jusqu'ici sont susceptibles de fournir l'existence des solutions.

L'unicité éventuelle de la solution relève des techniques assez spéciales.

Pour justifier la conclusion d'unicité on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperbolique linéaires.

Dans les cas favorables où l'on arrive à un problème bien posé de nombreuses questions se posent encore, et notamment celle de la régularité :

Lorsque la régularité des données augmente, on est-il de même de la régularité de la solution ?

Comme on a déjà signalé il n'est généralement pas vrai que la régularité \mathcal{C}^∞ des données entraîne la régularité \mathcal{C}^∞ de la solution.

Toutefois, dans de nombreux cas, le problème non linéaire étant résolu dans une classe fonctionnelle X pour les données dans une classe fonctionnelle Y , il existe une famille X_s, Y_s de classes voisines telles que le problème soit bien posé dans X_s pour les données dans Y_s .

On peut à cet effet, dans des circonstances il est vrai particulières, utiliser la théorie de l'interpolation.

Pour les équations d'évolution, des propriétés particulières de régularité peuvent être établies par utilisation de la théorie des semi- groupes non linéaires.

Parmi les problèmes qualitatifs relatifs aux équations d'évolution on traite notamment :

- i) La recherche des solutions périodiques du temps
 - ii) La recherche de solutions bornées sur l'axe du temps, question d'ailleurs liées à la recherche de solutions presque périodiques.
- Notre étude est organisée de la manière suivante :

Dans le chapitre 1

Nous rappelons d'abord les principales notations :

- i) Notions géométriques
- ii) Espaces fonctionnels abstraits
- iii) Espaces fonctionnels concrets

On utilise constamment dans ce chapitre les espaces de Sobolev.

L'essentiel de ce qu'il faut savoir relativement sur ces espaces est rappelé au fur et à mesure.

Nous introduirons quelques espaces fonctionnels.

Ensuite il est consacré à des notions préliminaires : On va chercher à trouver u solution du problème dans l'espace $L^\infty(0, T; V)$ alors besoin de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans cet espace, alors on obtien le premier Lemme 1.2.1. le Lemme 1.2.2. est un résultat sur les inéquations différentielles.

Soit V un espace de Banach séparable et réflexif et soit K un ensemble convexe fermé de V .

On se donne un opérateur A défini seulement sur K on distingue deux cas, si K est borné on donne le Théorème 1.2.4. si K est non borné on donne le Théorème 1.2.5.

Dans le chapitre 2

Nous rappelons l'équation générale qui décrit la propagation et le concept, et différents types d'ondes, l'interprétation de l'équation des ondes.

On donne maintenant la position du problème d'une équation des ondes amorties et on montre le Théorème d'existence par la méthode de Faedo- Galerkin et d'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré l'existence d'une solutions dans $[0, t]$.

on passe à la limite grâce à la Théorème de compacité comme suivante :

1) Le résultat de compacité fondamental :

Le résultat classique de compacité de l'injection de l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur un ouvert borné dans l'espace $L^2(\Omega)$.

et en fait des estimations a priori qui montreront que $t = T$.

2) Toute la théorie consiste à obtenir un certain nombre d'inégalités a priori et à s'en servir.

Il n'ya pas de méthode systématique pour obtenir des estimations a priori.

On donne donc des inégalités a priori, obtenus par la méthode d'énergie, appliquée en multipliant par des fonctionnelles variées.

Pour utiliser les inégalités a priori il ya les possibilités :

On approche l'équation donné par des équations plus simples ce qui est fait par la méthode de Faedo- Galerkin, il s'agit alors d'obtenir pour les équations approchées les estimations à celles obtenues en dimension infinie, ce qui peut nécessiter l'usage de bases spéciales on passe ensuite à la limite en utilisant les théorèmes de compacité.

Et montrer que la solution du problème est unique d'après les conditions du théorème d'existence, pour justifier la conclusion précédente on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperboliques linéaires.

Une question naturelle celle de la régularité de la solution.

On montre l'existence de la solution régulière. Les procédés utilisés jusqu'ici pour la construction de solutions approchées est la méthode de Faedo- Galerkin, on passe ensuite à la limite en utilisant les Théorèmes de compacité. Et démontrer que la solution du problème est unique d'après les conditions de la Théorème d'existence, pour justifier la conclusion précédente on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperbolique linéaires.

On étudie ici d'autres procédés :

Les méthodes des différences finies

son intérêt principal est que la structure des équations approchées par discrétisation par différences finies est très proche de celle des équations que l'on veut résoudre et donc on ne perd pas d'estimations a priori.

Il ya possibilité de discrétisation dans les problèmes d'évolution :

Une discrétisation en la variable de temps seulement dit semi- discrétisation, alors nous allons démontrer par une méthode constructive de semi- discrétisation en temps le Théorème d'existence. On utilise la régularisation parabolique

on montre l'unicité dans le problème des différences finies.
Ensuite on donne une application numérique sur l'étude de l'équation des ondes perturbé par un facteur d'amortissement.

Principales Notations

Avant de procéder, à notre étude de problème aux limites concernant l'équation des ondes perturbé par un facteur d'amortissement, on introduit toutes les principales notations qui seront utilisées au fur et à mesure dans ce travail.

0.1 Large Notation

Notions géométrique

Ω : Ouvert borné de \mathbb{R}^n , est suppose de frontière régulière, point générique

$x = \{x_1, \dots, x_n\}$

Γ : frontière de Ω , $d\Gamma$ = mesure de surface sur Γ .

$Q = \Omega \times]0, T[$, $t \in]0, T[$, t = temps.

$\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $d\Sigma = d\Gamma dt$.

0.2 Espaces fonctionnels abstraits

Les espaces considérés sont très généralement réels.

V (resp \mathcal{V}) espace de Banach séparable réflexif.

H (resp \mathcal{H}) espace de Hilbert.

$V \subset H$ (resp $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$), dense, injection continue.

H (resp \mathcal{H}) est à son dual, alors $V \subset H \subset V'$ (resp $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$) dans quelques points on ne suppose pas $V \subset H$ ou $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$.

En général V, H, V' (resp $\mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{V}'$) sont des espaces fonctionnels sur Ω (resp Q).

0.3 Espaces fonctionnels concret

$\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(Q)$, \dots de notes espace des fonctions indéfiniment différentiable et à support compact dans Ω , Q , \dots , muni de la topologie de limite inductive de [11]. $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(Q)$, \dots dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(Q)$, \dots = espace des distributions sur Ω , Q , \dots ,

$L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de puissance p -ième sommable sur Ω la

norme sur $L^p(\Omega)$ est définie par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Modification habituelle si $p = \infty$:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)|$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est complet pour la norme

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{m,p}(\Omega),$$

$$W^{-m,p'}(\Omega) = \text{dual de } W_0^{m,p}(\Omega), \text{ où } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega), \quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega), \quad H^{-m}(\Omega) = H_0^m(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$$

$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ = fonctions k fois continument différentiables dans $\overline{\Omega}$, $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Si X est un espace de Banach,

$$L^p(0, T; X) = \{f \mid f \text{ mesurable de } [0, T] \longrightarrow X, \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ si}$$

$$1 \leq p < \infty, \quad \sup_{t \in]0, T[} \text{ess} \|f(t)\|_X < \infty \text{ si } p = \infty\}$$

$\mathcal{D}(]0, T[; X)$ = fonctions \mathcal{C}^∞ de $]0, T[\longrightarrow X$ et à support compact dans $]0, T[$.

$\mathcal{C}^k([0, T]; X)$ = fonctions k fois continument différentiables de $[0, T] \longrightarrow X$.

$\mathcal{L}(X, Y)$ = espace des applications linéaires continues de X dans Y ,

(X et Y espaces vectoriels topologiques).

$$\mathcal{D}'(]0, T[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); X) = \text{espace des distributions sur }]0, T[,$$

à valeurs dans X .

D'autres notations sont utilisées dans le texte, mais on a préféré ne pas les mentionner ici puisqu'elles sont liées soit à des définitions soit à des théorèmes. De toute façon, elles seront claires d'après le contexte.

Chapitre 1

Quelques résultats de base

Dans ce chapitre, nous allons présenter d'abord quelques notions fondamentales qui nous seront utiles par la suite.

Nous introduirons quelques espaces fonctionnels, ensuite nous enonçons des notions fondamentales en utilisant dans la thèse.

1.1 Espaces fonctionnels

On utilisera constamment les espaces usuels $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, les fonctions considérées seront à valeurs réelles.

On désigne par (f, g) le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$,

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad (1.1)$$

et également le produit scalaire entre $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ on posera la norme correspondante

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

On fera constamment usage des espaces de Sobolev [13], on pose :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On introduit ensuite :

$$H_0^1(\Omega) = \text{adherence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega) = \text{sous espace de } H^1(\Omega),$$

des fonctions nulles sur $\Gamma = \partial\Omega$.

Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$, à un espace de distributions sur Ω :

$$H^{-1}(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]'$$

telle que

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ sont sommes de dérivées du 1^{er} ordre de fonctions de $L^2(\Omega)$.

On introduit l'espace $V = H_0^1(\Omega)$, V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

et muni de la norme

$$\|u\|_V = \{(u, u)\}^{\frac{1}{2}}$$

On note $V' = H^{-1}(\Omega)$, muni de la norme

$$\|l\|_* = \sup_{u \in V} \frac{|\langle l, u \rangle|}{\|u\|_V}$$

pour tout $l \in V'$ et $u \neq 0$, ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire entre V et V' .

Soit A un opérateur linéaire continue $A \in \mathcal{L}(V, V')$, pour A on peut associée la forme bilinéaire continue sur V par,

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \forall u, v \in V, \quad (1.3)$$

pour a on peut associée l'opérateur linéaire continue A de V dans V' , et d'après les propriétés de a l'opérateur A est un opérateur linéaire continue, et par la continuité de a si

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad C > 0, \quad \forall u, v \in V, \quad (1.4)$$

alors

$$\|A\|_* \leq C \quad (1.5)$$

si $a(u, v) = (u, v)_V$ le produit scalaire de V , alors a est coercive,

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \forall u \in V. \quad (1.6)$$

Il faut introduire des espaces de fonctions en x et t , si $x, t \longrightarrow \varphi(x, t)$ est une fonction définie dans Q , on posera

$$\varphi(t) = ((x \longrightarrow \varphi(x, t)))$$

et φ sera alors considérée comme fonction (ou distribution) en t à valeurs dans un espace des fonctions (ou distributions) en x .

De façon générale, X étant un espace de Banach, on désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions $t \rightarrow f(t)$ de $]0, T[\rightarrow X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty \quad (1.7)$$

si $p = \infty$, on remplace la norme (1.7) par

$$\sup_{t \in]0, T[} \text{ess}\|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} < \infty$$

ainsi l'espace $L^p(0, T; X)$ est complet .

dans l'espace $L^p(0, T; X)$ Si $X = L^p(\Omega)$ on a :

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q).$$

1.2 Notions fondamentales

On va chercher et trouver u solution du problème dans l'espace $L^\infty(0, T; V)$. On a alors besoin de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans cet espace.

Voici comment on définit, un peut plus généralement, $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $u \in L^p(0, T; X)$.

Lemme 1.2.1. *Si $u \in L^p(0, T; X)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ alors u est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$, continue de $[0, T] \rightarrow X$.*

Démonstration. On désigne par $\mathcal{D}'(0, T; X)$ l'espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans X , défini par :

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); X)$$

si $u \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, sa dérivée distribution est définie par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = -u\left(\frac{d\varphi}{dt}\right), \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

si $u \in L^p(0, T; X)$, il lui correspond une distribution encore notée u sur $]0, T[$ à valeurs dans X , définie par

$$u(\varphi) = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

intégrale à valeurs dans X , on peut encore définir $\frac{\partial u}{\partial t}$ comme élément de $\mathcal{D}'(0, T; X)$ par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = -u\left(\frac{d\varphi}{dt}\right), \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$$

alors on vérifie sans peine que si

$u \in L^p(0, T; X)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors u est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$, continue de $[0, T] \rightarrow X$ ce qui démontre le Lemme (1.2.1) \square

On démontre le Lemme.

Avant Lemme (1.2.2.) ci-dessous est un résultat sur les inéquations différentielles.

Il permet de contrôler des solutions d'équations différentielles que nous ne savons pas expliciter par des solutions d'équations plus simples dont nous connaissons les solutions.

Il est d'une importance pratique cruciale nous en donnerons également une utilisation théorique en l'utilisant pour démontrer la dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales.

Lemme 1.2.2. Soit $u(t) \in L^1([0, T])$ vérifiant

$$u(t) \leq A + B \int_0^t u(s) ds, \quad A \in \mathbb{R}, B > 0,$$

alors

$$u(t) \leq Ae^{Bt}, \quad t \in [0, T]$$

Démonstration. Introduit l'inégalité sur $u(s)$ dans l'intégrale,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq A + B \int_0^t u(s) ds \\ &\leq A + B \int_0^t [A + B \int_0^s u(\sigma) d\sigma] ds \\ &= A(1 + Bt) + B^2 \int_0^t (t - s)u(s) ds \end{aligned}$$

On itère alors l'argument :

$$\begin{aligned} u(t) &\leq A(1 + Bt) + B^2 \int_0^t (t - s)u(s) ds \\ &\leq A(1 + Bt) + B^2 \int_0^t (t - s)[A + B \int_0^s u(\sigma) d\sigma] ds \end{aligned}$$

$$= A\left(1 + Bt + B^2\frac{t^2}{2}\right) + B^3 \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} u(s) ds$$

et par récurrence on trouve

$$u(t) \leq A\left(1 + Bt + B^2\frac{t^2}{2} + \dots + B^n\frac{t^n}{n!}\right) + B^{n+1} \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} u(s) ds$$

passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$u(t) \leq Ae^{Bt}.$$

□

Définition 1.2.3. Un opérateur A de $V \rightarrow V'$ est dit pseudo-monotone si :

- a) A est borné
- b) lorsque $u_j \rightarrow u$ dans V faible et

$$\limsup \langle A(u_j), u_j - u \rangle \leq 0$$

Alors

$$\liminf \langle A(u_j), u_j - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle \quad \forall v \in V$$

Soit V un espace de Hilbert sur \mathbb{R} , et soit la forme quadratique $J(v)$ donnée par :

$$J(v) = a(v, v) - 2L(v) \tag{1.8}$$

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur V , vérifiant :

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V, \tag{1.9}$$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \forall v \in V, \tag{1.10}$$

et où $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V on se donne par ailleurs un ensemble K convexe fermé dans V et l'on cherche

$$\inf_{v \in K} J(v). \tag{1.11}$$

alors, comme il est bien connu, sous les hypothèses (1.9) – (1.10), il existe un élément u et un seul dans K tel que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \tag{1.12}$$

L'élément u est caractérisé par l'inéquation variationnelle

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K \tag{1.13}$$

Soit V' le dual de V et soit $A \in \mathcal{L}(V, V')$ l'opérateur correspondant à $a(u, v)$,

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad Au \in V', v \in V \quad (1.14)$$

alors (1.13) équivaut évidemment à

$$\langle Au, v - u \rangle \geq L(v - u) \quad \forall v \in K \quad (1.15)$$

si $K = V$, (1.15) se réduit à l'équation $Au = L'$

$$(L', v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K$$

si $L(v) = (L', v)$, $L' \in V'$.

Si K est un cône fermé convexe de sommet $\{0\}$, (1.13) équivaut à

$$a(u, u) \geq L(v) \quad \forall v \in K, \quad a(u, u) = L(u). \quad (1.16)$$

le problème (1.13) est non linéaire si K n'est pas un sous-espace vectoriel de V même avec A linéaire.

Une fois qu'il est formulé sous la forme (1.15), le problème initial (1.11) se prête à de nombreuses généralisations par exemple, on peut se donner un espace de Banach V , de dual V' , un opérateur A non linéaire de $V \rightarrow V'$, un convexe K fermé de V et chercher $u \in K$ tel que

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K, \quad (1.17)$$

pour f donné dans V' .

On va donner au Théorèmes 1.2.4., 1.2.5., des conditions suffisantes assez générales impliquant l'existence d'une solution de (1.17).

Pour cela, soit donc V un espace de Banach séparable et réflexif et soit K un ensemble convexe fermé de V .

On se donne un opérateur A défini seulement sur K , donc :

$$A : K \rightarrow V'$$

on distingue deux cas, selon K est borné ou non.

Commençons par le cas borné.

Théorème 1.2.4. *On suppose que K est un ensemble convexe fermé non vide, soit A un opérateur pseudo-monotone de $K \rightarrow V'$.*

Alors, pour f donnée dans V' , il existe u dans K tel que l'on ait (1.17).

Notons bien que nous ne supposons pas A coercif parce que K est borné.

Démonstration. On considère une suite croissante d'ensemble K_m avec

1) $K_0 \subset \dots \subset K_m \subset K_{m+1} \subset \dots \subset K$,

K_m convexe fermé contenu dans un espace de dimension finie $\leq m$,

$\bigcup_m K_m$ dense dans K .

On commence par résoudre une inéquation approchée, on va montrer qu'il existe $u_m \in K_m$ tel que

$$\langle A(u_m), v - u_m \rangle \geq \langle f, v - u_m \rangle \quad \forall v \in K_m \quad (1.18)$$

pour cela, soit V_m l'espace de dimension $\leq m$ contenant K_m , espace que l'on munit d'une structure hilbertienne notée $[,]$ produit scalaire dépendant de m . Si $g \in V'$, la forme $w \longrightarrow (g, w)$ est continue sur V_m , donc :

$$(g, w) = [\pi g, w], \quad \pi g \in V_m, \pi \in \mathcal{L}(V'; V_m) \quad (1.19)$$

avec ces notations (1.18) équivaut à :

$$\langle \pi A(u_m), v - u_m \rangle \leq [\pi f, v - u_m] \quad \forall v \in K_m, \quad (1.20)$$

encore a :

$$[u_m, v - u_m] \leq [u_m + \pi f - \pi A(u_m), v - u_m] \quad \forall v \in K_m, \quad (1.21)$$

Soit $P_m =$ projection de V_m sur le convexe K_m , pour le produit scalaire $[,]$; alors (1.21) équivaut encore à :

$$u_m = P_m(u_m + \pi f - \pi A(u_m)) \quad (1.22)$$

et l'existence de u_m vérifiant (1.22) résulte alors du Théorème de point fixe de Brouwer appliqué à l'opérateur :

$$v \longrightarrow P(v + \pi f - \pi A(v))$$

De $K_m \longrightarrow K_m$, pourvu que l'on en montre la continuité.

Pour cela, il ne reste plus qu'à montrer la continuité de cette application de $K_m \longrightarrow V'$ faible.

Or soit $u_n \longrightarrow u$ dans K_m , alors $A(u_n)$ est borné dans V' et on peut donc supposer par extraction éventuelle que

$$A(u_n) \longrightarrow \chi$$

dans V' faible.

Alors

$$\limsup \langle A(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$$

et par conséquent d'après la pseudo-monotonie on a

$$\langle A(u), u - v \rangle \leq \liminf \langle A(u_n), u_n - v \rangle = \langle \chi, u - v \rangle$$

donc

$$\langle \chi - A(u), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$$

$\chi = A(u)$, et la continuité est établie.

2. Puisque K est borné et $K_m \subset K$, u_m demeure dans un borné de K et $A(u_m)$ demeure dans un borné de V' .

On peut donc extraire une suite u_μ telle que $u_\mu \rightarrow u$ dans V faible et $u \in K$ car K est faiblement fermé. On va montrer que

$$\limsup \langle A(u_\mu), u_\mu - u \rangle \leq 0 \quad (1.23)$$

en effet, comme $\bigcup_m K_m$ est dense dans K , on peut trouver u_0 dans $\bigcup_m K_m$ tel que

$$\|u - u_0\|_V \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0 \quad (1.24)$$

donné arbitrairement.

Alors

$$\langle A(u_\mu), u_\mu - u_0 \rangle \leq \langle f, u_\mu - u_0 \rangle$$

Pour μ assez grand d'après (1.18) et comme

$$\langle A(u_\mu), u_0 - u \rangle \leq c\epsilon$$

d'après (1.24), on voit que

$$\begin{aligned} \limsup \langle A(u_\mu), u_\mu - u \rangle &= \\ \limsup [\langle A(u_\mu), u_\mu - u_0 \rangle + \langle A(u_\mu), u_0 - u \rangle] &\leq \\ c\epsilon + \langle f, u - u_0 \rangle &\leq c_1\epsilon \end{aligned}$$

d'ou (1.23).

Alors, d'après la pseudo-monotonie on a :

$$\liminf \langle A(u_\mu), u_\mu - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle \quad \forall v \in V \quad (1.25)$$

mais si $v \in \bigcup_m K_m$, on a, pour μ assez grand d'après (1.18) :

$$\langle A(u_\mu), u_\mu - v \rangle \leq \langle f, u_\mu - v \rangle,$$

d'ou

$$\liminf \langle A(u_\mu), u_\mu - v \rangle \leq \langle f, u - v \rangle$$

et donc

$$\langle A(u), u - v \rangle \leq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in \bigcup_m K_m$$

et comme $\bigcup_m K_m$ est dense dans K , on en déduit (1.17). \square

Méttre cas où K n'est pas borné.

Théorème 1.2.5. *Soit K un ensemble convexe fermé non borné de V . Soit A un opérateur pseudo-monotone de $K \rightarrow \dot{V}$, et coercif au sens suivant : Il existe $v_0 \in K$ tel que*

$$\frac{\langle A(v), v - v_0 \rangle}{\|v\|} \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \|v\| \rightarrow +\infty, \quad v \in K. \quad (1.26)$$

alors, pour f donnée dans V' , il existe $u \in K$ tel que l'on ait (1.17).

Démonstration. Soit

$$B_R = \{v \mid v \in V, \|v\|_V \leq R\}, \quad K_R = K \cap B_R$$

comme K_R est convexe fermé borné, il existe, d'après le Théorème 1.2.4.,

$$u_R \in K_R$$

tel que

$$\langle A(u_R), v - u_R \rangle \geq \langle f, v - u_R \rangle \quad \forall v \in K_R. \quad (1.27)$$

On choisit $R \geq R_0$, tel que

$$\|v_0\|_V \leq R_0$$

alors on peut prendre $v = v_0$ dans (1.27) d'où l'on déduit, grâce à (1.26), que

$$\|u_R\|_V \leq C.$$

Et u_R est solution de (1.27), on a $\|u_R\|_V \leq C$ et si on choisit $R > C$, alors u_R est solution de

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K$$

En effet, on a $\|u_R\|_V \leq C$, alors $A(u_R)$ demeure dans un borné de V' et l'on peut donc extraire une suite $R \rightarrow \infty$ telle que

$$u_R \rightarrow u$$

dans V faible,

$$A(u_R) \rightarrow \chi$$

dans V' faible.

Puisque K est faiblement fermé, $u \in K$.

Par ailleurs

$$\langle A(u_R), u_R - u \rangle \leq \langle f, u_R - u \rangle$$

dès que $R \geq \|u\|_V$, et donc

$$\limsup \langle A(u_R), u_R - u \rangle \leq 0$$

et donc, d'après la pseudo-monotonie,

$$\liminf \langle A(u_R), u_R - u \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle \quad (1.28)$$

et comme

$$\langle A(u_R), u_R - v \rangle \leq \langle f, u_R - v \rangle \longrightarrow \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in K,$$

on en déduit de (1.28) que :

$$\langle A(u), u - v \rangle \leq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in K.$$

□

Chapitre 2

Principaux résultats

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des équations des ondes amorties et nous mettons en évidence un résultat de régularité et ensuite donnée un exemple numérique, on appliquera semi discrétisation en la variable de temps pour établir un résultat d'existence d'au moins une solution, l'unicité sera établie par application de la régularisation parabolique.

2.1 Équation des ondes

L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration.

Par exemple, en deux dimensions d'espace c'est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue.

En une dimension d'espace, elle est aussi appelée équation des cordes vibrantes. Au repos, la membrane occupe un domaine plan Ω , sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité f , elle se déforme et son déplacement normal est noté u .

On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet.

L'équation des ondes dont u est solution est donnée par le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \text{ sur } \Omega \times]0, T[, \quad T \text{ fini} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(t = 0) = u_0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0) = u_1 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en temps et qu'il faut donc deux conditions initiales pour u .

On dira que cette équation est hyperbolique.

Le problème aux limites précédent modélise, par exemple, la propagation au

cours du temps du déplacement vertical d'une membrane élastique, ou bien de l'amplitude d'un champ électrique de direction constante.

L'inconnue $u(t, x)$ est ici une fonction scalaire.

2.2 Équation des ondes amorties

La vitesse de mouvement est retardé par une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse de la membrane on obtient l'équation des ondes amorties suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

Où T finie et η est le coefficient d'amortissement constant.

On dit qu'il s'agit d'un terme d'amortissement. On parle alors d'équation des ondes amorties.

2.3 Position du problème

On désigne par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de point générique $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ soit Γ la frontière de Ω , on supposera que Γ est assez régulière, on désigne par $Q = \Omega \times]0, T[$ le cylindre de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, T fini ou et par Σ la frontière latérale de Q :

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[$$

L'équation aux dérivées partielles linéaire que nous allons considérer est la suivante :

On cherche une fonction $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ à valeur réelle où $\eta \in \mathbb{R}$, solution de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, t \in]0, T[\quad (2.2)$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

f donnée dans $\Omega \times]0, T[$, la fonction u cherchée doit vérifier en outre les conditions aux limites et les conditions initiales :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

où les fonctions u_0 , u_1 sont données.

Soit $u(x, t)$ la position verticale de $x \in \Omega$ à l'instant $t \in [0, T]$, est retardé par

une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse de la membrane, alors u satisfait (2.2)-(2.3)-(2.4).

2.4 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 2.4.1. *On suppose que Ω est un ouvert borné.*

On donne f, u_0, u_1 , avec

$$f \in L^2(Q), \quad (2.5)$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad (2.6)$$

$$u_1 \in L^2(\Omega) \quad (2.7)$$

Il existe une fonction et une seule u vérifiant :

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } Q, \quad (2.10)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1. \quad (2.12)$$

Remarque 2.4.2. *De (2.8) – (2.9) et du Lemme 1.2.1. il résulte en particulier que u est continue de $[0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ en fait il ya beaucoup plus, dans [5] de sorte que (2.11) a un sens.*

Pour vérifier que (2.12) a un sens, on doit utiliser l'équation (2.10), qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \Delta u - \eta \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.13)$$

comme

$$\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)),$$

on a :

$$\Delta u \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

de (2.9) on a $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ de sorte que (2.10) entraîne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) + L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^2(\Omega)) \quad (2.14)$$

d'où en particulier :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^2(\Omega)), \quad (2.15)$$

ce qui, joint à (2.9) montre, grâce au Lemme 1.2.1., que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue de $[0, T] \rightarrow H^{-1}(\Omega) + L^2(\Omega)$, de sorte que (2.12) a un sens.

Remarque 2.4.3. *d'après $H_0^1(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega) = \text{Sous-espace de } H^1(\Omega) \text{ des fonctions nulles sur } \Gamma \text{ et } V = H_0^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Sigma, \text{ la condition (2.3) est donc incorporée dans (2.8).}$*

Démonstration. Le plan de la démonstration est le suivant :

G1. On construit des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin,

G2. On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori,

G3. On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité

La démonstration de ce Théorème est donnée par étapes.

2.5 Démonstration de l'existence d'au moins une solution

Etape G1. ; Solutions approchées

L'existence est démontrée par la méthode de Faedo-Galerkin de [4].

Pour simplifier l'écriture, on posera $v' = \frac{\partial v}{\partial t}$, $v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$,

On introduit une suite $w_1, \dots, w_m \dots$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$w_i \in H_0^1(\Omega) \quad \forall i;$$

$\forall m, w_1, \dots, w_m$ sont linéairement indépendants,

les combinaisons linéaires finies des w_i sont denses dans $H_0^1(\Omega)$.

Une telle suite existe car V est séparable.

On cherche alors $u_m = u_m(t)$ solution approchée du problème sous la forme

$$u_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, \quad (2.16)$$

les g_{im} étant à déterminer par les conditions :

$$(u_m''(t), w_j) + \eta(\dot{u}_m, w_j) + a(u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.17)$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx; \quad (2.18)$$

le système (2.17) d'équations différentielles ordinaires linéaires est à compléter par les conditions initiales :

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i \longrightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{lorsque } m \longrightarrow \infty, \quad (2.19)$$

$$u_m'(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} = \sum_{i=1}^m \beta_{im} w_i \longrightarrow u_1 \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{lorsque } m \longrightarrow \infty. \quad (2.20)$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solutions de (2.17) – (2.19) – (2.20) noter que $\det(w_i, w_j) \neq 0$ grâce à la linéaire indépendance de w_1, \dots, w_m dans un intervalle $[0, t]$, les estimations a priori qui suivent montreront que $t = T$.

Etape G2., Estimations a priori On multiplie l'équation (2.17) d'indice j par $g'_{jm}(t)$ et l'on somme en j il vient :

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + \eta(u_m'(t), u_m'(t)) + a(u_m(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t)) \quad (2.21)$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (u_m'(t))^2 dx + a(u_m(t), u_m(t)) \right] + \eta \int_{\Omega} (u_m'(t))^2 dx = (f(t), u_m'(t)) \quad (2.22)$$

il résulte de (2.22) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) + \eta \int_0^t \left(\int_{\Omega} (u_m)^2 dx \right) d\sigma \leq \\ & \frac{1}{2} (\|u_{1m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{0m}\|_{H_0^1(\Omega)}^2) + \int_0^t \|f(\sigma)\| \|u_m'(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma \end{aligned}$$

d'après (2.19) – (2.20) le deuxième membre est

$$\leq C + \int_0^t \|f(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \|u_m'(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma$$

les C désignent des constantes diverses indépendantes de m , d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) + \eta \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma \leq \\ & C + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma \quad (2.23) \end{aligned}$$

d'après (2.5) on a :

$$\int_0^t \|f(\sigma)\|^2 d\sigma \leq C$$

on déduit donc en particulier de l'inégalité (2.23) que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) + \eta \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma \leq \\ & C + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma \quad (2.24) \end{aligned}$$

on applique le Lemme (1.2.2.) on obtient

$$\frac{1}{2}(\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) + \eta \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma \leq C$$

C constante independante de m

si $\eta \geq 0$ on obtient

$$\|u'_m\| \leq C \text{ et } \|u_m\|_V \leq C \quad (2.25)$$

si $\eta < 0$ on déduit d'après l'inégalité (2.24) que :

$$\frac{1}{2}[\|u'_m\|^2 + \|u_m\|_V^2] \leq C + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2 d\sigma \quad (2.26)$$

on utilise le Lemme (1.2.2.), on obtient :

$$\frac{1}{2}[\|u'_m\|^2 + \|u_m\|_V^2] \leq C$$

d'ou :

$$\|u'_m\| \leq C \text{ et } \|u_m\| \leq C \quad (2.27)$$

alors on déduit que $t = T$, et d'après (2.25) – (2.27) on obtient le resultat, soit $m \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} u_m &\text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \text{et } u'_m &\text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Etape G3., Passage à la limite D'après le Théorème de Dunford-Pettis dans [15] , l'espace

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

respectivement

$$L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

est le dual de

$$L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^2(\Omega))$$

respectivement

$$L^1(0, T; L^2(\Omega))$$

et par conséquent on peut extraire de u_m une suite u_μ telle que :

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.29)$$

faible étoile

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.30)$$

faible étoile.

Par ailleurs, il résulte en particulier de (2.27) que u_m est bornée dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et u'_m dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ donc en particulier que u_m demeure dans un borné de $H^1(Q)$.

Mais on sait d'après le Théorème de Rellich- Kondrachoff [5] que : l'injection de

$$H^1(Q) \text{ dans } L^2(Q) \text{ est compacte} \quad (2.31)$$

on peut donc supposer que la suite u_μ extraite de u_m vérifie, outre (2.29) – (2.30) :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et presque partout} \quad (2.32)$$

on peut passer à la limite dans (2.17) que l'on utilise pour $m = \mu$, soit donc j fixé et $\mu > j$; alors, d'après (2.17) :

$$(u''_\mu, w_j) + a(u_\mu, w_j) + \eta(u'_\mu, w_j) = (f, w_j) \quad (2.33)$$

mais d'après (2.29) – (2.30)

$$a(u_\mu, w_j) \longrightarrow a(u, w_j) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile,}$$

$$(u'_\mu, w_j) \longrightarrow (u', w_j) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile}$$

et donc

$$(u''_\mu, w_j) = \frac{d}{dt}(u'_\mu, w_j) \longrightarrow (u'', w_j) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T)$$

on déduit donc de (2.33) que

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_j) + \frac{d}{dt}(u, w_j) + a(u, w_j) = (f, w_j)$$

et cela pour j fixé quelconque.

Donc l'on en déduit- d'après la propriété de densité de la $\ll base \gg$, $w_1 \cdots w_m \cdots$ que :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v) + a(u, v) + \eta \frac{d}{dt}(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

d'ou résulte que u satisfait à (2.10) et aussi à (2.8) – (2.9).

Reste à montrer que (2.11) – (2.12) ont lieu.

Mais d'après (2.29) – (2.30) et le Lemme 1.2.1. on a en particulier

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0)$$

dans $L^2(\Omega)$ faible, or d'après (2.19)

$$u_\mu(0) = u_{0\mu} \longrightarrow u_0$$

dans $H_0^1(\Omega)$, donc on a (2.11).

Par ailleurs, d'après le Lemme suivant

Lemme 2.5.1. Soit Q un ouvert borné dans $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, u_μ et u des fonctions de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, telles que

$$\|u_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C, \quad u_\mu \longrightarrow u \text{ presque partout dans } Q$$

alors $u_\mu \longrightarrow u$ faiblement dans $L^q(Q)$.

Démonstration. Soit un ensemble mesurable E , on note que $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ sont conjugués, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit v_μ est une suite de $L^p(E)$, tendant vers v , faiblement dans $L^p(E)$, lorsque $\mu \longrightarrow +\infty$, si

$$\lim \int_E v_\mu \xi dx = \int_E v \xi dx, \quad \text{pour tout } \xi \in L^q(E)$$

soit N est une suite croissante tendant vers $+\infty$, on introduit

$$E_N = \{(x, t) \mid (x, t) \in Q, |u_\mu(x, t) - u(x, t)| \leq 1, \text{ pour } \mu \geq N\}$$

E_N sont des ensembles croissent mesurables avec N et $measure(E_N) \longrightarrow measure(Q)$, lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

Soit Φ_N l'ensemble des fonctions φ de $L^{q'}(Q)$, telle que $L^{q'}(Q)$ est l'espace conjugué de $L^q(Q)$,

$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, à support dans E_N et soit $\Phi = \bigcup_{N \rightarrow +\infty} \Phi_N$, Φ est dense dans $L^{q'}(Q)$.

Si l'on prend $\varphi \in \Phi$, alors d'après le Théorème de convergence dominée on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi(x, t)(u_\mu(x, t) - u(x, t)) dx dt \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } \mu \longrightarrow +\infty \quad (2.34)$$

en effet, on a u_μ et u des fonctions dans $L^q(Q)$, $1 < q < +\infty$, telles que $\|u_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $u_\mu \longrightarrow u$ presque partout dans Q , comme :

$$|\varphi(x, t)(u_\mu(x, t) - u(x, t))| \leq |\varphi(x, t)|, \quad \text{et } \varphi \in \Phi_{N_0}, \text{ on prend } \mu \geq N_0$$

alors $\varphi(x, t)(u_\mu(x, t) - u(x, t)) \longrightarrow 0$ presque partout, lorsque Φ est dense dans $L^{q'}(Q)$, alors

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi(x, t) u_\mu(x, t) dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \varphi(x, t) u(x, t) dx dt,$$

Lorsque $\mu \longrightarrow +\infty$, alors $u_\mu \longrightarrow u$ faiblement dans $L^q(Q)$, d'après (2.34). \square

Par ailleurs, d'après (2.34), on a :

$$(u''_\mu, w_j) \longrightarrow (u'', w_j)$$

dans $L^\infty(0, T)$ faible étoile

Donc d'après par exemple le Lemme 1.2.1. avec $X = \mathbb{R}$

$$(u'_\mu(0), w_j) \longrightarrow (u', w_j)|_{t=0} = (u'(0), w_j)$$

et comme d'après (2.30)

$$(u'_\mu(0), w_j) \longrightarrow (u_1, w_j),$$

on a

$$(u'(0), w_j) = (u_1, w_j) \quad \forall j,$$

d'ou (2.12). □

2.6 Théorème d'unicité

Théorème 2.6.1. *La solution u du problème (2.10)–(2.11)–(2.12) est unique*

Démonstration. Soient u et v deux solutions, alors $w = u - v$ vérifie

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 \tag{2.35}$$

$$w(0) = 0, w'(0) = 0 \tag{2.36}$$

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{2.37}$$

$$w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{2.38}$$

tels que $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w''$, $\frac{\partial w}{\partial t} = w'$

On multiplie (2.35) par w' , on obtient que

$$(w'', w') + \eta(w', w') - (\Delta w, w') = 0 \tag{2.39}$$

On utilise l'intégration par partie et les conditions (2.36), on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w)) + 2\eta\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \tag{2.40}$$

si $\eta \geq 0$, on obtient que

$$\frac{d}{dt}(\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w)) \leq 0, \tag{2.41}$$

on intègre (2.41) sur $[0, t]$, $t \leq T$ et on applique les conditions (2.36) on obtient

$$\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w) \leq 0, \tag{2.42}$$

on applique l'inégalité de Poincaré :

Soit p , tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n alors il existe une constante C dépendant uniquement de Ω et p , telle que pour toute fonction u de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

on utilise l'inégalité de Poincaré lorsque $p = 2$ avec $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ et $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = a(u, u)$, sur (2.42) on trouve $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$ si $\eta < 0$, on écrit

$$\frac{d}{dt}(\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w)) = -2\eta\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -2\eta(\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w))$$

on utilise le Lemme (1.2.2.) avec $B = -2\eta$, on obtient (2.41), on intègre sur $[0, t]$ et on utilise les conditions (2.36) on obtient (2.42) en utilisant l'inégalité de Poincaré on trouve que $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$.

Ce qui achève la démonstration du Théorème d'unicité.

Pour justifier la conclusion précédente on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperbolique linéaires.

Soit $s \in]0, T]$, on introduit :

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\sigma)d\sigma, & t \leq s; \\ 0, & t > s. \end{cases}$$

$$w_1(t) = \int_0^t w(\sigma)d\sigma \quad \text{de sorte que} \quad \psi(t) = w_1(t) - w_1(s) \quad \text{si} \quad t \leq s$$

on prend le produit scalaire des deux membres de (2.35) avec $\psi(t)$ et, toutes les intégrations étant maintenant loisibles :

On multiplie (2.35) par ψ et intégré sur $]0, s]$, $0 < s \leq T$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^s (w'', w)dt + \eta \int_0^s (w', \psi)dt - \int_0^s (\Delta w, \psi)dt &= 0 \\ - \int_0^s (w', \psi')dt + \eta \int_0^s (w', \psi)dt + \int_0^s a(w, \psi)dt &= 0 \end{aligned}$$

d'ou, comme $\psi' = w$ et $\psi(0) = -w_1(s)$:

$$-\frac{1}{2}\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_0^s (\psi'', \psi)dt + \int_0^s a(w, \psi)dt = 0$$

alors

$$-\frac{1}{2}\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \eta \int_0^s \|\psi'\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = 0$$

d'où

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \eta \int_0^s \|\psi'\|_{L^2(\Omega)} dt = 0$$

si $\eta \geq 0$, on obtient que

$$\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \forall t,$$

et $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$

si $\eta < 0$, on écrit

$$\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq -2\eta \left(\int_0^s \|\psi'\| dt + \int_0^s \|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right)$$

On utilise le Lemme (1.2.2.) on obtient

$$\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \forall t,$$

et donc $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$.

Remarque 2.6.2. Dans le cas du Théorème d'unicité, la suite u_m des solutions approchées converge vers u

Une question naturelle est maintenant celle de la régularité de la solution, \square

2.7 Un résultat de régularité

On a déjà introduit et utilisé l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, plus généralement, on aura à utiliser l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre m ,

$$H^m(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m, m \in \mathbb{N}\}$$

muni de la norme

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est un espace de Hilbert.

On va démontrer le

Théorème 2.7.1. On se place dans les conditions du Théorème 2.4.1. avec en outre

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \tag{2.43}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{2.44}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega) \tag{2.45}$$

il existe alors une solution et une seule du système (2.10) – (2.11) – (2.12) vérifiant

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad (2.46)$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.47)$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.48)$$

2.8 Existence de la solution

Démonstration. La démonstration est donnée par étapes.

L'existence est démontrée par la méthode de Faedo- Galerkin de [7].

On part des solutions approchées u_m fournies par (2.17)-(2.19)-(2.20), avec cette fois pour w_j une base de l'espace $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on suppose que (renforcement de (2.19) et (2.20)) :

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad (2.49)$$

$$u_{1m} \longrightarrow u_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad (2.50)$$

on va établir (Etape D1.) une estimation a priori supplémentaire qui montrera l'existence d'une solution avec (2.47) – (2.48), puis l'on montrera (2.46) dans (l'étape D2.) par utilisation de l'équation (2.10).

Étape D1. On déduit de (2.17) que :

$$(u_m''(0) + \eta u_m'(0), w_j) = (f(0) + \Delta u_{0m}, w_j), \quad j = 1 \cdots m \quad (2.51)$$

noter que d'après (2.43) et le Lemme 1.2.1, $f(0) \in L^2(\Omega)$, d'après (2.49)

$$\|\Delta u_{0m}\| = \left(\int_{\Omega} (\Delta u_{0m})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < cts,$$

on déduit donc de (2.51), en multipliant par $g_{jm}''(0)$ et sommant en j :

alors on a :

$$(u_m''(0), u_m''(0)) + \eta(u_m'(0), u_m''(0)) = (f(0) + \Delta u_{0m}, u_m''(0)), \quad j = 1 \cdots m$$

d'où :

$$\int_{\Omega} (u_m''(0))^2 dx = (f(0) + \Delta u_{0m}, u_m''(0)) - \eta(u_m'(0), u_m''(0))$$

alors :

$$\int_{\Omega} (u_m''(0))^2 dx \leq \left[\left(\int_{\Omega} (f(0))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} \Delta u_{0m})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right]$$

$$+\eta\left(\int_{\Omega}(u'_m(0))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}(u''_m(0))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega}(u''_m(0))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{\Omega}(f(0))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(\int_{\Omega}(\Delta u_{0m})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \eta\left(\int_{\Omega}(u'_m(0))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

on déduit en utilisant (2.49) – (2.50) que :

$$\left(\int_{\Omega}(u''_m(0))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C. \quad (2.52)$$

En dérivant (2.17) en t ce qui est loisible il vient :

$$(u'''_m(t), w_i) + \eta(u''_m(t), w_i) + a(u'_m(t), w_i) = (f'(t), w_i), \quad (2.53)$$

on multiplie (2.53) par $g''_{im}(t)$ et on somme en $j \quad j = 1 \cdots m$; il vient :

$$(u'''_m(t), u''_m(t)) + \eta(u''_m(t), u''_m(t)) + a(u'_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t))$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx \right) + \eta \int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m\|^2 = (f'(t), u''_m(t)) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx + \|u'_m(t)\|^2 \right] + \eta \int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx \\ = (f'(t), u''_m(t)) \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de cauchy shwarz on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx + \|u'_m(t)\|^2 \right] + \eta \int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx \leq \\ \left(\int_{\Omega} (f'(t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} (u''_m(t))^2 dx + \|u'_m(t)\|^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} (u''_m(0))^2 dx + \|u'_m(0)\|^2 \right] + \\ + \eta \int_0^t \left(\int_{\Omega} (u''_m(\sigma))^2 dx \right) d\sigma \leq \int_0^t \left[\int_{\Omega} (f'(\sigma))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} (u''_m(\sigma))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} d\sigma \end{aligned}$$

D'ou l'on déduit en utilisant (2.49)-(2.52) que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} (u_m''(t))^2 dx + \|u_m'(t)\|^2 \right] + \eta \int_0^t \left(\int_{\Omega} u_m''(\sigma)^2 dx \right) d\sigma \leq \\ C + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \left[\int_{\Omega} (u_m''(\sigma))^2 dx \right] d\sigma \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

où $C = T$.

On applique le Lemme (1.2.2.) on trouve que :

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} (u_m''(t))^2 dx + \|u_m'(t)\|^2 \right] + \eta \int_0^t \left(\int_{\Omega} (u_m''(\sigma))^2 dx \right) d\sigma \leq C$$

Alors si $\eta \geq 0$ on obtient :

$$\|u_m'\|_V \leq C \text{ et } \|u_m''\| \leq C \quad (2.55)$$

Si $\eta < 0$ d'après (2.54) on obtient :

$$\frac{1}{2} [\|u_m''(t)\|^2 + \|u_m'(t)\|_V^2] \leq C + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \int_0^t \left(\int_{\Omega} (u_m''(\sigma))^2 dx \right) d\sigma \quad (2.56)$$

On utilise le Lemme (1.2.2.) on obtient

$$\frac{1}{2} [\|u_m''(t)\|^2 + \|u_m'(t)\|_V^2] \leq C$$

Alors on obtient

$$\|u_m'\|_V \leq C \text{ et } \|u_m''\| \leq C \quad (2.57)$$

D'ou d'après (2.55) – (2.57) on obtient le résultat

$$\begin{aligned} u_m' \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ u_m'' \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

Alors on peut extraire une sous-suite u_μ comme dans la démonstration du Théorème 2.4.1. et telle que, en outre u vérifie (2.47) – (2.48).

On a $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ d'après le Théorème 2.4.1..

Pour démontrer (2.46), on démontre que

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)).$$

Etape D2. On déduit de (2.10) que

$$\Delta u = u'' + \eta \dot{u} - f \quad (2.58)$$

D'après (2.5) – (2.43), $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ de sorte que, avec (2.48) on en déduit de (2.58) que

$$\Delta u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.59)$$

Posons

$$\Delta u = h, \quad (2.60)$$

Δ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$, soit G son inverse, alors comme $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ on a :

$$u(t) = Gh(t) \quad p.p \quad (2.61)$$

mais d'après les Théorèmes de régularité des solutions des équations linéaires elliptiques- dans [6] et, [7] - on a :

$$G \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); H^2(\Omega)) \quad (2.62)$$

et

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$$

résulte de (2.61) et (2.62). □

2.9 Unicité de la solution

On opère comme dans la partie formelle maintenant justifiée de la démonstration du Théorème 2.4.1. on arrive avec les notations de cette démonstration à : Soient u et v deux solutions, au sens du Théorème 2.7.1., alors $w = u - v$ vérifie

$$w'' + \eta w' - \Delta w = 0 \quad (2.63)$$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad (2.64)$$

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad (2.65)$$

$$w' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.66)$$

$$w'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.67)$$

Formellement tout d'abord, multiplions les deux membres de (2.63) par w' , Alors ce qui est correct lorsque les intégrales ci après ont un sens

On trouve :

$$(w'', w') + \eta(w', w') + (-\Delta w, w') = 0 \quad (2.68)$$

On utilise l'intégration par partie et on utilise les conditions (2.64), on obtient

$$\frac{d}{dt} (\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w)) + 2\eta \|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$$

si $\eta \geq 0$, on obtient que

$$\frac{d}{dt}(\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w)) \leq 0, \quad (2.69)$$

on intègre (2.69) sur $[0, t]$, $t \leq T$ et on applique les conditions (2.64) on obtient

$$\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w) \leq 0, \quad (2.70)$$

on applique l'inégalité de Poincaré sur (2.70) on trouve $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$ si $\eta < 0$, on écrit

$$\frac{d}{dt}(\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w)) = -2\eta\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -2\eta(\|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w, w))$$

on applique le Lemme (1.2.2.) avec $B = -2\eta$, on obtient (2.69), on intègre sur $[0, t]$ et on utilise les conditions (2.64) on obtient (2.70) en utilisant l'inégalité de Poincaré on trouve que $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$.

ce qui prouve le Théorème d'unicité.

Pour justifier la conclusion précédente : on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperbolique linéaires.

Soit $s \in]0, T]$ on introduit :

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\sigma)d\sigma, & t \leq s, \\ 0, & t > s. \end{cases}$$

$w_1(t) = \int_0^t w(\sigma)d\sigma$ de sorte que $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$ si $t \leq s$

on prend le produit scalaire des deux membres de (2.62) par ψ et on intègre sur $]0, s]$, $0 < s \leq T$, on obtient :

$$\int_0^s (w'', \psi)dt + \eta \int_0^s (w', \psi)dt - \int_0^s (\Delta w, \psi)dt = 0$$

Alors

$$-\int_0^s (w', \psi')dt + \eta \int_0^s (w', \psi)dt + \int_0^s a(w, \psi)dt = 0$$

D'ou, comme $\psi' = w$ et $\psi(0) = -w_1(s)$:

$$-\frac{1}{2}\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_0^s (\psi'', \psi)dt + \int_0^s a(w, \psi)dt = 0$$

Alors

$$-\frac{1}{2}\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \eta \int_0^s \|\psi'\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = 0$$

D'ou

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \eta \int_0^s \|\psi'\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = 0$$

Si $\eta \geq 0$, on obtient que

$$\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \forall t, \quad (2.71)$$

et $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$

Si $\eta < 0$, on écrit

$$\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq -2\eta \left(\int_0^s \|\psi'\|_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^s \|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right)$$

On utilise le Lemme (1.2.2.) on obtient (2.68),

alors $w(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$.

Remarque 2.9.1. *Dans le cas du Théorème d'unicité la suite u_m des solutions approchées converge vers u*

2.10 Semi-discrétisation et inéquations variationnelles

De [4] P 432, on applique une semi- discrétisation en la variable de temps, pour trouver l'existence de la solution, soit V un espace de Hilbert reflexif muni d'une norme strictement convexe, ainsi que celle de son dual, avec

$$V \subset H \subset V', \quad (2.72)$$

V dense dans H , H identifié à son dual. et on se donne un opérateur $-\Delta$

$$-\Delta \in \mathcal{L}(V, V')$$

D'après (1.6), on a

$$\langle -\Delta v, v \rangle \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad v \in V. \quad (2.73)$$

Nous allons démontrer par une méthode constructive de semi- discrétisation-le :

Théorème 2.10.1. *On suppose que (2.72) – (2.73) ont lieu.*

Soit K un ensemble convexe fermé de V .

On donne

$$f \in L^2(0, T; H), \quad (2.74)$$

$$u_0 \in K. \quad (2.75)$$

$$u_1 \in H. \quad (2.76)$$

Il existe une fonction u et une seule, tel que

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H), \quad (2.77)$$

$$u(t) \in K \quad p.p, \quad u'(t) \in H \quad (2.78)$$

et dans le cas 1., 2. On obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle u''(t) + \eta u'(t) - \Delta u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt + \\ & \|v^1 - u^1\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

$\forall v \in \mathcal{C}([0, T]; V), v' \in \mathcal{C}([0, T]; H), v'' \in L^2(0, T; V'),$

$v(t) \in K$, presque partout, $v'(t) \in H$.

et dans le cas 2., 3. on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle u''(t) + \eta u'(t) - \Delta u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

$\forall v \in \mathcal{C}([0, T]; V), v' \in \mathcal{C}([0, T]; H), v'' \in L^2(0, T; V'),$

$v(t) \in K$, presque partout, $v'(t) \in H$.

et dans le cas 2., 4., 5. on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle u''(t) + \eta u'(t) - \Delta u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt + \\ & \left(\frac{1 + \eta k}{2}\right) \|v^1 - u^1\|^2 + \\ & \left(\frac{1 + \eta k}{2}\right) \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

$\forall v \in \mathcal{C}([0, T]; V), v' \in \mathcal{C}([0, T]; H), v'' \in L^2(0, T; V'),$

$v(t) \in K$, presque partout, $v'(t) \in H$.

2.11 Semi - discrétisation

On introduit :

$$k = \Delta t = \frac{T}{N} \quad (2.82)$$

telle que N entier fixé appartient \mathbb{N} et on désigne par u^n une approximation de u à l'instant nk .

On introduit :

$$f^n = \frac{1}{k} \int_{(n+1)k}^{nk} f(\sigma) d\sigma, \quad n \geq 1, \quad (2.83)$$

On prend

$$u^0 = u_0 \quad (2.84)$$

et l'on définit de proche en proche les u^n par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{k^2} + \eta \frac{u^{n+1}-u^n}{k}, v - u^n) + \\ \langle -\Delta u^n - f^n, v - u^n \rangle \geq 0 \\ \forall v \in K, \forall v' \in H, u^n \in K, n = 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (2.85)$$

Le systeme (2.85) est une inéquation variationnelle elliptique, admettant une solution unique en effet le systeme (2.85) est équivalent à, pour tout $v \in K$, $v' \in H$

$$\langle -\Delta u^n - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})u^n, v - u^n \rangle \geq (f^n - (\frac{1}{k^2} + \frac{\eta}{k})u^{n+1} - \frac{1}{k^2}u^{n-1}, v - u^n),$$

Alors on applique le théorème 1.2.5. à l'opérateur

$$-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})I$$

où I est l'opérateur d'identité, alors on démontre que l'opérateur $-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})I$ est coercif, on a $\langle -\Delta v, v_0 \rangle = a(v, v_0) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v_0}{\partial x_i} dx$, $v_0 \in K$, et d'après (1.3) – (1.6) on obtient que

$$\begin{aligned} & \langle -(\Delta + (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))v, v - v_0 \rangle = \\ & \langle -\Delta v, v \rangle - \langle -\Delta v, v_0 \rangle - ((\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})v, v - v_0) \geq \\ & \alpha \|v\|_V^2 - a(v, v_0) - ((\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})v, v - v_0) \end{aligned}$$

Alors pour tout $v \in K$

$$\frac{\langle -(\Delta + (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))v, v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} \longrightarrow +\infty$$

lorsque $\|v\|_V \longrightarrow +\infty$

et on démontre que l'opérateur $-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})$ est pseudo - monotone, premièrement on démontre que l'opérateur est borné alors pour tout $u, v \in K$, d'après (1.4) on a :

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})u, v \rangle &= \langle -\Delta u, v \rangle - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})(u, v) \leq \\ C\|u\|_V \|v\|_V - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})(u, v) &\leq C\|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

Alors

$$\| -\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}) \|_* \leq C$$

Deuxièmement si $u_j \rightarrow u$ faiblement dans K , lorsque $j \rightarrow +\infty$, alors
 $\lim(-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))(u_j) = (-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))(u)$,
 pour tout $-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}) \in V'$ puisque

$$\begin{aligned} & \limsup \langle (-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))(u_j), u_j - v \rangle = \\ & \liminf \langle (-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))(u_j), u_j - v \rangle = \\ & \langle (-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))(u), u - v \rangle \end{aligned}$$

$\forall v \in K$, alors :

$$\begin{aligned} & \liminf \langle (-\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k}))(u_j), u_j - v \rangle \geq \\ & \langle -\Delta - (\frac{2}{k^2} + \frac{\eta}{k})(u), u - v \rangle \end{aligned}$$

Alors par application du théorème (1.2.5.), on en déduit que le système (2.85) admette une unique solution.

Nous disons que le système (2.85) est une approximation semi- discrète des inégalités (2.79), (2.80), (2.81).

2.12 L'existence de la solution

On introduit

$$u_k(t) = u^n \text{ dans } [nk, (n+1)k], \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2.86)$$

Alors on démontre le Lemme

Lemme 2.12.1. *Nous prenons $k \rightarrow 0$, alors*

$$\begin{aligned} & u_k \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; V), \\ & u'_k \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; H). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Démonstration. Nous référons à [15], [4], [5] à la démonstration du Lemme 2.12.1.

On veut résoudre le problème de la valeur initiale de telle sorte que $\eta \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \text{ on }]0, T[, \quad (2.88)$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1. \quad (2.89)$$

Puisque l'espace V est séparable, on considère la suite des éléments linéairement indépendants de V , w_1, \dots, w_k, \dots , qui est totale dans V .

En utilisant la méthode de Faedo- Galerkin, on définit pour tout k une solution approchée u_k de (2.88)-(2.89)

$$u_k(t) = \sum_{i=1}^k g_{ik}(t)w_i, \quad (2.90)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_k, w_j) + \eta \frac{\partial}{\partial t}(u_k, w_j) + a(u_k, w_j) &= (f, w_j), \\ j &= 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$u_k(0) = u_{0k}, \quad (2.92)$$

$$u'_k(0) = u_{1k}. \quad (2.93)$$

Où u_{0k} est la projection de V en u_0 sur l'espace engendré par w_1, \dots, w_k , u_{1k} est la projection de H en u_1 sur l'espace engendré par w_1, \dots, w_k .

Les équations (2.90)-(2.91)-(2.92)-(2.93) sont équivalentes à un problème linéaire de la valeur initiale pour l'équation différentielle ordinaire k -dimensionnelle.

Il possède une unique solution définie pour tout temps et en particulier sur $[0, T]$, la fonction u_k est dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$ et $u'_k \in \mathcal{C}([0, T]; V)$, u''_k est dans $L^2(0, T; V)$.

Des estimations a priori sont obtenus en multipliant (2.91) par g'_{jk} et en additionnant ces relations pour $j = 1, \dots, k$.

On obtient :

$$(u''_k, u'_k) + \eta(u'_k, u'_k) + a(u_k, u'_k) = (f, u'_k). \quad (2.94)$$

$$\frac{d}{dt} [\|u'_k\|^2 + a(u_k, u_k)] + 2\eta \|u'_k\|^2 = 2(f, u'_k) \leq \|f\|^2 + \|u'_k\|^2. \quad (2.95)$$

Nous utilisons le Lemme (1.2.2.), on obtient

$$\begin{aligned} u_k &\text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; V), \\ u'_k &\text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; H). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Alors on a (2.87). □

Donc il existe une sous-suite demeure notée u_k et u tel que

$$u \in L^\infty(0, T; V), \quad u' \in L^\infty(0, T; H), \quad (2.97)$$

lorsque $k \rightarrow +\infty$,

$$u_k \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faiblement étoile,}$$

$$u'_k \longrightarrow u' \text{ in } L^\infty(0, T; H) \text{ faiblement étoile.}$$

Puis en passant à la limite dans (2.90)-(2.91)-(2.92)-(2.93) on voit que u est une solution de (2.88)-(2.89) qui satisfait (2.97).

À partir de la démonstration de l'existence, il reste à montrer les propriétés de continuité $u \in \mathcal{C}([0, T]; V)$, $u' \in \mathcal{C}([0, T]; H)$.

Nous donnons le Lemme suivant

Lemme 2.12.2. *Soient X et Y deux espaces de Banach de telle sorte que*

$$X \subset Y \tag{2.98}$$

avec une injection continue.

Si la fonction Φ appartient à $L^\infty(0, T; X)$ et est faiblement continue à valeurs dans Y , alors Φ est faiblement continue à valeurs dans X .

Démonstration. Si l'on remplace Y par la fermeture de X dans Y , on peut supposer que X est dense dans Y .

D'où le plongement continu dense de X dans Y donné par dualité un plongement continu dense de Y' (duale de Y) dans X' (duale de X) :

$$Y' \subset X' \tag{2.99}$$

Par hypothèse, pour tout $\xi \in Y'$,

$$\langle \Phi(t), \xi \rangle \longrightarrow \langle \Phi(t_0), \xi \rangle, \text{ lorsque } t \longrightarrow t_0, \forall t_0, \tag{2.100}$$

et que (2.100) est satisfaite pour tout $\xi \in X'$.

Nous montrons d'abord que $\Phi(t) \in X$ pour tout t et que

$$\|\Phi(t)\|_X \leq \|\Phi\|_{L^\infty(0, T; X)}, \forall t \in [0, T] \tag{2.101}$$

En effet, en regularisant la fonction Φ_* égal à Φ sur $[0, T]$ et 0 à l'extérieure de cet interval $[0, T]$, on trouve une suite de fonctions Φ_m assez régulière de $[0, T]$ dans X tels que :

$$\|\Phi_m(t)\|_X \leq \|\Phi\|_{L^\infty(X)}, \forall m, \forall t \in [0, T] \tag{2.102}$$

et

$$\langle \Phi_m(t), \xi \rangle \longrightarrow \langle \Phi(t), \xi \rangle, m \longrightarrow \infty, \forall \xi \in Y'.$$

Depuis

$$|\langle \Phi_m(t), \xi \rangle| \leq \|\Phi\|_{L^\infty(X)} \|\xi\|_{X'}, \forall m, \forall t,$$

On obtient dans la limite

$$|\langle \Phi(t), \xi \rangle| \leq \|\Phi\|_{L^\infty(X)} \|\xi\|_{X'}, \forall t \in [0, T], \forall \xi \in Y'.$$

Cette inégalité montre que $\Phi(t) \in X$ et que (2.101) est satisfait.

Enfin prouvons (2.100) pour ξ dans X' .

Comme Y' est dense dans X' , il existe, pour tout $\epsilon > 0$, $\xi_\epsilon \in Y'$ de sorte que :

$$\|\xi - \xi_\epsilon\|_{X'} \leq \epsilon.$$

Nous écrivons alors :

$$|\langle \Phi(t) - \Phi(t_0), \xi \rangle| = |\langle \Phi(t) - \Phi(t_0), \xi - \xi_\epsilon \rangle| + |\langle \Phi(t) - \Phi(t_0), \xi_\epsilon \rangle|$$

$$|\langle \Phi(t) - \Phi(t_0), \xi \rangle| \leq 2\epsilon \|\Phi\|_{L^\infty(X)} + |\langle \Phi(t) - \Phi(t_0), \xi_\epsilon \rangle|.$$

Comme $t \rightarrow t_0$, étant donné que, $\xi_\epsilon \in Y'$, l'hypothèse de continuité indique que :

$$\langle \Phi(t) - \Phi(t_0), \xi_\epsilon \rangle \rightarrow 0$$

et donc :

$$\limsup |\langle \Phi(t) - \Phi(t_0), \xi \rangle| \leq 2\epsilon \|\Phi\|_{L^\infty(X)}.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitrairement petit, la limite supérieure précédente est nulle, et (2.97) est prouvée. \square

Il suit du Lemme (2.12.2.) et si (2.97) que, u est faiblement continue de $[0, T]$ dans V .

De même, nous en déduisons de (2.88) que :

$$u'' = f - \eta u' + \Delta u$$

et $u'' \in L^2(0, T; V')$, comme $f \in L^2(0, T; H)$, $u' \in L^\infty(0, T; H)$, $u \in L^\infty(0, T; V)$ ce qui implique $-\Delta u \in L^\infty(0, T; V')$.

Nous donnons le Lemme suivant

Lemme 2.12.3. *Soit X un espace de Banach donné avec X' l'espace dual et soit u et g deux fonctions appartenant à $L^1(0, T; X)$.*

Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est égal à presque partout une fonction primitive de g , il existe $\xi \in X$ tel que*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s) ds, \text{ pour presque partout } t \in [0, T]. \quad (2.103)$$

(ii) *Pour toute fonction de test $\Phi \in \mathcal{D}(]0, T[)$,*

$$\int_0^T u(t) \Phi'(t) dt = - \int_0^T g(t) \Phi(t) dt \quad (2.104)$$

(iii) Pour tout $\xi \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle u, \xi \rangle = \langle g, \xi \rangle \quad (2.105)$$

Dans le sens des distributions scalaires sur $]0, T[$.

Si (i)-(ii)-(iii) sont satisfaits nous disons que g est la dérivée de la distribution u à valeur dans X , et u est presque partout égale à une fonction continue de $[0, T]$ dans X .

Démonstration. On utilise l'intégration par parties on démontre que (i) implique que (ii) et (iii), il reste à vérifier que la propriété (iii) implique la propriété (ii) et que (ii) implique (i).

Si (iii) est satisfait et $\Phi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, alors par définition on a :

$$\int_0^T \langle u(t), \xi \rangle \Phi'(t) dt = - \int_0^T \langle g(t), \xi \rangle \Phi(t) dt \quad (2.106)$$

ou

$$\left\langle \int_0^T u(t) \Phi'(t) dt + \int_0^T g(t) \Phi(t) dt, \xi \right\rangle = 0, \quad \forall \xi \in X', \quad (2.107)$$

(2.104) que soit satisfaite.

Montrons maintenant que (ii) implique (i).

Nous pouvons réduire le cas général au cas $g = 0$.

Nous posons $v = u - u_0$ avec :

$$u_0 = \int_0^t g(s) ds, \quad (2.108)$$

il est clair que u_0 est une fonction absolument continue et que $u_0' = g$, alors (2.104) est satisfait avec u remplacé par $u_0 + v$ et

$$\int_0^T v(t) \Phi'(t) dt = 0, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(]0, T[) \quad (2.109)$$

La preuve de (i) sera possible que si nous montrons que (2.109) implique que v est un élément constant de X .

Soit Φ_0 une fonction dans $\mathcal{D}(]0, T[)$, telle que

$$\int_0^T \Phi_0(t) dt = 1$$

une fonction Φ dans $\mathcal{D}(]0, T[)$ s'écrit

$$\Phi = \lambda \Phi_0 + \Psi', \quad \lambda = \int_0^T \Phi(t) dt, \quad \Psi \in \mathcal{D}(]0, T[), \quad (2.110)$$

En effet : Depuis

$$\int_0^T (\Phi(t) - \lambda\Phi_0(t))dt = 0,$$

la fonction primitive de $\Phi - \lambda\Phi_0$ nulle en 0, appartient à $\mathcal{D}(]0, T[)$, et Ψ est précisément cette fonction primitive.

Selon (2.109) et (2.110),

$$\int_0^T (v(t) - \xi)\Phi(t)dt = 0, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(]0, T[) \quad (2.111)$$

où

$$\xi = \int_0^T v(s)\Phi_0(s)ds.$$

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que (2.108) implique $v(t) = \xi$, $v(t) = w$ qu'une fonction $w \in L^1(X)$ telle que :

$$\int_0^T w(t)\Phi(t)dt = 0, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(]0, T[), \quad (2.112)$$

est nulle presque partout. On démontre ceci par la régularisation :

Si la fonction w^* est égale à w sur $[0, T]$ et à 0 à l'extérieur de cet intervalle $[0, T]$, et si ρ_ϵ est une fonction paire régularisante, alors pour ϵ assez petit, $\rho_\epsilon * \Phi$ appartient à $\mathcal{D}(]0, T[)$, $\forall \Phi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, et

$$\begin{aligned} \int_0^T w(t)(\rho_\epsilon * \Phi)(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} w^*(t)(\rho_\epsilon * \Phi)(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_\epsilon * w^*)(t)\Phi(t)dt = 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

par conséquent, pour tout $\xi > 0$ fixé, $\rho_\epsilon * w^*$ est égal à 0 sur l'intervalle $[\xi, T - \xi]$, pour ϵ suffisamment petit, comme $\epsilon \rightarrow 0$, alors $\rho_\epsilon * w^*$ converge vers w^* dans $L^1(-\infty, +\infty; X)$.

Donc w est nul sur $[\xi, T - \xi]$, comme $\xi > 0$ est arbitrairement petit, w est nul sur tout l'intervalle $[0, T]$. \square

Le Lemme (2.12.3.) montre alors que u est continue de $[0, T]$ dans V' , le Lemme (2.12.2.) et (2.97) signifie que u' est continue faiblement de $[0, T]$ dans H .

Nous donnons le Lemme suivant :

Lemme 2.12.4. *On suppose que w est telle que*

$$w \in L^2(0, T; V), \quad w' \in L^2(0, T; H), \quad (2.114)$$

et

$$w'' - \Delta w \in L^2(0, T; H). \quad (2.115)$$

alors,, après modification sur un ensemble de mesure nulle, u est continue de $]0, T[$ dans V , u' est continue de $[0, T]$ dans H et, dans le sens des distributions sur $]0, T[$,

$$(w'' - \Delta w, w') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|w'\|^2 + a(w, w) \}. \quad (2.116)$$

Démonstration. Nous montrons d'abord (2.116).

Cette relation est immédiate si w est suffisamment régulière, c'est à dire $w \in \mathcal{C}^2([0, T]; V)$.

Sous les hypothèses actuelles, nous constatons que (2.116) est une propriété locale. Et ceci suffit pour prouver pour les fonctions w^* de \mathbb{R} dans V égale à θw sur $]0, T[$ et a 0 sur $\mathbb{R} - [0, T]$, ici θ est une fonction de troncature, \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans $[0, 1]$, égale à 0 sur $\mathbb{R} - [0, T]$ et à 1 sur un certain sous-intervalle de $]0, T[$.

Il est clair qu'une telle fonction w^* appartient à $L^2(\mathbb{R}, V)$, $w'^* \in L^2(\mathbb{R}, H)$, et $w''^* - \Delta w^* \in L^2(\mathbb{R}, H)$.

Par la régularisation de w^* , on obtient une fonction $w_\epsilon^* = \rho_\epsilon * w^*$ (ρ_ϵ est \mathcal{C}^∞) est \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans V .

La relation (2.116) pour w_ϵ^* est évidemment satisfaite sur tout \mathbb{R}

$$(w_\epsilon''^* - \Delta w_\epsilon^*, w_\epsilon'^*) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|w_\epsilon'^*\|^2 + a(w_\epsilon^*, w_\epsilon^*) \}. \quad (2.117)$$

Nous passons à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ dans (2.117) et nous retrouvons la même relation pour w^* , en fin, par restriction à $]0, T[$ on obtient (2.116) pour θw .

Par hypothèse, le membre gauche de (2.116) est L^1 sur $]0, T[$.

En raison de (1.6) la symmétrie de a , $\{a(w, w)\}^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur V équivalent à celui initial et nous déduisons de (2.117) que w est dans $L^\infty(0, T; V)$, $w'' \in \Delta w + L^2(0, T; V')$ appartient également à $L^2(0, T; V')$.

Le Lemme (2.12.2.) implique que w est faiblement continue de $[0, T]$ dans H , w est faiblement continue de $[0, T]$ dans V et w' est faiblement continue de $[0, T]$ dans H .

En utilisant encore (2.163), nous voyons que la fonction réelle

$$t \rightarrow \|w'(t)\|^2 + a(w(t), w(t)) \quad (2.118)$$

est continue sur $[0, T]$.

Il est alors facile de conclure que w est fortement continue de $[0, T]$ dans V , et w' est fortement continue de $[0, T]$ dans H . La preuve est terminée. \square

On déduit du Lemme (2.12.4) que u vérifie une équation similaire à (2.95), à savoir :

$$\frac{d}{dt}[\|u'\|^2 + a(u, u)] + 2\eta\|u'\|^2 = 2(f, u')$$

ce qui montre que la fonction

$$t \longrightarrow \|u'(t)\|^2 + a(u(t), u(t))$$

est continue sur $[0, T]$.

En conjonction avec les propriétés ci-dessus de continuité faible, nous concluons que $u \in \mathcal{C}([0, T]; V)$ et $u' \in \mathcal{C}([0, T]; H)$, alors on a :

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H) \quad (2.119)$$

Pour la démonstration de (2.78) on a si K désigne l'ensemble convexe fermé des fonctions $v \in \mathcal{C}([0, T]; V)$ telles que $v(t) \in K$ presque partout, alors on a $u_k \in K$ pour tout k et comme K est faiblement fermé dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$, on a $u \in K$. Et à partir (2.119) on a $u'(t) \in H$.

On démontre maintenant les inégalités (2.79), (2.80), (2.81), pour ceci, on considère une fonction v satisfaisant à :

$$v \in \mathcal{C}^2([0, T]; V), v(t) \in K, v'(t) \in H, \text{ pour tout } t \in [0, T] \quad (2.120)$$

On pose :

$$v^n = v(nk), n = 0, \dots, N-1,$$

$v_k = \llcorner$ fonction en escalier définie par $v_k(t) = v^n$ dans $]nk, (n+1)k[\gg$

$\tilde{v}_k = \llcorner$ fonction linéaire par morceaux, continue dans $[0, T]$

telle que

$$\tilde{v}_k(nk) = v^{n-1}, n = 1, 2, \dots \text{ et } \tilde{v}_k(0) = v^0 \gg .$$

On note que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} + \eta \frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k \right) dt = \\ & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nk}^{(n+1)k} \left(\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} + \eta \frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k \right) dt = \\ & \sum_{n=1}^{N-1} ((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n), \end{aligned} \quad (2.121)$$

et que

$$\int_0^T \langle -\Delta u_k, v_k - u_k \rangle dt = k^2 \sum_{n=0}^{N-1} \langle -\Delta u^n, v^n - u^n \rangle. \quad (2.122)$$

De même si l'on définit :

$$f_k = f^n \text{ in } [nk, (n+1)k], \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (2.123)$$

On a :

$$\int_0^T \langle f_k, v_k - u_k \rangle dt = k^2 \sum_{n=0}^{N-1} \langle f^n, v^n - u^n \rangle. \quad (2.124)$$

Prenons $v = v^n$ dans (2.85), en multipliant par k^2 on obtient :

$$\begin{aligned} & ((u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) + \eta k(u^{n+1} - u^n), v^n - u^n) + \\ & k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle \geq 0, \end{aligned} \quad (2.125)$$

D'où

$$\begin{aligned} & ((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta k(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n) + \\ & k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle = \\ & ((u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) + \eta k(u^{n+1} - u^n), v^n - u^n) + \\ & k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle + \\ & \frac{1 + \eta k}{2} [\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \\ & \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2] + \\ & \frac{1}{2} [\|v^{n-1} - u^{n-1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \\ & \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2] \end{aligned} \quad (2.126)$$

D'après les propriétés de la norme dans $L^2(\Omega)$, on a l'inégalité

$$\|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq \|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 \quad (2.127)$$

Si on a **le cas 1.** : $\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 < 0$, et $\frac{1+\eta k}{2} < 0$ en utilisant **le cas 1.**, sur le membre

$$\frac{1 + \eta k}{2} [\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2]$$

de l'égalité (2.126) en utilisant l' inégalité (2.127), on obtient l' inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \eta k}{2} [\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \\ & \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2] \geq \\ & \|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 \end{aligned} \quad (2.128)$$

si on a **le cas 2.** :

$\|v^{n-1} - u^{n-1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 < 0$ or $\|v^{n-1} - u^{n-1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 > 0$ en utilisant **le cas 2.**, sur le membre

$$\frac{1}{2} [\|v^{n-1} - u^{n-1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2]$$

de l'égalité (2.126) et en utilisant l'inegalité (2.127), on obtient l' inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\|v^{n-1} - u^{n-1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \\ & \quad \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2] \geq \\ & \quad -\|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \end{aligned} \quad (2.129)$$

en appliquant les inégalités (2.125) – (2.128) – (2.129), à l' égalité (2.126) on obtient :

$$\begin{aligned} & ((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta k(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n) + \\ & \quad k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle \geq \\ & \quad \|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \\ & \quad \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \end{aligned} \quad (2.130)$$

et sommant en n , on en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} [((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta k(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n) + \\ & \quad k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle] \geq \\ & \quad \|v^N - u^N\|^2 - \|v^1 - u^1\|^2 - \\ & \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq \\ & \quad -\|v^1 - u^1\|^2 - \\ & \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \end{aligned} \quad (2.131)$$

Avec (2.121) – (2.122) – (2.124), on en déduit de (2.131) l' inégalité :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} + \eta \frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k \right) dt + \\ & \int_0^T \langle -\Delta u_k - f_k, v_k - u_k \rangle dt - k^2 \langle -\Delta u^0, v^0 - u^0 \rangle + \\ & \quad k^2 \langle f^0, v^0 - u^0 \rangle + \|v^1 - u^1\|^2 + \\ & \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.132)$$

Lorsque $k \rightarrow 0$, $\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} \rightarrow v''$ fortement dans $L^2(0, T; V')$, et $\frac{d\tilde{v}_k}{dt} \rightarrow v'$ fortement dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$, $v_k \rightarrow v$ fortement dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$, $f_k \rightarrow f$ dans $L^2(0, T; H)$ et comme est $-\Delta$ pseudo-monotone, et $k \rightarrow 0$ alors :

$$\liminf \int_0^T \langle -\Delta u_k, u_k \rangle dt \geq \int_0^T \langle -\Delta u, u \rangle dt,$$

et depuis $k^2 f^0 \rightarrow 0$ dans H et comme $k \rightarrow 0$, on en déduit de (2.132) que

$$\int_0^T [(v'' + \eta v', v - u) + \langle -\Delta u - f, v - u \rangle] dt + \|v^1 - u^1\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0 \quad (2.133)$$

pour tout v satisfaisant à (2.120).

Mais si v est donnée comme dans l'inégalité (2.79), il existe v_j vérifiant les conditions analogues à (2.120) et tels que $v_j \rightarrow v$ faiblement dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$, $v_j' \rightarrow v'$ faible étoile dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$, $v_j'' \rightarrow v''$ dans $L^2(0, T; V')$.

Prenant $v = v_j$ dans (2.133) et passant à la limite, on en déduit (2.79).

Si on a **le cas 3.** :

$$\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 > 0 \text{ and } \frac{1+\eta k}{2} < 0$$

en utilisant **le cas 3.**, sur le membre

$$\frac{1 + \eta k}{2} [\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2]$$

de l'égalité (2.126) en utilisant l'inégalité (2.127), on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \eta k}{2} [\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \\ & \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2] \geq \\ & -\|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 \end{aligned} \quad (2.134)$$

et en appliquant les inégalités (2.125) – (2.134) – (2.129) à l'égalité (2.126), on obtient :

$$\begin{aligned} & ((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta k(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n) + \\ & k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle \geq \\ & -\|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 - \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \end{aligned} \quad (2.135)$$

et en sommant en n , on déduit :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} [((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta k(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n) + \\ & k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle] \geq \\ & -\sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 - \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \end{aligned} \quad (2.136)$$

avec (2.121) – (2.122) – (2.124), on en déduit de (2.136) l'inégalité

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left(\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} + \eta \frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k \right) dt + \\
& \int_0^T \langle -\Delta u_k - f_k, v_k - u_k \rangle dt - \\
& k^2 \langle -\Delta u^0, v^0 - u^0 \rangle + k^2 \langle f^0, v^0 - u^0 \rangle + \\
& \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 + \\
& \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{2.137}$$

Mais lorsque $k \rightarrow 0$, $\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} \rightarrow v''$ fortement dans $L^2(0, T; V')$, et $\frac{d\tilde{v}_k}{dt} \rightarrow v'$ fortement dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$, $v_k \rightarrow v$ fortement dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$, $f_k \rightarrow f$ dans $L^2(0, T, H)$ et comme $-\Delta$ est pseudo-monotone, et comme $k \rightarrow 0$, Alors :

$$\liminf \int_0^T \langle -\Delta u_k, u_k \rangle dt \geq \int_0^T \langle -\Delta u, u \rangle dt,$$

et comme $k^2 f^0 \rightarrow 0$ dans H lorsque $k \rightarrow 0$, on en déduit de (2.137) que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T [(v'' + \eta v', v - u) + \langle -\Delta u - f, v - u \rangle] dt + \\
& \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 + \\
& \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{2.138}$$

pour tout v satisfaisant à (2.120).

Mais si v est donné comme dans l'inégalité (2.80) il existe v_j vérifiant les conditions analogues à (2.120) et tels que $v_j \rightarrow v$ faible dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$, $v'_j \rightarrow v'$ faible-étoile dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$, $v''_j \rightarrow v''$ dans $L^2(0, T; V')$.

Prenant $v = v_j$ dans (2.138) et en passant à la limite, on déduit (2.80).

Si on a **le cas 4.** :

$$\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 < 0 \text{ et } \frac{1+\eta k}{2} > 0$$

et **le cas 5.** :

$$\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 > 0 \text{ et } \frac{1+\eta k}{2} > 0$$

dans **les cas 4., 5.**, en appliquant les inégalités (2.125) – (2.129) à l'égalité (2.126) on obtient :

$$\begin{aligned}
& ((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta k(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n) + \\
& k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle \geq \\
& \frac{1 + \eta k}{2} [\|v^{n+1} - u^{n+1}\|^2 - \|v^n - u^n\|^2 - \\
& \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2] - \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2
\end{aligned} \tag{2.139}$$

En sommant en n , on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N-1} [((v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}) + \eta k(v^{n+1} - v^n), v^n - u^n) + \\
& \quad k^2 \langle -\Delta u^n - f^n, v^n - u^n \rangle] \geq \\
& \quad \frac{1 + \eta k}{2} [\|v^N - u^N\|^2 - \|v^1 - u^1\|^2 - \\
& \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2] - \\
& \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq \\
& \quad \frac{1 + \eta k}{2} [-\|v^1 - u^1\|^2 - \\
& \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2] - \\
& \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \quad (2.140)
\end{aligned}$$

Avec (2.121) – (2.122) – (2.124), on déduit de (2.140) l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left(\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} + \eta \frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k \right) dt + \\
& \int_0^T \langle -\Delta u_k - f_k, v_k - u_k \rangle dt - k^2 \langle -\Delta u^0, v^0 - u^0 \rangle + \\
& \quad k^2 \langle f^0, v^0 - u^0 \rangle + \left(\frac{1 + \eta k}{2} \right) \|v^1 - u^1\|^2 + \\
& \quad \left(\frac{1 + \eta k}{2} \right) \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 + \\
& \quad \sum_{n=1}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0 \quad (2.141)
\end{aligned}$$

Mais lorsque $k \rightarrow 0$, $\frac{d^2 \tilde{v}_k}{dt^2} \rightarrow v''$ fortement dans $L^2(0, T; V')$, et $\frac{d\tilde{v}_k}{dt} \rightarrow v'$ fortement dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$, $v_k \rightarrow v$ fortement dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$, $f_k \rightarrow f$ dans $L^2(0, T; H)$

et comme $-\Delta$ est pseudo-monotone, et comme $k \rightarrow 0$ on a :

$$\liminf \int_0^T \langle -\Delta u_k, u_k \rangle dt \geq \int_0^T \langle -\Delta u, u \rangle dt,$$

de $k^2 f^0 \rightarrow 0$ dans H comme $k \rightarrow 0$, on en déduit de (2.138) que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T [(v'' + \eta v', v - u) + \langle -\Delta u - f, v - u \rangle] dt + \\
& \quad \left(\frac{1 + \eta k}{2} \right) \|v^1 - u^1\|^2 + \\
& \quad \left(\frac{1 + \eta k}{2} \right) \sum_{n=0}^{N-1} \|v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)\|^2 + \\
& \quad \sum_{n=0}^{N-1} \|v^{n-1} - u^{n-1} - (v^n - u^n)\|^2 \geq 0 \quad (2.142)
\end{aligned}$$

pour tout v satisfaisant à (2.120).

Mais si v est donné comme dans l'inégalité (2.81), il existe v_j vérifiant les conditions analogues à (2.120) et tel que $v_j \rightharpoonup v$ faible dans $\mathcal{C}([0, T]; V)$, $v'_j \rightharpoonup v'$ faible-étoile dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$, $v''_j \rightharpoonup v''$ dans $L^2(0, T; V')$.

Prenant $v = v_j$ dans (2.142), et en passant à la limite, on en déduit (2.81).

2.13 Démonstration de l'unicité

Régularisation parabolique et inéquations variationnelles hyperboliques

On démontre l'unicité dans le Théorème 2.10.1 alors

Nous avons approché des équations paraboliques par des équations elliptiques :

L'étape naturelle suivante est d'essayer d'approcher des équations hyperboliques par des équations paraboliques :

C'est la régularisation parabolique, dont nous allons montrer l'utilité.

Nous allons appliquer cette méthode à des inéquations d'évolution de type hyperbolique.

Ou relatives à des opérateurs bien posés au sens de Petrowski.

Un résultat général

2.14 Notations et hypothèses.

On donne un couple d'espaces hilbertiens V, H avec

$$V \subset H, V \text{ est dense dans } H, V \longrightarrow H, \text{ continue.} \quad (2.143)$$

On identifie H à son dual, alors $V \subset H \equiv H' \subset V'$.

On posera, pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} L^2(0, T; V) &= L^2(V), & L^2(0, T; H) &= L^2(H), \\ L^2(0, T; V') &= L^2(V'). \end{aligned} \quad (2.144)$$

On posera ensuite

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= L^2(0, T; V \times V) = L^2(V) \times L^2(V), \\ \mathcal{H} &= L^2(0, T; V \times H) = L^2(V) \times L^2(H). \end{aligned} \quad (2.145)$$

Identifiant \mathcal{H} à son dual \mathcal{H}' , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \subset \mathcal{H} &\equiv \mathcal{H}' \subset \mathcal{V}', \\ \text{tel que } \mathcal{V}' &= L^2(V) \times L^2(V'). \end{aligned} \quad (2.146)$$

L'opérateur $A = -\Delta$

On donne $A = -\Delta$ avec

$$-\Delta \in \mathcal{L}(V, V'), \quad (-\Delta)^* = -\Delta, \quad (2.147)$$

et tel qu'il existe c , et α tels que

$$\langle -\Delta v, v \rangle + c\|v\|^2 \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad c > 0, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V \quad (2.148)$$

On munira V du produit scalaire suivant c'est loisible d'après (2.147), (2.148) :

$$(u, v)_V = ((-\Delta + c)u, v), \quad u, v \in V. \quad (2.149)$$

L'opérateur $-\Delta$ sur $L^2(V)$

On définit l'opérateur $-\Delta$ de $L^2(V) \longrightarrow L^2(V')$ qui est donné par :

$$(-\Delta v)(t) = -\Delta(v(t)) \text{ presque partout.} \quad (2.150)$$

L'opérateur \mathcal{A} .

On donne $k > 0$, on définit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} kI & -I \\ -\Delta & kI \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'). \quad (2.151)$$

Si $v = \{v_1, v_2\} \in \mathcal{V}$, alors

$$\mathcal{A}v = \{kv_1 - v_2, -\Delta v_1 + kv_2\} \in \mathcal{V}'.$$

Le produit scalaire sur V est donné par (2.146), le produit scalaire dans \mathcal{H} est donné par :

$$(u, v) = \int_0^T [(u_1, v_1)_V + (u_2, v_2)] dt$$

alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}v, v \rangle &= \int_0^T [(kv_1 - v_2, v_1)_V + \langle -\Delta v_1 + kv_2, v_2 \rangle] dt = \\ &= \int_0^T [k((-\Delta + c)v_1, v_1) - ((-\Delta + c)v_2, v_1) + \\ &\quad \langle -\Delta v_1, v_2 \rangle + k(v_2, v_2)] dt \geq \\ &= \int_0^T [k\alpha \|v_1\|_V^2 + k\|v_2\|^2 - c\|v_1\|\|v_2\|] dt \end{aligned}$$

Mais

$$\|v\| \leq d\|v\|_V, \quad \forall v \in V, \quad d > 0, \quad (2.152)$$

D'où l'on déduit que si :

$$k > \frac{cd}{2\sqrt{\alpha}} \quad (2.153)$$

Alors il existe $\alpha_0 > 0$ tel que :

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle \geq \alpha_0 \|v\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.154)$$

Les semi-groupes $G(s)$ et $g(s)$

On se donne un semi-groupe $G(s)$ continu dans $L^2(V)$, $L^2(H)$ et $L^2(V')$.

$G(s)$ est un semi-groupe de contractions dans $L^2(H)$.

On désigne par $-\Lambda$ le générateur infinitésimal de $G(s)$, et par $D(\Lambda; L^2(H))$ est le domaine de Λ dans $L^2(H)$.

On associe à $G(s)$ le semi-groupe $g(s)$ dans \mathcal{V} , \mathcal{H} , \mathcal{V}' , qui est donné par :

$$g(s) = \begin{pmatrix} G(s) & 0 \\ 0 & G(s) \end{pmatrix} \quad (2.155)$$

et on désigne par $-L$ est le générateur infinitésimal de $g(s)$, qui est donné par :

$$L = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \quad (2.156)$$

avec le domaine

$$D(L; \mathcal{H}) = D(\Lambda; L^2(V)) \times D(\Lambda; L^2(H)). \quad (2.157)$$

Le convexe \mathcal{K}_i

On donne le convexe \mathcal{K}_i , $i = 1, 2$ avec

$$\text{L'ensemble } \mathcal{K}_i, \text{ est un convexe fermé de } L^2(V), 0 \in \mathcal{K}_i, i = 1, 2 \quad (2.158)$$

et l'on suppose que :

$$\begin{aligned} \text{il existe } \sigma > 0 \text{ et } w_0 \in L^2(V) \text{ tels que} \\ \sigma \mathcal{K}_2 + w_0 \subset \mathcal{K}_1. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Remarque 2.14.1. Dans les applications, en utilisera l'ensemble $\mathcal{K}_1 = L^2(V)$, tel que (2.158) est satisfait pour tout \mathcal{K}_2 .

Compatibilité

On fait les hypothèses suivantes :

$$G(s)(-\Delta)(v) = -\Delta G(s)v, \forall s \geq 0, \forall v \in L^2(V), \quad (2.160)$$

$$G(s)\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_i, \forall s \geq 0, i = 1, 2, \quad (2.161)$$

Il existe $\rho > 0$ tel que, $\forall s \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}_i, i = 1, 2,$

$$G(s)v + G^*(s)v - G^*(s)G(s)v + (\rho - 1)v \in \rho \mathcal{K}_i. \quad (2.162)$$

et telle que $G^*(s)$ est le semi-groupe adjoint de $G(s)$.

Nous donnons le théorème suivant :

Théorème 2.14.2. On suppose que $-\Delta$ est donné avec (2.147) – (2.148) et \mathcal{A} est donné par (2.151) avec (2.153).

On suppose que (2.158) – (2.159) – (2.160) – (2.161) – (2.162) sont satisfaits.
Et en outre :

$$\int_0^T ((-\Delta + c)\Lambda v_1, v_1) dt \geq 0, \quad \forall v_1 \in D(\Lambda; L^2(V)). \quad (2.163)$$

Soit $f \in D(\Lambda; L^2(H))$ et l'on pose $F = \{0, f\} \in \mathcal{H}$.

Alors il existe une fonction unique u telle que :

$$u \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \quad u \in D(L; \mathcal{H}), \quad \text{et} \quad (2.164)$$

$$\langle Lu, v - u \rangle + \langle \mathcal{A}u, v - u \rangle \geq \langle F, v - u \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (2.165)$$

Démonstration. Unicité.

Soient u et u^* deux solutions. Prenant $v = u^*$ (resp. $v = u$) dans l'inéquation relative à u (resp. u^*) et additionnant, il vient

$$\langle L(u - u^*), u - u^* \rangle + \langle \mathcal{A}(u - u^*), u - u^* \rangle \leq 0 \quad (2.166)$$

Comme $G(s)$ est de contractions dans $L^2(H)$, Λ est ≥ 0 sur $D(\Lambda; L^2(H))$ et d'après (2.159) Λ est ≥ 0 sur $D(\Lambda; L^2(V))$, donc :

$$\langle L(u - u^*), u - u^* \rangle \leq 0$$

et grâce à (2.154), on en déduit donc de (2.166) que :

$$\alpha_0 \|u - u^*\|^2 \leq 0,$$

d'où

$$u = u^*.$$

Existence.

1) Régularisation parabolique.

On introduit l'opérateur

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Delta + c \end{pmatrix} \quad (2.167)$$

et l'on remplace \mathcal{A} par $\mathcal{A} + \epsilon \mathcal{B}$, $\epsilon > 0$.

On note que :

$$\langle (\mathcal{A} + \epsilon \mathcal{B})v, v \rangle \geq \alpha_0 \|v\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon \int_0^T \langle (-\Delta + c)v_2, v_2 \rangle dt \quad (2.168)$$

Et donc en particulier $\mathcal{A} + \epsilon \mathcal{B}$ est coercif sur \mathcal{V} .

On est dans les conditions d'application du Théorème (9.7), dans [4], P 292.

Il existe donc un élément u_ϵ et un seul vérifiant :

$$u_\epsilon \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \quad u_\epsilon \in D(L; \mathcal{V}), \quad (2.169)$$

$$\langle Lu_\epsilon, v - u_\epsilon \rangle + \langle (\mathcal{A} + \epsilon \mathcal{B})u_\epsilon, v - u_\epsilon \rangle \geq \langle F, v - u_\epsilon \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (2.170)$$

Le problème (2.169)-(2.170) est le régularisé parabolique du problème initial.

2) Estimations sur u_ϵ

Première estimation

On fait $v = 0$ dans (2.170) car $0 \in \mathcal{H}_i$.

Alors :

$$\begin{aligned} \langle Lu_\epsilon, u_\epsilon \rangle + \langle (\mathcal{A} + \epsilon\mathcal{B})u_\epsilon, u_\epsilon \rangle &\leq \langle F, u_\epsilon \rangle = \\ &\int_0^T \langle f, u_{\epsilon 2} \rangle dt \leq C \|u_{\epsilon 2}\|_{L^2(H)}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

et donc d'après (2.168) et comme $\langle Lu_\epsilon, u_\epsilon \rangle \geq 0$: Alors

$$u_\epsilon \text{ demeure dans un borné de } \mathcal{H} \text{ lorsque } \epsilon \longrightarrow 0. \quad (2.172)$$

Deuxième estimation

On utilise maintenant la méthode de démonstration du Théorème (9.7).

On multiplie les deux membres de (2.170) par $\rho > 0$ (intervenant dans (2.162)) et l'on choisit v par (c'est loisible d'après (2.162)) :

$$\rho v = [g(s) + g^*(s) - g^*(s)g(s) + (\rho - 1)]u_\epsilon.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \langle Lu_\epsilon - (g^*(s) - I)(g(s) - I)u_\epsilon + \langle (\mathcal{A} + \epsilon\mathcal{B})u_\epsilon - (g^*(s) - I)(g(s) - I)u_\epsilon \rangle &\geq \\ \langle F - (g^*(s) - I)(g(s) - I)u_\epsilon \rangle. \end{aligned}$$

grâce à (2.160), on en tire

$$\begin{aligned} \langle (Lg(s) - I)u_\epsilon(g(s) - I)u_\epsilon \rangle + \langle (\mathcal{A} + \epsilon\mathcal{B})(g(s) - I)u_\epsilon, \\ (g(s) - I)u_\epsilon \rangle &\leq \langle (g(s) - I)F, (g(s) - I)u_\epsilon \rangle \end{aligned} \quad (2.173)$$

et comme L est ≥ 0 , on en déduit, en utilisant (2.168) que :

$$\|(g(s) - I)u_\epsilon\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|(G(s) - I)f\|_{L^2(H)} \|(g(s) - I)u_\epsilon\|_{\mathcal{H}}$$

d'où

$$\left\| \frac{g(s) - I}{s} \cdot u_\epsilon \right\|_{\mathcal{H}} \leq C \left\| \frac{G(s) - I}{s} \cdot f \right\|_{L^2(H)} \quad (2.174)$$

comme on a supposé que $f \in D(\Lambda; L^2(H))$, on en déduit de (2.174), en faisant tendre s vers 0, que

$$\|Lu_\epsilon\|_{\mathcal{H}} \leq cst$$

ce qui, joint à (2.172) montre que :

$$u_\epsilon \text{ demeure dans un borné de } D(L; \mathcal{H}) \text{ lorsque } \epsilon \longrightarrow 0. \quad (2.175)$$

Troisième estimation

On prend maintenant dans (2.170)

$$v = \{\sigma u_{\epsilon 2} + w_0 \cdot u_{\epsilon 2}\},$$

ce qui est loisible d'après (2.159).

Alors (2.170) donne :

$$\int_0^T \langle (-\Delta + c)(\Lambda u_{\epsilon 1} + k u_{\epsilon 1} - u_{\epsilon 2}), \sigma u_{\epsilon 2} + w_0 - u_{\epsilon 1} \rangle dt \geq 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sigma \int_0^T \langle (-\Delta + c)u_{\epsilon 2}, u_{\epsilon 2} \rangle dt &\leq \int_0^T \langle (-\Delta + c)(\Lambda u_{\epsilon 1} + k u_{\epsilon 1}), \sigma u_{\epsilon 2} + w_0 - u_{\epsilon 1} \rangle dt \\ &\quad - \int_0^T \langle (-\Delta + c)u_{\epsilon 2}, w_0 - u_{\epsilon 1} \rangle dt \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha \sigma \|u_{\epsilon 2}\|_{L^2(V)}^2 \leq C \|\Lambda u_{\epsilon 1} + k u_{\epsilon 1}\|_{L^2(V)} (\|u_{\epsilon 2}\|_{L^2(V)} + \|w_0 - u_{\epsilon 1}\|_{L^2(V)}) + (C \|u_{\epsilon 2}\|_{L^2(V)} \|w_0 - u_{\epsilon 1}\|_{L^2(V)}) \quad (2.176)$$

Mais grâce à (2.175)

$$\|u_{\epsilon 1}\|_{L^2(V)} + \|\Lambda u_{\epsilon 1}\|_{L^2(V)} \leq C$$

et donc (2.176) donne

$$\|u_{\epsilon 2}\|_{L^2(V)}^2 \leq C(1 + \|u_{\epsilon 2}\|_{L^2(V)}),$$

$$u_{\epsilon 2} \text{ demeure dans un borné de } L^2(V) \quad (2.177)$$

ou encore (grâce à (2.175)) :

$$u_{\epsilon} \text{ demeure dans un borné de } \mathcal{V}. \quad (2.178)$$

Passage à la limite

On peut alors extraire une suite, encore notée u_{ϵ} , telle que

$$u_{\epsilon} \longrightarrow u \text{ dans } D(L, \mathcal{H}) \cap \mathcal{V} \text{ faible, } u \in \mathcal{H}. \quad (2.179)$$

Alors $\langle \epsilon(\mathcal{B}u_{\epsilon}, v - u_{\epsilon}) \rangle \longrightarrow 0$ et (2.170) donne (2.165). \square

D'après la démonstration du Théorème (2.15.2.) nous donnons les remarques suivantes :

Remarque 2.14.3. *L'inéquation variationnelle (2.165) n'est pas du type parabolique, parce que \mathcal{A} restreint à \mathcal{V} n'est pas coercif sur \mathcal{V} , mais seulement sur \mathcal{H} , c'est la situation typique des opérateurs hyperboliques ou bien posé au sens de Petrowski.*

Remarque 2.14.4. *Avant de donner des applications explicites (2.165), comme $\mathcal{H} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, (2.165) se décompose en deux inéquations*

$$\begin{aligned} u_1 &\in D(\Lambda; L^2(V)), \quad u_1 \in \mathcal{K}_1, \\ \int_0^T [(\Lambda u_1, v_1 - u_1)_V + (ku_1 - u_2, v_1 - u_1)_V] dt &\geq 0, \\ \forall v_1 &\in \mathcal{K}_1, \end{aligned} \quad (2.180)$$

$$\begin{aligned} u_2 &\in D(\Lambda; L^2(H)) \cap L^2(V), \quad u_2 \in \mathcal{K}_2, \\ \int_0^T [(\Lambda u_2, v_2 - u_2) + \langle -\Delta u_1 + ku_2, v_2 - u_2 \rangle] dt &\geq \\ \int_0^T (f, v_2 - u_2) dt, \quad \forall v_2 &\in \mathcal{K}_2. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Cas particulier, $\mathcal{K}_1 = L^2(V)$ alors (2.166) se réduit à l'équation

$$\Lambda u_1 + ku_1 - u_2 = 0. \quad (2.182)$$

Remarque 2.14.5. *La troisième estimation dans la démonstration du Théorème (2.15.2.) n'est pas satisfaite si :*

$$\mathcal{K}_2 \text{ est borné dans } L^2(V), \quad (2.183)$$

alors (2.159) est inutile.

Remarque 2.14.6. *Supposons que \mathcal{A} est donné par (2.152), mais avec $k = 0$ on a :*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.184)$$

et faisons l'hypothèse suivante :

$\mathcal{K}_1 = L^2(V)$, \mathcal{K}_2 est borné dans $L^2(V)$ et si $u_j \in D(\Lambda; L^2(V))$ et $(\Lambda + \epsilon)v_j$ demeure dans un borné de $L^2(V)$, alors v_j demeure dans un borné de $L^2(V)$, pour tout j , lorsque $j \rightarrow 0$.

Dans ces conditions, le Théorème (2.15.2.) est aussi satisfait.

En effet, on prend :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\Delta + c \end{pmatrix} \quad (2.185)$$

de sorte que :

$$\langle (\mathcal{A} + \epsilon\mathcal{B})v, v \rangle = \epsilon \langle \mathcal{B}v, v \rangle \geq \epsilon \|v\|_{\mathcal{V}}^2,$$

alors il existe u_ϵ dans $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ et $D(L; \mathcal{V})$ tel que

$$(Lu_\epsilon, v - u_\epsilon) + \langle (\mathcal{A} + \epsilon\mathcal{B})u_\epsilon, v - u_\epsilon \rangle \geq (F, v - u_\epsilon), \quad \forall v \in \mathcal{K},$$

alors

$$((-\Delta + c)(\Lambda u_{\epsilon 1} - u_{\epsilon 2} + \epsilon u_{\epsilon 1}), v_1 - u_{\epsilon 1}) \geq 0, \quad \forall v_1 \in L^2(V)$$

et donc :

$$(\Lambda + \epsilon)u_{\epsilon 1} = u_{\epsilon 2}. \quad (2.186)$$

Mais $u_{\epsilon 2} \in \mathcal{K}_2$ borné dans $L^2(V)$ et donc $u_{\epsilon 1}$ demeure dans un borné de $L^2(V)$ et borné de $D(\Lambda, L^2(V))$.

Alors on a les résultats de la première et de la troisième estimation dans la démonstration du Théorème (2.15.2.), la deuxième estimation est sans changement.

Remarque 2.14.7. On peut remplacer les hypothèses (2.161) – (2.162) par les suivantes : Il existe

$$\beta \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall s \geq 0, e^{\beta s} G(s) \mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_i, i = 1, 2, \quad (2.187)$$

Il existe

$$\rho > 0, \text{ tel que, } \forall s \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}_i, i = 1, 2, \\ e^{\beta s} G(s)v + e^{-\beta s} G^*(s)v = G^*(s)G(s)v + (\rho - 1)v \in \rho \mathcal{K}_i. \quad (2.188)$$

Prémière application

D'après le théorème (2.15.2.) on va démontrer, comme application :

Théorème 2.14.8. On donne la fonction $f = f(x, t)$, avec :

$$f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \quad f(x, 0) = 0. \quad (2.189)$$

Il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(Q), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.190)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \text{ dans } Q, \quad (2.191)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \text{ sur } \Omega, \quad (2.192)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\geq 0 \text{ sur } \Sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \times \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \text{ sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (2.193)$$

De sorte que $\frac{\partial}{\partial n}$ = dérivée normale à $\partial\Omega$, n vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . D'après (2.190), $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f \in L^2(Q)$, de sorte que $\frac{\partial u}{\partial n}$ admette un sens d'après [8].

Démonstration. On applique le Théorème (2.15.2.) dans les conditions suivantes

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega), \\ (-\Delta u, v) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \\ \mathcal{K}_1 &= L^2(V) = L^2(0, T; V), \\ \mathcal{K}_2 &= \{v \mid v \in L^2(V), v \geq 0, \text{ presque partout sur } \Sigma\}, \end{aligned}$$

$$G(s)\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t-s) & \text{si } t \geq s, \\ 0 & \text{si } t < s. \end{cases}$$

On vérifie que toutes les conditions du Théorème (2.15.2.) sont satisfaites, en choisissant $k > 0$.

L'opérateur Λ est $\Lambda = \frac{\partial}{\partial t}$, avec domaine les fonctions nulles pour $t = 0$, on peut ici utiliser (2.182).

Alors on a l'existence et l'unicité d'un couple (u_1, u_2) avec les hypothèses :

$$u_1 \in D(\Lambda; L^2(V)), \text{ tel que :}$$

$$u_1 \in L^2(V), u_1' \in L^2(V), u_1(0) = 0, \quad (2.194)$$

$$u_2 \in D(\Lambda; L^2(H)), u_2 \in \mathcal{K}_2, \quad (2.195)$$

$$u_1' + ku_1 - u_2 = 0, \quad (2.196)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_2' + (-\Delta)u_1 + ku_2 - f, v_2 - u_2) dt &\geq 0, \\ \forall v_2 \in \mathcal{K}_2. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Comme \mathcal{K}_2 est un cône de sommet l'origine, (2.197) équivaut à

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_2' + (-\Delta)u_1 + ku_2 - f, v_2) dt &\geq 0 \\ \forall v_2 \in \mathcal{K}_2, \text{ avec } \int_0^T (u_2' + (-\Delta)u_1 + ku_2 - f, v_2) dt &= 0, \\ \text{si } v_2 &= u_2. \end{aligned} \quad (2.198)$$

en utilisant la définition de \mathcal{K}_2 , on en déduit que :

$$u_2' - \Delta u_1 + ku_2 = f, \text{ dans } Q. \quad (2.199)$$

Si l'on multiplie par v_2 et l'on intègre par parties, les deux membres de (2.199) on déduit :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u_1}{\partial n} v_2 d\Sigma = \int_0^T (u_2' + (-\Delta)u_1 + ku_2 - f, v_2) dt \quad (2.200)$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial u_1}{\partial n} v_2 d\Sigma &\geq 0, \forall v_2 \in \mathcal{K}_2, \\ \text{avec, } \int_{\Sigma} \frac{\partial u_1}{\partial n} v_2 d\Sigma &= 0, \text{ si } v_2 = u_2, \end{aligned} \quad (2.201)$$

alors

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} \geq 0, \quad u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0. \quad (2.202)$$

Posons :

$$w_i = e^{kt} u_i, \quad i = 1, 2.$$

On déduit de (2.196) et (2.201) que

$$\begin{aligned} w_1' - w_2 &= 0, \\ w_2' - \Delta w_1 &= e^{kt} f = f^*, \\ w_2 &\geq 0, \text{ sur } \Sigma, \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Sigma, \\ w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n} &= 0, \text{ sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Alors $u = w_1$ satisfait aux diverses conditions du Théorème (2.15.2.) , avec f remplacée par f^* .

Comme il ya équivalence de la recherche entre u , de $\{w_1, w_2\}$ et de $\{u_1, u_2\}$ on a aussi l'unicité. \square

Déuxième application

Nous allons considérer le problème du solutions périodiques en t d'une inéquation du type (2.191) – (2.193).

Il faut prendre garde que le changement $w_i = e^{kt} u_i$, $i = 1, 2$, détruit la périodicité en t alors on va vérifier ceci.

On donne le Théorème suivant comme application sur les Théorèmes (2.15.2.) et (2.15.8.)

Théorème 2.14.9. On donne la fonction $f = f(x, t)$, avec

$$f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \quad f(x, 0) = f(x, T), \quad x \in \Omega. \quad (2.204)$$

Soit $k = \eta > 0$.

Il existe une unique fonction u , satisfait (2.190) et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad \text{dans } Q, \quad (2.205)$$

$$u(x, 0) = u(x, T),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (2.206)$$

et (2.193).

Démonstration. Puisque le condition (2.190) est satisfait alors d'après (2.204) on a

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, T)$$

On applique le Théorème (2.15.2.) avec les même hypothèses du Théorème (2.15.8.), mais le semi-groupe $G(s)$ est donné cette fois par :

$$G(s)\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t - s + T), & \text{si } t \leq s, \\ \varphi(t - s), & \text{si } t \geq s. \end{cases}$$

On obtient l'existence et l'unicité d'un couple $\{u_1, u_2\}$ avec

$$\begin{aligned} u_1 &\in D(\Lambda; L^2(V)), \text{ tels que } u_1 \in L^2(V), \quad u_1' \in L^2(V), \\ u_1(x, 0) &= u_1(x, T), \quad u_2 \in D(\Lambda; L^2(H)), \quad u_2 \in \mathcal{K}_2, \end{aligned} \quad (2.207)$$

et (2.196) – (2.197).

On interprété (2.205) – (2.206) comme dans le Théorème (2.15.8.) et que $u = u_1$ satisfait les conditions du Théorème (2.15.8.), comme on a équivalence entre la recherche de u , de $\{u_1, u_2\}$ on a aussi l'unicité.

Alors on obtient l'unicité dans le Théorème (2.10.1.) lorsque $\eta > 0$. \square

2.15 Etude d'une application des équations des ondes amorties

Nous considérons le problème aux conditions initiales suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ \quad \quad \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = 2 \sin \pi x = u_0(x), \quad x \in]0, 1[, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\sin 2\pi x = u_1(x), \quad x \in]0, 1[. \end{array} \right. \quad (2.208)$$

ou $\eta > 0$, et $f(x, t) = -2\eta\pi(\sin \pi x \sin \pi t + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \cos 2\pi t)$
l'unique solution de (2.208) est donnée par :

$$u(x, t) = 2 \sin \pi x \cos \pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \sin 2\pi t \quad (2.209)$$

Pour trouver l'unique solution numérique v , la façon dont nous tirons le schéma aux différences finies pour (2.208) est qu'il faut remplacer les dérivées par différences finies. Mais pour (2.208) on a à rapprocher la dérivée par rapport à x et la dérivée par rapport à t .

Soit $n \geq 1$ un nombre entier donné, la grille dans la direction x est $\Delta x = \frac{1}{n+1}$. Les points de la grille sont $x_j = j\Delta x$ pour $j = 0, 1, \dots, n+1$.

Les niveaux discrets dans le temps sont donnés par $t_m = m\Delta t$ pour des nombres entiers $m \geq 0$, où $\Delta t > 0$ est le pas de temps. La fonction de grille v , avec $v_j^m = v(x_j, t_m)$, se rapproche u .

Alors on définit la méthode des différences finies

$$\frac{v_j^{m+1} - 2v_j^m + v_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} + \eta \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} - \frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} = f(x_j, t_m) \quad (2.210)$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$ et pour $m \geq 1$. La solution discrète satisfait aux conditions aux limites dans (2.208),

$$v_0^m = v_{n+1}^m = 0 \quad \text{pour } m \geq 0.$$

si $\{v_j^m\}_{j=1}^n$ et $\{v_j^{m-1}\}_{j=1}^n$ sont connus, alors les solutions $\{v_j\}_{j=1}^n$ peuvent être calculées à partir de (2.210). La solution v vérifie les deux premiers niveaux de temps on a

$$v_j^0 = u_0(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.211)$$

pour obtenir l'approximation v_j^1 de $u(x, \Delta t)$ nous utilisons un développement de Taylor par rapport au temps pour obtenir

$$u(x, \Delta t) = u(x, 0) + (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) + O((\Delta t)^3)$$

$$u(x, \Delta t) = u_0(x) + (\Delta t)u_1(x) + \frac{(\Delta t)^2}{2}u_0''(x) + O((\Delta t)^3).$$

comme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) = u_0''(x).$$

Alors, on a l'approximation suivante v_j^1 de $u(x_j, \Delta t)$

$$v_j^1 = v_j^0 + (\Delta t)u_1(x_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(v_{j-1}^0 - 2v_j^0 - v_{j+1}^0). \quad (2.212)$$

On écrit (2.210) dans une forme plus compacte, soit $v^m \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur $v^m = (v_1^m, v_2^m, \dots, v_n^m)^\tau$, τ est le transposé et A la matrice tridiagonal appartenant à l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{R} possédant n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

alors (2.210) peut être écrite pour $m \geq 1$,

$$v^{m+1} = \left(\frac{2 + \eta \Delta t}{1 + \eta \Delta t} I - \frac{(\Delta t)^2}{1 + \eta \Delta t} A \right) v^m - \frac{1}{1 + \eta \Delta t} v^{m-1} + f^m \quad (2.214)$$

où $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice identité, et $f^m = (f_1^m, f_2^m, \dots, f_n^m)^\tau$ avec des composantes données par :

$$f_j^m = f(x_j, t_m) = -\frac{2\eta\pi(\Delta t)^2}{1 + \eta \Delta t} (\sin \pi x_j \sin \pi t_m + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x_j \cos 2\pi t_m)$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $m \geq 1$, ou les rapprochements initiaux v^0 et v^1 sont déterminées par (2.211) et (2.212).

2.16 Conclusion

Nous avons traité les équations d'évolutions, plus particulièrement nous avons étudié l'équation des ondes perturbée par un facteur d'amortissement. Avec des conditions de Dirichlet dans un ouvert borné dans \mathbb{R}^n .

En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et en passant à la limite par compacité .

L'unicité est établi par une des méthodes classique.

Pour justifier la conclusion d'unicité on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperboliques linéaires dans le cas favorables où on a arrive à un problème bien posé.

Une question naturelle est maintenant celle de la régularité de la solution, on a utilise la méthode de Faedo- Galerkin, et on a établi une estimation a priori supplémentaire qui a montré l'existence d'une solution régulière en passant à la limite par compacité.

On a établi par des méthodes classiques l'unicité de la solution régulière.

Pour justifier la conclusion de l'unicité on a utilisé un procédé classique dans le cas des équations hyperboliques linéaires.

Dans le problème la méthode des différences finies peut être très importante il ya possibilité de discrétisation dans le problème d'evolution une discrétisation en la variable de temps. Alors nous avons démontre par une méthode constructive de semi - discretisation en la variable de temps le Théorème d'existence.

On a utilisé la régularisation parabolique on montre l'unicité dans le problème des différences finies et en a fait une application numérique sur l'equation des ondes amorties.

Bibliographie

- [1] H. Bennour and M. S. Said, *Existence and uniqueness of solutions for damped linear hyperbolic equations with Dirichlet boundary conditions*, IJ-PAM, Volume 95, No.2, 253-296 (2014).
- [2] H.Brezis, *Analyse fonctionnelle*, paris. Masson.(1983).
- [3] J.Dabas and D.Bahuguna, *Existence and uniqueness of solutions of strongly damped wave equations with integral boundary conditions*, Nonlinear dynamics and systems theory, 11 (1)(2011) 65-82.
- [4] J.L.Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites Non-linéaires*, Editions Dunod. Paris. (1969).
- [5] J.L.Lions et E.Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1 et 2, Paris. Dunod. (1968).
- [6] J.L.Lions et E.Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, (3 volumes), Dunod, (1968).
- [7] L.Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic differential equations*, Comm. Pure. Applied. Math., 648-674, 8 (1955).
- [8] H.Nishiyama, *Polynomial decay for damped wave equations on partially rectangular domains*, Math. Res. Lett. 16 (2009), no.5, 881-894.
- [9] A.quarteroni, F.Salri, *calcul scientifique*, Springer. Milan et Lausanne. Septembre (2006).
- [10] R.E.Showalter, *Hilbert Space Methods for partial Differential equations*, Austin. Texas. Jaunuary. (1977).
- [11] L.shwartz, *Théorie des distributions*, I,II.Hermann, paris,1950-1951.
- [12] L.shwartz, *Distributions à valeurs vectorielles*, I, II Annales institut fourier, 7 (1957), 1-141 ; 8 (1958), 1-209.
- [13] S.I.Sobolev, *Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la physique mathématique*, Léningrad, 1950.
- [14] W.A.Strauss, *On the continuity of functions with values in various Banach spaces*, Pacific J.Math., 19,3 (1966), 543-555.
- [15] R.Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical systems in Mechanics and physics*, Second. edition. Springer. Vol. 68 (1977).

- [16] R.Temam, *Navier-Stokes equations*, Theory and numerical analysis, 3rd rev.ed., North-Holland, Amstredam, 1984.
- [17] A.Tveito and R.Winther, *Introduction to partial Differential equations*, a Computation. approach. Springer. Oslo. Norway. July. (1998).
- [18] K.Yosida, *Functional Analysis*, Grund. leheren. B. 123. Springer. (1965).

ملخص

هذا العمل هو أطروحة في مجال المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية درسنا المعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية مضطربة من جراء عامل التضاؤل بشروط ديركليت في مفتوحة محدودة من R^n يبرهن الوجود، الوحدانية، وانتظام الحل. إستعملنا بعض طرق في حل المسألة الحدية، طريقة التراص، رتابة، الانتظام، تقريب التكرارية، عندئذ طبقنا تقنية شبه المنفصلة في متغير الوقت. ودرسنا تطبيق لمعادلة الموجة المخففة.

Abstract

This thesis work is in the domain of partial differential equations, we studied the wave equation perturbed by a damping factor with Dirichlet conditions in a bounded in R^n . We prove the existence, uniqueness, regularity of the solution. Using some methods for solving the limit problem, the method of compactness, of monotony, of regularization, of iterative approximation then we apply semi discretization in time technique. And study an application to the damped wave equation. We give an numerical example.

Résumé

Ce travail de thèse s'inscrit dans le domaine des équations différentielle aux dérivées partielles, on étudiée l'équation des ondes perturbé par un facteur d'amortissement avec conditions de Dirichlet dans un ouvert borné dans R^n on démontre l'existence, l'unicité, et la régularité de la solution. En utilisant quelques méthodes de résolution de problème aux limite, la méthode de compacité, de monotonie, de régularisation, d'itératives d'approximation alors on applique la technique de semi discrétisation en la variable de temps. Et on étudiée un application à l'équation des ondes amorties