

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister

Renforcement des voutes métalliques cylindriques Etude théorique et expérimentale

Option :

Mécanique des Structures

Par

Melle Samiha SATOUTAH

DIRECTEUR DE MEMOIRE : Dr Yazid HADIDANE

M.C Université de Annaba

DEVANT LE JURY

Président : Pr Bachir REDJEL

Prof. Université de Annaba

Examineur : Dr Kamel DJEGHABA

M.C Université de Annaba

Membre Invité : Dr Chawki DJOUINI

M.C Université de Annaba

Résumé

Les structures minces de type coques métalliques autoportantes sont particulièrement sensibles au flambage ou instabilité géométrique. Leur dimensionnement s'opère en ayant recours à des règles simplifiées, cette approche est généralement conservative. En effet ces structures sont très sensibles à la moindre imperfection de forme (défauts géométriques initiaux).

Le dimensionnement s'appuie en général sur la connaissance de l'état initial réel ou supposé. Or cette configuration évolue en fonction du type de chargement, du type d'appui etc... On constate généralement l'adjonction de nouveaux défauts de forme dus au fonctionnement (sous charges dissymétriques de neige, de vent) mais aussi à des pertes de matière localisées dans les zones corrodées. La prise en compte de ces divers dommages conduits généralement à une perte de capacité portante. Afin de préserver le potentiel de charge de la structure, il est alors nécessaire de la renforcer.

Ce travail de recherche traite du comportement des structures en coques cylindriques minces dont le rapport du rayon de courbure sur l'épaisseur de la tôle varie de 450 à 1500 soumises à un chargement vertical. Après une introduction du concept de stabilité d'équilibre, auquel il sera fait appel durant notre exposé, nous abordons dans une première partie les voûtes sans et avec renfort utilisant l'outil numérique en calcul linéaire et non linéaire. La deuxième partie concerne les essais sur les modèles réduits de la voûte réelle. Dans cette étude nous envisageons le renforcement d'une voûte métallique à l'aide des tirants en acier travaillant en traction simple. Un large programme expérimental consacré à l'étude du flambage de coques soumises à une charge verticale uniformément répartie a été réalisée. Pour l'ensemble des résultats obtenus des différentes campagnes d'essais, nous avons pu constater un accroissement important de la capacité portante de la structure renforcée. Afin de pouvoir disposer d'un outil prédictif utilisable pour d'autres configurations des coques (différentes géométries, R/t et L/R) nous avons eu recours à la simulation numérique à l'aide du code ABAQUS. Les applications potentielles pour ce type de renforcement seraient les dépôts de stockage, les silos horizontaux ou salles des sports ainsi que les structures enterrées.

Summary

The steel shell structures of the self-supporting type are particularly sensitive to buckling or geometrical instability. Their design is carried out by using simplified rules, this approach is generally conservative. Indeed these structures are very sensitive to the least imperfection of form (initial geometrical defects).

In general, the dimensioning is based on the knowledge of the real or supposed initial state. However this configuration evolves according to the type of loading, the type of support etc... One generally notes the addition of new defects of form due to operation (under dissymmetrical loads of snow, or wind) but also to matter losses located in the corroded zones. The taking into account of this various This research work treats the behavior of thin cylindrical shell structures whose ratio of curvature on the thickness varies from 450 to 1500 when subjected to a vertical load. After an introduction of the concept of stability of equilibrium, to which it will be made during our work, we approach in the first part the vaults without and with reinforcement using the numerical tool in linear and nonlinear analysis. The second part is related to the tests on the small-scale models of the real vault. In this study we consider the reinforcement of a steel vault using the steel ties working in simple traction. A broad experimental program devoted to the study of the buckling of shells subjected to a uniformly left again vertical load was carried out. For the whole results obtained in the various trial runs, we could note an important increase in the bearing capacity of the reinforced structure. In order to be able to have a predictive tool usable for other shell configurations (various geometries, R/t and L/R) we had resort to the numerical simulation using the ABAQUS code. The potential applications for this type of reinforcement would be the deposits of storage, the horizontal silos or gymnasiums as well as buried structures. damage generally leads to a loss of bearing capacity. In order to preserve the potential of load of the structure, it is then necessary to reinforce it.

المُلخَص

إنّ التراكيبَ الرقيقةَ من نوع الصَدَفَةِ الفولاذيةِ المكتفية ذاتياً حساسة جداً إلى نَش عدم الاستقرار الهندسي. تصميمهم مُنقَدُ باستعمال بسّط القواعد، هذه النظرة محافظةٌ عموماً. في الحقيقة هذه التراكيب حساسة جداً إلى أقلّ نقص الشكل (عيوب هندسية أولية) .

عموماً، تصميمهم مستند على معرفة الحالة الأولية الحقيقية أو المُفترضة. على أية حال هذا الترتيب يتطوّر طبقاً لنوع تحميل، نوع الدعم الخ...، و نستخلص إضافة العيوب الجديدة عموماً من الشكل بسبب عملية (الحمولة الغير متناظرة من الثلج، أو ريح) و أيضاً الخسائر المادية واقعة في المناطق المُصدّاة. أخذ في الحسبان هذا الضرر المُختلف يُؤدّي إلى عموماً خسارة لصلة القدرة. لكي يَبقى إمكانية حمل التركيب، هو ثمّ ضروري لتعزيزه.

يُعالجُ هذا البحثُ سلوكَ الصَدَفَةِ الأسطوانية الرقيقة حيث نسبة التقوس على السُمك تتفاوت من 450 إلى 1500 عندما أخضعت إلى حمل عمودي. بعد مقدمة مفهوم استقرار الموازنة، التي تقترُب في الجزء الأول، المدافن بدون وبالتعزيز مستعملين الأداة العددية في التحليل الخطي واللاخطي. ويتعلّق الجزء الثاني بالتجارب على نماذج النطاق الضيق من المدفن الحقيقي. في هذه الدراسة نعتبرُ تعزيز المدفن الفولاذي الذي يستعمل الروابط الفولاذية تُعملُ في الشد البسيطة و برنامج تجريبي واسع كرس إلى دراسة تشبيك القذائف خاضعة إلى حمل عمودي بشكل نُقدّ موحد. من النتائج التي حصلت عليها في التجارب المُختلفة، نحن يُمكنُ أن نلاحظ زيادة مهمة في قدرة التحمل المدفن المدعوم.

لكي يُكونَ قادر على امتلاك أداة تنبؤية صالحة للاستعمال لترتيبات الصَدَفَةِ الأخرى (geometries) مُختلفة، آر t / وإل / آر) كانَ عندنا مصيفُ إلى المحاكاة العددية تُستعملُ رمزَ Abaqus. التطبيقات المحتملة لهذا النوع من التعزيز سيُكونُ إيداعات الخزن، المستودعات أو الجمنازيوم الأفقي بالإضافة إلى التراكيب المدفونة.

Table des matières

Table de matière	i
Liste des figures	iv
Liste des tableaux	iv
Introduction générale	vii

Chapitre I : Etude bibliographique

I.1 Définition des enveloppes cylindriques	1
I.1-1 Définition des voutes	3
I.1-2 Intérêt d'une étude sur les voutes autoportante	4
I.1-3 Classification	4
I-2 Etat actuel d'utilisation des profilés minces	8
I.2-1 Introduction	8
I.2-2 L'Acier	8
I.2-3 Procès simplifié laminé à froid non revêtu	10
I.2-4 Les tôles d'acier	11
I-3 Les différents types de chargement	12
I.3-1 Introduction	12
I.3-2 Chargement de Neige (charge verticale)	12
I.3-3 Chargement du Vent (charge horizontale)	14
I.3-4 Pression de grains	16
I.3-5 Analyse	17
I.3-6 Propriétés mécaniques des panneaux	17
I.3-7 La capacité portante des panneaux	18
I.3-8 Méthode d'analyse	19
I.3-9 Analyse d'arc	20
I.3-10 Charge critique	22
I.3-11 Comportement non-linéaire des voutes	22
I.3-12 Analyse des coques	23
I.3-13 Observations et recommandations	25
I.4 Méthodes de calcul des voutes autoportantes	26
I.4-1 Introduction	26
I.4-2 Examen des méthodes dites « exactes »	26
I.4-3 Examen des méthodes dites « simplifiées »	27
I.4-4 Le calcul statique des voutes autoportantes longues	27
I.4-5 Exposé de la méthode de la poutre	31
I.5 Analyse des coques	34
I.5-1 Introduction	34

I .5-2 Cadre théorique de l'étude	34
I. 5-3 Quelques éléments de théorie des coques	36
I .6 Théorie des coques en analyse linéaire	41
I.6-1 Approche par coque profonde ou surbaissée	41
I.6-2 Approche par coque plane (facettes planes)	42
I.6-3 Approche par coque quasi-plane de <i>Marguerre</i>	43
I.6-4 Choix d'une théorie de coque	43
I .7 Analyse non linéaire des coques	44
I.7-1 Généralités	44
I.7-2 Types de problèmes non linéaires	45
I.7-3 Théorie non linéaire	46
I.8 Conclusion	49

Chapitre II : Etude théorique

II.1 Introduction par élément finis	50
II.1-1 Introduction	50
II.1-2 Solide élastique	50
II.1-3 Lois du comportement	51
II.2 Modélisation par élément fini : Eléments de coque	59
II.2-1 Introduction	59
II.2-2-Hypothèses de la théorie des coques	60
II.2-3-Relations Moments-Courbures	63
II. 3 Stabilité des structures	68
II.3-1 Introduction	68
II.3-2 Stabilité des enveloppes cylindriques	69
II.4 Méthodes numériques de résolution des systèmes non linéaires	81
II.4-1 Introduction	81
II.4-2 Méthodes de résolution	81
II .4-3 Stratégies de résolution	84
II.5 Analyse Numérique par la méthode des éléments finis	96
II.5-1 Introduction	96
II.5-2 Définition des paramètres géométriques	96
II.5-3 Caractéristiques du matériau	96
II.5-4 Modélisation de la voute	97
II.5-5 Etapes de création du model par la méthode des éléments finis	98
II.5-6 Résultats de l'analyse statique	100

Chapitre III : Etude Expérimentale

III.1 Méthodologie expérimentale	113
III.1-1 Introduction	113
III .1-2 Objectifs de l'étude	113
III.1-3 Description du modèle	114

III.2 Résultats expérimentaux	124
III.2-1 Introduction	124
III.2-2 Coque témoin	124
III.2-3 Coque renforcée	128
III.3 Conclusion	133
<i>Conclusion et Recommandations</i>	134
<i>Références bibliographiques</i>	135

Liste des Références

- [1] **Manfred.A.Hirt et Michel Crisinel** «Conception des charpentes métalliques».Édition: polytechniques et universitaires Romandes. 1997.
- [2] **Etnest E.Stauss.** «le comportement statique des voutes autoportantes longues»; Edition: l'école polytechnique de l'université de l'ausanne.1953.
- [3] <http://www.cssbi.ca/Fra/produits/agricole/sbs.shtml>
- [4] http://www.fao.org/inpho/content/documents//vlibrary/move_rep/x0298f/x0298F10.htm
- [5] **Marc landoweski** «concevoir et construire en acier».Bertra lemoine 2005. collection Mémentos.
- [6] **2007 CTCM** «Steel Biz».Acier de collection.
- [7] **Froncois caracache.Raphaelle Aubert.Fawzi Brachemi**« construction avec les aciers» Edition: le moniteur 1^e 1993; 2^e 2002. paris
- [8] <http://forums.futura-sciences.com/physique/90949-resistance-tole-ondulee-lisse.html>
- [9] **George Abdel_ Sayed. M. Asse, Frank Manasa Wayne Siddall.** «cold-formed steel farm srutures» part II:Barrel Sheels.1986
- [10] **American National Standard** "Minimum Design Loads in Buildings and Other Structures "ANISI, A58.1, 1982.
- [11] **Schriever , W.R , and Otstanou , V.A ,** " Snow Loads-Preparation of Standards for snow Loads on Roofs in Various Countries , with Particular Refence to the U.S.S.R and Canada "Report No .9 , International Council for Building Research Studies and Documentation (CIB) , 1967 , pp.13-33 .
- [12] **Taylor,A,D,A** «A survey of snow loads on roofs of Arerra-Type building in Canada». Canadian Journal of civil engineering Vol .6, No. 1 Mar ., 1979. pp. 85-96
- [13] **Taylor,A,D,** " Roof Snow Load yn Cnanda" canadian Jornal of civil engineering Vol .7, No. 1 Mar ., 1980. pp. 1-18
- [14] **Taylor,A,D, and Schriever , W.R** " An Investigation of Unbalanced Snow Distributions for the Design of Arch-Shaped Roofs in Canada" Canadian Journal of civil engineering Dec. , 1980. pp. 651-656 .
- [15] **Voir.Surry, D, Ng.WK. and Davenport AG,** «Wind load on Arch roof structures» Boundary loyer wind Tunnel laboratory. University of western Ontario, London. Cannada,1981
- [16] **Templin J.T., and Scheriever , W.R ,** "Load Due to Snow " Preprint No. 81/075 ASCE

- Convention , New York , N.Y ., May , 1981 .
- [17] *"Wind forces in structures"*, transaction ASCE.Final report of the tark. Committee on Wind forces of the committee on loads and stresses of the structural dicision. Vol 126 PartII
- [18] **Batoz , J.L , and Dhatt , G.S .** , " Non-Linear Finite Element Analysis of Orthotropic Light Weight Shells , "Proceedings , IASS International Conference on Light-Weight Shell and Spatial Structures , Alma , Alberta ,Canada , 1977
- [19] **Basu , P . K , and Gould , P.L.**, " SHORE-III: Shell of Revolution Finite Element Program" Theoretical and User's Manuals , Reseach Reports Nos . 48 and 49 , Washington University , St Louis , Mo b 1977 .
- [20] **Davies , J . M , and Young , J. G** , " Light Gauge Steel Cylindrical Shells " Proceedings , 5 th International Conference on Cold-Formed Steel Structures , St Louis Mo 1977 .
- [21] **Schepers , A** " Analysis and stability of Circular Arches " 4 th Year Thesis Department of Civil Engineering , University of Windsor , 1976 .
- [22] **Pierce , G** , "Design Research Project on Quonset buildings of the Type Produced by Fairford Industries in Moose Jaw , Saskatchewan , industrial Service Division , Saskatchewan Research Council , Saskatoon , Canada , 1976 .
- [23] **Abdel-sayed.G.and Hafez.M.** «Cylindrical arches and Barrel Shells».
- [24] **Marzouk , O , and Abdel-Sayed , G** , "Stability of Half –Barrel Orthotropic Shells " ,G, "journal of the Structural Division , ASCE , July , 1975 , pp . 1517-1530.
- [25] **Abdel-sayed.G.and Hafez.M.** «Critical Shear Loading of Curved Panels of Corrugated Sheets» journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, Dec, 1970. pp 895-912.
- [26] **Hawaranek , A , and Steinhardt , O** , Theory und Berechnung der Stahlbruecken ,Springer –Verlag , Berlin , 1958 .
- [27] **Abdel-sayed.G.Pierce.G, and Siddal , W.** «Doubly Corrugated Half-Barrel Cold-Formed Steel Shells » Proceedings , 5th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures , St Louis , Mo, Nov .
- [28] **Sidal , W , Pierce , G , and Abdel-Sayed , G** “Full Scale Testing and Analysis of Circular Arch Skin-Supported Steel Shell Buildings” Proceedings Annual Conference of the CSCE, Winnipeg ,Canada, May , 1980 .
- [29] **Przemien, J,S** ,”Theory of Matrix Structural Analysis“,McGraw-Hill,New York ,N.Y , 1968 .
- [30] **Davies, J.M, and Young, J.G**, « Light Gauge Steel Cylindrical Shells”, Proceedings, 5th International Conference on Cold-Formed Steel Structures, St Louis Mo , 1978 , pp 157-190.
- [31] **Vasudev vithal Nori.** «Contribution a l'étude de la résistance des voûtes autoportantes

- cylindriques et prismatiques » l'ecole polytechnique de l'université de lausanne. 1965.
- [32] **Zakia. Draid** «Renforcement et réparation des coques métalliques par des matériaux composites». (TFC). Etude du comportement au flambement approche expérimentale et numérique. thèse de doctorat. l'institut national des sciences appliquées de lyon. 2005.
- [33] **NAGHDI,PM.** Foundation of elastic shell theory-in:Progress.in solids Mechanics VI IV, Edité par I.N. SHEDDERS et HILL Amsterdam:North Holland pub.1969.88p
- [34] **Koiter,WT.** «A consistant first approximation in the general theory of thin elastic shells delft, April 1960, p 12-33.
- [35] **Koiter,WT and SIMMON,G** « fondation of shell theory in: Proceeding of thirteen inter congress of theoretical and applied Mechanics».Mosco,Aout 1972,p 39-71.
- [36] **ARGYRIS, JH and SCHARPF, DW** «the Sheba family of shells elements for the matrix displacement method ».Aeron, J, oct 1968. Vol 72, P. 873-883.
- [37] **NOUOZHILLOV;v;v** «the theory of thin shell croninen:».:P. Noordhof, 1952,P 342.
- [38] **IDELSOHN.S** « on th use of deep shallow or flet shell finite element for the analysis of thin shell structures».comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1981 vol 26, P. 321-333
- [39] **EL KHALDI, F** « contribution au traitement des phénomènes de blocage de membrane et cisaillement dans la mode lisation des arcs et des coques minces en theories de MARGUERRE».thèse de doctorat, institut national des sciences appliquées de Lyon 1987,305p.
- [40] **IDELSOHN, S** «on the use of deep shallow or flat shell finite elements for analysis of thin shell structures».comp. Menth Appl. Mech Eng 1981, vol 26,P321-333
- [41] **RAMM.E and STEGMULLER, H** «the displacement finite element method in linear buckling analysis of shells».Ed. E. RAMM- Preceding of a state of the- art colloquium, berlui Heidelberg,new.brk.springer,1982,P201-235
- [42] **DJEGHABA, K**« contribution a l'analyse non linéaire géométrique des coques minces en théorie de MARGUERRE».THESE DE DOCTORAT/ INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQU2ES DE LYON 1990.
- [43] **STOLARSK,H and BELYTSHKO,T and CARPENTER,N**« bending and shear mode decomposition in structural elements ». T.struct.mech.Mech.1983, vol 11,N2, P 153-176.
- [44] **STOLARSKI,H, and BELYTSHKO,T** « membrane locking and reduced integration for curved elements ».trans of A.S.M.E.1982, vol 49, p172-176
- [45] **Jean charles craver** «modélisation des structures calcul par élément finis».2em édition DUNOD fevrier 2001.
- [46] **Abdel sayed ,G** «Critical loading of curved panels of corrugated sheets».Journal of engineering mechanics division, ASCE, vol 96.No.EM6,Proc.paper 7725.dec 1970.

- [47] **Marzouk, O.A, and Abdel-Sayed, G** «linear theory of orthotropic cylindrical steel». Journal of the structural division, ASCE, vol 99, No, ST11, Proc.paper 10143.
- [48] Cour APK chapitre 6.6 groupe de travail 1991
- [49] **Osman A. Marzouk. George.Abel. Sayed** « stability of half- barrel orthotropic shells».. M.ASCE Journal of the structural division, 1975
- [50] **R.H.Galla Ghar** "introduction aux éléments finis" Edition pluralis. 1976
- [51] **BATOZ ,JL and HO ,W.L** A study of three nodes triangular plate bending elements int.J.num meth eng;1980.VOL 15.p.1771-1812.
- [52] **BATOZ ,JL**-An explicit formulation for an efficient triangle plate bending element int.J.num meth eng;1982.VOL 18.p.1077-1089.
- [53] **CHAVANT, C, COMBESURE, A, and HOFFMANN, A** calcul linéaire et non linéaire et non linéaire des coques, rapport DEMT/SMTS/79/22, Commissariat a l'énergie atomique, 1979.
- [54] **CRISFIELD ,M,A,** A faster modified Newton-Raphson iteration –comp.Meth.in Appl. Mech.Eng,1979,vol.20,P.267-278
- [55] Abaqus/Standard Theory Manual, Abaqus/Standard User's Manual et Abaqus/Explicit User's Manual. Version 6.5. Hibbit, Karlsson et Sorensen, Inc, 2004.
- [56] **Abdel-Sayed , G,** « Cuved Webs Under Combined Shear and Normal Stresses” Journal of the Structural Division , ASCE, vol 99 , No .ST3 , Proc . Pper 9631 , Mar 1973 .
- [57] **Brown , E .H , and Hopkins , H.G** “The Initial Buckling of Long and Slightly Bowed Panel Under Combined Shear and Normal Pressure” R.&M .2766 , British Aeronautical Research Council , 1949 .
- [58] **El-Atrouzy , M .N** “Cylindrica Shells Made of Corrugated Sheets” thesis presented to the University of Windsor , at Windsor , Ontario , Canada , in 1972 , in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor Of Philosophy .
- [59] **Marzouk , O . A** “Stability of Cylindrical Corrugated Sheet Shells” thesis presented to the University of Windsor , at Windsor , Ontario , Canada , in 1973 in partial fulfilment of the requirements for the degree of doctor of philosoph .
- [60] **Marzouk , O , A , and Abdel-sayed , G** “Linear Teary of Orthotropic Cylindrical Sheels” Journal of the Structural Division , ASCE , vol 99 , No ST11 , Proc . Paper 10143, Nov , 1973 , pp 2287-2306 .
- [61] **Stein , M , and Mayers , J ,** “A Small-Deflection Theory For Curved Sandwich Plates” Report 1008 , National Advisory Committee for Aeronautics , 1952 .
- [62] **Timoshenko , S ,and Gere , J ,** “Theory of Elastic Stability , 2nd ed” , McGraw-Hill Book Co , Inc , New York , N . Y 1961.

Liste des Tableaux

N°	Titre	Page
I.1	Valeurs données par ASCE et BLWTL	16
II.1	la charge de flambement du voute standard en tôle ondulée	78
II.2	la charge de flambement du voute standard en tôle ondulée L/S	79
II.3	Tableau des valeurs prises pour les caractéristiques du matériau	96
II.4	Différents paramètres utilisés pour la voute prototype	100
II.5	Différents paramètres utilisés pour la voute modèle	101
II.6	Variation de déplacement de la clé et des ailes de la voute en fonction de l'augmentation de la charge	103

Liste des Figures

N°	Titre	Page
I.1	Enveloppe cylindrique	1
I.2	Simple nappes réticulées cylindriques	2
I.3	Structure en arc raidie par des tôles profilées	2
I.4	Voute autoportante longue	3
I.5	Bâtiment cylindrique	4
I.6	Bâtiment cylindrique type Armadillo	5
I.7	Bâtiment en acier pour usage agricole	6
I.8	Bâtiment en acier pour usage agricole	6
I.9	Silos horizontaux	7
I.10	Etapes de laminage à froid des tôles en aciers	10
I.11	<i>ANSI A58-1-72</i> distribution de la charge de neige sur un arc simple	13
I.12	<i>CNBC</i> distribution de la charge de neige sur un arc simple	14
I.13	Types des fondations dans le sens longitudinal	19
I.14	Résultats analytiques et expérimentaux d'un arc cylindrique.	20
I.15	Diagramme des moments fléchissant [50ft=15.24m]	20
I.16	Moment fléchissant max, M , pression P	21
I.17	Facteur de flambement Kcr	21
I.18	(a) moment fléchissant linéaire (appuis articulé) (b) moment fléchissant linéaire (appuis encastéré)	23
I.19	(a) facteur de majoration du moment (appuis articulé) (b) facteur de majoration du moment (appuis encastéré)	24
I.20	Efforts intérieurs agissant sur un élément cylindrique de voute autoportante	27
I.21	Contrainte normale S_x dan la direction de la génératrice	32
I.22	L'effort d'arc	33
I.23	Description curviligne de la coque	42
I.24	Exemple de modélisation par facette planes	42
I.25	Coque quasi - plane <i>Marguerre</i>	43
I.26	Configurations d'un corps en mouvement	48
I.27	Description corotationnelle pour un élément triangulaire	49
II.1	Lois de comportement d'un matériau	51
II.2	Tenseur de contraintes dans un repère orthonormé	52
II.3	Configuration réelle et virtuelle	54
II.4	Feuillet moyen d'une coque	59

II.5	Elément déformable à l'effort tranchant	62
II.6	Moments de flexion et de torsion	64
II.7	Effort et moments dans la section d'une coque	66
II.8	Trois états d'équilibre	69
II.9	flambements d'une coque demie cylindrique en tôle ondulé	70
II.10	(a) Système des cordonnées ; (b) Tôle ondulée standard	70
II.11	Mode de déformation d'une voute cylindrique sous charge uniformément répartie de neige.	80
II.12	Représentation unidimensionnelle de la méthode incrémentale	83
II.13	Représentation unidimensionnelle de la méthode Incrémentales-itératives <i>Newton-Raphson</i>	83
II.14	Représentation unidimensionnelle des types de points limites	84
II.15	Pilotage en charge imposée	88
II.16	Exemple de saut sur une branche stable en charge imposée	88
II.17	Pilotage en longueur d'arc imposée de <i>Crisfield</i>	91
II.18	pilotage en longueur d'arc imposée modifiée de <i>Crisfield</i>	91
II.19	Chemin suivi par les itérations en longueur d'arc imposée modifié1 de <i>Crisfield</i>	92
II.20	Schéma d'une vue en coupe de la voute étudiée avec les paramètres géométriques	96
II.21	Différents types d'éléments disponibles dans la bibliothèque d' <i>ABAQUS</i>	98
II.22	Type de maillage de la voute	99
II.23	Type de chargement (vertical)	100
II.24	(a) Valeurs des déplacements dans la direction 2 sous charge=0,5t (b) Valeurs des déplacements dans la direction 2 sous charge=1t (c) Valeurs des déplacements dans la direction 2 sous charge=2t	102
II.25	Déplacements de la voute dans la direction 2 en fonction de la variation de la charge	103
II.26	(a) Les contraintes horizontales σ_{11} en fonction longueur d'arc (b) Les contraintes verticales σ_{22} en fonction longueur d'arc	104
II.27	(a) Valeurs des déplacements dans la direction 2 sous charge=0,5t (b) Valeurs des déplacements dans la direction 2 sous charge=1t	107
II.28	L'évolution du déplacement en fonction de la charge au niveau de la clé	108
II.29	L'évolution du déplacement en fonction de la charge au niveau des ailes	109
II.30	Voute renforcée	110
II.31	Condition inter nodale	110
II.32	Vue sur la connexion	111
II.33	Maillage de la voute renforcée	111
II.34	(a)Valeurs des déplacements dans la direction 2 sous charge=0,5t (b)Valeurs des déplacements dans la direction 2 sous charge=1t	111
III.1	Choix du matériau	115
III.2	Courbe de traction typique d'un matériau ductile	116
III.3	Éprouvette de traction	117
III.4	Banc d'essai de Traction-Flexion DELTALB EX 150	118
III.5	Machine de traction	118
III.6	jauge de déformation	118
III.7	Essai de Traction	119
III.9	Géométrie des spécimens	120
III.10	Conditions aux limites	120
III.11	(a)Système de chargement (b)Dispositif de charge	121
III.12	Position des réflecteurs	122
III.13	Un réflecteur	122
III.14	Vue en plan du système (position de l'appareil)	122
III.15	Position de comparateur	123
III.16	Etat initial de la voute sans renforcement	126
III.17	Etat final de la voute sans renforcement	127

III.18	Position des réflecteurs	125
III.19	Corrélation essai /calcul –cas de la coque témoin a la clé	126
III.20	Corrélation essai /calcul –cas de la coque témoin	127
III.21	Corrélation essai /calcul –cas de la coque témoin	128
III.22	Etat initial de la voute avec renforcement	129
III.23	Vue sur les tirants de renforcement	129
III.24	Etat final de la voute avec renforcement	130
III.25	Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcée a la clé	130
III.26	Mode flambage : expérimentale et mode critique numérique	131
III.27	Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcée	131
III.28	Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcée	132
III.29	Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcée	133
III.30	Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcée	133

Introduction générale

Construire en acier est une technique très développée à l'heure actuelle. Elle couvre des structures de nature diverse : structure à barres, structure en tôles, structures tridimensionnelles ou spatiales ...L'emploi de ces structures métalliques devient de plus en plus abordable suite aux développements des outils de calculs numériques et au développement des moyens de conception pratiques. Mais le danger d'instabilité de ces structures devient de plus en plus important pour l'ingénieur chargé du calcul d'une structure métallique. Le danger d'instabilité peut apparaître dans presque tous les types de structure (barres, poutre, plaque, coque) de manière locale ou globale. Il est à la base de nombreux accidents survenus en construction métallique ces dernières années. Les méthodes de calcul continuent à s'enrichir, actuellement des calculs tridimensionnels sont abordables, et une prise en compte du comportement de la structure et de leur limite élastique. Toute fois, les règlements relatifs aux constructions métalliques gardent toujours l'aspect empirique qui, vis à vis des nombreux paramètres intervenant, s'efforce d'assurer la sécurité des ouvrages qui sont sujets à différents modes de ruine. L'ossature principale faisant partie de cette étude est une enveloppe cylindrique métallique « voute autoportante longue »

Notre travail s'inscrit dans l'esprit d'étudier l'état de déformation-contrainte des enveloppes cylindriques métalliques minces en se basant sur deux aspects :

- ✓ ***Théoriques*** : étude du comportement linéaire et non linéaire géométrique de ce type des structures par l'utilisation du logiciel ABAQUS.

- ✓ ***Expérimentales*** : des essais sur modèle réduit pour des structures avant et après renforcement.

Organisation du mémoire :

L'ensemble de notre étude est subdivisé en quatre chapitres composés comme suit :

Le premier chapitre :

A travers une étude bibliographie qui concerne globalement sur les enveloppes cylindriques et d'analyse du développement et état actuel d'utilisation des profils minces dans les structures spatiales. On cite à la fin de ce chapitre quelque recommandations pour une conception économique des voutes métalliques, telles que celles faisant l'objet de notre étude.

Le deuxième chapitre :

S'est dirigé vers une modélisation numérique par élément finis et de connaître l'état critique des efforts dans la construction dans le but d'étudier la stabilité d'une enveloppe semi cylindrique sollicitée aux chargements horizontaux et verticaux. L'analyse s'est faite à l'aide du programme ABAQUS.

Le troisième chapitre :

Nous présentons le dispositif expérimental élaboré permettant d'appliquer la sollicitation de flambement local sur des voutes métalliques sans renfort et avec renfort, les essais ont été réalisés à l'université d'Annaba au laboratoire de génie civil (L.G.C.A).

Les résultats théoriques et expérimentaux sont présentés et analysés.

Les conclusions et les recommandations.

I-1 Définition des enveloppes cylindriques :

En géométrie différentielle, une famille de courbes planes possède fréquemment une courbe enveloppe. Celle-ci admet deux définitions géométriques traditionnelles, presque équivalentes :

- l'enveloppe est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.
- elle est le lieu des points caractéristiques, points d'intersection de deux courbes infiniment proches

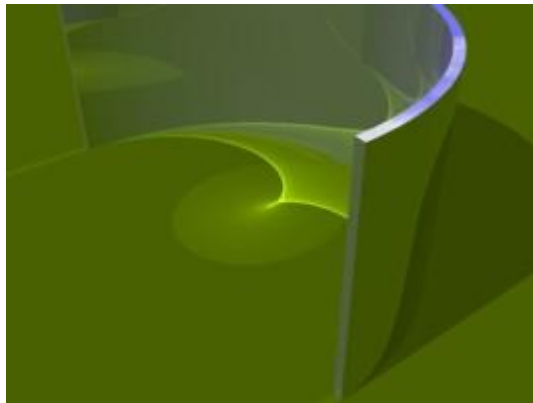


Fig. I-1 Enveloppe cylindrique

De façon plus précise, l'enveloppe possède une définition analytique, c'est l'ensemble des points critiques de l'application de projection associée à la famille de courbes. On définit de même l'enveloppe d'une famille de surfaces dans l'espace, ou plus généralement d'une famille d'hyper surfaces ou même de variétés en dimension quelconque.

- *Surfaces courbes*

Les structures porteuses métalliques en forme de surface à simple courbure sont essentiellement des nappes cylindriques. La nappe comporte en général des arcs, des génératrices et des diagonales **Fig. I-2(a)**. Le cas général peut être décomposé en système plans et n'est alors plus assimilé à une structure tridimensionnelle. par contre, si on supprime les génératrices **Fig. I-2(b)** ou les arcs eux-mêmes **Fig. I-2(c)**, on réalise vraiment une réticulée de l'espace, appelée aussi treillis réticulé arqué.

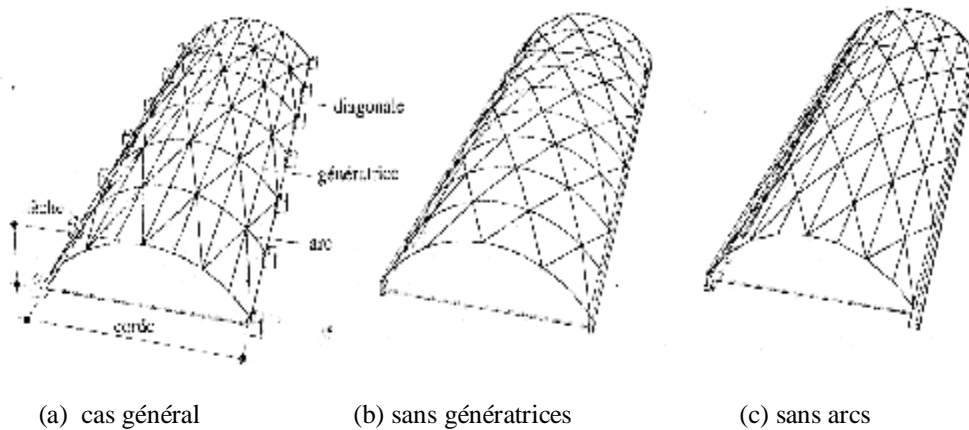


Fig. I-2 Simple nappes réticulées cylindriques.

La courbure de système porteur peut engendrer au niveau des appuis une importante réaction horizontale, appelée poussée. Si la structure en voute repose directement sur le sol, cette réaction est reprise par le massif de fondation. Dans le cas contraire, elle doit être reprise soit par tirants, placés généralement au niveau des pieds des arcs, soit par les éléments porteurs sous-jacent (piliers, murs, etc.)

Il est également possible de remplacer une partie des génératrices et des diagonales par la tôle profilée de toiture, ce qui nécessite toute fois des formes de profilés capables de reprendre les grands efforts de flexion, compression et cisaillement qui se développent **Fig. I-3**. La portée économique de ces structures est de l'ordre de 20 m pour les surfaces cylindriques à une nappe et de 60m pour les surfaces à deux nappes. L'efficacité maximale est atteinte pour des structures rectangulaires en plan dont le rapport des cotés est situé entre 1 et 2. Le rapport optimal entre la flèche et la corde de l'arc est de l'ordre de 0,15 à 0,20. [1]

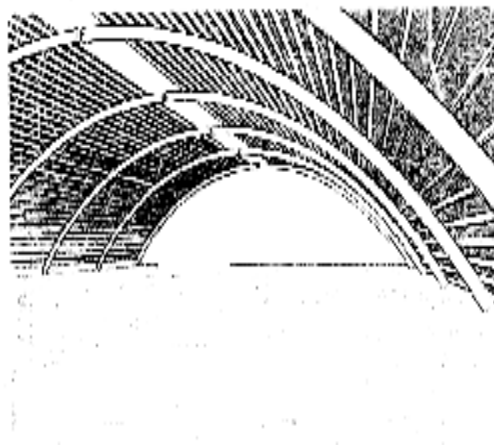


Fig. I-3 Structure en arc raidie par des tôles profilées.

I.1-1 Définition des voutes :

On appelle voute autoportante une coque de forme cylindrique, reposant sur des appuis localisés, généralement situés aux extrémités de l'élément de cylindre. Si les bords de la voute ne sont soumis à aucune liaison, on dit que la voute autoportante est isolée **Fig. I-4a**. Si les voutes autoportantes se succèdent en étant reliées sur leurs bords, on a des voutes autoportantes multiples **Fig. I-4b**.

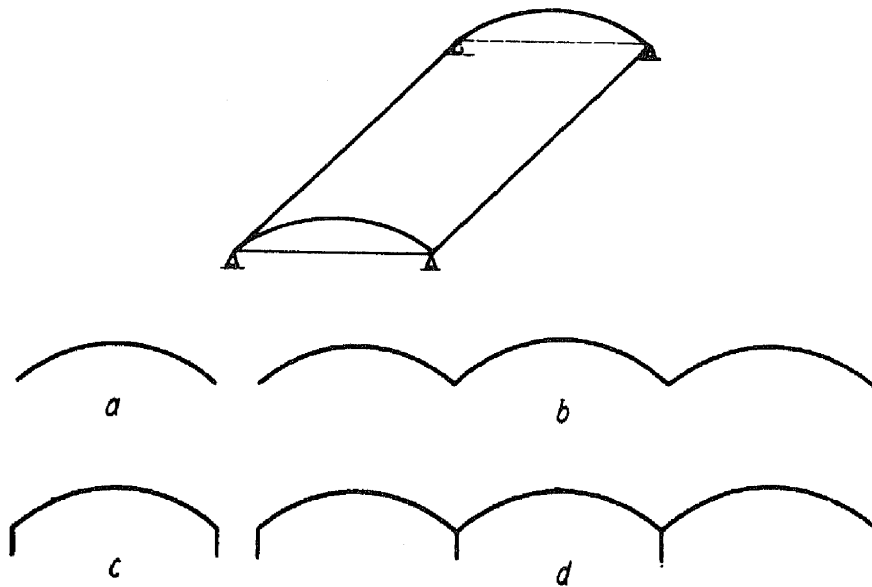


Fig. I-4 Voute autoportante longue

Si les voutes autoportantes se succèdent en étant reliées sur leurs bords, on a des voutes autoportantes multiples. La naissance des voûtes est parfois renforcée par l'élément vertical, courant sur la longueur totale de la voute, appelé poutre de retombée ou poutre de bord **Fig. I-4c** et **4d**. La voute autoportante doit être munie de deux diaphragmes transversaux dans le plan vertical des appuis, destinés à garantir la configuration de l'ouvrage. Ces diaphragmes pleins ou évidés, sont appelés tympans. Ils sont généralement situés aux extrémités de la voute, où ils s'appuient sur deux colonnes ou des murs. Si la voute possède plus de deux tympans appuyés, on dit qu'elle est continue. Une voute autoportante est dite longue si la distance entre tympans appuyés est un multiple de l'ouverture. Si cette distance est du même ordre de grandeur que l'ouverture, on dit que la voute est courte. L'influence de brusques variations de l'épaisseur ou de nervures locales est très grande sur la distribution des efforts intérieurs. La présente étude ne portera que sur les voutes autoportantes longues à épaisseur constante. [2]

I.1-2 Intérêt d'une étude sur les voutes autoportantes :

Il y a à peine 80 ans que les premières voutes autoportantes ont été construites. Il n'est donc pas étonnant, que dans ce délai que tous les problèmes concernant ces structures n'aient pas encore trouvé leur solution définitive. Il est clair que de telles incertitudes sont fâcheuses pour le développement et l'application des voutes autoportantes, une réponse nette aux problèmes essentiels, en même temps qu'une explication simple du comportement de ces constructions, que l'on doit considérer comme les systèmes constructifs de l'avenir. Il y a plusieurs types des voutes (voute en béton, maçonnerie et en acier).

Notre étude portera sur les voutes métalliques. [2]

I.1-3 Classification:

I.1-3-1 Systèmes de bâtiment en acier pour usage public :

Les enveloppes semi-cylindriques ou les voutes métalliques sont des constructions à multiples utilisations et en différents domaines ; par exemple on trouve ce type de bâtiments dans le domaine d'habitations dans plusieurs pays. On estime que 10000 bâtiments de ce type sont construits chaque année en Amérique du Nord, le plus souvent avec des portées allant de 7.62-30.48 m (25-100 pi). La majorité de ces bâtiments sont utilisés comme entrepôts, abris etc.... Ils sont aussi de plus en plus utilisés pour les immeubles élevés tel que les installations de loisirs. **Fig. I-6**



Fig. I-5 Bâtiment cylindrique



Fig. I-6 Bâtiment cylindrique type Armadillo

I.1-3-2 Systèmes de bâtiment en acier pour usage agricole :

Le mot « système » peut être défini comme étant « plusieurs éléments formant un tout en raison de leur interaction et de leur interdépendance ». Ce qui décrit très bien la façon dont les éléments d'un système de bâtiment en acier travaillent ensemble, se soutenant mutuellement pour former une structure capable de résister aux charges théoriques, de protéger des intempéries et de réduire le transfert thermique.

Constitué d'éléments de charpente, de revêtement et de finition en acier, le système de bâtiment en acier est conçu comme un système intégré. Il est soit composé de cadres rigides ou de colonnes et poutres, soit « autoportant », c'est-à-dire que son revêtement devient le principal élément porteur du toit et des murs, tout en offrant une protection contre les intempéries. Les bâtiments sont construits chez le fabricant, puis livrés aux constructeurs. Le fabricant est chargé de la conception des structures et de la fabrication des systèmes de bâtiment, tandis que les constructeurs sont responsables du montage des bâtiments et des travaux connexes (par exemple, des fondations en béton, des finitions à l'intérieur, des systèmes CVC, etc.).



Fig. I-7 Bâtiment en acier pour usage agricole

Vers la fin des années 40, l'effet combiné de la hausse rapide des coûts de main-d'œuvre et de la demande accrue d'abris faciles à transporter et peu coûteux a favorisé la croissance de l'industrie des systèmes de bâtiment en acier. À cette époque, un bâtiment dit « industrialisé » était constitué d'un toit et de panneaux muraux en tôle d'acier galvanisé, de portées moyennes et d'une charpente légère ou autoportante, le tout avait une allure utilitaire. L'esthétique du bâtiment n'était pas une priorité parce qu'il était destiné principalement aux marchés industriel et agricole. Cette situation a changé dès 1960 avec la mise au point de panneaux de tôle d'acier préfini aux couleurs attrayantes. Au fil du temps, les architectes ont profité des avantages de la variété de produits de tôle d'acier préfini en les combinant à d'autres matériaux de construction comme le bois, le béton, la pierre et le verre, pour concevoir des bâtiments à l'architecture recherchée pour de nombreux types de marchés.[3]



Fig. I-8 Bâtiment en acier pour usage agricole

De plus, l'émergence de l'informatique a influé directement sur la croissance de l'industrie des systèmes de bâtiment en acier. Comme la technologie moderne facilite les processus de conception et de fabrication, les fabricants peuvent se permettre de construire des bâtiments tous différents les uns des autres.

Les silos horizontaux:

Il s'agit généralement de vastes magasins construits en béton armé, en brique ou en tôle métallique. Ces silos appelés magasins-vrac occupent une surface plus importante que les silos verticaux. Ils doivent être équipés de murs suffisamment résistants pour soutenir la pression causée par le poids des grains [4]. Ils sont aussi en tôle ou en béton, et sont formés de cellules juxtaposées, carrées ou rectangulaires, à développement horizontal.



Fig. I-9 Silos horizontaux

I-2 Etat actuel d'utilisation des profilés minces:

I.2-1 Introduction :

Les diaphragmes métalliques formés à froid sont composés de tôles ou de panneaux d'acier profilé attachés ensemble et aux éléments de charpente afin de résister aux efforts de cisaillement en plan. Le calcul de la résistance des diaphragmes des toits, des murs et des planchers intervient lors de la conception de bâtiments résistant aux forces dues au vent, aux séismes et autres charges latérales. Les panneaux de toiture et de mur utilisés à l'intérieur d'un bâtiment sont ordinairement conçus uniquement pour transmettre à la charpente les composantes des charges perpendiculaires à la surface. La résistance au cisaillement en plan de ces systèmes n'a pas toujours été pleinement utilisée en raison du manque de données et de méthodes de calcul reconnues pour les diaphragmes, dont les configurations disponibles sont nombreuses.

I.2-2 L'Acier :

I.2-2-1 Introduction :

L'utilisation de l'acier dans la construction remonte à la fin du XXe siècle, bien que les métaux ferreux soient connus depuis environ quarante siècles. Auparavant on employait la fonte qui peut se mouler facilement mais se révèle cassante et impossible à forger. Il faut donc l'assembler à l'aide de boulons, de vis ou de clavettes. On est progressivement passé, à partir des années 1840, de l'usage de la fonte à celui du fer puddlé, la fonte étant affinée industriellement pour obtenir du fer pur, plus souple et plus facile à laminier, à percer et à forger. Le principe des rivets posés à chaud a permis de disposer d'un mode d'assemblage universel et facile à mettre en œuvre. C'est une cinquantaine d'années plus tard que l'acier a pu être produit de façon industrielle et s'imposer ainsi à partir des années 1890 comme le matériau de la construction métallique, avec des caractéristiques physiques bien supérieures au fer grâce à la présence de traces bien dosées de carbone et d'autres éléments chimiques. L'assemblage s'est d'abord fait avec des rivets, puis, à partir des années 1930, par la soudure ou le boulonnage. La sidérurgie n'a cessé de perfectionner les qualités de ses aciers [5].

I.2-2-2 Définition :

L'acier est un matériau composé essentiellement de fer et de carbone, qui sont extraits de matières premières naturelles tirées du sous-sol (mines de fer et de charbon). Le carbone n'intervient, dans la composition, que pour une très faible part (généralement 1%) [6].

- *Dix bonnes raisons de construire en acier :*

Ü Performances mécaniques

L'acier présente des caractéristiques mécaniques hors du commun, notamment un compromis exceptionnel résistance / quantité de matière. Cela permet des grandes portées, des structures fines, élancées, s'inscrivant harmonieusement dans leur environnement tout en offrant toutes les garanties de sécurité et de fiabilité.

Ü Matériau recyclé

L'acier est l'un des matériaux les plus recyclés au monde. On le récupère facilement grâce à ses propriétés magnétiques. De retour à l'aciérie, il peut suivre à nouveau un cycle de fabrication standard et se régénère intégralement : il retrouve des propriétés identiques à celles d'un acier de première génération.

Ü Durabilité

Galvanisé, peint, auto-patinable ou inoxydable, l'acier est un matériau durable qui conserve ses propriétés pendant des décennies et des décennies... De nombreux exemples en attestent.

Ü Liberté créative

L'acier, grâce à ses propriétés uniques (d'élasticité, de ductilité...) offre des possibilités constructives infinies, permet des formes originales, aériennes, défiant les lois de la pesanteur.

Ü Mise en œuvre aisée

L'acier est facile et rapide à mettre en œuvre. On préfabrique des éléments en atelier et seul l'assemblage se fait sur site, apportant aux ouvriers une plus grande sécurité et un meilleur confort dans leur travail.

Ü Pas de nuisances de chantiers

Matériau typique de la filière sèche, l'acier permet de construire rapidement et quasiment sans nuisances de chantier (bruit, déchets, encombrement...).

Ü Confort et économie d'énergie

L'acier, associé à d'autres matériaux, offre des solutions particulièrement intéressantes dans l'habitat : isolation thermique et acoustique, notamment. Par ailleurs, la finesse des

structures donne la possibilité de grandes verrières, donc d'économie de lumière et de chauffage.

Ü Variété d'aspects

L'acier offre une multitude d'aspects de surface (couleurs, textures, brillance). Il propose également une large gamme de dimensions (de la tôle forte pour les ponts à la tôle fine pour l'habillage des façades) et de nuances (inoxydables, patinables, etc).

Ü Réponses aux exigences de la Haute Qualité Environnementale (HQE)

L'acier apporte des réponses et des solutions constructives aux cibles de la démarche HQE.

Ü Constructions modulables

Les constructions en acier sont évolutives, s'adaptant aux changements de besoins des occupants ou de finalité du bâtiment...

I.2-3 Procédés simplifié laminé à froid non revêtu :

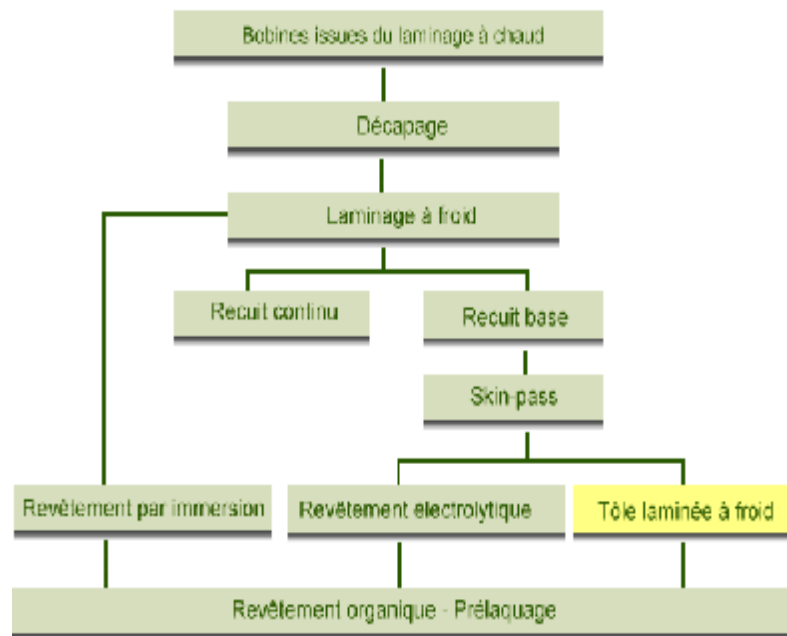


Fig. I-10 Etapes de laminage à froid des tôles en aciers

1.2-4 Les tôles d'acier :

- La tôle d'acier galvanisée :

La tôle d'acier galvanisée en continu est obtenue à partir de bobines d'acier laminées à froid (pour les faibles épaisseurs) ou laminées à chaud (pour les fortes épaisseurs). Lors de la galvanisation, la tôle d'acier subit des traitements chimiques et thermiques, puis est plongée directement dans le bain de zinc en fusion sans être mise en contact avec l'atmosphère. En sortant du bain de zinc, la bande subit différents traitement en vue d'obtenir une parfaite régularité de l'épaisseur du revêtement (par exemple 275 g/m² double face) et des aspects de surface très variés (fleurage normal, effacé, revêtement d'alliage fer-zinc, finition améliorée,...). Elle subit, généralement un traitement de surface de protection superficielle. La norme EN 10142 donne les différentes qualités de revêtement.

- Les tôles ondulées :

Remise à l'honneur par les travaux de *Glenn Murcutt*, la tôle ondulée revient en force dans le langage de l'architecture contemporaine, depuis la fin des années 90. Son image autre fois liée à des usages industriels s'est trouvé progressivement remplacé par l'évocation du monde pionnier américain ou australien posant sur le sol une structure légère à la durée de vie limitée au temps de son utilisation. Venue d'outre mer, cette lecture du matériau répondait au besoin d'exprimer les valeurs de mobilité de la ville contemporaine. Les ateliers et gymnases n'hésitent plus à couvrir leur structure de cette ondulation. *KAZUO SHINOHARA* ose en revêtir ses projets magistralement, *Ingo Bucher Buholz* accroche cette tôle dans son plus simple appareil pour son immeuble d'habitation de constance. [7]

- Résistance de la tôle ondulée/lisse :

La tôle ondulée est plus résistante dans le sens des nervures seulement et c'est uniquement une résistance à la flexion, le reste est inchangé voir affaibli. C'est assez intuitif.

L'explication est qu'en faisant des nervures on augmente le module de résistance I/v . La résistance à la flexion est directement liée à ce module.

I : inertie (ou moment quadratique),

v : distance du milieu de la tôle au sommet de la bosse [8].

I-3 Les différents types de chargement :

I-3-1 Introduction :

La partie suivante, partie II du rapport établi par le comité de travaux sur les structures à usage agricole du comité d'ASCE des membres en acier formés à froid, traite l'analyse des bâtiments cylindriques en acier formés à froid des enveloppes. Plus de 10.000 bâtiments typiques environ de ce type sont érigés tous les ans en Amérique du Nord, avec des portées s'étendant de 7.62-30.48 m (25-100 pi). La majorité de ces bâtiments sont employés pour des entrepôts, des stockages de grain, et des abris d'utilité et de ferme. Ils sont de plus en plus employés également pour de hauts bâtiments d'habitation tels que les équipements publics. Les bâtiments avec ces enveloppes sont habituellement construits avec des panneaux en acier formés à froid en U. La courbure de la construction voulue est habituellement obtenue en développant de petites ondulations dans la partie plus inférieure de la section. Ces ondulations ont un effet significatif sur la rigidité du panneau. Ils améliorent ses caractéristiques d'instabilité locale et réduisent sa rigidité flexionnelle et axiale dans la direction de la courbure. Sous le chargement, les efforts et les déformations du panneau sont régis par la profondeur de l'ondulation, en relation avec le rayon de courbure du bâtiment. Le bâtiment est fait d'une série de voûtes boulonnées ensemble. Des murs plats à l'extrémité sont habituellement construits pour l'obtention d'un système sous forme de coquille reposant le long de ses quatre côtés. La structure peut être traitée comme voûte ou comme coque, selon le rapport portée/longueur, la rigidité longitudinale, et les conditions de chargement et d'appui.

Appart le poids propre, l'enveloppe cylindrique peut être soumise aux charges suivantes:

I. 3-2 Chargement de neige (charge verticale):

Le chargement de neige constitue la charge principale de chargement à considérer pour la conception des enveloppes cylindriques au Canada et les états du nord des Etats-Unis. Des données de cette charge sont données dans [9]. La charge de neige de la toiture est principalement une fonction des propriétés géométriques et thermiques du toit et également de l'environnement et du vent à proximité du toit en question.

Généralement deux cas doivent être considérés pour le chargement de neige, à savoir chargement équilibré de neige au-dessus de la structure entière et chargement dissymétrique expliquant la dérive de neige d'un côté du bâtiment sur l'autre.

L'importance des charges de dérive a été identifiée non seulement en Amérique du Nord également au Nord de l'Europe [10], et plusieurs codes tiennent compte ces dernières années de ces charges de dérive.

Les coefficients de charge de neige qui représentent le rapport entre les charges réelles de neige sur des toits à la charge de neige au sol ont été évalués et présentés la première fois dans codes du bâtiment nationaux du Canada (NBCC) en 1965. La plupart de ces coefficients ont été également employées dans l'édition 1982 de la norme ANSI A58.1 [9] **Fig. I-11**. Des améliorations des coefficients continuent à être ajoutées aux codes que Taylor [11] [12] [13] a décrits pour les charges de neige dans les éditions 1977 et 1980 du NBCC, qui est représenté dans **Fig. I-12**.

Il a également présenté les données et l'historique, aussi bien qu'une discussion suivant les recommandations de codes du bâtiment nationaux canadiens.

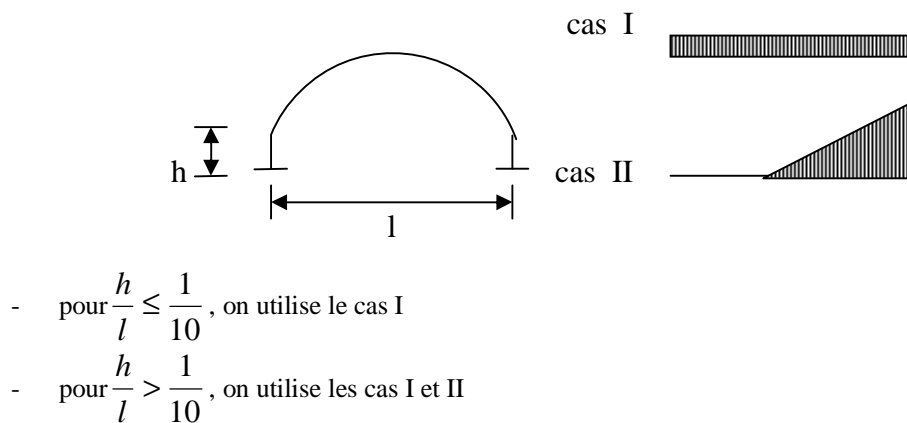
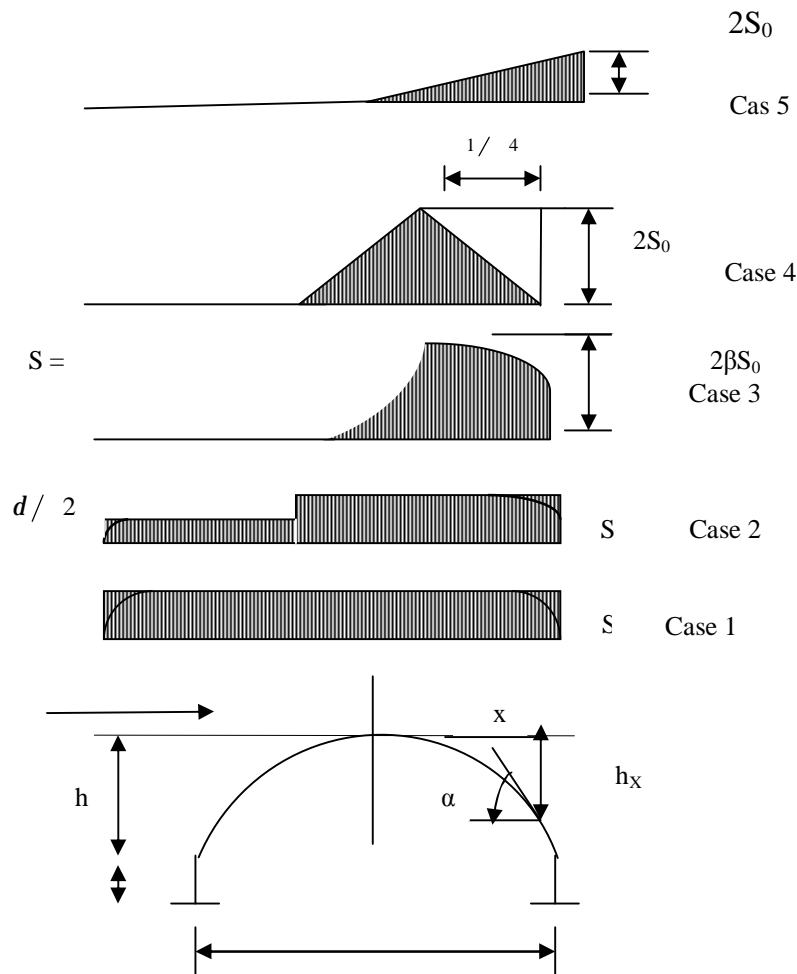


Fig. I-11 ANSI A58-1-72 distribution de la charge de neige sur un arc simple.



- Ou $\frac{h}{L} \leq 0.1$, cas 1 et 2
- Ou $\frac{h}{L} > 0.1$, cas 1 et 5
- Ou $h_w > 0$, facteur de diminution de la pente, β , peut être utilisé dans les cas 1,2 et 5
 $\beta = 1.0$ pour $\alpha \leq 30^\circ$
 $= 1.0 - \left(\frac{\alpha^\circ - 30^\circ}{40^\circ} \right)$ pour $30^\circ < \alpha < 70^\circ$
 $= 0$ pour $\alpha \geq 70^\circ$

Fig. I-12 CNBC distribution de la charge de neige sur un arc simple

I.3-3 Chargement du Vent (charge horizontale):

Une recherche sur la littérature faite par le laboratoire *Boundary Layer Wind Tunnel Laboratoire* (BLWTL) de l'université d'Ontario occidental à Londres, Ontario, indique que les directives existantes pour la charge de vent sur les structures de coques [9] [16] manquent d'exactitude puisqu'elles sont principalement basées sur des données moyennes de pression mesurées dans des souffleries sans simulation correcte d'écoulement. Ces directives exigent

des charges de $1.4G$ au-dessus du quart au vent, $- 0,7G$ sur la moitié centrale, et $- 0.5$ au-dessus du quart sous le vent, dans lequel G est le rapport de la hauteur sur la portée. Ces charges sont prévues seulement pour le chargement structural global pour des vents normaux à la clé. D'autres dispositions de code, utilisant souvent des caractéristiques existantes de toit plat, sont appliquées pour des vents le long de l'arête, et pour la conception locale de revêtement il est intéressant de noter que ces conditions remontent aux expériences antérieurement dans les années 1930. L'étude récente de BLWTL [14] a étudié plusieurs modèles de taille variables des rapports de portées soumis au vent au-dessus des terrains de campagne ouverts. Les deux charges locale et charge répartie sur divers secteurs tributaires ont été étudiées. La conclusion générale de l'étude de BLWTL est comme suit :

1. Des coefficients locaux plus élevés de pression maximale sont obtenus à partir du terrain constitué que du terrain de campagne, mais avec la présence du facteur d'exposition, les charges de vent moyennes devraient être sensiblement les mêmes pour les deux terrains.
2. La composante dynamique de tous les effets de chargement est la plus dominante au-dessus de la composante moyenne.
3. Les panneaux circulaires et la rugosité longitudinale délibérée ont un effet négligeable sur les pressions externes.
4. La longueur de la structure n'a pas un grand effet sur la distribution de pression.
5. La présence d'un mur latéral de hauteur (h_w) **Fig. I-12** a peu d'influence sur le modèle des coefficients de pression sur le toit, étant donné que les coefficients sont normalisés par la pression dynamique moyenne à la taille d'arête.
6. Les charges locales les plus élevées sont des aspirations, agissant à l'extérieur. Les plus grandes sont près du bord circulaire au vent.
7. Les pressions internes sont du même ordre de grandeur que des pressions externes typiques. Une porte ouverte au vent présente un grand incrément aux forces ascendantes locales et de combinaison.

Des modèles simplifiés ont été développés pour application pour concevoir quelques enveloppes spécifiques [14]. Des charges locales sont fournies directement en termes de diagrammes de découpe des coefficients de pression maximale, tandis que les modèles structuraux se composent de distributions de pression principalement liées au parallèle de vents à l'arête ou à la normale à celle-ci, et modifiées pour expliquer de divers facteurs

d'allégement de charge. Une comparaison entre l'ASCE [16] et l'étude de BLWTL [14] pour le vent agissant selon la normale de la direction à l'arête est récapitulée dans le tableau 4. Les valeurs citées de l'étude de BLVVTTL ont été dérivées en employant les valeurs les plus élevées dans les quarts de cercle correspondants et en les divisant par un facteur nominal de rafale de 2.0 comme utilisé dans les codes du bâtiment canadiens ainsi que la comparaison directe des charges est faite.

Tab. I-1 : Valeurs données par ASCE et BLWTL

Source (1)	Quart de cercle (2)	Rapport de longueur/Portée			
		0.5 (3)	0.37 (4)	0.31 (5)	0.27 (6)
ASCE	Au vent	0.7	0.55	0.42	0.38
	Moitié centrale	-1.2	-1.11	-1.00	-0.98
	Sous le vent	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
BLWTL	Au vent	0.65	0.6	0.6	0.5
	Moitié centrale	-0.625	-0.625	-0.55	-0.55
	Sous le vent	-0.45	-0.45	-0.35	-0.35

Les valeurs citées ne sont pas à leur forme finale. Celles-ci montrent simplement les valeurs les plus élevées de chaque quart de cercle. Cette comparaison indique que les charges au vent et sous le vent sur le quart sont presque semblables à celles actuellement utilisées dans la pratique ; cependant, les charges modèles dans la moitié centrale sont sensiblement réduites.

I.3-4 Pression des grains :

Dans les dernières années, beaucoup de fermiers ont employé les enveloppes cylindriques pour le stockage de grain. La pression de grain peut être calculée utilisant la théorie de Coulomb considérant l'action de glissement d'une cale. Ici, l'attention devrait être accordée à la nature de la paroi incurvée soutenant les grains. En raison de la flexibilité considérable du mur, on s'attend à ce que la théorie du coulomb mène aux valeurs réalistes pour les pressions de grain. Il devrait être noté ici que la pression de grain a développé des distributions de moments semblables à ceux induits par le chargement de neige. Par conséquent, l'attention particulière devrait être portée pour des enveloppes cylindriques utilisées pour le stockage de grain et situées dans des secteurs de chute de neige importante.

I.3-5 Analyse :

Le bâtiment se compose d'une série de voûtes boulonnées ensemble. L'extrémité plate, murs accomplissent habituellement la structure de base, lui permettant d'exécuter comme enveloppe cylindrique soutenue le long de ses quatre bords. Les problèmes d'analyse et de stabilité dans les enveloppes cylindriques peuvent être examinés en employant la méthode d'éléments finis [17] [18] [19] ou de bande finie ou en appliquant la théorie des enveloppes orthotropes. La formulation modifiée de la théorie cylindrique orthotrope des enveloppes est décrite dans la réf. d-6 et des essais complets sont rapportés dans [20]. On note que, en cas de longs bâtiments cylindriques (rapport de longueur à la portée supérieur à 1.5, la charge est portée principalement dans la direction de la voûte.

La partie moyenne de l'enveloppe devient non affecté par les murs et se comporte comme une voûte. Ces voûtes sont flexibles et peuvent être analysées par les méthodes matricielles en prenant en considération la matrice géométrique expliquant leur comportement non linéaire [21]. Les références mentionnées ci-dessus fournissent des informations adéquates pour le chercheur intéressé à l'action de voûte de la structure cylindrique. Cependant, elles ne sont pas appropriées pour l'ingénieur praticien, particulièrement en l'absence des programmes informatiques développés. Par conséquent, des formules simplifiées sont développées [22] pour l'usage pratique de la conception habituelle. Ces formules sont présentées dans la section suivante ainsi que des procédures pour calculer les propriétés mathématiques des panneaux.

I.3-6 Propriétés mécanique de panneau :

Les panneaux en acier formés à froid en U sont habituellement faits avec une largeur de 600 millimètres et d'une profondeur de 200 millimètres. La profondeur du de l'ondulation est liée au rayon de courbure, R, du bâtiment. Elle est variable pour différentes section transversale et se calcule par la formule [23] :

$$f = g \sqrt{\frac{e}{8R}} \quad (\text{I-1})$$

Où g = demi-hauteur de l'ondulation; et e= la distance du bas jusqu'au dessus de la section en U globale à laquelle la profondeur du pli est calculée.

Vu que les ondulations ont la forme d'une onde sinusoïdale, la relation entre les forces locales et les contraintes dans la direction de \emptyset est régie par la rigidité axiale locale, d_ϕ [24] :

$$d_f = \frac{Et}{6(1-m^2)} \left(\frac{t}{f} \right)^2 \quad (\text{I-2})$$

Où t = épaisseur du métal ; E = module d'élasticité ; et μ = coefficient de Poisson.

La demi profondeur de l'ondulation, varie d'une valeur maximum au fond de la section en U jusqu'à zéro proche du la fibre extrême. Eqs.(I-2) est modifié pour être valide pour la gamme entière comprenant la zone avec la profondeur du pli. Ceci est accompli en ajoutant l'effet des contraintes de tension à la déformation de recourbement qui étaient la seule attention reçue en développant Eq.(I-2). L'équation modifiée prend la forme [20] :

$$d_f = \frac{Et}{(1 - m^2) \left(6 \frac{f^2}{t^2} + 1 \right)} \quad (\text{I-3})$$

Eqs. (I-2,3) sont valides dans la marge élastique des efforts et de considérer seulement de petites déformations. Afin d'expliquer de grandes déformations et pour la gamme élastique-plastique des efforts, la méthode d'élément fini est appliquée [20]. Ci-dessus, un modèle d'élément fini de 180° du profil d'onde sinusoïdale de tôles pliées est construit avec une dimension du solide iso paramétrique bidimensionnel les éléments [25]. Un déplacement spécifique dans la direction de \emptyset est appliqué et les forces en résultant sont employées pour calculer la rigidité locale. Le déplacement sur le modèle est augmenté donnant une partie du modèle en déformation plastique. En outre, le changement de la géométrie est inclus dans l'analyse pour expliquer l'aplatissement (sous la tension) ou la plus grande profondeur du plissement (sous compression) [20] [26].

Les propriétés sectionnelles du profil en U sont calculées en le divisant en un certain nombre de petits segments. Utilisant Eqs. a-b 17 ainsi que Eqs. 18 a-b et 19 ou l'élément fini résulte, la rigidité axiale locale de chaque segment est calculée. La contribution de chaque segment est intégrée pour déterminer le recourbement et la rigidité axiale du panneau aussi bien que l'endroit de son axe neutre. En outre, le recourbement et les rigidités axiales du panneau sont calculés dans la direction latérale utilisant une approche semblable. La rigidité du matériel orthotrope équivalent est calculée comme rigidité moyenne par largeur d'unité. [20] [23] décrivent des exemples des résultats analytiquement obtenus pour trois panneaux différents, qui montrent la bonne concordance en comparaison avec des rigidités expérimentalement mesurées.

I.3-7 La capacité portante des panneaux :

La rupture des panneaux a souvent été observée sur les parties de « âme ». Les essais de panneau ont prouvé que le rendement dans la zone des plis maximum a lieu bien avant que la portance finale soit atteinte [20]. La rupture du panneau peut être assumée quand la compression maximale est atteinte dans la zone des plis peu profonds ou quand les

déformations plastiques sont atteintes dans les plis les plus profonds. En raison des contraintes résiduelles élevées et de la nature imprévisible de la boucle, il est nécessaire de confirmer des prévisions de rupture par les essais de panneau complets.

I.3-8 Méthodes d'analyse :

La structure avec les fonds plats est performante comme une voûte cylindrique soutenue le long de ses quatre bords. Des conditions d'appuis simples peuvent être assumées le long des bords incurvés puisque les fonds plats sont très rigides dans leur plan mais très flexible dans la direction perpendiculaire (c.-à-d, la direction de la voûte). La condition le long de la direction longitudinale dépend des conditions de base, qui peuvent être établies suivant les indications de **Fig. I-13 (a-c)**.

Avec les liaisons de construction [**Fig. I-13(a)**], on observe qu'une charnière classique n'existe pas puisque les réactions ne sont pas appliquées sur l'axe neutre des panneaux. Les résultats d'essai sur une voûte complète chargée uniformément [27] **Fig. I-14** montrent l'effet de telles conditions en comparaison avec l'analyse théorique de la voûte avec l'appui longitudinal articulé. Une construction avec l'embase de la [**Fig. I-13(b)**] mène à l'exécution de la voûte qui dans des conditions d'une articulation parfaite et celles d'appuis fixes. Les conditions aux limites approchent celles des bords longitudinaux fixes quand l'appui est ancré dans le béton suivant les indications de la [**Fig. I-13(c)**] et les résultats d'essai correspondants dans **Fig. I-14**. Généralement on identifie que les conditions aux limites dépendent des appuis de la construction et, que l'analyse avec une articulation parfaite ou des conditions fixes parfaites, le concepteur devrait donner son jugement en assurant l'une des deux conditions idéales.

Avec l'augmentation du rapport de la longueur/portée dans le bâtiment, la partie centrale est dans un état dans lequel, la base des murs relativement inchangés et agit en tant que voûte **Fig. I-15**. Par conséquent, la voûte et l'analyse de coquille sont présentées ici.

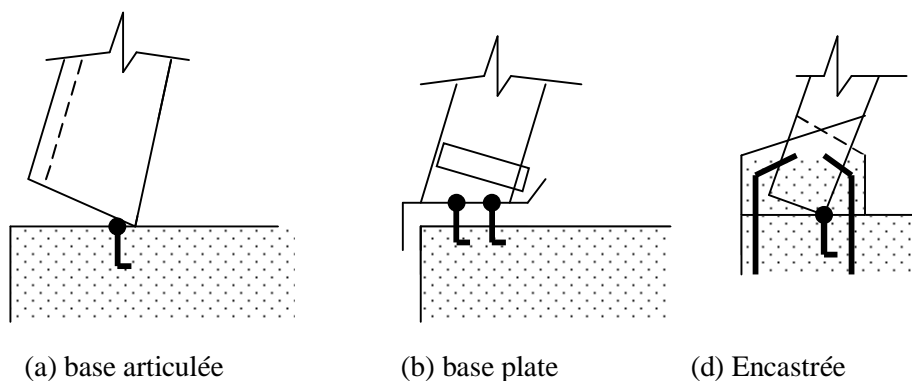


Fig. I-13 Types des fondations dans le sens longitudinal

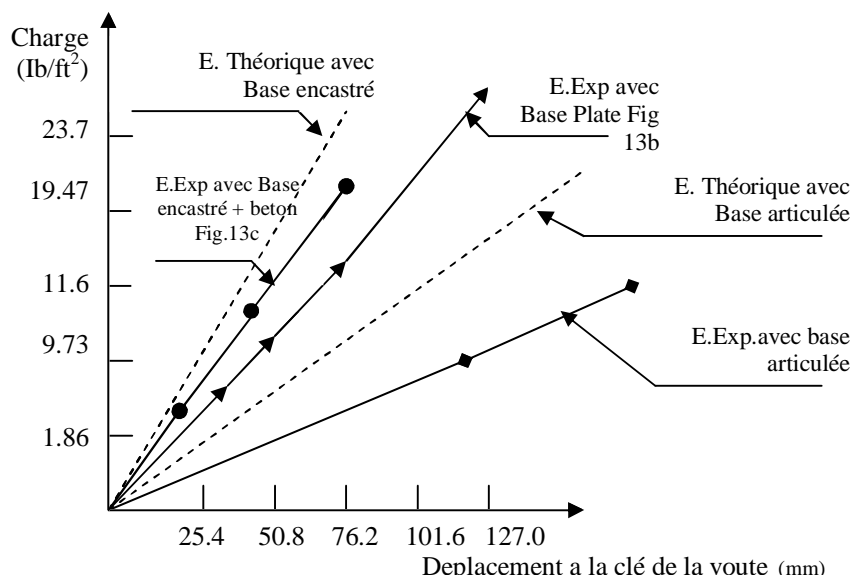


Fig. I-14 Résultats analytiques et expérimentaux d'un arc cylindrique.

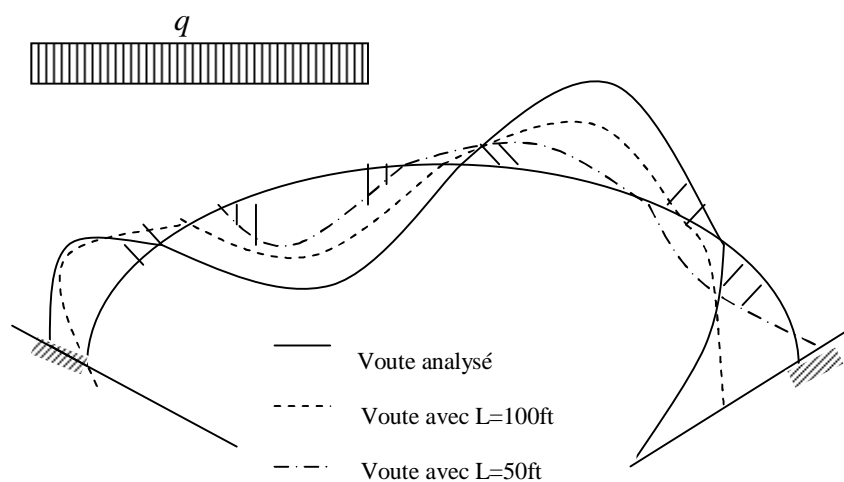


Fig. I-15 Diagramme des moments fléchissant [50ft=15.24m]

I.3-9 Analyse d'arc :

La voûte est considérée comme polygone composé d'éléments droits et est traitée comme armature statiquement indéterminée avec le chargement appliqué aux nœuds. La relation entre le chargement appliqué et le vecteur de déplacement est régi par la matrice de rigidité, qui est produite prenant en compte les limites non linéaires dans le rapport de déplacement contrainte [21]. En raison de la présence des limites non linéaires, le procédé itératif est appliqué pour obtenir des solutions aux équations données par les matrices. Un programme informatique est écrit, dans lequel le problème est traité comme linéaires. Chaque étape représente un incrément de charge, suivi de modification sur la configuration géométrique de la voûte, aussi bien qu'établir la force axiale, dans chaque membre. Le comportement

analytique prévu de la voûte s'est avéré, pour être conforme raisonnablement aux résultats expérimentaux obtenus en examinant le modèle aussi bien que les voûtes complètes [20] [28]. La Fig. I-16 donne un exemple du moment de flexion maximum calculé dans une voûte doublement articulée considérant son comportement linéaire et non linéaire.

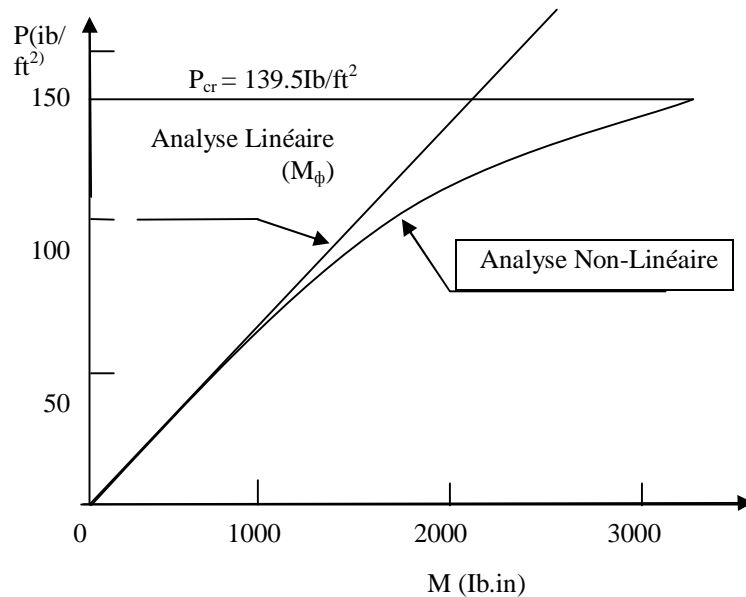


Fig. I-16 Moment fléchissant max, M , pression P
 $(R=7.87\text{m (310in.)} ; \phi_\ell = 60^\circ)$
 $P_{cr} = 139.5\text{Ib/ft}^2 = 679.5\text{kg/m}^2$

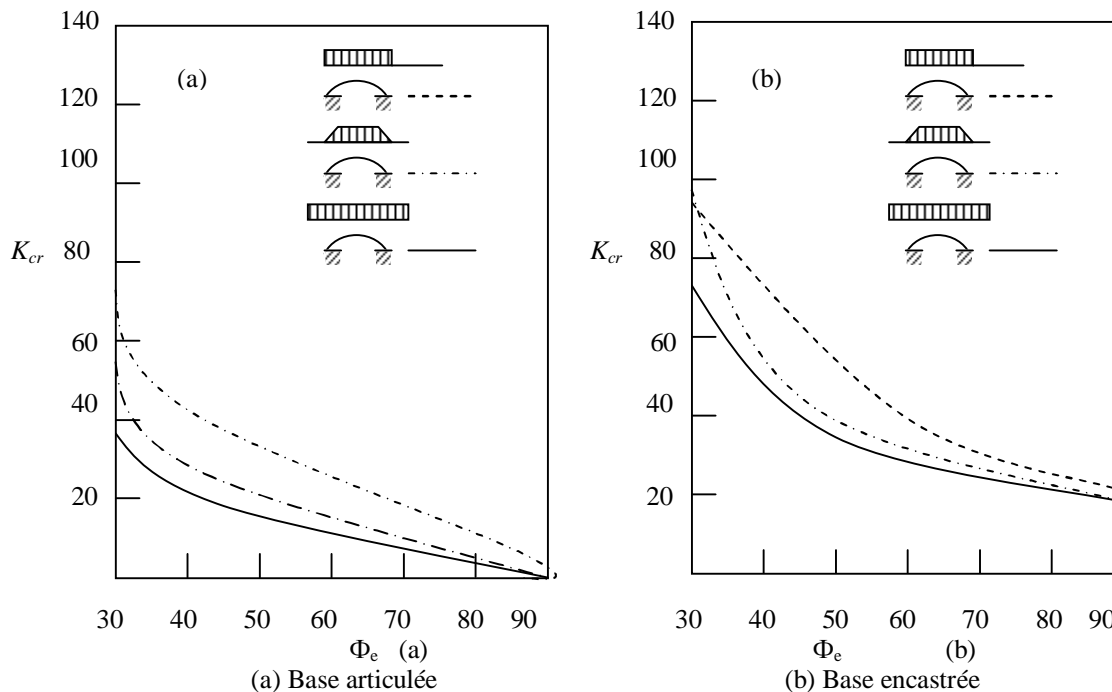


Fig. I-17 Facteur de flambement K_{cr} .

I. 3-10 Charge critique :

Quand l'incrémentation de la charge dépasse la limite critique, la matrice de rigidité devient non positivement définie et la charge critique a la valeur comprise entre les deux derniers incréments de charge. Ci-dessus, l'importance de la charge de critique peut être déterminée utilisant le schéma de Southwell et les données de déformations obtenues à partir des étapes précédant la charge critique.

La charge critique est donnée par la formule :

$$P_u = k_{cr} \frac{EI}{R^3} \quad (\text{I-4})$$

Où EI , R = la rigidité flexionnelle, rayon de la voûte, respectivement ; k_{cr} = une constante régie par la répartition des charges et par l'angle interne, de la voûte **Fig. I-17(a,b)**. La rigidité axiale EA de la voûte s'avère avoir un effet négligeable sur la charge critique.

I.3-11 Comportement non-linéaire des voutes:

Le comportement avant la rupture de la voûte est non linéaire **Fig. I-16**. Le moment de flexion réel peut être écrit comme :

$$M = M_o \cdot d \quad (\text{I-5})$$

Où M_o = le moment de flexion calculé utilisant n'importe quelle analyse linéaire classique de structure ou en employant **Fig. I-18 (a,b) approchées** ; d = un facteur de majoration expliquant le comportement non linéaire des voûtes :

$$d = \frac{1}{1 - \frac{aP}{P_{cr}}} \quad (\text{I-6})$$

Où P = l'intensité de charge ; P_{cr} = l'intensité de la charge critique ; a constante dépendant du type de chargement et des conditions d'appuis. Il convient de noter que l'équation (I-6) est identique à celle des poutres poteaux où $a=1$. Pour des voûtes circulaires a varie légèrement avec l'angle interne \emptyset , et est régi principalement par le type de chargement et par les conditions aux appuis. Les valeurs de a sont indiquées dans la **Fig. I-19a** pour la voûte doublement articulée et dans la **Fig. I-19b** pour une voûte avec deux appuis fixes.

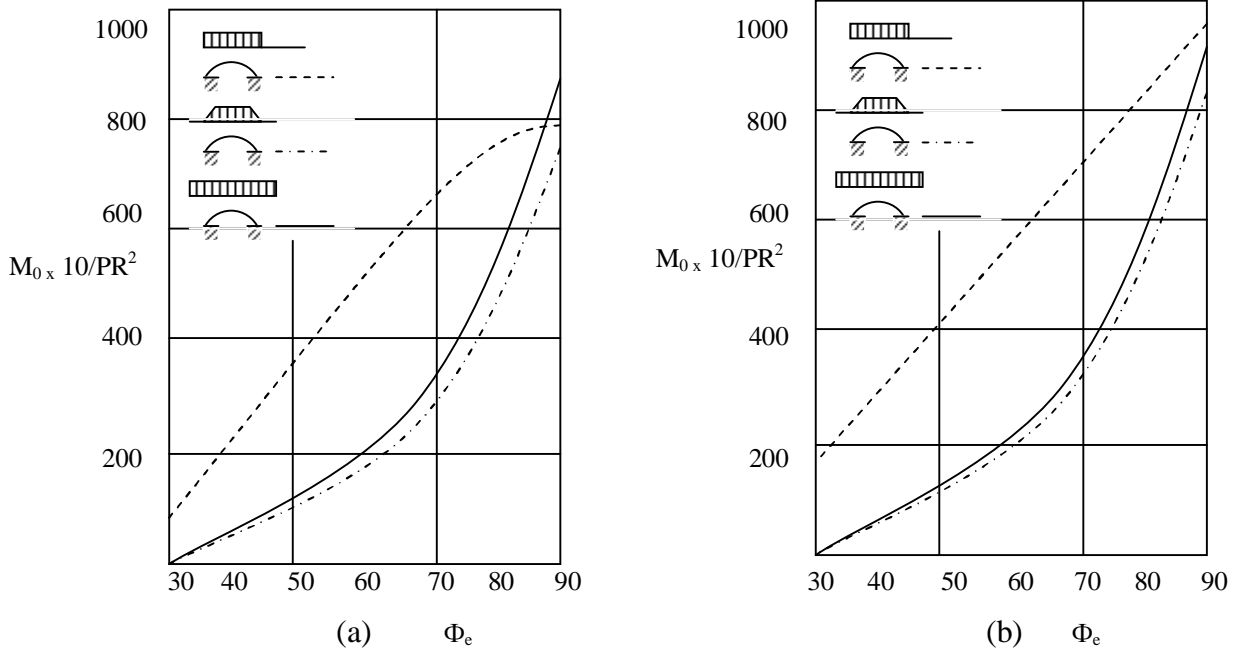


Fig. I-18 (a) Moment fléchissant linéaire (appuis articulé)
 (b) Moment fléchissant linéaire (appuis encastré)

I.3-12 Analyse des coques :

La coque est analysée utilisant la théorie de coques cylindriques orthotropes. Les équations régissant le comportement de la coque sont formulées prenant en compte le caractère spécial des panneaux où les rigidités dans la direction incurvée sont considérablement importantes que celles dans la direction longitudinale. Les trois équations simultanées sont données dans les composantes de déplacement u , v , et w dans les directions X , directions de \emptyset , et z , respectivement [29] :

$$D_{\Phi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} - \frac{\partial w}{\partial f} \right) + D_{x\Phi} \left(R \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial f} + R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{3B_{xf}}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial f} \right) + R^2 p_f = 0 \quad (I-7)$$

$$\frac{B_f}{R^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \Phi^4} - \frac{2\partial^3 w}{\partial f^2} - w \right) + D_{\Phi} \left(\frac{\partial v}{\partial f} - w \right) - 2B_{xf} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial f^2} \right) + B_x R^2 \frac{\partial w^4}{\partial x^4} + R^2 p_z = 0 \quad (I-8)$$

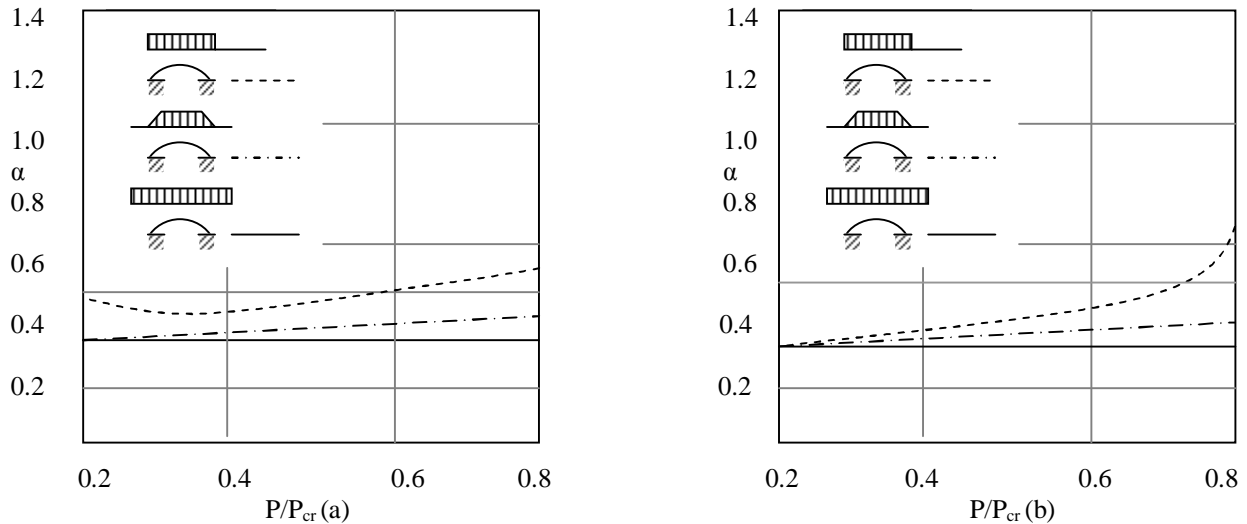


Fig. I-19 (a) Facteur de majoration du moment (appui articulé)
(b) Facteur de majoration du moment (appui encastré)

Où p_x , p_θ , et p_z = le chargement externe par unité de surface du plan moyen agissant dans les directions de x , de y , et de z , respectivement ; B_x , B_θ = les rigidités flexionnelles dans les directions x et θ , respectivement ; D_x , D_θ = rigidité axiale dans les directions x et θ , respectivement ; et $B_{x\theta}$, $D_{x\theta}$ = les rigidités de torsion et de cisaillement, respectivement.

L'application de la théorie des coques orthotropes et des équations précédentes, Eqs. (I-7,8) s'est avéré une bonne approche en déterminant le comportement de modèles de coques faites de tôles d'acier ondulées [29] aussi bien que pour examiner les coques cylindriques complètes [20]. L'analyse numérique prouve que, à moins que la coque soit très courte, on peut à peine observer l'action de la coque dans le cas d'une structure sans les renforts longitudinaux. Cela est dû à la rigidité axiale très faible, D_x dans la direction longitudinale. Cette rigidité peut être augmentée en plaçant des renforts longitudinaux et en s'assurant de leur effet uniforme au-dessus de la longueur d'arc. La rigidité axiale est calculée comme :

$$D_x = \frac{A_s E}{s} b \quad (I-9)$$

Où A_s = section de renfort ; E = module d'élasticité ; s = espacement entre les renforts ; et b = facteur de réduction pour expliquer la distribution non-uniforme des forces dans la direction longitudinale.

Une valeur donnée de $b = 0.4$ s'est avérée satisfaisante dans les résultats analytiques en comparaison avec ceux obtenus expérimentalement à partir des essais complets avec la longueur de la coque égale à sa portée [20]. Pour les voutes longues, des comparaisons

similaires montrent la tendance où b devrait augmenter avec l'augmentation du rapport de la longueur à la portée [20].

I.3-13 Observations et recommandations :

1. La conception des coques cylindriques est régie par l'importance du moment, M_{ϕ} , dans la direction de la voûte aussi bien que les forces axiales, N_{ϕ} , et N_x , dans les directions de la courbure et longitudinales, respectivement. La conception appropriée devrait être basée sur l'analyse considérant les paramètres effectifs de la coque.

2. Les effets de coque sont beaucoup affectés par le chargement non équilibré relatif qu'un chargement équilibré. C'est important puisque la charge non équilibrée régit souvent la capacité portante de la voûte.

3. L'action de l'enveloppe cause des forces relativement importantes de cisaillement dans les murs, qui doivent être conçus pour agir en tant que membranes de cisaillement. Les raccordements entre les voûtes et les murs doivent également être capables de transférer ces forces de cisaillement. Les forces résultantes sur la base sont très différentes de ceux des voûtes et l'attention spéciale doit être accordée aux forces de soulèvement qui sont développées aux coins.

4. Un soin doit être apporté dans l'application des renforts longitudinaux puisque leur rigidité peut attirer de plus grandes forces qu'ils ne sont pas capable de supporter.

5. Le souci pratique important dans l'analyse est d'établir l'état des bases qui peut varier essentiellement de celui fixe (base de voûte incluse et faisant partie intégrale de la base) à celui articulé (base de voûte attachée à un plat à base métallique typique flexible). Si la réaction axiale n'est pas appliquée dans l'axe neutre, un moment additionnel peut être produit à la base. Ceci est connu pour avoir mené à plusieurs ruptures prématurées où des bâtiments ont été laissés vulnérables pendant l'hiver parce que le temps froid a retardé le placement du béton pour finaliser la base.

Un autre souci pratique se rapporte à la présence des panneaux translucides dans certaines voûtes. Celles-ci réduisent non seulement la résistance de section dans le secteur comme prévu, mais peuvent causer l'instabilité des surfaces de panneau immédiatement à côté des panneaux translucides.

I.4 Méthodes de calcul des voutes autoportantes :

I.4-1 Introduction :

Méthodes dites « exactes » et méthodes dites « simplifiées » pour le calcul des voutes autoportantes :

En général, on peut subdiviser les méthodes de calcul des efforts intérieurs dans les constructions du genre voutes autoportantes en deux catégories :

- a) les méthodes dites « exactes »
- b) les méthodes dites « simplifiées ».

Comparées aux méthodes dites « exactes » les méthodes dites « simplifiées » admettent des lois simplifiées pour les déformations principales de la construction ; elles négligent ainsi l'influence de certaines déformations secondaires qu'elles considèrent du deuxième ordre.

Il y a lieu de remarquer qu'en toute rigueur, les méthodes dites exactes du comportent malgré tout des approximations puisqu'elles négligent la plasticité et l'hétérogénéité du matériau de construction béton armé et admettent que le matériau est homogène et se déforme élastiquement suivant la loi de Hooke.

I.4-2 Examen des méthodes dites « exactes » :

Ce sont des méthodes analytiques qui comportent en général deux groupes d'opérations : La détermination des efforts et des déformations de membrane, en faisant abstraction des efforts de plaque. Ces efforts sont déterminés en partant des seules conditions d'équilibre et admettent que sur le pourtour tous les efforts agissent dans les plans tangents à la surface de la membrane. Les contraintes et les déformations qui en résultent ne sont en général pas compatibles avec les conditions réelles imposées par les liaisons sur le pourtour. Pour en tenir compte, on passe à la deuxième phase du calcul. La détermination des efforts de plaques s'effectue en satisfaisant aux conditions du contour. Cette phase de calcul qui introduit la loi linéaire des déformations élastiques de Hooke, conduit à une équation dérivée partielle du 8ème ordre dont la résolution entraîne un calcul long et pénible. On procède en général par développements en série de Fourier et pour simplifier, on se contente souvent du 1er terme. Une contribution importante à l'application de ces méthodes est due à *Finsterwalder, Fligge, Jacobsen, Jenkins, et Wlassow*. Pour les voutes autoportantes à directrice circulaire les tables de *Rtidiger-Urban* 44, facilitent les calculs.

Si la directrice n'est pas cercle, si l'épaisseur de la voute n'est pas constante, on s'il y a des charges concentrées ou non uniformément réparties, ou encore si la voute est continue dans le sens longitudinal, les méthodes dites « exactes » conduisent à des opérations extrêmement

compliquées et perdent leur intérêt prédictive. On est alors conduit à recourir aux méthodes simplifiées.

I.4-3 Examen des méthodes dites « simplifiées » :

Nous nous placerons dans le cadre des voûtes cylindriques. On distingue deux groupes de méthodes simplifiées :

- Méthodes basées sur une schématisation des déformations des sections droites ; par exemple, la méthode de la poutre qui assimile la voûte à une poutre droite dont la forme de la section transversale ne change pas.
- Méthodes qui assimilent la section droite à une succession d'éléments simples par exemple, la méthode de la voûte prismatique qui remplace la voûte cylindrique par une voûte prismatique.

Ces méthodes simplifiées conduisent à des calculs plus rapides que les méthodes exactes et permettent ainsi à l'ingénieur de comparer plus facilement les différentes formes constructives pour fixer son choix. En outre, elles ont l'avantage d'être applicables à des directrices de formes quelconques. Une contribution importante à l'application des méthodes simplifiées selon le groupe « 1 », ci-dessus, a été apportée par *Lundgren, Vlassov, Strauss* et *Callari*.

Les méthodes de calcul pour les voûtes prismatiques ont été étudiées notamment par *Yitzhaki, Grabowsky* et *Hartenbach*. [31]

I.4-4 Le calcul statique des voûtes autoportantes longues :

I.4-4-1 Généralités

1-Conditions de l'élément cylindrique :

Les efforts intérieurs agissant sur un élément cylindrique de voûte autoportante sont rappelés dans la **Fig.20**.

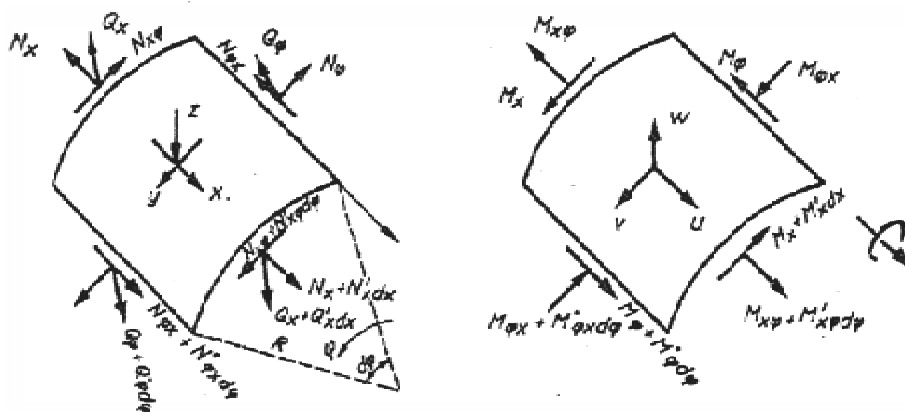


Fig. I- 20 Efforts intérieurs agissant sur un élément cylindrique de voûte autoportante

Les conditions d'équilibre donnent les 6 équations d'équilibres suivantes :

$$RN'_x + N'\varphi + XR = 0 \quad (\text{I-10a})$$

$$N'\varphi + RN'_x\varphi - Q\varphi + YR = 0 \quad (\text{I-10b})$$

$$N\varphi + RQ'_x + Q'\varphi + ZR = 0 \quad (\text{I-10c})$$

$$RM'_x + M'\varphi_x - RQ_x = 0 \quad (\text{I-10d})$$

$$M'\varphi + RM'_x\varphi - RQ\varphi = 0 \quad (\text{I-10e})$$

$$R(N_x\varphi - N\varphi_x) + M\varphi_x = 0 \quad (\text{I-10f})$$

Ces six équations d'équilibre ne suffisent pas pour déterminer les dix efforts intérieurs inconnus. La voute autoportante est donc intérieurement hyperstatique. On peut alors procéder de deux manières : ou bien résoudre le problème directement en tenant compte de tous les efforts intérieurs, ou bien choisir un système principal, isostatique, que l'on peut calculer, et auquel on applique les perturbations hyperstatiques, à titre de correction ; ces deux manières de procéder conduisent à deux méthodes de calcul, dont les grandes lignes seront exposées aux paragraphes suivants.

2-Hypothèses :

L'une et l'autre des méthodes introduisent les hypothèses suivantes, qui sont pratiquement réalisées dans les constructions courantes :

- ✓ La normale au feuillet médian passe par les mêmes points avant et après la déformation.
- ✓ Les déformations sont petites par rapport à l'épaisseur de la voute.
- ✓ La loi de Hooke peut être appliquée.
- ✓ Les contraintes normales perpendiculaires à la surface moyenne sont négligeables.
- ✓ Les déformations dues aux efforts tranchants Q sont négligeables.

3-Méthode Flügge-Dischinger :

Cette méthode résout le problème directement. Il n'y a ainsi, en principe, pas de système principal isostatique, pas de première approximation par conséquent ; les causes d'erreurs s'affirment intégralement jusqu'à la solution finale. Flügge utilise néanmoins, à l'occasion, la membrane comme système principal ; suivant le choix qu'il en fait, les corrections hyperstatiques deviennent si importantes, qu'elles modifient complètement l'allure de la

solution préliminaire. En partant des hypothèses rappelées au paragraphe précédent, il est possible d'exprimer les efforts intérieurs en fonction des déplacements u, v, w des point du feuillet moyen. On obtient alors les équations (I-11) :

$$N_x = D \left[u' + \frac{Y}{R} (v' + w) \right] - \frac{k}{R} w'' \tag{I-11a}$$

$$N_\varphi = D \left[\nu u' + \frac{1}{R} (v' + w) \right] + \frac{k}{R^3} (w'' + w) \tag{I-11b}$$

$$N_{x\varphi} = \frac{1-\nu}{2} \left[D \left(\frac{u'}{R} + v' \right) + \frac{k}{R^2} (v' - w'') \right] \tag{I-11c}$$

$$N_{\varphi x} = \frac{1-\nu}{2} \left[D \left(\frac{u'}{R} + v' \right) + \frac{k}{R^3} (u' + R w'') \right] \tag{I-11d}$$

$$M_x = k \left(w'' + \frac{\nu w''}{R^2} - \frac{u'}{R} - \frac{\nu v''}{R^2} \right) \tag{I-11e}$$

$$M_\varphi = k \left[\frac{1}{R^2} (w'' + w) + \nu w'' \right] \tag{I-11f}$$

$$M_{x\varphi} = \frac{(1-\nu)k}{R} (w'' - v') \tag{I-11g}$$

$$M_{\varphi x} = \frac{(1-\nu)k}{R} \left(w'' + \frac{u'}{2R} - \frac{v'}{2} \right) \tag{I-11h}$$

$$D = \frac{En}{1-\nu^2} \qquad k = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)}$$

Constituant les efforts intérieurs ainsi trouvés dans les conditions d'équilibre et en les éliminant, on trouve alors trois équations différentes reliant les déformations u, v, w , et les charges X, Y, Z , aux variables x et φ .

$$R^2 u'' + \frac{1}{2} (1-\nu) u'' + \nu R u' + \frac{1}{2} (1-\nu) R v'' + k \left[\frac{1}{2} (1-\nu) u'' - R^3 w'' + \frac{1}{2} (1-\nu) R w'' \right] + X \frac{R^2}{D} = 0 \dots \tag{I-12a}$$

$$\frac{1}{2} (1+\nu) R u'' + v'' + \frac{1}{2} (1-\nu) R^2 v'' + w' + k \left[\frac{3}{2} (1-\nu) R^2 v'' - \frac{1}{2} (3-\nu) R^2 w'' \right] + Y \frac{R^2}{D} = 0 \dots \tag{I-12b}$$

$$\nu R u' + v' + w + k \left[\frac{1}{2} (1-\nu) R u'' - R^3 u'' - \frac{1}{2} (3-\nu) R^2 v'' + R^4 w'' + 2R^2 w'' + w'' + 2w'' + w \right] + Z \frac{R^2}{D} = 0 \dots \tag{I-12c}$$

$$k = \frac{h^2}{12R^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = F' \qquad \frac{\partial f}{\partial j} = F'$$

La résolution directe de ce système n'est pas possible. Il est d'usage de considérer la solution cherchée comme la somme d'une solution particulière, qui tient compte des charges de

surface, et d'une solution générale, correspondant au système d'équations homogènes, ou les charges de surface sont nulles et où seules interviennent les conditions au contour. Si on développe les charges et les déformations en doubles séries de Fourier, le système (I-12) se transforme en 3 équations linéaires et non homogènes, faciles à résoudre.

Pour trouver la solution homogène, il faut poser pour les charges.

$$X = Y = Z = 0$$

Et pour les déformations.

$$u = \sum_0^{\infty} A e^{mp} \cos \pi n \frac{x}{l} \quad \text{etc.}$$

Cela conduit à 3 équations linéaires et homogènes, dont les solutions doivent être non nulles. Il faut pour cela que le déterminant des coefficients s'annule, ce qui donne une relation entre les valeurs de m et de n , qui ne peuvent pas être choisies indépendamment l'une de l'autre.

$$m^8 + m^6(2 - 4I^2) + m^4[1 + I^2(-8 + 2\nu) + 6I^4] + m^2[I^2(-4 + 2\nu) + 6I^4 - 4I^6] + m^0[I^4(4 - 3\nu^2) - 2I^6\nu + I^8] + I^4 \frac{1 - \nu^2}{k} = 0 \quad (\text{I-13})$$

$$I = np \frac{R}{2}$$

Les 8 valeurs de m ont la forme :

$$m = \pm a \pm ib$$

Où a et b définissent les 8 ondes qui composent chacun des efforts et des déformations. Si ces ondes sont déterminées pour chacun des termes des séries et si les constantes d'intégration sont calculées, le problème est résolu. On connaîtra alors la déformation et, en passant par les équations (I-10), les efforts intérieurs de la voûte autoportante. Cette méthode, quoiqu'étant directe, a de graves défauts. Elle n'est applicable qu'à des voûtes à directrice circulaire et pour les voûtes à épaisseur variable elle se complique encore considérablement. En plus, le développement en série de Fourier ne peut guères s'appliquer aux voûtes continues. Comme on vient de le voir, le calcul est long et compliqué et de ce fait convient mal aux études générales.

4-Méthode Jakobsen-Lundgren :

Cette méthode considère la voûte autoportante comme une poutre. En effet, L'ouvrage portant d'un tympan à l'autre peut être comparé, dans son ensemble, à une poutre qui a autant d'appuis que la voûte compte de tympans appuyés. Il s'ensuit que les notions d'efforts intérieurs d'une poutre, moment fléchissant et effort tranchant, doivent se retrouver dans les sections des voûtes autoportantes, et moyennant certaines hypothèses il est possible de déterminer la

distribution et la valeur des contraintes agissant dans la section. On obtient alors une première approximation déjà satisfaisante, qu'on utilise, le cas échéant, sans correction dans les voles très longs, symétriques de forme et de charge. Employée dans les conditions citées plus haut, cette méthode donnera généralement des résultats plus exacts que la méthode directe de *Flügge-Dischinger*. Le calcul ne conduit ni à une équation différentielle, ni à l'emploi de nombres complexes. Il est possible d'examiner ainsi des voutes dont la directrice a une forme quelconque, et de faire ensuite des comparaisons instructives quant à leur comportement statique. C'est sur cette méthode que sont basées les études qui vont suivre.

En partant principalement de la méthode des "*Cylindrical Shells*" de *Lundgren*, on a cherché dans les chapitres suivants à en simplifier l'application de 2 manières :

- 1) en établissant des graphiques propres à guider le choix vers des solutions avantageuses,
- 2) en résolvant les intégrales en formules explicites permettant de calculer directement les principaux efforts dans une voute autoportante.

I.4-5 Exposé de la méthode de la poutre :

1- Hypothèses du calcul :

Les études suivantes traitent le cas des voutes autoportantes longues, non nervées, appuyées librement, symétriques et soumises à des charges uniformément réparties sur la totalité de leur surface développée. Aucune action secondaire ne leur inflige une torsion comme le feraient des continuités latérales inégales ou des charges localisés de neige et de vent. Aucune charge non plus le long des bords ou d'un parallèle au faite.

On assimile la voute longue, isolée, à une poutre simple librement appuyée à ses deux bouts.

Pour le calcul, on introduit les hypothèses suivantes :

- 1) Les sections droites de la voute restent planes après déformation.
- 2) Les moment M_x , $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$ sont très petits et peuvent être négligés .
- 3) Il en est de même des déformations dues à $N_{x\varphi}$.
- 4) La contraction transversale y est supposée nulle.

Il résulte de l'hypothèse 1 pour la flexion simple la validité de la règle de Navier. L'hypothèse 2 montre que la méthode de la poutre n'est applicable qu'aux voutes longues, dans lesquelles la transmission des efforts dans le sens longitudinal ne se fait pas par effet de plaque ($M_x = 0$, $Q_x = 0$). En revanche, dans les voute courtes, ces moment de plaque prennent une certaine importance et il n'est plus permis de négliger M_x . Il importe donc de définir la limite entre les

voutes longues et les voutes courtes .Dans la deuxième partie, le rôle de la longueur de la voûte sera examiné plus en détail, ce qui permettra dans une certaine mesure de définir les limites, dans lesquelles on peut appliquer la méthode de la poutre sans corrections.

En vertu de l'hypothèse 2 , seuls les efforts suivants sont à considérer :

$N_x, N_{x\varphi} = N_{\varphi x}, M_\varphi, Q_\varphi, N_\varphi$. On convient d'appeler efforts de poutre $N_x, N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$, et efforts d'arc M_φ, Q_φ et N_φ .

2- Efforts de poutre :

Assimilée à une poutre, la voûte subit une flexion dans le plan vertical longitudinal. Les contraintes normales σ_x dans la direction des génératrices ont alors la valeur.

$$s_x = \frac{M}{I_y} z \quad (\text{I-14})$$

Où: M est le moment total agissant dans la section x de la voûte. Il est égal au moment provoqué par la charge P dans une poutre qui aurait la même longueur que la voûte autoportante. I_y est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe y passant par son centre de gravité.

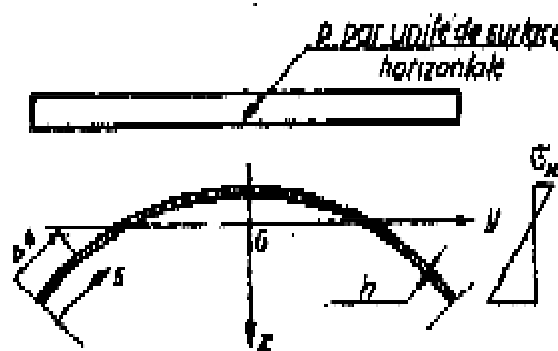


Fig.I- 21 Contrainte normale S_x dans la direction de la génératrice.

On peut aussi définir un effort normal N_x

$$N_x = s_x h = h \frac{M}{I_y} z \quad (\text{I-15})$$

La résultante axiale sur un arc de voûte de longueur s est donnée par

$$\int_0^s N_x ds = \frac{M}{I_y} \int_0^s h \cdot z ds = \frac{M}{I_y} S_y(s) \quad (\text{I-16})$$

S_y est le moment statique de l'élément de section, compris entre 0 et s , par rapport à l'axe y .

Le moment M varie avec la position de la droite de la voûte, par conséquent il en est de même pour l'effort. Si on considère deux sections droites distantes de dx , la différence des efforts N_x a la valeur :

$$\frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_y(s)}{I_y} \cdot dx = T \frac{S_y(s)}{I_y} \cdot dx \quad (\text{I-17})$$

Où : T désigne l'effort tranchant total dans la section X de la voûte autoportante. L'effort (I-17) est équilibré par les efforts tangentiels agissant dans les sections parallèles aux génératrices, qui ont donc la valeur.

$$N_{jx} = \frac{T}{I_y} S_y(s) \quad (\text{I-18})$$

La formule (I-18) montre que l'effort tangentiel le long du méridien est proportionnel au moment statique de la partie de section limitée par le parallèle considéré. Il l'est aussi à l'effort tranchant. On peut montrer que les projections verticales de cet effort tangentiel varient comme les contraintes tangentielles sur les sections d'une poutre rectangulaire.

3- Efforts d'arc :

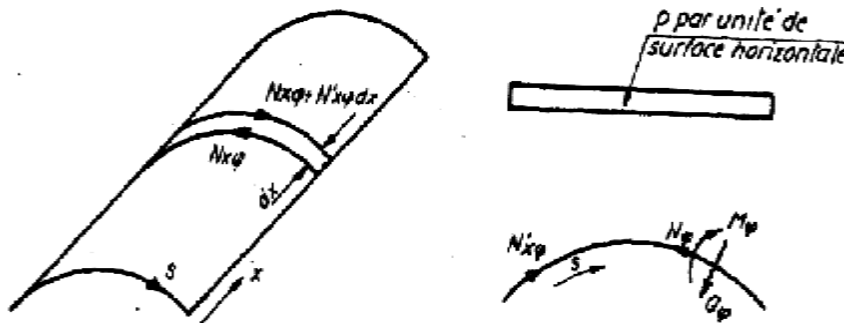


Fig. I-22 L'effort d'arc

Si on découpe un arc de largeur d_x , on voit qu'il est soumis, en plus des charges extérieures directement appliquées, à la différence entre les efforts tangentiels $N_{x\varphi}$ à gauche et à droite, dont la résultante est

$$N_{xj} = N'_{jx} = \frac{p}{I_y} S_y(s) \quad (\text{I-19})$$

L'effort $N_{x\varphi}$ doit être considéré comme une charge dirigée suivant la tangente de l'arc de largeur d_x . Celui-ci est alors en équilibre sous l'influence de $N_{x\varphi}$ et de la charge extérieure p et peut être calculé d'après les règles de la statique. On trouvera ainsi l'effort N_φ , le moment M_φ et l'effort tranchant Q_φ . [2]

I.5 Analyse des coques :

I.5-1 Introduction :

Les coques minces sont utilisées dans de nombreux domaines comme éléments structurels (silos, voûte, réservoirs, aéroréfrigérants,...), du fait de leurs excellentes capacités à transmettre et supporter des chargements très variés. L'effet de voûte est ainsi utilisé depuis des siècles. Elles sont malheureusement souvent sujettes à des instabilités structurelles plus ou moins "catastrophiques". Ainsi, le dimensionnement des structures coques requiert d'avoir au préalable une bonne compréhension de ces instabilités ; le siècle dernier a vu nombre d'auteurs se pencher sur le problème de l'instabilité des coques minces, et développer des approches théoriques, expérimentales ou numériques permettant de mieux cerner ce phénomène. Concernant le cas particulier des coques semi-cylindriques minces, en fonction du chargement appliqué, de la géométrie étudiée et des niveaux de contrainte atteints dans la structure, la perte de stabilité peut être liée à deux phénomènes plus ou moins distincts :

- la présence d'une bifurcation d'équilibre, au niveau de laquelle on observe l'apparition soudaine d'un mode de déformation différent du mode initial.
- l'atteinte d'un point limite, où une amplification accélérée du mode de déformation initial se produit.

Nous utiliserons dans notre travail le terme générique de flambage pour désigner l'un ou l'autre de ces deux types d'instabilités structurelles. Celles-ci ne sont pas exclusives l'une de l'autre ; dans certains cas, il est possible d'observer successivement une première instabilité par bifurcation, qui conduit la structure dans un état d'équilibre adjacent stable. Si aucun autre point de bifurcation n'est rencontré sur ce nouveau chemin d'équilibre, la ruine de la structure sera généralement atteinte par point limite en poursuivant le chargement. Nous aurons l'occasion de revenir plus largement sur ce type de comportement dans la suite de notre exposé.

I.5-2 Cadre théorique de l'étude : concepts d'équilibre, de bifurcation et de stabilité

Trois concepts essentiels ont été évoqués en introduction. Il s'agit des notions d'équilibre, de stabilité et de bifurcation. Nous en rappelons une définition succincte ci-dessous.

I.5-2-1 Equilibre d'un système mécanique :

Considérons dans un premier temps un phénomène physique quelconque, dont l'évolution dans le temps est décrite par une équation du type :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(I, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad t > 0 \quad (\text{I-20})$$

Dans un environnement paramétré par un scalaire I . Les états d'équilibre stationnaire de ce phénomène sont définis par l'équation fonctionnelle :

$$F(\lambda, u) = 0 \quad (\text{I-21})$$

Qui admet l'ensemble solution :

$$S = \{(\lambda, u); F(\lambda, u) = 0\} \quad (\text{I-22})$$

Si l'on adopte le point de vue du mécanicien, il est possible de montrer en appliquant le principe des travaux virtuels que l'énergie potentielle totale Φ d'un système mécanique soumis à un chargement conservatif est stationnaire. Cette énergie potentielle est donnée par

$$\Phi = U_{int} + W_{ext} \quad (\text{I-23})$$

Où U_{int} est l'énergie interne de déformation de la structure.

W_{ext} est le travail des forces extérieures.

L'équilibre est alors donné par :

$$\partial \Phi = \partial U_{int} + \partial W_{ext} = 0 \quad (\text{I-24})$$

Les états d'équilibre du système sont donc définis par l'ensemble solution S de cette dernière équation. Si l'ensemble solution S ne subit pas de changement qualitatif lorsque le paramètre λ varie dans un voisinage spécifié, on parlera de situation régulière. Si en revanche un changement qualitatif est perceptible pour une variation arbitrairement petite de λ au voisinage d'une valeur λ_c , on qualifiera la situation de singulière et λ_c sera appelée valeur critique. Cette situation singulière traduit en fait la présence d'une bifurcation d'équilibre.

I.5-2-2 Stabilité de l'équilibre:

On peut légitimement s'interroger sur le comportement de la barre OA lorsque le chargement λ atteint la valeur λ_0 . L'expérience montre en fait que bien que la solution $u = 0$ soit toujours mathématiquement possible, lorsque la valeur λ_0 est approchée la barre bascule et se retrouve dans l'état d'équilibre décrit par la branche S_2 .

Il existe plusieurs façons d'expliquer ce "choix" de la barre de suivre la branche bifurquée.

Condition du minimum de l'énergie potentielle totale

On peut démontrer que pour $\lambda > \lambda_0$, l'énergie de la barre située sur la branche bifurquée S_2 est inférieure à l'énergie de la barre dans la position symétrique ($u = 0$). Or le théorème de l'énergie potentielle totale nous dit que pour un état d'équilibre stable, les déplacements qui satisfont les conditions d'équilibre sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle totale. Compte tenu de la nullité de la variation première de l'énergie potentielle dans une position d'équilibre, l'existence d'un minimum impose que la variation seconde de l'énergie potentielle soit définie positive :

$$\begin{aligned} \Phi'(u, \lambda) &= 0 \\ \text{Équilibre stable} & \\ \Phi''(u, \lambda) &> 0 \end{aligned} \quad (\text{I-25})$$

Dans le cas de la barre OA , la variation seconde de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\Phi''(u, \lambda) = k - \lambda \cdot L + \lambda \cdot L \frac{u^2}{2} \quad (\text{I-26})$$

Lorsque u appartient à la première branche solution ($u = u_1 = 0$), la condition de stabilité s'écrit :

$$k - \lambda \cdot L > 0 \quad \text{Soit} \quad \lambda < \frac{k}{L} \quad (\text{I-27})$$

Lorsque u appartient à la seconde branche solution ($u \in S_2$), la variation seconde de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\Phi''(u, \lambda) = k - L + \lambda L \frac{u^2}{2} = k - \lambda L + \frac{\lambda L}{2} \cdot 6 \cdot \left(1 - \frac{k}{\lambda L}\right) = 2 \cdot \lambda L - 2k \quad (\text{I-28})$$

Or pour $u \in S_2$, on a $\lambda > k/L$, ce qui implique que

$$\forall u \in S_2 \quad \Phi''(u, \lambda) > 0$$

La barre va donc adopter la configuration dans laquelle l'énergie potentielle totale sera minimale, ce qui explique que la barre va préférentiellement suivre la branche bifurquée S_2 pour $\lambda > k/L$.

1.5-3 Quelques éléments de théorie des coques :

Une coque est une structure occupant un domaine d'épaisseur t autour d'une surface S , dite surface moyenne. Lorsque cette épaisseur est très petite devant les deux autres dimensions de la surface, on parle de coque mince. Cette caractéristique géométrique permet d'un point de vue mécanique de ramener le problème tridimensionnel de la détermination des déformations d'un milieu continu à un problème bidimensionnel, dans lequel la détermination du champ de

déplacement U de la surface moyenne suffit à décrire correctement le comportement de la structure.

I.5-3-1 Equations des coques cylindriques:

La réduction d'une coque à deux dimensions a donné naissance à diverses théories, dont les écarts reposent entre autres sur les termes du champ de déplacement considérés pour le calcul des déformations, ainsi que sur les termes du tenseur des contraintes pris en compte. Nous rappelons ici celle relative aux coques cylindriques élaborées par *Donnell* en 1933 [DON76].

I.5-3-2 Hypothèses de comportement:

Donnell se place dans le cadre de déformations modérées subies par une coque de rayon R , de longueur L et d'épaisseur t , constituée d'un matériau homogène, isotrope et élastique ayant un module de Young E et un coefficient de Poisson. Le champ de déplacement est noté $\{u, v, w\}$, respectivement au système de coordonnées $\{x, y, z\}$. La théorie des coques de *Donnell* repose sur les hypothèses suivantes :

La coque est suffisamment mince :

1. $t/R \ll 1$, $t/L \ll 1$
2. Les déformations sont suffisamment petites, $e \ll 1$, et la loi de Hooke s'applique
3. Les lignes droites normales à la surface moyenne non déformée restent droites et normales à la surface moyenne déformée, leur longueur est inchangée.
4. Les contraintes normales agissant perpendiculairement à la surface normale peuvent être négligées comparativement aux contraintes agissant dans le plan de la surface moyenne

$$|\sigma_{zz}| \ll |\sigma_{xx}| \quad |\sigma_{zz}| \ll |\sigma_{yy}| \quad (\text{I-29})$$

5. Les déplacements u et v sont négligeables, le déplacement w est du même ordre que l'épaisseur t de la coque :

$$|u| \ll t \quad |v| \ll t \quad |w| = \mathbf{O}(t) \quad (\text{I-30})$$

Les dérivées de w sont petites, mais leurs carrés et leurs produits sont du même ordre que les déformations considérées :

$$\left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} \ll 1 \quad \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \left| \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} = (\varepsilon) \quad (\text{I-31})$$

6. Les changements de courbure sont petits et l'influence de u et v sont négligeables, de telle manière qu'ils peuvent être représentés par des fonctions linéaires de w seulement
7. Les hypothèses 3 et 4 constituent les hypothèses dites de *Love-Kirchhoff*, les hypothèses 5 à 7 traduisent le fait que les déformations sont essentiellement liées au déplacement radial w .

8. L'utilisation de cet ensemble d'hypothèses par *Donnell* a fait l'objet de critiques nombreuses, toutefois les résultats théoriques qu'elles permettent d'obtenir se révèlent tout à fait satisfaisants dans le contexte dans lequel nous évoluerons.

A- Cinématique (relation déformation-déplacement)

Sur la base de ces hypothèses, les relations entre le champ de déplacement et les déformations en tout point de la coque sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z \cdot k_x & \text{avec} & \quad \varepsilon_{x0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \quad k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} + z \cdot k_y & \text{avec} & \quad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & \quad k_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy0} + z \cdot k_{xy} & \text{avec} & \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} & \quad k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{I-32})$$

Où $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}$ sont les déformations de la surface moyenne, et k_x, k_y et k_{xy} désignent les changements de courbure de la surface moyenne.

B- Rhéologie (relation contrainte-déformation) :

Les relations existant entre contraintes et déformations sont données par la loi de Hooke : (Hypothèse 2, comportement purement élastique)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (\text{I-33})$$

Les efforts unitaires s'exerçant sur un élément de coque étant définis ci-dessous par :

$$\begin{aligned} (N_x, N_{xy}, Q_x) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) \cdot dz & (N_{xy}, N_y, Q_y) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yz}) \cdot dz \\ (M_x, M_{xy}) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \tau_{xy}) \cdot z dz & (M_{yx}, M_y) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{xy}, \sigma_y) \cdot z dz \end{aligned} \quad (\text{I-34})$$

Ce qui amène finalement :

$$\begin{aligned} N_x &= C \cdot (\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) & N_y &= C \cdot (\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) & N_{xy} &= N_{yx} = C \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \gamma_{xy0} \\ M_x &= D \cdot (k_x + \nu k_y) & M_y &= D \cdot (k_y + \nu k_x) & M_{xy} &= M_{yx} = D \cdot \frac{1-\nu}{2} k_{xy} \end{aligned} \quad (\text{I-35})$$

Avec :

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{I-36})$$

Les rigidités de membrane et de flexion de la coque.

C- Energie potentielle totale :

L'énergie de déformation élastique de la coque est donnée par

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \cdot dx dy dz$$

Soit encore :

$$U_e = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \cdot \gamma_{xy}^2 \right) \cdot dx dy dz \quad (\text{I-37})$$

Ou, en dissociant les déformations de membrane et de flexion

$$U_e = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(e_{x0}^2 + e_{y0}^2 + 2\nu e_{x0} e_{y0} + \frac{1-\nu}{2} g_{x0y0}^2 \right) dx dy + \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(\varepsilon_{x0}^2 + \varepsilon_{y0}^2 + 2\nu \varepsilon_{x0} \varepsilon_{y0} + \frac{1-\nu}{2} g_{x0y0}^2 \right) dx dy \quad (\text{I-38})$$

Le premier terme représente l'énergie de déformation de membrane, le second terme l'énergie de déformation de flexion.

Le travail des forces extérieures est exprimé par :

$$W = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} (p_z W) \cdot dx dy - \int_0^{2\pi R} \left[P_x^* U + P_y^* V + P_z^* W - M_x^* \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} dy \quad (\text{I-39})$$

Où P_z est la composante par unité d'aire de l'effort surfacique s'exerçant sur la coque

Et $P_x^*, P_y^*, P_z^*, M_x^*$ sont les composantes des efforts extérieurs et du moment de flexion appliqués aux extrémités de la coque.

L'énergie potentielle totale $F(U, V, W)$ est obtenue par sommation de l'énergie de déformation interne et du travail des forces extérieures.

$$\Phi = U_e + W \quad (\text{I-40})$$

D- Equations d'équilibre :

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en appliquant au système le principe de l'énergie potentielle stationnaire :

$$\delta \Phi = \delta U_e + \delta W = 0$$

$$\text{Avec } \delta U_e = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) \cdot dx dy dz$$

soit

$$\delta U_e = \int_0^L \int_0^{2\pi R} (N_x \delta \varepsilon_{x0} + N_y \delta \varepsilon_{y0} + N_{xy} \delta \gamma_{xy0} + M_x \delta k_x + M_y \delta k_y + M_{xy} \delta k_{xy}) \cdot dx dy$$

$$\delta W = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} p_z \delta W \cdot dx dy$$

$$Et - \int_0^{2\pi R} \left[P_x^* \delta U + P_y^* \delta V + P_z^* \delta W - M_x^* \delta \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} dy \quad (\text{I-41})$$

La condition de nullité de la variation d'énergie potentielle permet finalement d'obtenir les équations d'équilibre suivantes :

$$N_{x,x} + N_{xy,x} = 0$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - \frac{1}{R} N_y + (N_x \cdot w_{,x} + N_{xy} \cdot w_{,y}), x + (N_{xy} \cdot w_{,x} + N_y \cdot w_{,y}), y + p_z = 0 \quad (\text{I-42})$$

(Où les indices situés après une virgule indiquent une dérivation partielle). Il est possible d'obtenir une formulation plus usuelle de ces équations en introduisant la fonction d'Airy F telle que :

$$N_x = F_{yy} \quad N_y = F_{xx} \quad N_{xy} = F_{xy} \quad (\text{I-43})$$

Les deux premières équations sont alors satisfaites par identité.

La compatibilité des déformations impose de plus :

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = w_{,xx}^2 - w_{,xx} w_{,yy} + \frac{1}{R} w_{,xx} \quad (\text{I-44})$$

Et l'on obtient, après substitution les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \nabla^4 F - Et \cdot (w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} + \frac{1}{R} w_{,xx}) = 0 \\ D \cdot \nabla^4 w + \frac{1}{R} F_{,xx} - F_{,yy} w_{,xx} - 2F_{,xy} w_{,xy} - F_{,xx} w_{,yy} - p_z = 0 \end{cases}$$

Avec

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (\text{I-45})$$

Ces dernières équations sont généralement présentées comme étant les équations de coques de *Donnell - Mushtari - Vlasov* (DMV). [32]

I.6 Analyse linéaire des coques :

I.6-1 Théorie des coques en analyse linéaire :

La formulation d'un bon élément fini en analyse non linéaire passe par celle en analyse linéaire. C'est pour cette raison qu'on accordera une importance au développement linéaire de l'élément choisi. L'analyse des coques par éléments finis peut être réalisée suivant trois approches différentes :

I.6-1-1 Approche par coque profonde ou surbaissée:

-Approche par coque profonde:

Plusieurs auteurs comme *Naghdi* [33], *Koiter* [34] [35] et *Argyris* [36] ont proposé une théorie basée sur une approche par coque profonde. La conformité des éléments basés sur cette approche exige une continuité des rayons de courbure $C2$, ce qui rend leur application en éléments finis très difficile à élaborer.

-Approche par coque surbaissée :

Pour simplifier l'approche précédente une théorie basée sur une approche par coque surbaissée a été développée par plusieurs auteurs *Novozhilov* [37] *Idelsohn* [38]. On définit une coque surbaissée en considérant sa surface S Figure I1 et sa projection $S^0(x, y)$ sur le plan (x, y) . Si S^0 est prise comme référence la surface courbe est donc décrite par:

$$\begin{matrix} x = X & h = Y & Z = Z(x, y) \end{matrix} \quad (I-46)$$

Une coque est dite surbaissée si elle vérifie les trois conditions suivantes:

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} \ll 1 \quad \frac{\partial Z}{\partial X} \ll 1 \quad \left| \frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \frac{\partial Z}{\partial X} \right| \ll 1 \quad (I-47)$$

Ces deux approches ont les inconvénients suivants:

- Elles conduisent généralement à des solutions approchées convergeant vers une solution différente de la solution analytique. Ceci vient essentiellement du fait que les rayons de courbure initiaux qui interviennent dans la relation déformation - déplacement ne varient pas avec le raffinement du maillage [39] [40]. La différence entre l'énergie de déformation de la structure réelle et celle du modèle numérique diminue mais ne s'annule jamais en augmentant le nombre d'éléments.
- l'utilisation de coordonnées curvilignes **Fig. I-23** est complexe pour la mise au point de ces deux approches.

- la représentation du mouvement de corps rigide reste l'inconvénient majeur de toutes ces théories. Ceci est dû au fait que les déplacements du corps rigide ont une expression non polynomiale en coordonnées curvilignes.

- l'amélioration possible de ces approches consiste à utiliser un système d'axes corotationnel afin de représenter correctement le mouvement de corps rigide [41]. On a recours aussi à une interpolation de même ordre pour la flexion et la membrane de façon à remédier au problème du blocage de membrane. Même si ceci conduit généralement à des éléments très performants ces derniers restent néanmoins très lourds à manipuler (nombre important de degrés de liberté) [42].

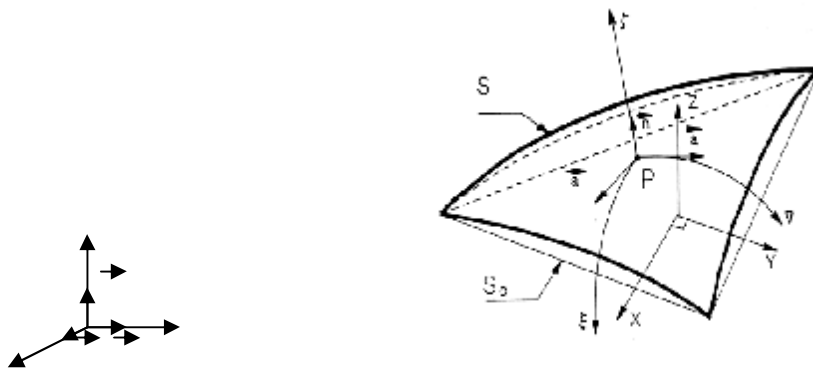


Fig.I-23: Description curviligne de la coque

I.6-1-2 Approche par coque plane (facettes planes) :

L'approximation faite dans cette approche consiste à confondre la coque avec sa surface de référence (localement) **Fig. I-24**. L'inconvénient est qu'elle ne permet une représentation directe de la structure courbe qu'au prix d'une modélisation très fine de la géométrie et nécessite ainsi un coût de calcul très élevé. L'avantage de cette approche est que le découplage entre le mode déformation de membrane et celui de flexion évite le problème du blocage de membrane [42].

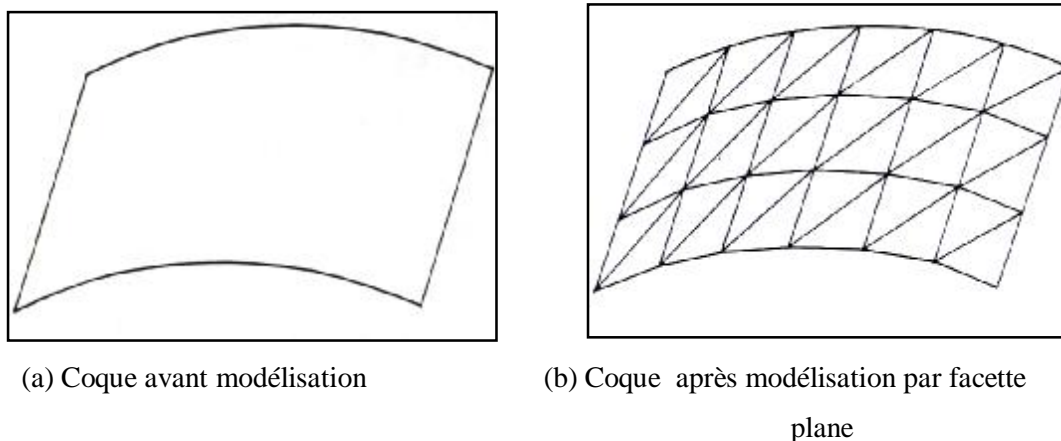


Fig. I-24 : Exemple de modélisation par facette planes

I.6-1-3 Approche par coque quasi-plane de Marguerre:

Dans cette approche on considère que la coque est obtenue après un déplacement fictif de la plaque [42] qui représente la déformée initial de la coque. Le calcul se fait en coordonnées cartésiennes sur un plan de référence qui est le plus souvent le plan obtenu lors d'une modélisation par facettes planes. Il est tenu compte de la courbure initiale par l'introduction dans le tenseur de déformation d'un terme dû à la géométrie initiale. On allie dans cette théorie la rigueur de l'approche par coque profonde ou surbaissée en tenant compte de la courbure initiale, à la simplicité de formulation de l'approche par facettes planes qui permet le calcul en coordonnées cartésiennes par rapport à une référence planes **Fig. I-25**.

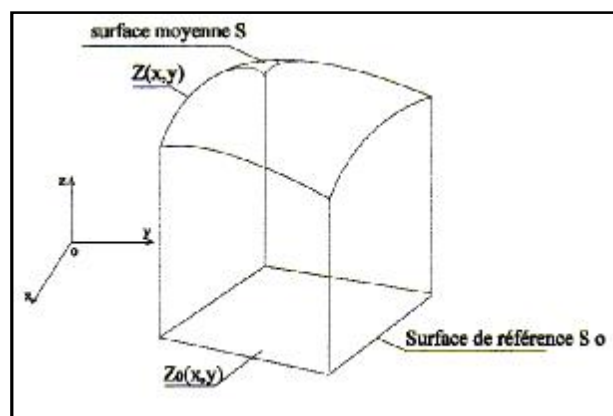


Fig. I-25 : Coque quasi - plane Marguerre

I.6-4 Choix d'une théorie de coque :

Chaque approche présente des avantages et des inconvénients dépendant de la configuration du problème considéré, des types des conditions aux limites et des chargements. Pour ce qui nous concerne, notre choix de théorie de coques se portera sur une théorie qui alliera simplicité et performance et qui répondra au maximum à certains critères et caractéristiques tels que:

- une théorie fiable du point de vue des applications en éléments finis devrait aboutir à un modèle numérique capable de converger vers la solution exacte que ce soit en coques surbaissées ou profondes,
- une représentation correcte du mouvement de corps rigide est nécessaire,
- ne pas manifester du point de vue numérique de phénomène de blocage (membrane ou cisaillement).

En imposant ces points comme critères pour une bonne théorie de coque, *EL Khaldi* [39] puis *Djeghaba* [42] ont montré dans leurs travaux que l'approche par coque quasi-plane de

Marguerre, apparaît comme une solution intermédiaire entre le fait de négliger complètement la courbure initiale par une approche à facettes planes (avantage: simplicité) et le fait d'en tenir compte par une approche par coques courbes surbaissées ou profonde (inconvenient: complexité).

En effet tout en utilisant une formulation assez simple elle garanti une convergence vers la solution exacte, aussi bien pour les coques surbaissées que pour les coques profondes (cette théorie exprime le critère de courbure initiale globale en un critère de courbure locale). Ceci vient du fait que la géométrie n'intervient, dans la relation déformation-déplacement que par des termes dérivés du premier ordre (pente) cela permet au modèle numérique d'avoir une convergence accentuée par rapport aux autres théories qui sont fonction des rayons de courbure (dérivées secondes). Avec l'augmentation du nombre d'éléments, les pentes évoluent alors que les rayons de courbure restent constants. L'adoption d'une théorie de coque mince (du type utilisant l'hypothèse de Kirchhoff de manière discrète par exemple), nous permet d'éviter le blocage de cisaillement en négligeant l'énergie due aux déformations de cisaillement transversal. Le blocage de membrane est traité par la technique de décomposition modale proposée par *Stolarski et al* [43] [44].

1.7 Analyse non linéaire des coques :

1.7-1 Généralités :

Généralement, on a recours à l'analyse non linéaire des structures quand l'une des deux hypothèses suivantes n'est plus satisfaite :

* Les déplacements sont suffisamment petits pour pouvoir "confondre" les configurations déformées aux configurations non déformées (pour définir des grandeurs telles que les contraintes, les éléments de volume. etc.): c'est la linéarité géométrique.

*Les matériaux se comportent de manière élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant de ces déplacements; c'est la linéarité matérielle.

Ces deux hypothèses sont dites hypothèses de l'élasticité linéaire, elles sont généralement admises pour le dimensionnement de la plupart des structures courantes. Cependant, l'utilisation dans la construction des éléments de forme de plus en plus élancées d'une part et la réalisation de structures plus économiques ou "à risque" d'autre part conduit à abandonner les hypothèses très étroites de l'élasticité linéaire. Il convient également de mieux évaluer les coefficients de sécurité vis-à-vis de la ruine. Il est alors nécessaire d'introduire des comportements plus proches de la réalité. Ainsi la prise en compte de ces points conduit alors

à l'élaboration d'une analyse non linéaire afin de traduire correctement le comportement géométrique ou matériel des structures citées, Si maintenant l'analyse non linéaire est largement utilisée et pratiquement maîtrisée, il n'en demeure pas moins qu'elle reste toujours d'actualité et fait toujours l'objet de nombreuses recherches. En effet, une analyse non linéaire générale est efficace est synonyme actuellement d'analyse combinant précision est simplicité d'une part et conduisant d'une autre part à un cout de calcul raisonnable.

1.7-2 Types de problèmes non linéaires :

Les problèmes non linéaires ont généralement deux sources principales :

- * La non linéarité matérielle
- * La non linéarité géométrique

1.7-2-1 - Non linéarité matérielle (ou rhéologique) :

Cette non linéarité est liée au comportement du matériau et elle est caractérisée par de grandes déformations. Celles-ci peuvent conduire, par exemple à la plasticité ou au fluage. Elles peuvent engendrer aussi de grands déplacements. La littérature dans ce domaine est très abondante, nous ne nous étalerons pas davantage sur ce sujet car nous considérons dans la suite de ce travail que le comportement des matériaux reste élastique linéaire. [42]

1.7-2-2 - Non linéarité géométrique (ou cinématique) :

Cette non linéarité est caractérisée par de grands déplacements. Elle est en général à l'origine des phénomènes d'instabilité par flambement. Nous nous intéressons donc à cette non linéarité dans ce travail et nous essayons à travers l'innombrable littérature qui a traité ce problème de faire une synthèse des différentes approches utilisées, afin de préciser la position du problème et de situer le but recherché dans le présent travail par rapport au travaux déjà réalisés . [42]

1.7-2-3 - Non linéarités combinées :

Il est à noter enfin que ces deux non linéarités agissent généralement ensemble. En effet si de petites déformations peuvent être accompagnées de petits ou de grands déplacements, de grandes déformations engendrent en général de grands déplacements. Si la disposition dans un code de calcul d'analyses non linéaires combinées est l'idéal recherché, ceci n'est pas cependant chose aisée, car elles sont délicates à mettre en œuvre et difficiles à piloter. Elles engendrent souvent des calculs lourds et coûteux [43].

I.7-3 Théorie non linéaire :

I.7-3-1 Aspect cinématique :

L'analyse non linéaire des structures, du fait des grands déplacements, nécessite d'étudier le mouvement du corps. De manière générale, deux principales formulations sont utilisées pour la description du mouvement du corps [42]. Elles peuvent être Lagrangienne ou Eulérienne.

* La description est Lagrangienne, si les variables indépendantes régissant le mouvement du corps sont les positions x d'une particule X dans une configuration de référence arbitraire, et le temps t . Cette description peut être appelée relative si les variables indépendantes sont les positions x d'une particule X dans une configuration de référence qui varie avec le temps t . Cette description est un cas particulier de la description Lagrangienne et elle est appelée "description actualisée".

* La description est Eulérienne si les variables indépendantes qui régissent le mouvement du corps sont la position courante x d'une particule X et le temps t . Ainsi, la référence dans ce cas est la région de l'espace où passe ce corps. Cette description est généralement utilisée pour l'étude des fluides.

Des deux descriptions présentées, la description Lagrangienne est celle qui semble la mieux adaptée aux problèmes non linéaires des structures. En effet, elle étudie le mouvement du corps à partir d'une certaine référence connue, contrairement à la description Eulérienne qui elle, étudie le passage du corps dans une région de l'espace qui est prise comme référence. Une analyse précise et détaillée concernant la description Lagrangienne est exposée dans [42].

I.7-3-2 - Descriptions Lagrangiennes :

La description Lagrangienne a été utilisée initialement par *TURNER* et *ARGYRIS* qui l'ont appliquée aux barres, poutres, plaques et coques, et ceci de manière assez intuitive. Il s'agissait de calculer une matrice de rigidité incrémentale sur la position déformée en tenant compte des termes quadratiques du tenseur de déformation. Par augmentation progressive de la sollicitation, on obtenait donc, et de manière incrémentale la réponse non linéaire de la structure. Cette manière de procéder permet de ramener le problème non linéaire à une séquence de problèmes linéaires. Si cette technique a le mérite d'être la première tentative d'approcher le problème non linéaire, elle reste cependant très intuitive car elle ne s'appuie pas sur une base théorique solide. Plus tard d'autres auteurs ont permis d'établir correctement cette formulation : *ODEN*, *MARCAL* définissent la matrice de rigidité en description Lagrangienne en prenant comme référence l'état initial non déformé : c'est la description Lagrangienne appelée totale. *HIBBIT*, *MARCAL* et *RICE* utilisent le théorème des travaux

virtuels et obtiennent la forme incrémentale par différentiation, ce qui donne déjà à l'analyse non linéaire sa base pratiquement définitive. De son côté *ODEN* écrit les équations à partir du principe la conservation de l'énergie après avoir discrétisé le champ des déplacements linéairement en fonction des inconnues, il résoud le système d'équation non linéaires ainsi obtenu. *YAGHMAI* en préférant prendre comme état de référence l'état actuel, pose les bases à la description appelée "description Lagrangienne actualisée". Il obtient la forme incrémentale en écrivant le théorème des déplacements virtuels sur deux états voisins et en faisant ensuite la soustraction entre les expressions de l'équilibre écrit sur ces deux états voisins. Cette approche est reprise plus tard par *FREY* ou elle est très largement développée. Elle a l'avantage de montrer explicitement les termes à négliger lors de la linéarisation pour obtenir l'expression incrémentale. Tous ces travaux et d'autres non cités ont permis d'établir des bases correctes de la description Lagrangienne et de prouver l'efficacité de l'approche incrémentale. Comme il a été montré précédemment, la description Lagrangienne utilise comme état de référence, une configuration prise de manière arbitraire. Ceci donne lieu à deux approches principales. La première consiste à utiliser l'état initial comme référence. Elle semble la plus simple du fait de calculer par rapport à un état connu. Sa mise au point, par contre, n'est pas aisée car la construction de sa matrice de rigidité est laborieuse. La seconde approche consiste à utiliser l'état actuel comme référence. Elle fut d'abord utilisée de manière intuitive avant d'être décrite correctement par *Yaghmai* et ensuite par *Atluri, Argyris, Bathe*, qui lui ont donné sa base théorique correcte. Le calcul par rapport à la référence actuelle permet la construction de la matrice de rigidité de manière beaucoup plus simple que par l'approche précédente [42].

1.7-3-3 Différentes configurations d'un corps en mouvement :

Considérons le mouvement d'un corps dans un système de coordonnées cartésiennes, et définissons les positions d'équilibres qu'occupe ce corps au cours du temps **Fig. I-26**.

Nous pouvons définir quatre configurations d'équilibre du corps :

\mathcal{g}^0 : configuration initiale non déformée au temps $t = 0$

\mathcal{g}^n : configuration courante à calculer

\mathcal{g}^{n-1} : configuration voisine de \mathcal{g}^n au temps t

\mathcal{g}^{-n-1} : configuration très voisine de \mathcal{g}^{n-1}

La description Lagrangienne est appelée

* **Totale (notée D.L.T)** : si on effectue le calcul par rapport à la référence g^0

* **Actualisée (notée D.L.A)** : si on effectue le calcul par rapport à la référence g^{n-1}

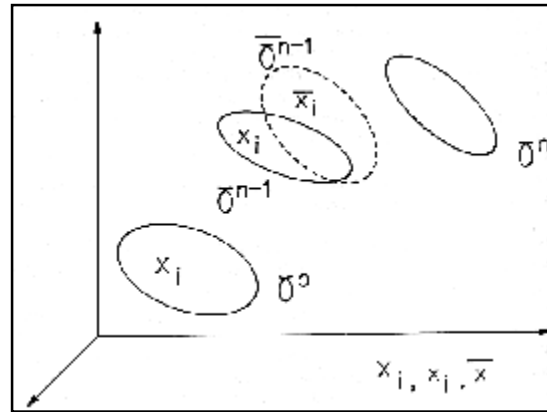


Fig. I-26 : Configurations d'un corps en mouvement

Une troisième description notée D.L.A.A., proche de la D.L.A peut être définie si on prend comme référence une configuration tr proche de g^{n-1} et obtenue après un mouvement de corps rigide de la configuration de référence g^0 .

Dans ce cas la configuration actuelle inconnue g^{n-1} , est remplacée par la configuration \bar{g}^{n-1} qui est beaucoup plus simple à manipuler car e1 est connue et non déformée. Cette description est appelé description Lagrangienne actualisée approchée et est notée : D.L.A.A. Il faut préciser enfin que pour ces trois descriptions Lagrangiennes, le système d'axes de référence utilisé est fixe et commun aux trois. Ainsi, les coordonnées d'une même particule sont notés dans le même système d'axes par X_i sur g^0 , par X_i sur g^{n-1} et par \bar{X}_i sur \bar{g}^{n-1} **Fig.I-26.**

1.7-3-4 Description Lagrangienne corotationnelle:

Pour les descriptions Lagrangiennes classiques définies précédemment, le système d'axes de référence est gardé fixe. Une autre description Lagrangienne peut être définie, si on fait bouger le système d'axes de référence avec le mouvement du corps de manière à éliminer le mouvement de corps rigide induit par le grand déplacement **Fig. I-27**. Il s'agira ensuite de définir exactement la position de ce système d'axes. Ceci peut être résolu en le prenant comme le système d'axes obtenu après avoir fait subir au système d'axes initial un mouvement de corps rigide (incluant translation et rotation rigides) afin de le positionner le

plus proche possible de la configuration actuelle déformée. Cette description appelée description Lagrangienne corotationnelle a été utilisée par plusieurs auteurs, car elle s'avère dans certains cas être très intéressante parce que d'une manipulation relativement simple. De plus, le fait de constater que dans la majorité des cas la non linéarité géométrique peut être décomposé en un large mouvement de corps rigide accompagné d'une déformation locale, peut donner à la description corotationnelle un avantage certain. En effet elle permettrait d'absorber les grandes rotations ou translations de corps rigide par l'actualisation des coordonnées sur le nouveau système d'axes, et les rotations restantes peuvent être considérées petites ou modérées ce qui est généralement acceptable. Ainsi on surmonte un des problèmes des descriptions Lagrangiennes classique, qui est précisément le traitement des grandes rotations [42].

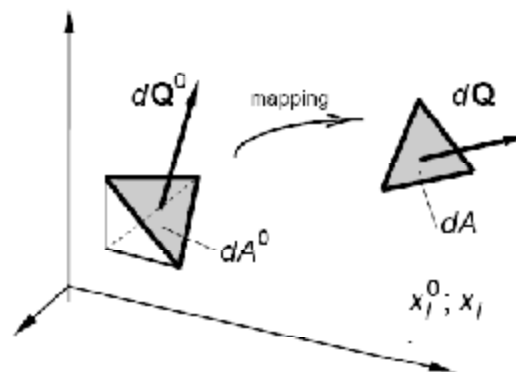


Fig. I-27. Description corotationnelle pour un élément triangulaire

I.8-Conclusion :

Après cette étude bibliographique, ils ont ressort que une étude du comportement de telles structures est nécessaire vu qu'elles sont fabriquées en majorité avec des aciers formés à froid. Ces structures sont sujet à des grands déplacements ce qui peut leur conférer un comportement non linéaire. les points cités ci-dessus feront l'objet de notre travail.

II.1 Introduction par élément finis :

II.1-1 Introduction :

- Ø La méthode d'éléments finis est la plus puissante technique numérique pour l'analyse des systèmes mécaniques linéaires ou non linéaires statiques ou dynamiques.

- Ø Les étapes d'implémentation:
 - Discrétisation du domaine dans un assemblage des éléments finis ou sous régions qui sont connectés par des nœuds.

 - Dans le cas du chargement statique on évalue les équations intégrales pour obtenir des équations algébriques.

 - Le comportement d'un élément donne des équations intégrales simples.

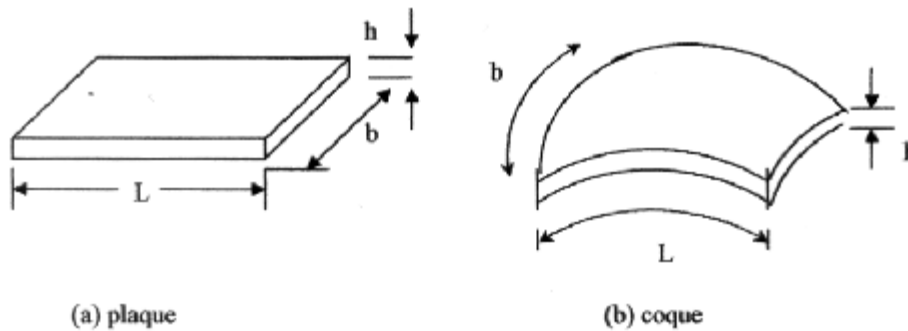
 - On fait l'assemblage des équations algébriques pour la totalité des nœuds dans un système d'équations.

 - La résolution du système par des méthodes numériques donne les valeurs des inconnues recherchées. [50]

II.1-2 Solide élastique :

Un solide tridimensionnel est un objet massif dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur. Les structures minces ou corps orientés sont solides dont au moins une dimension appelée épaisseur, et notée h , est petite par rapport aux autres dimensions géométriques. Parmi les différents types de structures minces on a : les plaques et les coques. La plaque est un solide défini par une surface plane (longueur L , largeur b) et une épaisseur h tel que $h \ll L, h$ (figure (a)).

La coque est un solide défini par une surface courbe (longueur L , largeur b , largeur de courbure)



Un solide est dit élastique s'il existe un état de référence non-contraint, et si après déformation le tenseur de contraintes, ne dépend que du tenseur de déformation calculé à partir de l'état de référence. On dit ensuite que ce solide est linéaire s'il y a une linéarisation de la loi de Hooke.

II.1-3 Lois du comportement :

Ø Lorsqu'un solide élastique est soumis à un chargement donné, il existe en son sein :

Un champ de contraintes.

Un champ de déformations

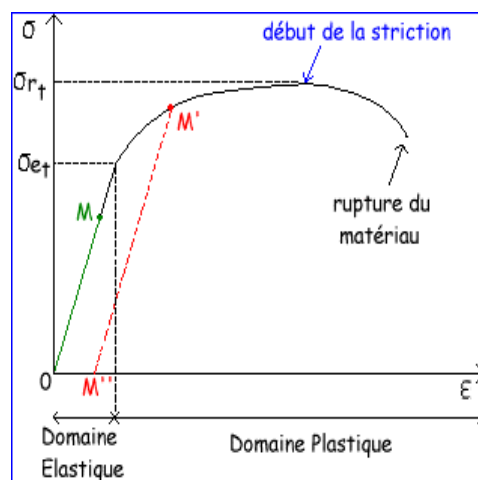
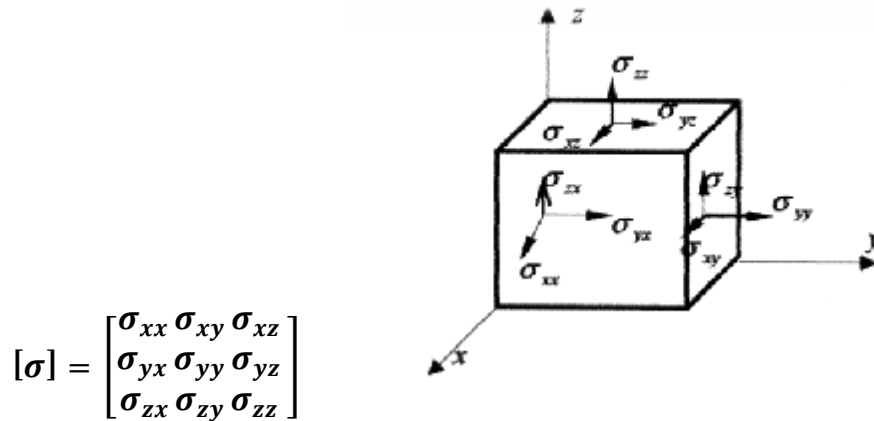


Fig. II-1: Lois de comportement d'un matériau

Ces deux champs sont reliés par une relation mathématique linéaire: La loi de comportement du matériau.

II.1-3-1 Loi de Hooke :

Dans un repère orthonormé (x, y, z) l'état de contraintes, en un point donné d'un milieu continu, est entièrement défini par le tenseur de contrainte, noté $[\sigma]$ fonction du point considéré **Fig.II-2**.



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Fig. II-2 Tenseur de contraintes dans un repère orthonormé

Le module d'élasticité des matériaux est la caractéristique de la résistance d'un matériau à la déformation élastique. Les matériaux de bas module sont flexibles et subissent des déformations importantes lorsqu'on les charge. Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont les fonctions linéaires. Ces relations se traduisent sous la forme générale :

$$[\sigma] = [H][\varepsilon] \quad (\text{II-1})$$

Cette relation dite loi de Hooke généralisée :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

- $[\varepsilon]$ Tenseur de déformation.
- $[H]$ Matrice d'élasticité (faisant intervenir les caractéristiques physiques du matériau).

Les tenseurs $[\sigma]$, $[\varepsilon]$ étant symétriques, la forme des deux tenseurs devient (sous forme matérielle).

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \rangle \quad (\text{II-3})$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} \rangle \quad (\text{II-4})$$

Et pour le cas d'un matériau isotrope, la matrice $[H]$ a la forme suivante :

$$[H] = a \begin{bmatrix} b & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & b & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (\text{II-5})$$

$$a = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad b = 1 - \nu, \quad c = \frac{1-2\nu}{2}$$

Où E et ν sont le module d'élasticité (ou le module de Young) et le coefficient de poisson. La matrice de souplesse est définie comme étant la matrice inverse de la matrice d'élasticité :

$$[C] = [H]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{II-6})$$

Pour les contraintes planes la loi de comportement est définie à partir de la matrice $[C]$ en introduisant l'hypothèse $\sigma_z = 0$. La matrice $[H]$ correspond alors à l'inverse de la matrice $[C]$ réduite. La matrice $[C]$ devient :

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{II-7})$$

Et la matrice $[H]$:

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{II-8})$$

Pour les déformations planes la loi de comportement est définie à partir de la matrice $[H]$ en introduisant l'hypothèse $\varepsilon_z = 0$. La matrice $[C]$ correspond alors à l'inverse de la matrice $[H]$ réduite.

II.1-3-2 Cinématique virtuelle :

Les théories linéaires retenues pour les plaques et coques sont des théories dites du premier ordre où le champ de déplacement varie linéairement en z , sans variation d'épaisseur, en incluant l'influence des déformations de cisaillement transversal. Ces théories sont basées sur l'hypothèse cinématique dite des sections droites. Elle est généralement associée au nom de *REISSER* et *MINDLIN*. L'hypothèse des sections droites permet d'exprimer les déplacements virtuels (u_q^*) d'un point quelconque q en fonction des déplacements virtuels du point p (u_p^*) situé sur la surface moyenne (ou de référence) et en fonction d'un accroissement de déplacements virtuels ($z\beta^*$) dû à la rotation de la section **Fig.II-3**.

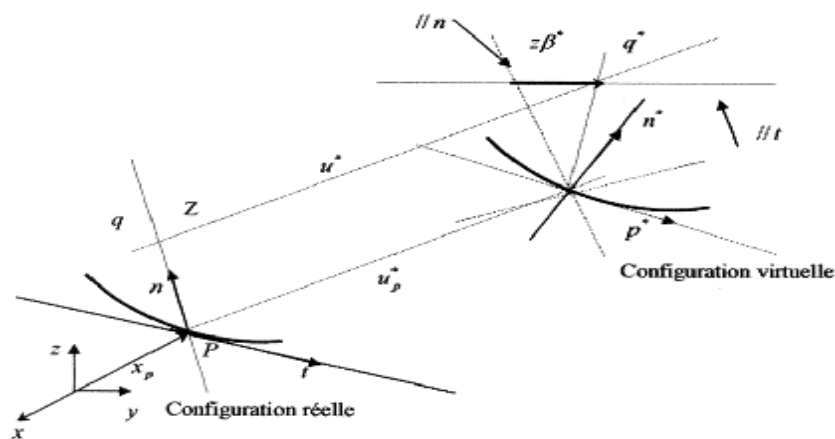


Fig. II-3 Configuration réelle et virtuelle

Le champ de déplacements virtuels du point $p(x, y, z)$ est :

$$u_p^* = u^*(x, y, z)i + v^*(x, y, z)j + w^*(x, y, z)k \quad (\text{II-9})$$

Le champ de déplacements virtuels du point $q(x,y,z)$ est :

$$u_q^* = u_p^* + z b^* \quad (\text{II-10})$$

Les déformations réelles sont :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz} \rangle \quad (\text{II-11})$$

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_x + z \beta_{x,x} \\ \varepsilon_y = v_y + z \beta_{y,y} \\ \gamma_{xy} = u_y + v_x + z (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \beta_x + w_y \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \beta_y + w_y \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

Ou sous la forme matricielle :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{e} \rangle + z \langle \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y} \rangle \quad (\text{II-13})$$

$$\langle \boldsymbol{y} \rangle = \langle 0, 0, 0, (\beta_x + w_x), (\beta_y + w_y) \rangle \quad (\text{II-14})$$

$$\langle \boldsymbol{e} \rangle = \langle u_x, u_y, (u_y + v_x), 0, 0 \rangle$$

$\langle \boldsymbol{x} \rangle$: Déformations réelles de flexion .

$$\langle \boldsymbol{x} \rangle = \langle \beta_x(x, x), \beta_x(x, y), +\beta_x(y, x) \rangle \langle 0, 0 \rangle .$$

$\langle \boldsymbol{y} \rangle$: déformations réelles de cisaillement transversal .

II.1-3-3 Principe variationnel :

Le principe d'équilibre du solide élastique consiste à trouver les composantes de contraintes $[\boldsymbol{\sigma}]$, de déformation $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ de déplacements $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ satisfaisant les relations suivantes :

§ Les équations d'équilibre :

$$\langle \text{div}[\boldsymbol{\sigma}] \rangle + \langle \boldsymbol{f}_v \rangle = \mathbf{0} \quad \text{sur } V \quad (\text{II-15})$$

§ Relation déformation déplacements :

$$[\varepsilon] - \frac{1}{2}([\text{gradu}] + [\text{gradu}]) = \mathbf{0} \quad \text{Sur } V \quad (\text{II-16})$$

§ La loi de comportement :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (\text{II-17})$$

§ Les conditions aux limites mécaniques :

$$-[\sigma]\{n\} + \{f_v\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{Sur } S_f \quad (\text{II-18})$$

§ Les conditions aux limites géométriques :

$$\{u\} + \{\bar{u}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{Sur } S_u \quad (\text{II-19})$$

$$S_u \cup S_f$$

S_f : Partie du contour où les efforts sont imposés .

S_u : Partie du contour où les déplacements sont imposés .

$\{n\} = \{n_x, n_y\}$: la normal orientée vers l'extérieur .

$\{f_v\}$: Vecteur des efforts par unité de surface moyenne.

On peut définir un modèle général où toutes les relations du problème d'élasticité sont représentées sous forme variationnelles. Considérons, la forme intégrale suivante :

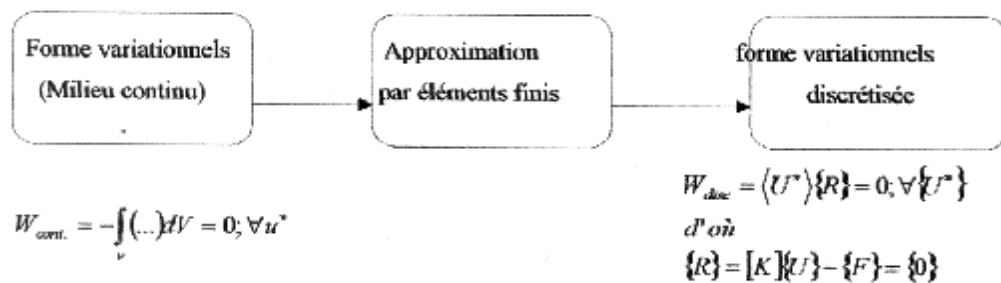
$$W = - \int_V (\{u^*\}(\mathbf{1.6}) + \{\sigma^*\}(\mathbf{1.7}) + \{\varepsilon^*\}(\mathbf{1.8}))dV \quad (\text{II-20})$$

Cette forme est une forme générale permettant de définir les différentes expressions variationnelles couramment utilisées en mécanique des solides (principe du travail virtuel en déplacement, principe du travail virtuel complémentaire en contraintes ainsi que les principes mixtes.

II.1-3-4 Discrétisation d'un domaine par éléments finis :

Formulation générale:

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation des fonctions solution par sous-domaines. Les inconnues notées $\{U\}$ sont des valeurs de ces fonctions en certains points ou nœuds de chaque sous-domaine. La forme variationnelles définie sur le milieu continu est ainsi représentée par une forme variationnelles dite discrétisée qui fait intervenir les inconnues nodales $\{U\}$. Pour un problème d'élasticité linéaire.



Les différents principes variationnels pour les problèmes d'élasticité font intervenir des intégrations sur sa frontière :

$$w = \int_V (...) dV - \int_S (...) dS = 0 \quad (\text{II-21})$$

Le domaine V est représenté comme un ensemble de sous-domaines V^e appelés éléments finis tels que :

$$V = \sum_e V^e \quad (\text{II-22})$$

L'expression (II.21) peut ainsi s'écrire :

$$W = \sum_e W^e = 0 \quad (\text{II-23})$$

$$\text{Avec } W^e = \int_{V^e} (...) dV \quad \text{Si } V^e \text{ est à l'intérieur de } V (S^e = 0) \quad (\text{II-24})$$

Ou si l'élément a une frontière avec l'extérieur .

$$W = \int_V (\dots) dv - \int_S (\dots) dS \quad (\text{II-25})$$

Avec :

$$W = \sum_{\mathcal{E}} S^{\mathcal{E}} = S \quad (\text{II-26})$$

Discrétisation :

Dans un problème d'élasticité tridimensionnelle nous avons ainsi quinze inconnues (six contraintes, six déformations, trois déplacements) et quinze relations (II.15, 16,17) avec trois conditions aux limites en chaque point de la frontière (II.18, 19). Le problème peut être décrit en fonction des trois composantes de déplacements en introduisant les relations (II.16, 17) dans les équations d'équilibre (II.15). On obtient ainsi un système de trois équations différentielles partielles du second ordre par rapport aux coordonnées avec les conditions aux limites (II.18, 19). Ce système continu possède un nombre de degrés de liberté infini. Et puisque les systèmes continus ne peuvent en général être résolus directement. Il est nécessaire de discrétiser ces équations, c'est-à-dire de remplacer par des équations algébriques en remplaçant les fonctions continues à intégrer (II.24, ou 25) par des fonctions d'interpolation qui tiennent compte seulement des variables nodales pour chaque sous-domaines (élément).

Intégration :

Les concepts de transformation géométrique et d'élément de référence simplifient la construction des fonctions d'interpolation pour des éléments compliqués. Nous développerons plus tard la technique générale de construction des fonctions d'interpolations sur un élément de référence. La transformation d'un élément de référence en élément réel est caractérisée par la matrice Jacobéenne.

II.2 Modélisation par élément fini : Eléments de coque

II.2-1 Introduction :

Une coque est un solide ou partie de solide dont une dimension appelée épaisseur est petite vis-à-vis des deux autres et qui admet un plan de symétrie passant par le milieu de l'épaisseur appelé feuillet moyen. Par convention, dans le repère de l'élément, ce plan de symétrie est le plan xOy et l'axe z lui est perpendiculaire. **Fig. II-4**

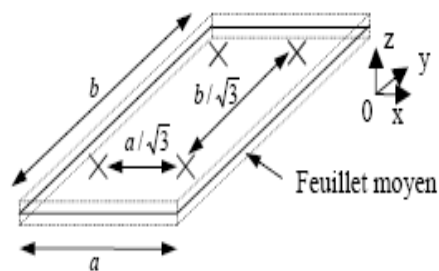


Fig.II-4 : Feuillet moyen d'une coque

Nous n'étudierons que les coques à définition surfacique, c'est-à-dire représentées uniquement par leur feuillet moyen. Les coques épaisses, à définition volumique, c'est-à-dire explicitement définies par leur topologie tridimensionnelle, s'apparentent aux éléments de volume et ne sont pas étudiées dans ce travail. Une coque est la superposition d'une membrane (ne travaillant que dans son plan) et d'une plaque (ne travaillant que perpendiculairement à son plan). C'est un élément très général puisqu'il accepte tous les types de chargement : la coque est l'élément fini le plus largement utilisé. Il peut y avoir couplage entre les deux effets mécaniques membrane/plaque, mais en règle générale, pour la modélisation des structures constituées de matériaux isotropes en analyse linéaire, les comportements membranaires et flexionnels sont découplés tant que les coques sont planes et sont étudiées séparément. Ce découplage est une approximation de la mécanique sa justification faisant l'objet d'un paragraphe ultérieur. L'aspect purement membranaire ayant fait l'objet d'un chapitre précédent seul l'aspect flexionnel sera ici présenté.

Les contraintes de la plaque sont réparties anti symétriquement par rapport au feuillet moyen, distinguant ainsi les problèmes de flexion de ceux d'extension pour la répartition des contraintes symétrique par rapport au feuillet moyen **Fig. II-4**.

Les coques sont triangulaires ou quadrangulaires, à bords rectilignes ou courbes elles peuvent être générées par des maillages automatiques bidimensionnels ou tridimensionnels surfaciques. Les remarques concernant les avantages des différents maillages les uns par

rapport aux autres, l'influence des éléments triangulaires détaillés dans le chapitre consacré aux membranes, est encore valable pour les coques.

Outre la topologie, il faut obligatoirement fournir à un programme linéaire, pour une structure en matériau isotrope, les caractéristiques suivantes :

- module de Young,
- coefficient de Poisson,
- épaisseur.

La masse volumique, le coefficient de dilatation thermique, ne sont nécessaires que pour certains types de calcul.

II.2-2-Hypothèses de la théorie des coques :

Dans la théorie linéaire des plaques isotropes, trois ou quatre hypothèses sont généralement admises :

Hypothèse 1 : les contraintes normales au plan de la plaque S_{zz} sont négligeables par rapport aux contraintes existant dans le plan de la plaque : $S_{zz} = 0$

Hypothèse 2 : les pentes du feuillet moyen restent petites par rapport à l'unité ceci dans n'importe quelle direction. De plus, le feuillet moyen ne subit aucune déformation du fait de la flexion.

Hypothèse 3 : les points situés dans un plan orthogonal au feuillet moyen sont dans un plan après déformation.

Hypothèse 4 : un plan orthogonal au feuillet moyen avant déformation l'est encore après déformation.

Les hypothèses 1-2-3-4 conduisent aux coques dites minces, dites de *Kirchhoff* dites sans déformation à l'effort tranchant.

Les hypothèses 1-2-3 conduisent aux coques d'épaisseur modérée, dites de *Mindlin* ou *Reissner* ou *Hencky*, dites avec déformation à l'effort tranchant.

La théorie basée sur les hypothèses 1 à 4 donne de bons résultats tant que l'épaisseur reste petite par rapport aux autres dimensions du panneau ou de la structure, et lorsque le matériau possède un module de cisaillement transversal G élevé. Pour un matériau isotrope, G est du même ordre de grandeur que le module de Young E et l'élançement géométrique seul permet de choisir le type de coque adapté à la structure à modéliser. L'élançement à prendre en

compte pour les coques à définition surfacique est celui de la structure ou du panneau et non pas celui de l'élément fini. Un panneau de $20 \times 20 \times 1$ est considéré comme mince (théorie de *Kirchhoff*), et peut être modélisé par 20×20 éléments de coque mince, même si chaque élément pris individuellement est un cube de $1 \times 1 \times 1$.

Dans certains cas, il est nécessaire d'apporter à cette théorie une amélioration en supprimant l'hypothèse 4 : la rotation de la section est alors différente de la pente du feuillet moyen.

Hypothèse 1

L'hypothèse 1 est commune à toutes les théories éléments finis de coques. Un modèle R.D.M. simple permet d'en montrer la validité et les limites d'application. Soit une poutre sur deux appuis, soumise à une charge de pression linéique constante d'intensité p . La poutre a une section rectangulaire de largeur b , de hauteur h , et est soumise à une pression uniforme.

Le moment dans la poutre a pour expression

$$M = \frac{px(L-x)}{2} \quad (\text{II-26})$$

Il est maximal pour $x = L/2$ et a pour valeur en ce point $M_{\max} = \frac{pL^2}{8}$. La contrainte axiale due à ce moment fléchissant a donc pour valeur maximale

$$s_{xx} = \frac{Mv}{I} = \frac{3pL^2}{4bh^2} \quad (\text{II-27})$$

Le rapport entre la contrainte s_{zz} : appliquée et la contrainte s_{xx} est

$$\frac{s_{xx}}{s_{zz}} = \frac{3L^2}{4h^2} \quad (\text{II-28})$$

La contrainte s_{xx} est donc très grande par rapport à s_{zz} si la poutre est élancée, c'est-à-dire si la longueur est grande vis-à-vis des dimensions transversales. Le même raisonnement est valable pour une coque. Par définition, comme l'épaisseur est petite par rapport aux deux autres dimensions, l'hypothèse générale de la théorie des coques est

$$s_{zz} = 0 \quad (\text{II-29})$$

On remarquera le paradoxe apparent : sur une coque soumise à la pression la contrainte normale au feuillet moyen de la coque est $s_{zz} = p$. Or c'est une coque donc $s_{zz} = 0$: par transitivité, il en résulte que la pression appliquée est nulle. L'hypothèse 1 permet en plus de répondre à la question suivante : la coque n'étant définie que par son feuillet moyen, c'est ce

dernier qui est chargé. Est-ce légitime car physiquement, la charge ne peut s'appliquer que sur l'une des deux peaux ? L'énergie de déformation associée à la contrainte S_{zz} est

$$T = \int S_{zz} e_{zz} dz = 0 \quad (\text{II-30})$$

Quelle que soit la déformation e_{zz} , selon l'épaisseur de la coque, elle n'intervient pas dans l'énergie de déformation : le chargement peut donc être appliqué sur le feuillet moyen plutôt que sur une des peaux sans perturber la solution.

Hypothèse 2

Cette hypothèse est celle de la linéarité. Elle revient à découpler les déplacements membranaires et transversaux. Géométriquement, cela implique que le déplacement axial dans le plan xOz , en $l \cos(\vartheta)$, reste d'un ordre de grandeur inférieur au déplacement transversal qui est en $\sin(\vartheta)$. Pour respecter la seconde hypothèse, il faut que l'angle ϑ reste petit. Dans ce cas, en première approximation, $1 - \cos(\vartheta)$ est nul : il y a découplage. Sous l'effet d'une charge transversale, il n'y a aucun déplacement dans le plan de la coque, donc ni déformation ni contrainte du feuillet moyen. Cette hypothèse est valable tant que la flèche est transversale est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la coque. Au-delà, le couplage intervient et on entre dans le domaine des non-linéarités géométriques.

Hypothèse 3

Cette hypothèse suppose que le gauchissement de la section n'est pas pris en compte. S'il devait l'être, la modélisation nécessiterait des éléments tridimensionnels et non plus des éléments à définition surfacique. La rotation de la section b n'est pas égale à la pente du feuillet moyen : il y a prise en compte de la déformation à l'effort tranchant en plus du moment généré par cet effort tranchant lui-même **Fig.II-5**.

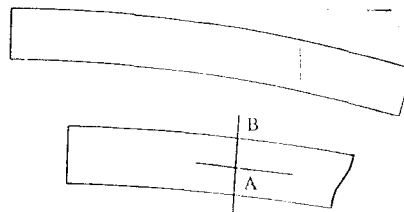


Fig. II-5: Élément déformable à l'effort tranchant

Hypothèse 4

On néglige la déformation à l'effort tranchant : la rotation de section est égale à la pente du feuillet moyen. Toute section droite se comporte comme un solide indéformable. La connaissance du champ de déplacement $w(x,y)$ en tout point permet la résolution complète du problème car les rotations ne sont que les dérivées du champ de déplacement, ce qui est utile pour les solutions analytiques. Dans le cas de la théorie des coques d'épaisseur modérée, la connaissance du champ de déplacement $w(x,y)$ et des deux champs de rotation b_x et b_y est nécessaire pour résoudre le problème car les rotations sont indépendantes du champ de déplacement $w(x,y)$.

Un modèle utilisant des coques minces convergera vers une flèche inférieure à celle obtenue avec des coques d'épaisseur modérée car, au déplacement transversal du au moment qui accompagne toujours un effort tranchant se superpose alors le déplacement transversal dû à l'effort tranchant lui-même, qui est négligé pour des coques minces. On peut l'expliquer différemment en remarquant qu'il faut apporter une contrainte supplémentaire dans l'épaisseur de la coque mince pour que le plan perpendiculaire du feuillet moyen le reste après déformation : c'est comme s'il y avait des ressorts de rappel répartis dans l'épaisseur de la coque pour conserver l'orthogonalité entre le feuillet moyen et un plan initialement orthogonal à ce feuillet. Une coque mince est plus raide qu'une coque d'épaisseur modérée de même épaisseur, d'où une flèche plus petite sous la même charge.

II.2-3-Relations Moments-Courbures:

Les relations Moments-Courbures jouent pour les plaques le même rôle que relations Contraintes-Déformations en élasticité. Elles relient la courbure d'une coque au moment qui lui est appliqué ou le contraire. Sur la figure ci-dessous **Fig.II-6** sont représentés les moments qui vont être définis. M_x , est le moment de flexion par unité de longueur sur les côtés parallèles à O_y : M_y résulte de la distribution antisymétrique des contraintes S_{xx} dans l'épaisseur, autour de l'axe O_y .

De même, M_y est le moment de flexion par unité de longueur sur les côtés parallèles à O_x , résultant de la distribution des contraintes S_{yy} dans l'épaisseur.

M_{xy} est le moment de torsion autour de la normale à la section, résultant de la distribution des contraintes de cisaillement t_{xy} dans l'épaisseur.

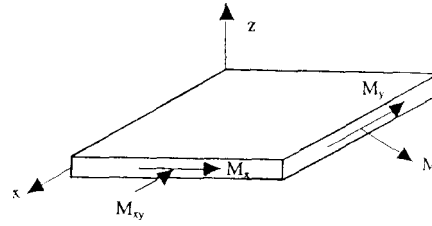


Fig. II-6 : Moments de flexion et de torsion

Ces moments s'expriment en Newton et sont homogènes à des forces.

$$M_x = \int_{-e/2}^{e/2} s_{xx} z dz \quad M_y = \int_{-e/2}^{e/2} s_{yy} z dz \quad M_{xy} = \int_{-e/2}^{e/2} t_{xy} z dz \quad (\text{II-31})$$

Soit un plan situé à la distance z du feuillet moyen qui ne subit aucune déformation due à la flexion. La déformation e de ce plan est reliée à la courbure C par la relation

$$e = zC \quad (\text{II-32})$$

La loi de Hooke s'écrit dans le plan, soit sous sa forme inverse (relation de compliance) soit sous sa forme directe :

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (s_{xx} - n s_{yy}) = z c_x & e_{yy} &= \frac{1}{E} (s_{yy} - n s_{xx}) = z c_y \\ s_{xx} &= \frac{Ez}{1-n^2} (c_x + n c_y) & s_{yy} &= \frac{Ez}{1-n^2} (c_y + n c_x) \end{aligned} \quad \text{Et} \quad (\text{II-33})$$

Les relations moments-courbures s'en déduisent en reportant ces expressions de celles des moments :

$$M_x = \int_{-e/2}^{e/2} s_{xx} z dz = \frac{Ez}{1-n^2} (c_x + n c_y) \int_{-e/2}^{e/2} z^2 dz = D (c_x + n c_y) \quad (\text{II-34})$$

$$D = \frac{E e^3}{12(1-n^2)}$$

D est la rigidité flexionnelle de la plaque, analogue au produit El de la théorie des poutres.

$$M_x = D(c_x + n c_y) \quad M_y = D(c_y + n c_x) \quad M_{xy} = \frac{D}{2} (1-n) c_{xy} \quad (\text{II-35})$$

On peut exprimer les relations inverses, reliant les courbures aux moments. Elles donnent la forme que prend le feuillet moyen après déformation quand on lui applique les moments M_x , M_y et M_{xy} .

Si l'on impose un moment M_x , sur une plaque cantilever, M_y étant nul, la plaque a en tout point deux courbures principales opposées. Les lignes d'iso-déplacement ne sont pas des droites parallèles mais des courbes.

D'autre part, si l'on impose une forme cylindrique à une plaque, une des deux courbures principales est nulle en tout point, par exemple C_y . Il reste alors :

$$M_x = Dc_x = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} c_x \quad (\text{II-36})$$

Si on fléchit une poutre de largeur unitaire de même épaisseur, on obtient :

$$M_x = \frac{Ee^3}{12} c_x \quad (\text{II-37})$$

La plaque constituée d'un matériau ayant un coefficient de poisson de 0,3 est environ 10% plus raide qu'une poutre équivalente de même section et de même inertie. Equations d'équilibre et conditions aux limites.

Soit p l'intensité par unité de surface de la charge transversale appliquée sur la 1 supérieure d'une plaque. Elle produit des moments de flexion et de torsion r aussi des efforts tranchants verticaux dont l'intensité par unité de longueur est

$$T_x = \int_{-e/2}^{e/2} t_{zx} dz \quad T = \int_{-e/2}^{e/2} t_{xy} dz \quad (\text{II-38})$$

Là encore, bien qu'il s'agisse d'efforts tranchants, les unités et conventions sont différentes de celles utilisées en R.D.M. pour les poutres.

L'équation d'équilibre en translation sur z donne

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0 \quad (\text{II-39})$$

L'équation d'équilibre en moment est, après élimination des efforts tranchants :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + p = 0 \quad (\text{II-40})$$

Soit maintenant le bord d'une coque, non parallèle à un axe structural. On y définit les moments M_n ou M_{sn} , M_s , ou M_{ns} , **Fig.II-7**.

$M_n = M_{sn} \Rightarrow$ rotation q , autour de s

$M_s = M_{ns} \Rightarrow$ rotation q , autour de n

Dans la théorie des coques d'épaisseur modérée, les conditions aux limites possibles sont :

Pour un bord libre

$$M_n=0 \quad M_s=0 \quad T=0$$

Pour un bord simplement appuyé

Soit $M_n=0 \quad w=0 \quad q_s=0$

Soit $M_n=0 \quad w=0 \quad M_{s,n}=0$

Pour un bord encastéré

Soit $w=0 \quad q_n=0 \quad q_s=0$

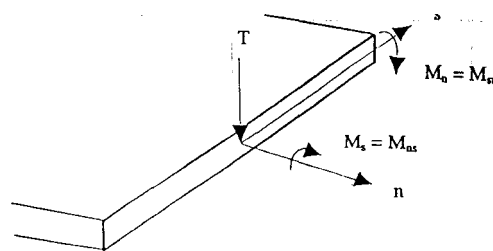


Fig. II-7 : Effort et moments dans la section d'une coque

Dans le cas d'éléments de coque mince, les conditions aux limites sont sensiblement différentes. On montre en effet que le long d'un bord libre, il est nécessaire et suffisant d'imposer deux conditions : parmi les inconnues M_n , M_s , T , il y en a une de trop. On montre, par une équivalence statique, que la distribution du moment de torsion M_s , peut être remplacée par un effort tranchant distribué.

Cette charge distribuée, notée K_n est appelée effort tranchant de *Kirchhoff*

$$K_n = T + \partial M_s / \partial s \quad (\text{II-41})$$

Il a été vérifié expérimentalement que l'on peut soumettre une plaque carré mince à la torsion soit en appliquant sur ses quatre bords des moments de torsion constants $M_{ns}=M_{sn}$ soit en appliquant sur ses quatre angles des forces transversales.

Pour les coques minces, on a comme conditions aux limites possibles :

Pour un bord libre $M_n=0$ $K_n=0$

Pour un bord simplement appuyé $M_n=0$ $w=0$

Pour un bord encastré $w=0$ $q = 0$

On remarquera que pour une plaque carrée uniformément chargée, simplement appuyée pour éviter ce déplacement transversal dans la direction opposée à celle de la charge, il faut que les réactions de coin soient dans le même sens que la charge. [45]

II. 3 Stabilité des structures :

II.3-1 Introduction:

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N , il n'existe qu'une configuration hors flambement. Dans les problèmes classiques de flambement, le système est stable si N est assez petit et devient instable quand N est grand. La valeur de N pour laquelle le système cesse d'être stable est appelée : valeur critique N_{cr} . Plus généralement, il faut déterminer les configurations d'équilibre de la structure sous les chargements imposés, celles parmi ces configurations qui sont stables, la valeur critique des chargements et les conséquences sur le comportement qu'ont ces niveaux de charge.

II.3-2 Etat d'équilibre stable et instable:

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement. Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : «L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ». Cette définition montre clairement que la stabilité détermine une qualité d'une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière. Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire. Si l'énergie fournie au système par cette force perturbatrice est W , on a alors :

$$W = T + V = \text{constante} \quad (\text{II-42})$$

Dans cette relation, T représente l'énergie cinétique du système et V l'énergie potentielle. Une faible augmentation de T s'accompagne d'une diminution faible identique de V et vice versa. Si le système est initialement en configuration d'équilibre d'énergie potentielle minimale, alors l'énergie cinétique T du déplacement libre correspondant décroît dans la mesure où V

doit croître. Par conséquent, le déplacement depuis l'état initial restera faible et l'état d'équilibre est stable. Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe. Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable ; si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de V minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit « neutre » [48]

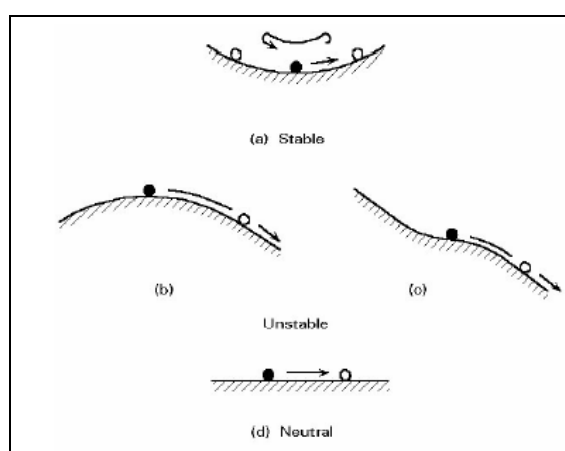


Fig. II-8 : Trois états d'équilibre.

II.3-3 Stabilité des enveloppes cylindriques :

II.3-3-1 Introduction :

Les recherches récentes traitant des performances des structurales légères utilisant les panneaux d'acier ont ouvert la voie au développement des structures utilisant ces panneaux. Une utilisation économique et pratique de tels panneaux comme des composants structuraux est trouvé dans les constructions des coques cylindriques en acier ondulé. Ces coques ont des applications multiples et peuvent actuellement être utilisés comme dépôts de grain, de longues couvertures, et comme bâtiments d'utilité publique.

Les publications précédentes ont traité de l'analyse statique et de quelques problèmes de voilement local de ces coques [25, 58,60]. L'approche fondamentale dans toutes ces études ont traités la coque comme étant faite de matériel élastique orthotrope dans lequel les propriétés mécaniques sont identiques aux propriétés moyennes des feuilles ondulées. Cette approche s'est avérée plus juste en considérant les caractéristiques principales de la réponse de la coque [25, 58]. Dans ce qui suit on traite de la combinaison des instabilités de ces

coques quand elles sont soutenues le long de leurs quatre bords. La combinaison limite de ces coques est identifiée comme facteur principal en définissant leur capacité portante **Fig. II-9**. Les formulations mathématiques de la théorie du modèle développé ci-dessus sont basées, sur les formulations linéaires de la théorie des coques cylindriques orthotropes [60]. Les coques orthotropes considérées comme arc en tôles d'acier ondulées [**Fig. II-10 (b)**] sont le modèle standard pour cette étude, les résultats s'appliquent à une échelle plus large pour d'autres types de plis et à d'autres types de coques cylindriques orthotropes.

II.3-3-2 les équations différentielles principales :

Le comportement de la coque est régi par trois équations simultanées dont les déplacements sont u , v , et W dans les directions x , y , et z , respectivement [**Fig. II-10 (a)**].

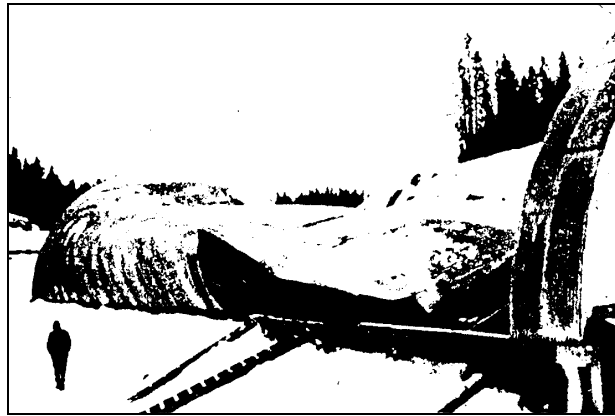


Fig. II-9 flambements d'une coque demie cylindrique en tôle ondulé.

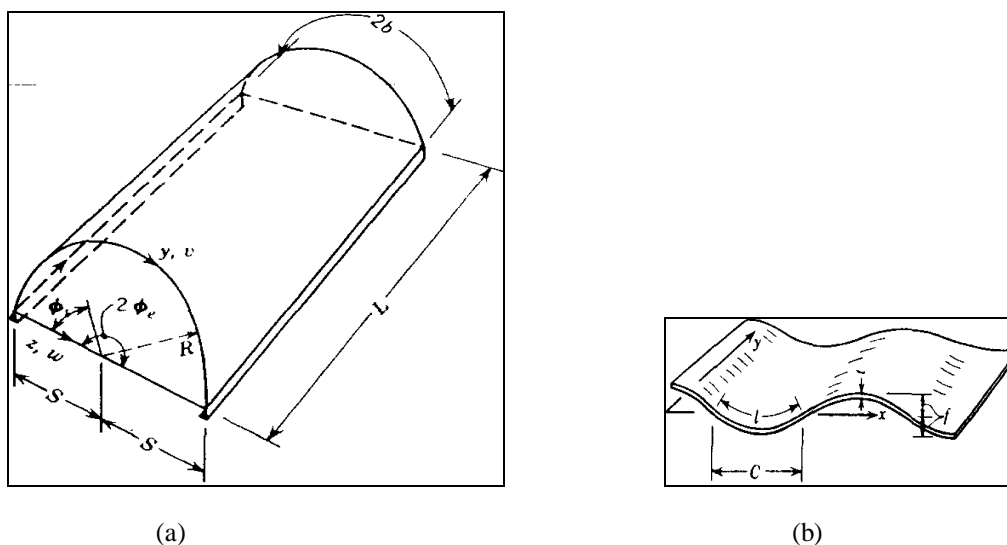


Fig. II-10 (a)-Système des coordonnées ; (b) Tôle ondulée standard

Ces équations sont obtenues en considérant les propriétés élastiques, la géométrie, et les états d'équilibre d'un élément infinitésimal. d_x, d_y de la surface moyenne déformée de la coque[59] :

$$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0; p_x = 0 \quad (\text{II-43a})$$

$$D_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + p_y = 0 \quad (\text{II-43b})$$

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^4} \right) - \frac{D_y}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p_z = 0 \quad (\text{II-43c})$$

Où D et B sont les rigidités ; N se rapporte à des forces de membrane ;

D_x et D_y = rigidités directionnelles de membrane ;

D_{xy} = la rigidité de cisaillement ;

B_x et B_y = les rigidités flexionnelles dans les plans xz et de yz , respectivement ;

B_{xy} = rigidité torsionnelle ;

N_x, N_y , et N_{xy} = les forces de membrane.

Pour une feuille ondulée standard [Fig. II-10 (b)] les rigidités sont calculées utilisant les équations suivantes :

$$D_y = \frac{l}{C} tE \quad (\text{II-44a})$$

$$D_x = \frac{E}{6(1-m^2)} \left(\frac{t}{f} \right)^2 t \quad (\text{II-44b})$$

$$D_{xy} = r \frac{Et}{2(1+m)} \frac{C}{l} \quad (\text{II-44c})$$

$$B_x = \frac{C}{l} \frac{Et^3}{12(1-m^2)} \quad (\text{II-44d})$$

$$B_y = 0.522 E f^2 t \quad (\text{II-44e})$$

$$B_{xy} = \frac{l}{C} \frac{Et^3}{12(1+m)} \quad (\text{II-44f})$$

Où E = le module d'élasticité du matériau ; t = l'épaisseur moyenne de la feuille ondulée ;
 l = la longueur développée du pli ; et ρ = un facteur de réduction tenant compte de l'effet du recouvrement.

Les rapports entre les composants de force interne, N_x , N_y , et N_{xy} , et les déplacements, u , v , et w , sont données par [60] :

$$N_x = D_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II-45a})$$

$$N_y = D_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) - \frac{B_y}{R^3} \left(w + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II-45b})$$

$$N_{xy} = D_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{II-45c})$$

Les remarques suivantes devraient être notées en employant ces formules :

- ü les déplacements, u , v , et w , ont des valeurs définies une fois calculés pour n'importe quel cas du chargement au-dessous de la valeur limite
- ü A partir des Eqs.(II-43a,b,c) qui sont obtenu utilisant la théorie de faibles déplacements, les composantes de déplacement, u , v , et w , deviennent non définies quand la charge atteint sa limite critique. Dans ce cas Eqs.(II-43a,b,c) peuvent être satisfaites par plus d'une solution. Par exemple, u , v , et w et leur N_x , N_y , et N_{xy} correspondants ou par une solution, $u + u^*$, $v + v^*$ et $w + w^*$, avec $N_x + N_x^*$, $N_y + N_y^*$ et $N_{xy} + N_{xy}^*$ correspondants [56, 57]. Par conséquent, les équations différentielles qui régissent la limite critique de chargement sont obtenues en soustrayant les équations correspondant à la première solution de ceux correspondant au second. Ceci mène à :

$$D_x \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y} + D_{xy} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II-46a})$$

$$D_y \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y} \right) + p_y = 0 \quad (\text{II-46b})$$

$$\begin{aligned}
& B_x \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2B_{xy} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{w^*}{R^4} \right) - \frac{D_y}{R} \left(\frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{w^*}{R} \right) - N_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \\
& - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{II-46c}$$

Obtenant de Eqs (II-46a, b et c) par simplifications considérons :

- (1) $N_x^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ et $N_x^* \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)$ sont négligeable par rapport a $N_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)$;
- (2) $N_{xy}^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ et $N_{xy}^* \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right)$ sont négligeable par rapport a $N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right)$;
- (3) $N_y^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ et $N_y^* \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)$ sont négligeable par rapport a $N_y \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)$;

Eqs (II-46a, b) sont si est posé avec satisfaction par cela F , qui a les liaisons suivant avec les composants de déplacement, une fonction de charge d'introduire :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = D_x \frac{\partial u^*}{\partial x} \tag{II-47a}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = D_y \frac{\partial v^*}{\partial y} - D_y \frac{w^*}{R} \tag{II-47b}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -D_{xy} \frac{\partial v^*}{\partial x} - D_{xy} \frac{\partial u^*}{\partial y} \tag{II-47c}$$

Éliminer les déplacements, u^* et v^* , parmi les Eqs (II-47), menant aux deux équations Eqs (II-46c) et Eqs (II-47b) principales simultanées suivantes :

$$D_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{D_x D_y}{D_{xy}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{D_x D_y}{R} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = 0 \tag{II-48a}$$

$$\begin{aligned}
& B_x \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2B_{xy} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{w^*}{R^4} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - N_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \\
& - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{II-48b}$$

Le voilement limite est atteint si Eqs (II-48a, b) ont une solution non triviale

II.3-3-3 Les conditions aux limites :

Les conditions aux limites imposés à la surface moyenne d'une coque simplement appuyée sont comme suit.

Conditions limites de déplacement et de flexion : Les quatre bords de la coque ne subissent aucun déplacement et ne peuvent pas être affectés par le moment latéral de la coque, c.-à-d

$$\text{A } x=0 \text{ et } x=L : w^* = \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II-49a})$$

$$\text{A } f=0 \text{ et } f=2f_e : w^* = \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II-49b})$$

Avec f = la coordonnée angulaire; $y = fR$; et f_e = moitié de l'angle central de la coque.

Conditions aux limites dans le plan de l'enveloppe : Les côtés circulaires (à $x = 0$ et $x = L$) sont soutenus par les murs qui sont raidies dans des leurs propres plans mais peuvent se déformer dans les directions perpendiculaires à leurs propres plans.

Par conséquent, les conditions de frontière sont la contrainte nulle \mathcal{E}_y le long de chacun des bords et la partie latérale libre de déplacement à eux, c.-à-d. :

$$\text{A } x=0 \text{ et } x=L : e_y = N_{x=0} \quad (\text{II-50a})$$

Les bords longitudinaux sont soutenus par des éléments reliés à la base de la coque. Par conséquent, aucun déplacement ne peut avoir lieu le long de ces bords, c.-à-d.

$$u^* = v^* = 0 \quad (\text{II-50b})$$

Les conditions, Eqs (II-50a, b), peuvent être exprimées en termes de fonctions d'effort,

F , comme :

$$\text{A } x=0 \text{ et } x=L : \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II-50c})$$

$$\text{A } f=0 \text{ et } f=2f_e : \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = D_x \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0 \quad (\text{II-50d})$$

II.3-3-4 Contrainte- déformation :

Les expressions suivantes de série sont employées pour présenter la composante de déplacement, w^* , et la fonction d'effort, F :

$$w^* = \sin \frac{mp}{L} x \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{np}{2b} y \quad (\text{II-51a})$$

$$F = F_p + F_h$$

$$F_p = \sin \frac{m p}{L} x \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} F_{mn} \sin \frac{n p}{2b} y \quad (\text{II-51b})$$

$$F_h = \sin \frac{m n}{L} x H_{mn}(y) \quad (\text{II-51c})$$

Où $m=1, 2, 3, \dots$; $2b$ = la longueur du bord circulaire de la coque [Fig. II-10 (a)] ; A_{mn} et F_{mn} = coefficients indépendants de x et de y ; $H_{mn}(y)$ est une fonction de y seulement ; F_K sont une solution pour l'équation homogène ;

$$D_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{D_x D_y}{D_{xy}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{II-51d})$$

Eqs. (II-51a) satisfait les conditions de déplacement et de flexion le long des quatre bords et suppose que le déplacement peut être sous la forme sinusoïdale dans la direction de x . Eqs. (II-51b,c) remplissent les conditions aux limites dans le plan de la coque le long les bords $x = 0$ et $x = L$. Les conditions aux limites sont également satisfaites le long de $\theta = 0$ et $\theta = 2\theta_e$ en calculant $H_{mn}(y)$. En substituant les équations Eqs. (II-51a, b) dans l'équation différentielle, l'équation (II-48a) a une relation directe entre les coefficients d'effort, F_{mn} et les coefficients correspondants de déplacement, A_{mn} :

$$\left. \begin{aligned} F_{mn} &= \frac{1}{T_n} \frac{D_x D_y}{R} \left(\frac{m p}{L} \right)^2 A_{mn} \\ T_n &= \left(\frac{n p}{2b} \right)^4 D_y + \frac{D_x D_y}{D_{xy}} \left(\frac{n p}{2b} \right)^2 \left(\frac{m p}{L} \right)^4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-52})$$

$$\text{Avec } k = \left(\frac{2D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right)$$

Qui est toujours inférieur à un dans le cas de profilés ondulés, $H_{mn}(y)$ est obtenu comme suit

$$H_{mn}(y) = A_m \cosh n_1 y + B_m \sin n_1 y + C_m \cos n_2 y + D_m \sinh n_2 y \quad (\text{II-53})$$

A_m , B_m , C_m et D_m sont des constantes arbitraires calculées en satisfaisant les conditions aux limites données par Eqs. (II-49d). Ceci mène à l'expression suivante pour la fonction d'effort, F :

$$F = \frac{D_x D_y}{R} \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{T_n} \sin \frac{np}{2b} y \sin \frac{mp}{L} x$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} & - \frac{n_2^2}{n_1^2} G \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \frac{D_x D_y}{R} \cosh n_1 y \left[\sum_n D_{xy} \left(\frac{np}{2b} \right)^3 \frac{A_{mn}}{T_n} + \sum_n D_x \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \left(\frac{np}{2b} \right) \frac{A_{mn}}{T_n} \right] \\ & + H \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \frac{D_x D_y}{R} \sinh n_1 y \left[\sum_n D_{xy} \left(\frac{np}{2b} \right)^3 \frac{A_{mn}}{T_n} + \sum_n D_x \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \left(\frac{np}{2b} \right) \frac{A_{mn}}{T_n} \right] \\ & + G \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \frac{D_x D_y}{R} \cosh n_2 y \left[\sum_n D_{xy} \left(\frac{np}{2b} \right)^3 \frac{A_{mn}}{T_n} + \sum_n D_x \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \left(\frac{np}{2b} \right) \frac{A_{mn}}{T_n} \right] \\ & + K \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \frac{D_x D_y}{R} \sinh n_2 y \left[\sum_n D_{xy} \left(\frac{np}{2b} \right)^3 \frac{A_{mn}}{T_n} + \sum_n D_x \left(\frac{mp}{L} \right)^2 \left(\frac{np}{2b} \right) \frac{A_{mn}}{T_n} \right] \end{aligned} \right\} \sin \frac{mp}{L} x$$

(II-54a)

Avec

$$K = \frac{(1 - \cosh 2n_1 b) n_2^2 Y_3 + \left(\frac{n_1^2}{Y_1} \sin 2n_1 b \right) Y_4}{Y_2 n_2^2 Y_3^2 - Y_4 Y_5};$$

$$Y_1 = D_{xy} n_1^3 - \left(\frac{mp}{L} \right)^2 D_x n_1; Y_2 = D_{xy} n_2^3 - \left(\frac{mp}{L} \right)^2 D_x n_2;$$

$$Y_3 = \cosh 2n_2 b - \cosh 2n_1 b; Y_4 = Y_2 \sinh 2n_2 b - \frac{n_2^2}{n_1^2} Y_1 \sinh 2n_1 b;$$

$$Y_5 = n_2^2 \sinh 2n_2 b - n_1^2 \frac{Y_2}{Y_1} \sinh 2n_1 b; G = - \frac{n_1^2 \sinh 2n_1 b}{n_2^2 Y_1 Y_3} - K \frac{Y_5}{n_2^2 Y_3};$$

$$H = \frac{1}{Y_1} (1 - Y_2 K)$$

(II-54b)

L'externe charge appliquée sur la coque est accepté, qu'avoir autour de la forme d'une onde de moitié sinus dans la direction longitudinale x . Les composants de forces extérieurs de chaque le fait de charger de pouvoir causés peut être écrit dans la forme suivant:

$$N_x = \overline{N_x} \sin \frac{p}{L} x$$

$$N_y = \overline{N_y} \sin \frac{p}{L} x$$

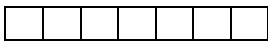
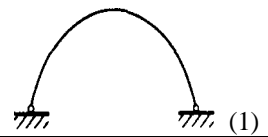
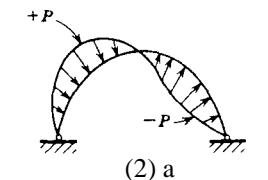
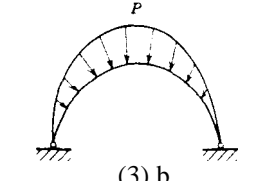
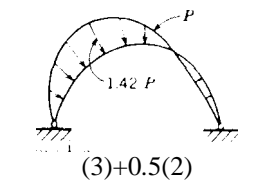
$$N_{xy} = -\overline{N_{xy}} \cos \frac{p}{L} x.$$

(II-55)

Avec $\overline{N_x}, \overline{N_y}$ et $\overline{N_{xy}}$ sont seulement des fonctions de y et sont dépendant de la distribution de la charge dans la direction y .

3. Pression radiale sous forme d'une demi-onde.
4. Pression radiale asymétrique (superposition des cas 2 et 3);
5. Charge de neige plus la charge de vent (superposition des cas 1et 2 multipliés par 0.75).

Tab .II-1 la charge de flambement du voute standard en tôle ondulée avec $R = 120$ in. (3,050 mm), $f_e = 90^\circ$, $t = 0.03$ in. (0.76 m), $f = 0.3125$ in. (7.938 mm] and $C = 1.25$ in (32 mm)

Mode de charge	La charge de flambement, $L/R (p /ft^2), (n /m^2)$					
	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
<p>P</p>  	98.5 (4.720)	51.7 (2.475)	29.5 (1.412)	20.3 (972)	11.7 (561)	7.16 (344)
	94.4 (4.520)	33.2 (1.590)	18.2 (872)	10.0 (479)	5.80 (278)	3.23 (155)
	89.4 (4.275)	47.4 (2.270)	28.0 (1.340)	22.4 (1.074)	14.4 (690)	10.1 (484)
	64.1 (3.065)	28.2 (1.350)	15.7 (752)	9.27 (444)	5.9 (273)	3.41 (163)
<p>$0.75[(1) + (2)]$</p> <p>(5)</p>	82.9 (3.970)	34.4 (1.650)	17.2 (825)	9.14 (437)	5.24 (251)	2.97 (142)

a) charge

$$P_z = P \sin(p / f_e) f \sin(p / L)x$$

b) charge

$$P_z = P \sin(p / 2f_e) f \sin(p / L)x$$

Tab .II-2 la charge de flambement du voute standard en tôle ondulée avec $R = 120$ in. (3,050 mm), $f_e = 90^\circ$, $t = 0.03$ in. (0.76 mm), $f = 0.3125$ in. (7.938 mm) and $C = 1.25$ in. (32 mm)

L/S	Valeur de m				
	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
<i>(a) la charge uniforme de la neige : (p /ft²), (n /m²)</i>					
1.0	98.5 (4.720)	203.0 (9.720)	280.0 (13.800)	356.0 (17.070)	443.0 (21.220)
2.0	51.7 (2.475)	104.0 (4.990)	133.0 (6.360)	151.0 (7.230)	165.0 (7.900)
3.0	29.5 (1.412)	65.3 (3.130)	89.3 (4.270)	101.0 (4.840)	112.0 (5.360)
4.0	20.3 (972)	48.8 (2.340)	67.5 (3.230)	86.8 (4.160)	107.0 (5.120)
5.0	11.7 (561)	29.1 (1.394)	46.1 (2.210)	61.9 (2.965)	78.0 (3.735)
6.0	7.16 (344)	19.3 (924)	29.6 (1.418)	40.2 (1.925)	51.0 (2.440)
<i>(b) la charge du vent : (p /ft²), (n /m²)</i>					
1.0	94.4 (4.520)	209.0 (10.000)	298.0 (14.270)	369.0 (17.670)	458.0 (21.960)
2.0	33.2 (1.590)	76.0 (3.640)	112.0 (5.620)	147.0 (7.080)	177.0 (8.470)
3.0	18.2 (872)	41.8 (2.007)	62.1 (2.975)	81.7 (3.915)	101.0 (4.840)
4.0	10.0 (479)	24.2 (1.160)	36.8 (1.763)	49.2 (2.355)	61.9 (2.965)
5.0	5.80 (278)	14.3 (685)	21.9 (1.045)	29.7 (1.422)	37.7 (1.805)
6.0	3.23 (155)	8.38 (401)	13.0 (622)	17.8 (852)	22.8 (1.092)

OBSERVATIONS :

1. Les charges critiques ont été calculées utilisant Eqs. (II-57) et considérant différentes valeurs pour des demi ondes longitudinales m . Les résultats sont donnés dans le **Tab .II- 2 (a)** et **2 (b)** montrant que la valeur la plus basse du chargement

critique est associée avec $m = 1$ pour des cas symétriques et dissymétriques du chargement.

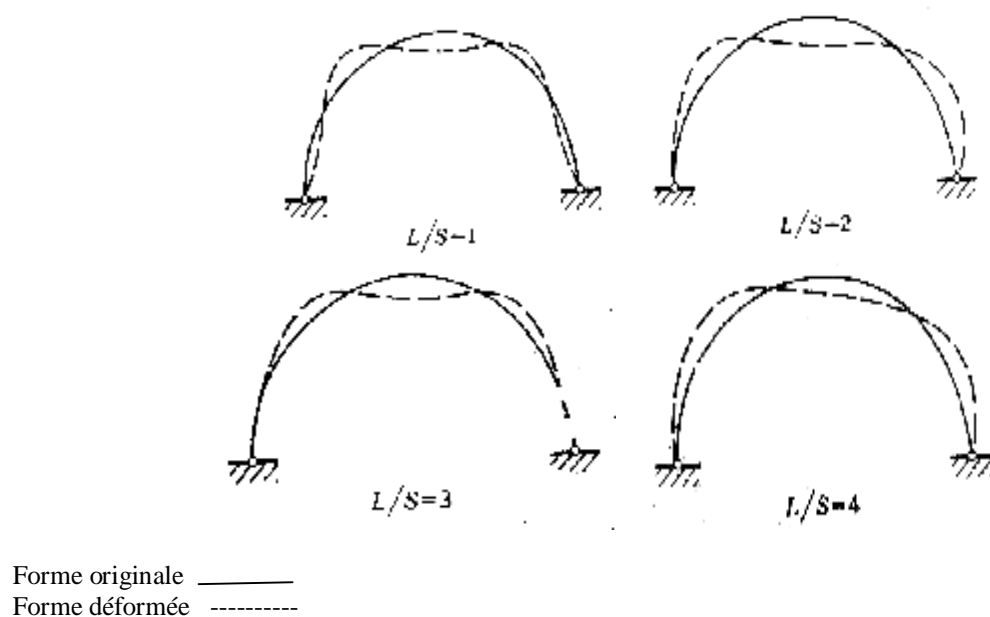


Fig. II-11 Mode de déformation d'une voûte cylindrique sous charge uniformément répartie de neige.

2. La charge appliquée à une coque s'appuyant le long de ses quatre bords est transférée partiellement dans la direction longitudinale et aussi partiellement dans la direction transversale. Le rapport de la distribution de la charge entre ces deux directions dépend du rapport de la longueur à la portée de la coque. La **Fig. II-11** montre les modes de rupture des enveloppes faites de feuilles ondulées standards, avec $R = 3.050 \text{ mm}$ et $t = 0.76 \text{ mm}$ et ayant la valeur différente du rapport de longueur à la portée sous une charge uniforme de neige, suivant les indications du **Tab. II-1** [62].

CONCLUSIONS :

La coque cylindrique orthotrope soutenue le long de ses quatre bords est une structure économique, mais son utilité a été limitée par la définition inexacte de son support sous la charge limite. Ces coques sont habituellement flexibles puisqu'elles sont fabriquées avec des aciers. Par conséquent leur capacité portante est régie principalement par leur limite de voilement global. Une technique théorique est développée ici pour le calcul de ces limites. Elle montre l'importance de la charge critique, aussi bien que le mode de voilement, qui dépend principalement du rapport de la longueur au rayon de la coque.

II.4 Méthodes numériques de résolution des systèmes non linéaires :

II.4-1 Introduction :

A l'heure actuelle une grande expérience a été accumulée dans le domaine des méthodes de résolution des systèmes non linéaire. L'analyse des structures par éléments finis exige l'emploi d'un modèle fiable et exact faisant partie d'un processus de résolution efficace. La résolution où l'étude des structures à loi de comportement complexe ne peut être faite que si on dispose d'une méthode de résolution adéquate. Ce processus est dit fiable s'il est basé sur un algorithme qui peut traiter les différents types de comportements non linéaires c'est-à-dire de décrire tout le chemin d'équilibre, surtout les points limites. La qualité de la solution trouvée et le temps de calcul évaluent la fiabilité de cet algorithme. Dans ce but plusieurs chercheurs [51][52][53][54] ont développé des techniques de résolutions. Comme les comportements des structures sont divers on est appelé à faire plusieurs algorithmes qui seront utilisés indépendamment dans un même processus de calcul. Pour améliorer et rendre le processus plus fiable et plus robuste il faut alors le rendre automatique. Il est essentiel que l'algorithme automatisé puisse reconnaître particulièrement les situations difficiles tel que l'instabilité et bifurcation ou point limites de la courbe, pour que des mesures nécessaires peuvent être prise.

II.4-2 Méthodes de résolution :

Les techniques de résolution sont variées. Les différences essentielles résident dans le choix de la manière à résoudre les équations non linéaires soit de manière directe, ou de manière incrémentale. La méthode directe consiste à chercher la "réponse" de la structure à un niveau de sollicitation extérieure donné par des méthodes mathématiques itératives. Les inconvénients de cette méthode sont les suivants:

Elle ne s'applique pas aux matériaux dont la loi constitutive dépend du chemin parcouru (plasticité incrémentale par exemple) elle ne fournit aisément que les configurations stables de la structure. La méthode incrémentale consiste à appliquer le niveau de sollicitation par incréments successifs, en recherchant à chaque étape la réponse de la structure, avec ou sans correction de l'équilibre basé sur la linéarisation des équations. Cela peut s'obtenir soit par l'emploi d'un principe incrémental (des déplacements virtuels ou énergétiques), soit par un développement en série de Taylor des équations non linéaires, au voisinage d'une solution

connue limitée aux termes linéaires.

La méthode incrémentale n'a pas les inconvénients de la méthode directe et lui est donc préférée.

II.4-2-1 Méthodes de résolution incrémentales :

Ces méthodes sont basées sur des processus incrémentaux et sont de deux sortes:

- méthodes incrémentales pures,
- méthodes incrémentales itératives.

II.4-2-1-1- Méthodes incrémentale pure :

On associe à un incrément de charge un accroissement de déplacement, en tenant compte de la matrice tangente calculée pour l'étape précédente **Fig. II-12**. Cette méthode est très peu utilisée. En effet, à moins de l'utilisation d'incrémentes très petits la solution calculée peut facilement, au fur et à mesure de l'incrémentation, s'éloigner de la solution recherchée.

II.4-2-1-2- Méthodes incrémentale itérative :

Cette méthode utilise le même processus incrémental que la méthode précédente. En utilisant un processus itératif, on fait une correction de l'équilibre à chaque incrément. Cette correction peut se faire de plusieurs manières, définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales-itératives. Le type de matrice de rigidité utilisée pour la correction, distingue ces méthodes les unes des autres. La plus connue et certainement la plus utilisée de ces méthodes est celle de *Newton-Raphson*.

Méthode de correction de Newton –Raphson :

Le principe consiste à mettre en œuvre un processus itératif permettant d'équilibrer la structure en utilisant une matrice de rigidité tangente à chaque itération. Ce principe assure une convergence très rapide mais impose le calcul de la matrice de rigidité à chaque itération ce qui nécessite un temps de calcul très élevé. Pour corriger cette inconvénient, on fait le calcul de la matrice de rigidité seulement au début de chaque incrément et on la garde constante pour toutes les itérations, C'est la méthode de correction de Newton-Raphson modifiée **Fig. II-13**.

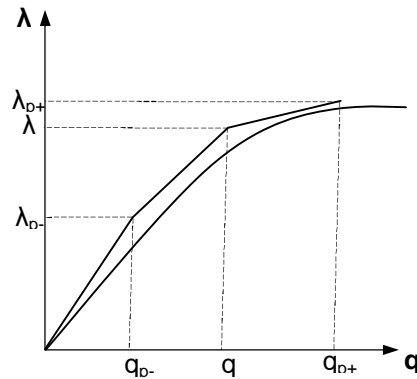


Fig.II-12: Représentation unidimensionnelle de la méthode incrémentale

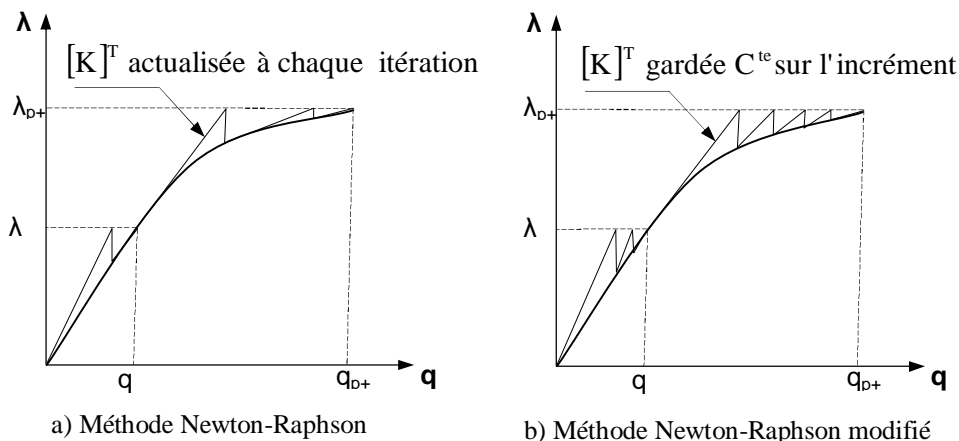


Fig.II-13 : Représentation unidimensionnelle de la méthode Incrémentales-itératives newton-Raphson

II.4-2-2 Conclusion sur la résolution des systèmes non linéaires :

La résolution non linéaire entraîne un temps de calculs considérables. En effet, la nécessité d'utiliser des pas de charge petits implique des durées de traitement très importantes. De plus, la convergence de la méthode de *Newton-Raphson* sur chaque pas de charge n'est satisfaite qu'au bout d'un certain nombre d'itération non négligeable. La vitesse de convergence de cette méthode est en fait dépendante du degré de non linéarité sur le pas de charge considéré. Néanmoins, des modifications peuvent être apportées afin d'optimiser la rapidité de la résolution non linéaire. En effet, la technique de résolution par la méthode de *Newton-Raphson* à partir de la matrice de rigidité initiale peut être améliorée en utilisant la matrice de rigidité tangente. Celle-ci devrait permettre de diminuer le nombre d'itérations nécessaire à la convergence mais a l'inconvénient majeure de calculer la matrice de rigidité tangente à chaque itération ce qui nécessite un temps de calcul très élevé. Cet inconvénient a été corrigé par la méthode de *Newton-Raphson* modifiée qui consiste à calculer la matrice de rigidité au

début de chaque incrément.

II.4-3 Stratégies de résolution :

En utilisant les méthodes classiques de résolution on n'est pas sûr de trouver la courbe charge-déplacement, malgré que la résolution utilisée est incrémentale (incrément de charge, incrément de déplacement). En effet, les points limites sont dus à un comportement non linéaire des structures **Fig.II-14**. Donc pour détecter et passer les points limites on doit utiliser des stratégies de résolutions, associées aux méthodes incrémentales itératives suivantes:

- technique de pilotage en charge imposée,
- technique de pilotage en déplacement imposé,
- technique de pilotage en longueur d'arc imposée.

On défini:

$G_p^{(i)}$: Une grandeur G à l'incrément (P) et à l'itération (i),

G : une grandeur relative à une solution convergé et est notée par rapport à l'incrément correspondant.

{ G }: Dans ce cas la grandeur G est un vecteur dont sa n ième composante est notée par:

$(G)_p$

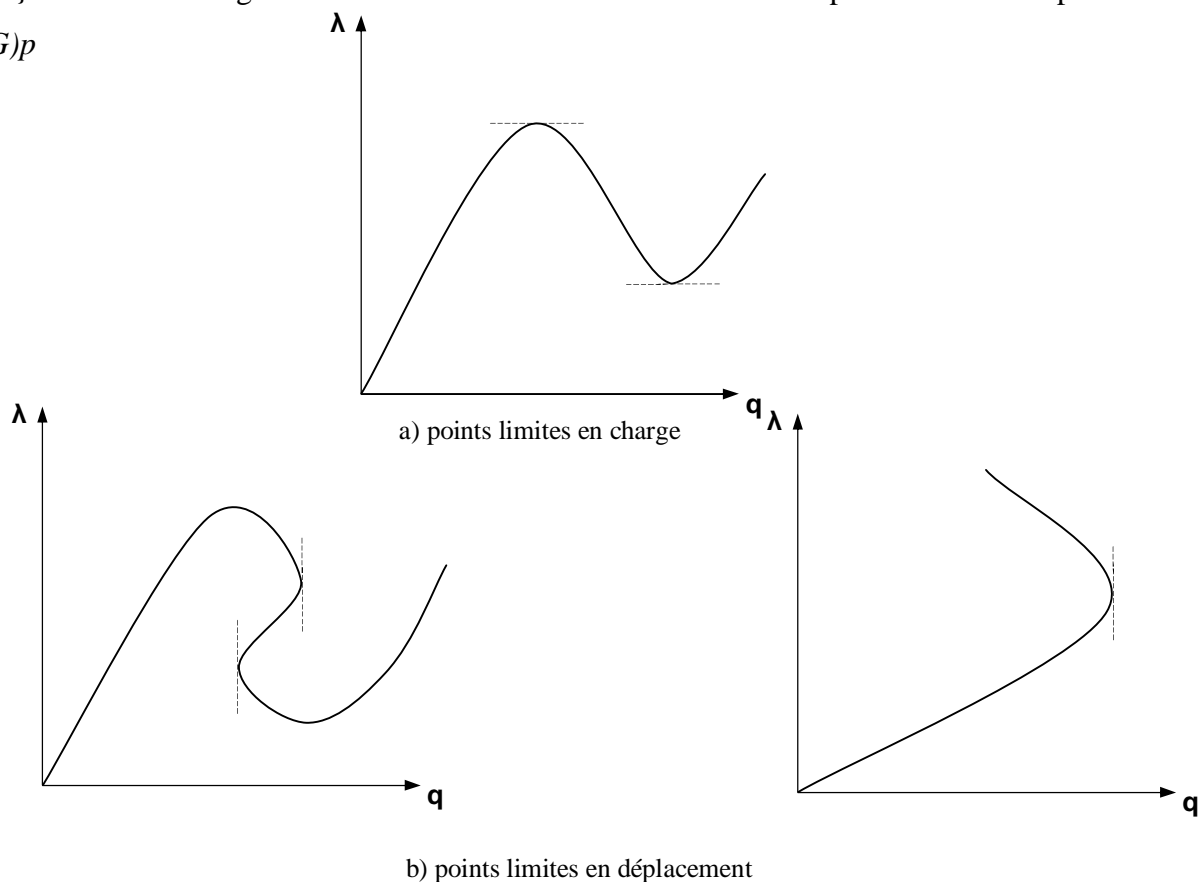


Fig.II-14 : Représentation unidimensionnelle des types de points limites

II.4-3-1 Méthode générale de résolution de *Newton-Raphson* :

II.4-3-1-1 Equation d'équilibre :

L'équation d'équilibre d'une structure à comportement non linéaire et discrétisée par éléments finis est sous la forme de:

$$\{P_{ext}(\{q\}, I)\} - \{Q(\{q\})\} = \{0\} \quad (\text{II-57})$$

Avec:

- $\{P_{ext}(\{q\}, I)\}$ Vecteur des forces extérieures
- $\{q\}$: vecteur déplacement
- I : paramètre de charge.

En considérant un "seul paramètre de charge et un chargement indépendant de l'état de déplacement on peut écrire:

$$\{P_{ext}(\{q\}, I)\} = I \{P_{ext}\}$$

$Q(\{q\})$: Vecteur des forces internes

II.4-3-1-2 Position du problème :

L'équation (II-57) représente un système à (n) équations non linéaires en $\{q\}$. Donc on doit déterminer les (n) composantes du vecteur déplacement $\{q\}$, ainsi que le paramètre scalaire λ . Ces inconnues sont déterminées en vérifiant l'équation (II-57) et une équation supplémentaire définissant le paramètre incrémental à imposer et liant le vecteur déplacement $\{q\}$ et le paramètre de charge λ telle que:

$$F(\{q\}, I) = 0 \quad (\text{II-58})$$

II.4-3-1-3 Procédure de résolution de *Newton-Raphson* :

$$\left(\{q_p^{(i)}\}, I_p^{(i)} \right) \quad (\text{II-59})$$

L'équation (II-59) est une solution non convergée à l'incrément (P) et à l'itération (i) .

Elle provoque un déséquilibre entre les forces extérieures et intérieures.

Soit l'équation (II-57) dans cette position non équilibrée sous la forme suivante:

$$I_p^{(i)}, \{P_{ext}\} = \{Q_p^{(i)}(\{q_p^{(i)}\})\} = \{R_p^{(i)}\} \quad (\text{II-60})$$

Avec:

- $\{R_p^{(i)}\}$: le vecteur forces résiduelles de déséquilibre

Si la solution (II-59) est corrigée le déséquilibre du système défini par la relation (II-60) sera éliminé. Le processus de *Newton-Raphson* nous permet donc de corriger la solution (II-59) par une solution à l'itération $(i+1)$ et à l'incrément (P) telle que

$$\begin{cases} \{q_p^{(i+1)}\} = \{q_p^{(i)}\} + \{\Delta q_p^{(i)}\} \\ \{I_p^{(i+1)}\} = \{I_p^{(i)}\} + \{\Delta I_p^{(i)}\} \end{cases} \quad (\text{II-61})$$

- $\{\Delta q_p^{(i)}\}$ et $\Delta I_p^{(i)}$ sont obtenus après résolution du système:

$$[K_p^{T(i)}] \{\Delta q_p^{(i)}\} = \Delta I_p^{(i)} \cdot \{P_{ext}\} + \{R_p^{(i)}\} \quad (\text{II-62})$$

$$F(\{q_{p+1}\}, I_{p+1}) = 0 \quad (\text{II-63})$$

Où $[K_p^{T(i)}]$ représente la matrice de rigidité tangente définie à l'incrément (P) et à l'itération (i) .

L'équation (II-62) représente l'écriture linéarisée de l'équilibre en éléments finis à l'incrément (P) ,

Et l'équation (II-63) définit le paramètre incrémental à imposer.

Si la solution (II-61) corrigée, provoque toujours un déséquilibre, le processus de correction sera répété autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à convergence de la solution.

II.4-3-2 Technique de pilotage en charge imposée :

II.4-3-2-1 Définition de la fonction F en charge imposée :

Soit la solution connue à l'incrément (p)

$$F(\{q\}, I) = I_{p+1} - \bar{I} \quad (\text{II-64})$$

Telle que F une fonction définie en charge imposée.

Pour un incrément $(p+1)$, on doit fixer un paramètre de charge λ .

$$I_{p+1} = \bar{I}$$

La seconde étape de la méthode consiste à remplacer la valeur imposée I_{p+1} du paramètre de charge **Fig.II-15** dans l'équation (II-62) pour trouver les (n) composantes de $\{q_{p+1}\}$

Il convient de noter que cette technique permet de suivre toute la courbe charge déplacement tant qu'il n'y a pas un point limite en charge **Fig.II-14a** par contre pour des petits déplacements on peut dans certains cas suivre, une branche stable de la courbe juste après le point limite.

Lorsque la structure est élasto-plastique au seuil de plasticité, le passage peut être nettement plus délicat du fait que le phénomène de plasticité peut avoir tendance à "aplatir", parfois excessivement, la courbe au sommet.

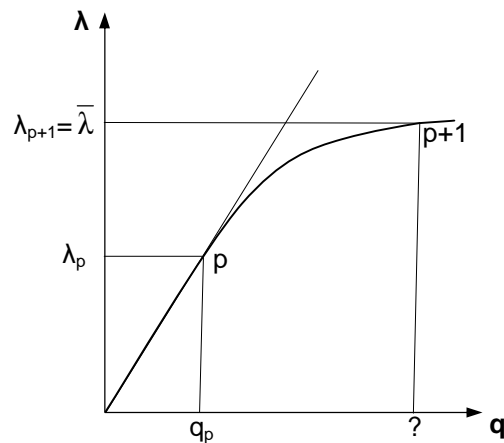


Fig.II-15: Pilotage en charge imposée

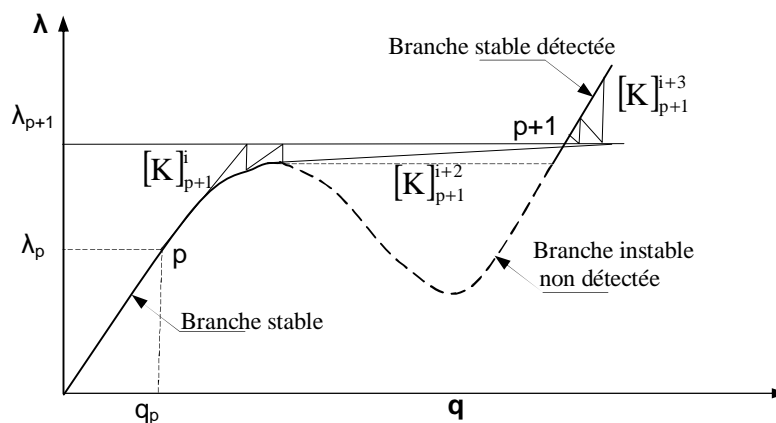


Fig.II-16 : Exemple de saut sur une branche stable en charge imposée

II.4-3-2-2 Algorithme de résolution de Newton-Raphson avec pilotage en charge imposée :

Soit la solution convergée à l'incrément (p):

$$\{q_p\}, I_p \quad (\text{II-65})$$

A l'incrément ($p+1$), on impose un incrément de charge tel que:

$$F(\{q_{p+1}\}, I_{p+1}) = I_{p+1} - \bar{I} \quad (\text{II-66})$$

$$I_{p+1} = \bar{I}$$

- à l'itération $i=1$

- on calcule la matrice de rigidité tangente:

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \quad (\text{II-67})$$

- puis on fait la résolution du système:

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} = (\bar{I} - I_p) \{P_{ext}\} \quad (\text{II-68})$$

- puis on obtient la solution à l'itération $i=1$

$$\begin{cases} \{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_p\} + \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} \\ I_{p+1}^{(i)} = \bar{I} \end{cases} \quad (\text{II-69})$$

- à l'itération ≥ 2

- on recalcule la matrice de rigidité tangente:

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \quad (\text{II-70})$$

- calcul des forces internes:

$$\{Q_{p+1}^{(i)}(q_{p+1}^{(i-1)})\} \quad (\text{II-71})$$

- on calcul le résidu:

$$\{R_{p+1}^{(i)}\} = \bar{I} \{P_{ext}\} - \{Q_{p+1}^{(i)}\} \quad (\text{II-72})$$

- on fait la résolution de l'équation suivante:

$$\left[K_{p+1}^{T(i)} \right] \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} = \Delta I_{p+1}^{(i)} \{ P_{ext} \} + \{ R_{p+1}^{(i)} \} \quad (\text{II-73})$$

Dans la méthode de résolution de Newton-Raphson avec pilotage en charge imposée le paramètre de charge est constant sur l'incrément

$$\lambda = \text{constante} \quad , \quad \Delta \lambda = 0 \quad (\text{II-74})$$

Donc le système de résolution se réduit à :

$$\left[K_{p+1}^{T(i)} \right] \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} = \{ R_{p+1}^{(i)} \} \quad (\text{II-75})$$

Finalement à l'itération (i) la solution s'exprime :

$$\{ q_{p+1}^{(i)} \} = \{ q_{p+1}^{(i-1)} \} + \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} \quad (\text{II-76})$$

$$I_{p+1} = \bar{I}$$

L'équation (II-76) constitue une première solution approchée. Si cette solution est convergée, nous passons à l'incrément suivant. Dans le cas contraire, le processus est continué sur les itérations suivantes jusqu'à convergence.

II.4-3-3 Technique de pilotage en longueur d'arc imposée de *Crisfield* :

Cette méthode est plus générale par rapport à la méthode de charge imposée. La fonction F est déterminée de manière à lier l'incrément de charge et l'incrément de déplacement par un paramètre incrémental (ΔL : longueur d'arc) **Fig.II-17**.

Ainsi La fonction F est sous la forme suivante :

$$F(\{q\}, I) = (\Delta q) \{ \Delta q \} + \Delta I^2 \left\langle \Delta p_{ext} \right\rangle \{ \Delta p_{ext} \} - \overline{\Delta L^2} = 0 \quad (\text{II-77})$$

Avec

$\overline{\Delta L}$: Longueur d'arc imposée

ΔI : Paramètre incrémental de charge

$\{ \Delta q \}$: Déplacement incrémental

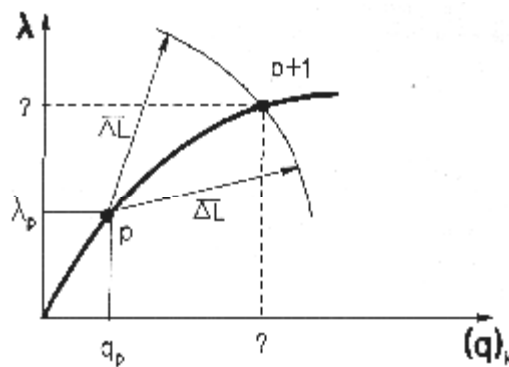


Fig.II-17 pilotage en longueur d'arc imposée de Crisfield (b=1)

L'équation (II-77) est utilisée par Crisfield d'une façon simple telle que:

$$F(\{q\}, I) = \langle \Delta q \rangle \{ \Delta q \} - \overline{\Delta L}^2 = 0 \tag{II-78}$$

Donc la longueur d'arc $\overline{\Delta L}$ est égale à la norme euclidienne de l'accroissement du vecteur déplacement $\{q\}$ [51] [52] **Fig. II-18, Fig. II-19**. Ainsi on peut écrire la fonction F de manière générale sous la forme:

$$F(\{q\}, I) = \langle \Delta q \rangle \{ \Delta q \} + b \Delta I^2 \langle \Delta p_{ext} \rangle \{ \Delta p_{ext} \} - \overline{\Delta L}^2 = 0 \tag{II-79}$$

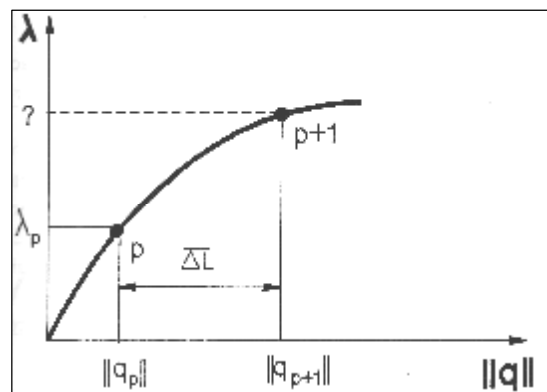


Fig.II-18 pilotage en longueur d'arc imposée modifiée de Crisfield (b=0)

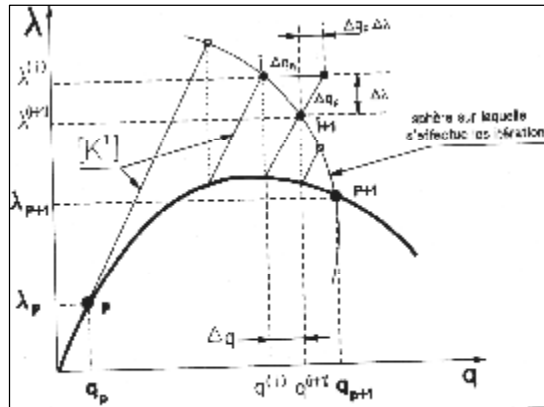


Fig.II-19 Chemin suivi par les itérations en longueur d'arc imposée modifiée de Crisfield

Cette technique permet de suivre toute la courbe charge déplacement en détectant tout les points limites. Comme il est très difficile d'imposer une valeur de longueur d'arc pour un type de structure. Une solution adoptée consiste à démarrer le processus de résolution non linéaire pour le premier incrément, en charge imposée. La norme du vecteur déplacement résultat est prise comme valeur pour la longueur d'arc à l'incrément suivant. L'incrément de la longueur d'arc est faite automatiquement, en ajustant à chaque incrément la valeur de cette longueur d'arc.

Soit:

I_{max} : nombre maximum d'itération possible par incrément

I_d : nombre moyen d'itération.

$\overline{\Delta L_p}$: Longueur d'arc à l'incrément (p)

- ▼ Si à la I_{max} convergence n'est pas atteinte, on reprend le calcul avec $(\overline{\Delta L_p})_a$ ajustée telle que:

$$(\overline{\Delta L_p})_a = 0.5\overline{\Delta L_p} \tag{II-80}$$

- ▼ Il est possible de calculer la longueur d'arc à l'incrément (p+ 1), en choisissant un nombre moyenne possible d'itération I_d pour chaque incrément [41] [37], en se basant sur le nombre d'itération I_p nécessaire à la convergence à l'incrément (p) telle que:

$$\overline{\Delta L_{p+1}} = \overline{\Delta L_p} \sqrt{\frac{I_d}{I_p}} \tag{II-81}$$

II.4-3-3-1 Algorithme de résolution de Newton-Raphson avec pilotage en Longueur d'arc imposée de Crisfield :

Soit la solution convergée à l'incrément (p):

$$\{q_p\}, I_p \quad (\text{II-82})$$

A l'incrément ($p+1$), on impose une longueur d'arc M tel que:

$$F(\{q_{p+1}\}, I_{p+1}) = \langle \Delta q \rangle \{\Delta q\} - \overline{\Delta L^2}_{p+1} = 0 \quad (\text{II-83})$$

$$\overline{\Delta L}_{p+1} = \|\Delta q\|$$

Ø à l'itération $i=1$

Ø on calcule la matrice de rigidité tangente :

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \quad (\text{II-84})$$

puis on fait la résolution du système :

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \{ \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \}_R + \Delta I_{p+1}^{(i)} \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} \} = \{ \{ R_{p+1}^{(i)} \} + \Delta I_{p+1}^{(i)} \{ P_{EXT} \} \} \quad (\text{II-85})$$

Pour $i=1$ on

$$\{ R_{p+1}^{(i)} \} = \{0\} \quad \text{et} \quad \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \}_p = \{0\} \quad (\text{II-86})$$

Donc la résolution de l'équation (II-82) se réduit à

$$[K_{p+1}^{T(1)}] \{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \}_F = \{ P_{ext} \}$$

Pour $i=1$ l'incrément de déplacement est le suivant:

$$\{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \} = \Delta I_{p+1}^{(1)} \cdot \{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \}_F \quad (\text{II-87})$$

de (II-83) on peut évaluer $\Delta I_{p+1}^{(1)}$

$$\Delta I_{p+1}^{(1)} = \pm \frac{\overline{\Delta I}_{p+1}}{\| \Delta q_{p+1}^{(1)} \|_F} \quad (\text{II-88})$$

Le choix de la bonne valeur de $\Delta I_{p+1}^{(1)}$ est déterminé de manière à avoir un angle positif entre le vecteur déplacement incrémental à l'itération (i-1) et le vecteur déplacement incrémental à l'itération courante(i).

Dans le cas où $i=1$, le déplacement incrémental à l'itération (i-1) est pris en considérant les déplacements à l'incrément (p-1) et (p) et est calculé tel que:

$$\{q_p - q_{p-1}\} \quad (\text{II-89})$$

à l'itération $i=1$ déplacement incrémental est:

$$\Delta I_{p+1}^{(1)}, \{\Delta q_{p+1}^{(1)}\} \quad (\text{II-90})$$

La bonne valeur de $\Delta I_{p+1}^{(1)}$ est choisie telle que:

$$(q_p - q_{p-1}) (\Delta I_{p+1}^{(1)} \cdot \{\Delta q_{p+1}^{(1)}\}_F) = 0 \quad (\text{II-91})$$

puis on obtient la solution à l'itération $i=1$

$$\begin{cases} \{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_p\} + \Delta I_{p+1}^{(1)} \cdot \{\Delta q_{p+1}^{(1)}\}_F \\ I_{p+1}^{(i)} = I_p + \Delta I_{p+1}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{II-92})$$

✓ à l'itération ≥ 2

✓ on recalcule la matrice de rigidité tangente :

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \quad (\text{II-93})$$

✓ calcul des forces internes:

$$\{Q_{p+1}^{(i)}(q_{p+1}^{(i-1)})\} \quad (\text{II-94})$$

on calcul le résidu:

$$\{R_{p+1}^{(i)}\} = I_{p+1}^{(i)} \cdot \{P_{ext}\} - \{Q_{p+1}^{(i)}\} \quad (\text{II-95})$$

✓ on fait la résolution du système d'équation suivant:

$$\begin{cases} [K_{p+1}^{T(i)}] \cdot \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_R = \{R_{p+1}^{(i)}\} \\ [K_{p+1}^{T(i)}] \cdot \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_F = \{P_{ext}\} \end{cases} \quad (\text{II-96})$$

✓ Finalement à l'itération (i) la solution s'exprime :

$$\{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_{p+1}^{(i-1)}\} + \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} \quad (\text{II-97})$$

▼ La longueur d'arc est sous la forme suivante :

$$\overline{AL}_{p+1}^{(1)} = \langle q_{p+1}^{(i)} - q_p \rangle \cdot \{q_{p+1}^{(i)} - q_p\} \quad (\text{II-98})$$

En prenant les équations (II-96), (II-97), et (II-98) on aura une équation de second degré en $\Delta I_{p+1}^{(i)}$ telle que :

$$A(\Delta I_{p+1}^{(i)})^2 + B\Delta I_{p+1}^{(i)} + C = 0 \quad (\text{II-99})$$

Avec :

$$\begin{cases} A = \langle \Delta q_{p+1}^{(i)} \rangle_F \cdot \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_F \\ B = 2 \cdot \langle \Delta q_{p+1}^{(i)} \rangle_F \cdot \{\{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_R + \{q_{p+1}^{(i)} - q_p\}\} \\ C = \langle D \rangle \cdot \{D\} - \overline{AL}^2 \\ \{D\} = \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} + \{q_{p+1}^{(i)} - q_p\} \end{cases} \quad (\text{II-100})$$

La résolution de l'équation (II-99) donne deux racines qui doivent être réelles. Dans le cas contraires on reprend le calcul en réduisant la longueur d'arc en utilisant l'équation (II-100).

Le choix de $\Delta I_{p+1}^{(1)}$ est fait de la même façon qu'au début de l'incrément:

$$\langle q_{p+1}^{(i-1)} - q_p \rangle \{q_{p+1}^{(i)} - q_p\} > 0 \quad (\text{II-101})$$

Avec

$$\{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_{p+1}^{(i-1)}\} + (\{q_{p+1}^{(i)}\}_R + \Delta I_{p+1}^{(i)} \{q_{p+1}^{(i)}\}_F) > 0 \quad (\text{II-102})$$

Finalement à l'itération (i) la solution s'exprime :

$$\begin{cases} \{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_{p+1}^{(i-1)}\} + (\{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_R + \Delta I_{p+1}^{(i)} \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_F) \\ I_{p+1}^{(i)} = I_{p+1}^{(i-1)} + \Delta I_{p+1}^{(i)} \end{cases} \quad (\text{II-103})$$

L'équation (II-103) constitue une première solution. Si cette solution est convergée, nous passons à l'incrément suivant en imposant une autre valeur de la longueur d'arc, soit en utilisant le processus automatique défini par l'équation (II-81). Dans le cas contraire, le processus est continué sur les itérations suivantes jusqu'à convergence.

II.4-3-4 Critères de convergences et tests d'arrêts :

Une solution est dite convergée si elle satisfait un critère de convergence choisi. On a deux types de critère le premier est relatif au résidu et le deuxième relatif à la variation du déplacement

Critère relatif au résidu :

$$C_R = \frac{\|R_p^1\|}{\|R_p^{(i)}\|}$$

Où :

$\|R_p^1\|$: Incrément de charge considéré comme premier résidu (résidu à l'itération $i=1$)

$\|R_p^{(i)}\|$: Résidu à l'itération (i)

Critère relatif à la variation de déplacement :

$$C_d = \frac{\|\Delta q_p^{(i)}\|}{\|q_p^{(i)} - q_{p-1}\|}$$

Où :

$\{q_p^{(i)}, q_{p-1}\}$ Représente le déplacement incrémental cumulé à l'itération (i) sur l'incrément

(P) et $\{q_p^{(i)}\}$ le déplacement incrémental à l'itération (i)

Pour dire que la solution converge à l'itération (i) il faut que les critères C_R ou C_d vérifient les tests d'arrêts suivants :

$$\begin{cases} C_R \leq e_R \\ C_d \leq e_d \end{cases}$$

C_R et C_d sont pris généralement égaux à 10^{-3}

II.5 Analyse Numérique par la méthode des éléments finis :

II.5-1 Introduction :

Ce chapitre est essentiellement consacré à l'explication de l'algorithme de la modélisation ainsi qu'aux paramètres utilisés.

II.5-2 Définition des paramètres géométriques :

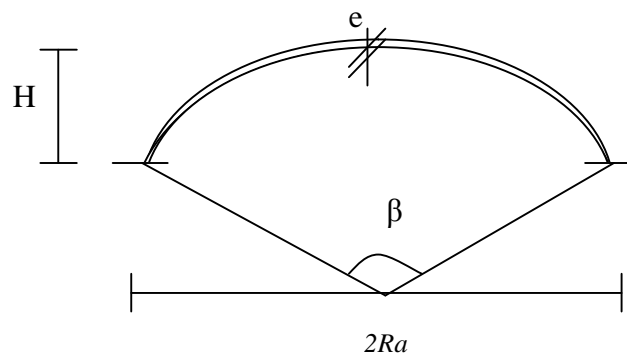


Fig. II-20 Schéma d'une vue en coupe de la voute étudiée avec les paramètres géométriques

Comme il est montré sur la figure **Fig. II-20**, la structure est définie par 4 paramètres :

Ra : le rayon d'arc

H : hauteur de la clé de la voute

B : angle d'inscription de l'arc

e : est l'épaisseur de la voute

II.5-3 Caractéristiques du matériau :

La structure utilisée est en acier et le tableau **Tab .II-3** résume les caractéristiques que nous avons prises en compte.

	Symbole	Valeur	Unité
Densité		7.85	T/m ³
Module de poisson	ν	0.3	/
Module d'élasticité	E	210 E5	T/m ²
Module de cisaillement	G	810	Kg/m ²
Résistance à la traction	σ_t	2400	Kg/cm ²
Accélération gravifique (p.p.)	g	9.81	m/s ²

Tab .II-3: Tableau des valeurs prises pour les caractéristiques du matériau.

II.5-4 Modélisation de la voute :

II.5-4.1- Introduction :

Nous rentrons finalement dans l'explication de logiciel *Abaqus* « l'algorithme » utilisée principalement dans cette modélisation. Celui-ci est utilisé afin d'étudier le comportement mécanique de la voute avec et sans renfort, lorsqu'elle est soumise à une charge permanente constante uniformément répartie sur toute la surface.

II.5-4.2-Présentation du code de calcul ABAQUS :

ABAQUS est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978. Le code de calcul ABAQUS est un code commercial généraliste. Il se distingue par son grand champ d'action qui varie de la thermomécanique à l'acoustique en passant par la mécanique des fluides.

Deux grands codes:

- **ABAQUS/Standard:** résolution par un algorithme statique implicite.
- **ABAQUS/Explicit:** résolution par un algorithme dynamique explicite.

La version disponible au labo est 6.5, que nous avons utilisés. Elle se compose de 3 modules différents.

II.5-4-2-1 Abaqus CAE :

Ce module permet la définition et la visualisation des différentes simulations. Initialement, les problèmes sont définis par des entités géométriques pour lesquelles seront définies les propriétés physiques, les différentes étapes de calcul : les contacts, les chargements, les conditions initiales et les conditions aux limites. Ensuite intervient la phase de discrétisation où les différentes entités selon leurs définitions respectives seront maillées ou non avec la définition des éléments. Finalement, pour pouvoir réaliser les calculs, la synthèse d'un fichier d'analyse est nécessaire, ce dernier sera alors appelé par l'un des deux modules de calcul (*STANDARD* ou *EXPLICIT*).

II.5- 4-2-2 Abaqus standard :

Ce module représente le code de calcul implicite dédié aux calculs quasi-statiques, linéaires ou non, thermiques, acoustiques, L'algorithme de calcul se base sur des calculs itératifs visant à atteindre l'équilibre global du système à chaque incrément de temps.

II.5-4-2-3 Abacus explicit :

Le module explicite est souvent utilisé pour les calculs dynamiques. Contrairement au code implicite, l'algorithme explicite n'est pas itératif. Cet algorithme se base sur un très grand nombre d'incrémentes très courts définis par la vitesse de propagation d'une onde élastique [55].

II.5-4-3 Présentation des différents types d'éléments ABAQUS :

Comme tout code de calcul, ABAQUS dispose d'une multitude de types d'éléments qui diffèrent par leurs propriétés d'interpolation, de symétrie, et leurs propriétés physiques. Ainsi, le code propose des éléments à 3 dimensions (3D), à 2 dimensions (2D), des éléments linéaires (1D) et les connecteurs (**Fig. II-21**). Le choix entre ces différentes dimensionnalités dépend de la maîtrise du problème à simuler. Ce qui permet de tenir compte des symétries de géométrie, des chargements, des conditions aux limites et des propriétés des matériaux.

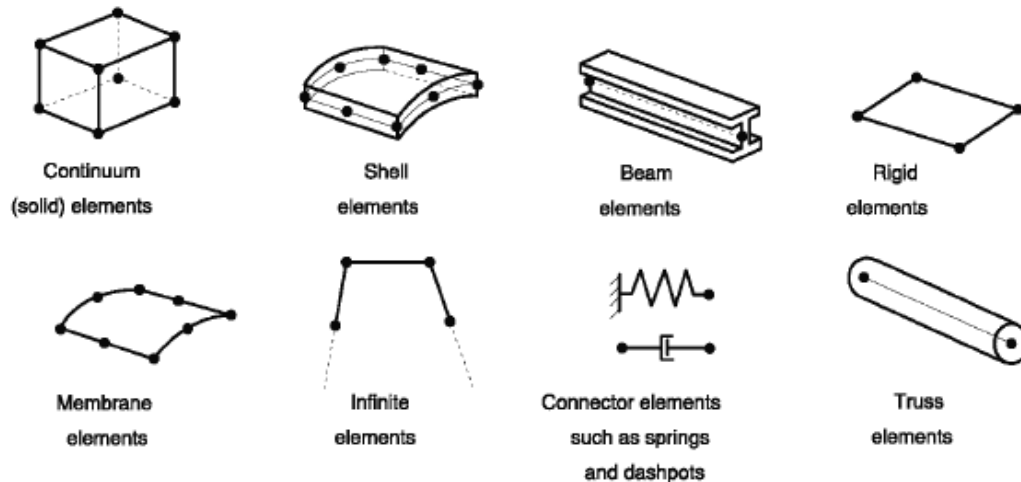


Fig. II-21 : Différents types d'éléments disponibles dans la bibliothèque d'ABAQUS. [55]

Les modèles doivent être prêts à l'emploi:

ABAQUS attend une géométrie discrétisée (nœuds et éléments)

II.5-5 Etapes de création du modèle par la méthode des éléments finis :

II.5-5-1 Initialisations :

Cette étape permet d'entrer toute la structure (la voute) en trois dimensions (3D). Toutes les valeurs géométriques de la voute ainsi les caractéristiques du matériau. Mais aussi les conditions aux limites et le type d'élément.

Avant le maillage, on doit partager la structure en petite surface courbée pour bien placer ou appliquer la charge.

II.5-5-2 Généralités (type de maillage et conditions aux limites):

Deux types de maillage sont envisageables à ce niveau de projet : triangulé et quadrangulaire. Nous avons essayé de faire marcher le quadrangulaire. On introduit ensuite ici les conditions aux limites désirées à savoir un encastrement à la base.

II.5-5-3 Type d'élément :

Quand on travaille en élément finis, il est nécessaire de savoir quel type d'élément a été choisi et défini. Le programme Abacus contient déjà un certain nombre de type d'élément prédéfini.

Ici, l'élément Shell correspond à un élément élastique linéaire pouvant travailler en membrane et en flexion.

II.5-5-4 Définition du maillage en élévation de la structure :

Maintenant que les nœuds ont été générés il faut les lier entre eux pour former les différents éléments du maillage. Une attention toute spéciale doit être portée à la manière dont sont reliés les nœuds.

En effet, le sens avec lequel est effectuée la liaison permet de définir la normale de l'élément, donc le repère local associé à l'élément **Fig. II-22**.

Le maillage de la voûte est constitué d'éléments plaques à 4 nœuds. Chaque plaque est définie par son feuillet moyen. Pour notre voûte nous avons maillé la tôle en 22 éléments de même taille sur sa longueur, et en 32 éléments de même taille sur sa largeur, cette voûte est maillée finement parce qu'elle représente les zones susceptible de développer des déformations significatives, donc notre voûte est discrétisée en 759 nœuds pour 704 éléments

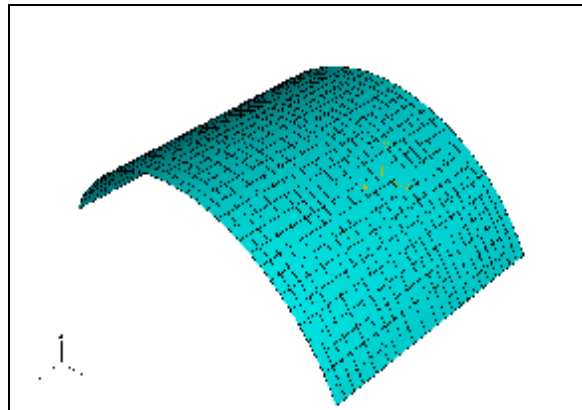


Fig. II-22 : Type de maillage de la voûte

II.5-5-5 Conditions aux limites :

En rapport avec ce qui a été précédemment choisi. On définit ici les conditions aux limites type encasté comme suit :

Tous les déplacements et les rotations sont bloqués. Les conditions aux limites de notre voûte se traduisent par un blocage des déplacements et des rotations de tous les nœuds appartenant aux lignes des extrémités inférieures donc $U_x = U_y = U_z$.

II.5-5-6- Chargement :

Dans cette étude, on a un seul type de chargement.

- **Chargement vertical (Neige)** : il est appliqué sur la structure (toute la surface) uniformément (Gravité) **Fig. II-24**.

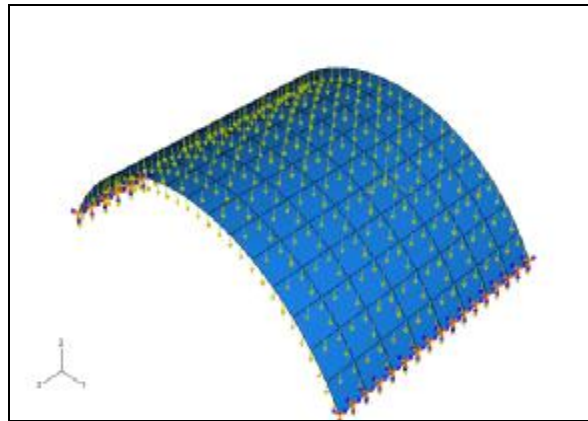


Fig. II-23 Type de chargement (vertical)

II.5-5- 7 Affichage et fin :

- Toutes ces étapes permettent d'afficher directement les valeurs que l'on veut étudier $(s_{\max}, s_1, s_2, u_1, u_2, u_{\max})$ ainsi que l'allure de la déformée.

Cette section permet également de définir la charge permettant la création du critère de rupture.

Cette modélisation se divise en deux types de structure

On a :

- Le prototype : les dimensions réelles.
- Le modèle : échelle réduite.

II.5-6 Résultats de l'analyse statique :

II.5-6 -1 Définition de la voute prototype :

La structure retenue est une voute métallique utilisée comme dépôt ou chambre froide.

▼ Caractéristique de la voute prototype :

Rayon d'arc	Ra	$10.36m$
Épaisseur de la tôle	e	2 mm
Hauteur de la voute	H	$6.09m$
Angle d'inclinaison	β	121.82°

Tab. II-4 : Différents paramètres utilisés pour la voute prototype.

II.5-6 -2 Définition du modèle de base :

Le modèle, dit de base est celui qui à été défini par un choix d'échelle qui doit être la géométrie du modèle identique à la géométrie du prototype. L'échelle adoptée est (1/15).

▼ Caractéristique de la voute modèle :

Rayon d'arc	Ra	$0.69m$
Epaisseur de la tôle	e	$2mm$
Hauteur de la voute	H	$0.406m$
Angle d'inclinaison	B	$121^{\circ}.82$

Tab. II-5 : Différents paramètres utilisés pour la voute modèle.

II.5-6-3 Analyse statique :

L'analyse statique est nécessaire pour dimensionner et comprendre le fonctionnement d'un ouvrage. Pour cela deux voutes ont été testées, simple et renforcée.

*II.5-6-4 Voute sans renfort :**II.5-6-4-1 Calcul linéaire de la voute Modèle :*

La formulation d'un bon élément fini en analyse non linéaire passe par celle en analyse linéaire. C'est pour cette raison qu'on accordera une importance au développement linéaire de l'élément choisi.

A- Etat de déformation de la voute avec analyse linéaire :

L'influence du chargement de la voute a été étudiée numériquement pour un seul cas de chargement (vertical) avec une augmentation de charge allant jusqu'à 2tonnes :

Le chargement de la voute par la charge verticale (neige) provoque un état de déformation remarquable. Ce dernier est plus prononcé avec l'augmentation de la charge qui varie successivement dans un ordre croissant de 0.5, 1,2 t. Les **Fig. II-24(a), (b), (c)** montrent ces observations.

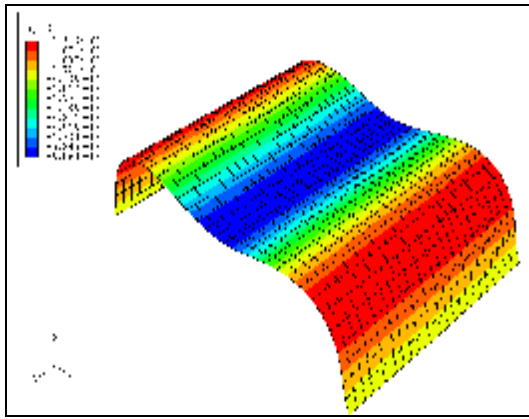


Fig. II-24-a : Déformée de la voûte
sous une charge=0,5t

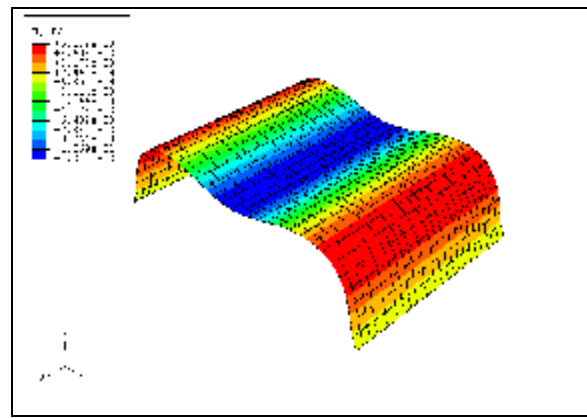


Fig. II-24-b : Déformée de la voûte
sous une charge=1t

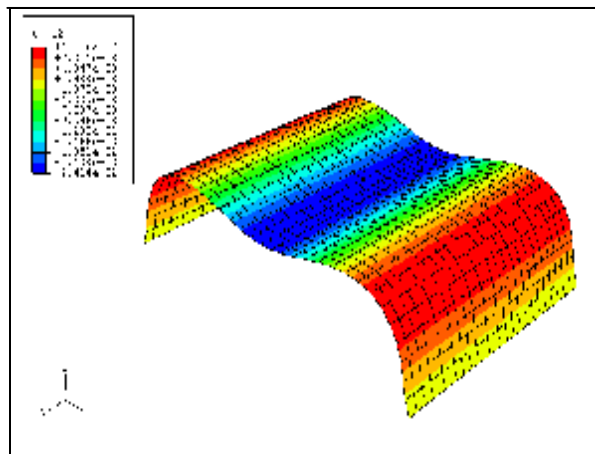


Fig. II-24-c : Déformée de la voûte sous une charge=2t

Les résultats de ce type de chargement sont présentés avec variation de la charge verticale dans la direction 2 sur la Fig. II-25.

Dans le sens (2) la Fig. II-25 montre que la clé de la voûte subit un déplacement plus important que ceux engendrés au niveau des ailes de la voûte. Ces déplacements semblent être plus importants avec l'augmentation de la charge verticale. Le déplacement subi par la clé soumise à une charge 0,5t appliquée à la surface supérieure uniformément répartie est d'une magnitude de -6.059×10^{-3} m, alors qu'au point opposé (les ailes) le déplacement est de petite magnitude mais de signe contraire soit une valeur de $+2.516 \times 10^{-3}$ m. Les figures montrent que ces derniers augmentent avec l'augmentation de la charge verticale uniformément répartie atteignant une valeur de l'ordre de -0.0242 m pour la charge de 2t dans la clé et +0.0106 m dans les ailes .

Tab.II-6 : variation de déplacement de la clé et des ailes de la voûte en fonction de l'augmentation de la charge

Charge (Ton)	Déplacement de la clé(m)	Déplacement des ailes (m)
1	-0.0121194	0.00503195
2	-0.0242387	0.0100639
3	-0.0363581	0.0150959
5	-0.0605968	0.0251598
10	-0.121149	0.0503009

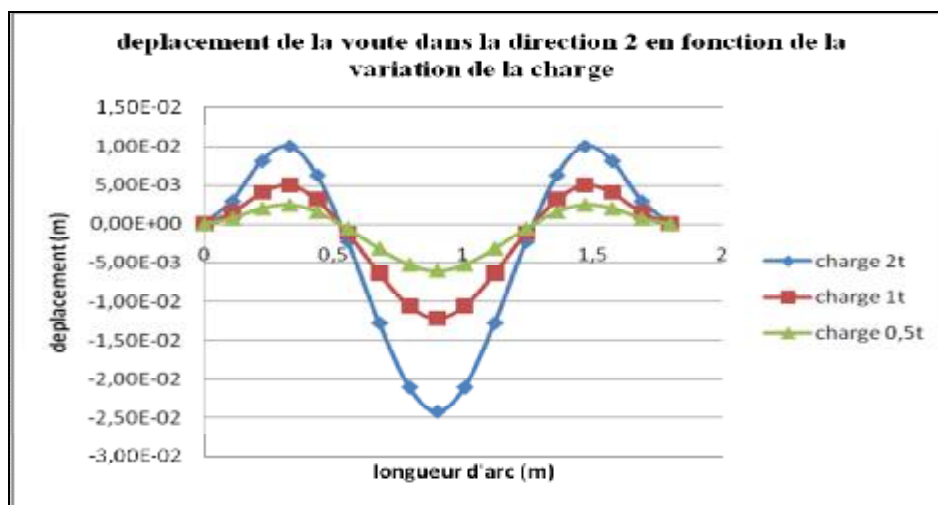


Fig. II-25 : Déplacements de la voûte dans la direction 2 en fonction de la variation de la charge

On remarque d'après la figure et le tableau que les déplacements de la clé et des ailes sont de signe contraire.

B-Etat de contrainte de la voûte en analyse linéaire :

Contrainte horizontale σ_{11} :

La pression horizontale prend l'allure présentée sur la **Fig. II-26a** en fonction de la longueur d'arc

- Ø Dans la clé de la voûte, les valeurs des contraintes de traction sont 3247.04 t/m^2 avec une charge égale 0.5t et elle augmente jusqu'à la valeur de 64916.7 t/m^2 avec une charge de 1t .

- Ø Dans les ailes de la voûte les valeurs des contraintes compression sont -4005.12 t/m^2 avec une charge égale 0.5t et elle augmente jusqu'à la valeur de -80072.7 t/m^2 avec une charge de 1t .
- Ø Dans les appuis de la voûte la valeur de la contrainte traction est maximale ayant pour valeur 6479.63 T/m^2 avec une charge égale 0.5t et elle augmente jusqu'à la valeur de $129545,00 \text{ t/m}^2$ avec une charge de 1t .

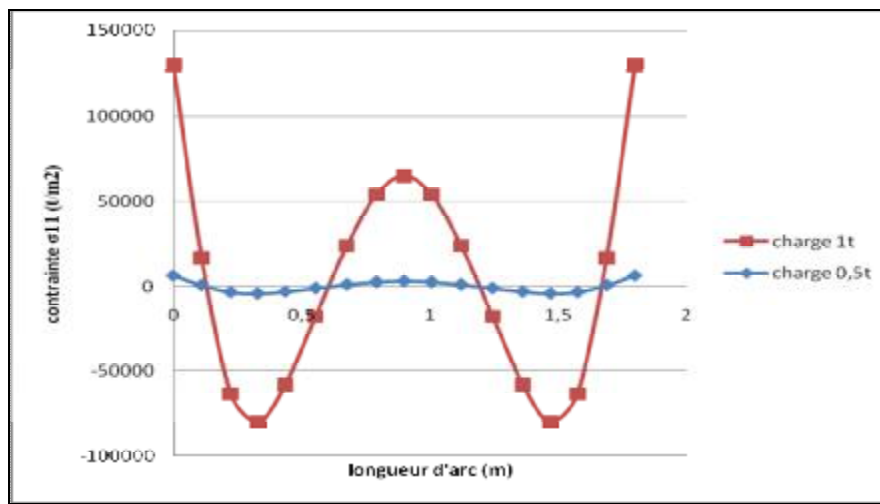


Fig. II-26a Les contraintes horizontales σ_{11} en fonction longueur d'arc

Contrainte verticale σ_{22} :

La pression verticale prend l'allure présentée sur la **Fig. II-26b** en fonction de la longueur d'arc

- Ø Dans la clé de la voûte les valeurs des contraintes traction sont de 1023.23t/m^2 avec une charge égale 0.5t et elle augmente jusqu'à la valeur de 20457 t/m^2 avec une charge de 1t .
- Ø Au niveau des ailes de la voûte, les valeurs des contraintes compression sont de -1163.65 T/m^2 avec une charge égale 0.5t et elle augmente jusqu'à la valeur de -23264.4 t/m^2 avec une charge de 1t .
- Ø Dans les appuis de la voûte les valeurs des contraintes traction sont maximales 1947.4 t/m^2 avec une charge égale 0.5t et elle augmente jusqu'à la valeur de $38933,6 \text{ t/m}^2$ avec une charge de 1t .

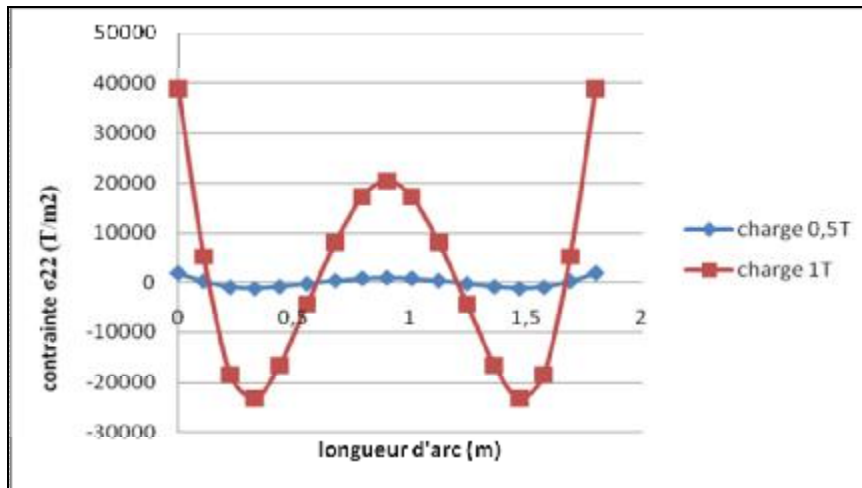


Fig. II-26b les contraintes verticales σ_{22} en fonction longueur d'arc

Conclusion

Le comportement de la voute a été étudié en représentant le déplacement à la clé, et où l'application de charge est uniforme. Dans la direction (2), l'augmentation de la charge a beaucoup d'influence sur le déplacement. D'après le tableau et la figure on distingue qu'en calcul linéaire des coques, lorsque la charge augmente, le déplacement augmente linéairement.

II.5-6-4-2 Calcul non linéaire :

A-Généralités :

De manière générale on a recours à l'analyse non-linéaire des structures quand l'une des deux hypothèses suivantes n'est plus satisfaite:

- Ø Considérer les déplacements petits de manière à confondre l'état initial de la structure avec sa déformée après sollicitation (linéarité géométrique).
- Ø Considérer le comportement du matériau composant la structure comme élastique linéaire (linéarité matérielle).

Ces deux hypothèses sont généralement admises pour le dimensionnement de la plupart des structures courantes. Cependant l'utilisation dans la construction de formes de plus en plus élancées d'une part et la réalisation de structures plus économiques ou "à risque" d'autre part conduit à abandonner les hypothèses trop étroites de l'élasticité linéaire. Il convient également de mieux évaluer les coefficients de sécurité vis-à-vis de la ruine. Il est nécessaire d'introduire des comportements plus proches de la réalité. Ainsi, la prise en compte de ces points conduit

alors à traduire correctement le comportement géométrique ou matériel des structures citées. Si maintenant l'analyse non-linéaire est largement utilisée et pratiquement maîtrisée, il n'en demeure pas moins qu'elle reste toujours d'actualité et fait toujours l'objet de nombreuses recherches. En effet, une analyse non-linéaire générale et efficace est synonyme actuellement d'analyse combinant précision et simplicité d'une part et conduisant d'une autre part à un coût de calcul raisonnable.

B-Types de problème non-linéaire :

Les trois causes essentielles du comportement non-linéaire sont :

- Non linéarité matérielle (rhéologique): les lois de comportement du matériau sont non-linéaires, comme par exemple la plasticité ou le fluage. Nous ne nous étalerons pas d'avantage sur ce sujet car nous considérons dans la suite de ce travail que le comportement des matériaux reste élastique linéaire.
- Non linéarité géométrique (ou cinématique): les déplacements et/ou déformations sont suffisamment importants pour que la configuration initiale ne puisse plus être utilisée valablement pour exprimer l'équilibre et compatibilité par exemple: l'instabilité ne peut être exprimée sans tenir compte de la configuration déformée. Nous nous intéressons donc à cette non linéarité dans ce travail et nous essayons à travers l'innombrable littérature qui a traité ce problème de faire une synthèse des différentes approches utilisées, afin de préciser la position du problème et de situer le but recherché dans le présent travail par rapport aux travaux déjà réalisés.
- Non linéarité des conditions aux limites : les forces appliquées (conditions statiques) et les appuis et liaisons (conditions cinématiques) dépendent des déplacements, force de pressions; contact; frottement; évolution des conditions aux limites (décollement), etc. entrent dans cette catégorie.
- Non linéarités combinées : Il est à noter que les deux non linéarité matérielle et géométrique agissent généralement ensemble. En effet de petites déformations peuvent être accompagnées de petits ou de grands déplacements. Si la disposition dans un code de calcul d'analyses non linéaires combinées est l'idéal recherché, ceci n'est pas cependant chose aisée, car elles sont délicates à mettre en œuvres et difficiles à piloter. Elles engendrent souvent des calculs lourds et coûteux.

La sécurité et l'économie sont actuellement deux facteurs qui militent le plus en faveur du calcul non linéaire des structures. L'emploi simultané de composants structuraux toujours plus élancés et de matériaux toujours plus résistants rendent les constructions, d'autant plus sensibles aux phénomènes d'instabilité. Afin d'avoir une conception réaliste de la sécurité d'un ouvrage, il faut également tenir compte des lois rhéologiques réelles et complètes des matériaux. La plasticité de l'acier est un bel exemple de l'économie que l'on peut réaliser lorsqu'on prend en considération le domaine non linéaire du comportement du matériau.

C-Etat de déformation de la voûte en analyse non linéaire :

Après avoir vu le calcul linéaire de la voûte pour étudier le comportement de celle-ci, on a recours à l'analyse non linéaire pour bien avoir ce comportement en élément coque. Les mêmes étapes, de chargement de la voûte ont été étudiées.

En calcul non linéaire la déformation de la voûte se différencie par rapport au calcul linéaire. On observe ici que le déplacement en analyse non linéaire avec une charge de 0,5T est important atteignant une valeur de $-1,11 \times 10^{-2}$ m (Fig. II-27a) par rapport à une charge en analyse linéaire avec une valeur de $-6,06 \times 10^{-3}$ m (Fig. II-24a). Quand la voûte subit une charge de 1t en non linéaire, cette dernière provoque un cloquage de la voûte c'est-à-dire un grand déplacement avec une valeur $-7,283 \times 10^{-1}$ m (Fig. II-27b) par rapport à l'analyse linéaire. Cette charge provoque un déplacement de $-1,21 \times 10^{-2}$ m (Fig. II-24b).

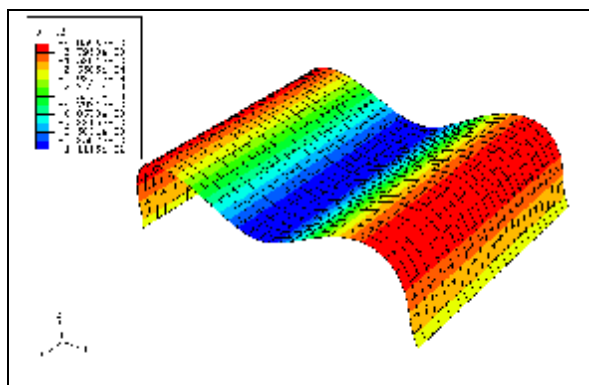


Fig. II-27a : Déformée de la voûte sous une charge=0,5t

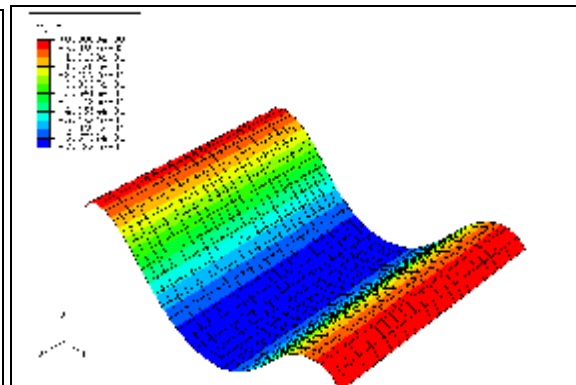


Fig. II-27b : Déformée de la voûte sous une charge=1t

*D-Evolution du déplacement en fonction de la charge :**A la clé de la route :*

Nous analysons le comportement non linéaire de la coque.

Après avoir tracé la courbe de variation de la charge P en fonction du déplacement, il ressort que la courbe (**Fig. II-28**) passé de 3 parties caractéristiques :

- Première partie: Ascendante

Le déplacement augmente linéairement jusqu'à la valeur 0,067 m avec une charge égale à 1,166 t.

- Deuxième partie: Descendante

Dans cette partie le déplacement augmente jusqu'à la valeur de 0,562m par contre la charge diminue jusqu'à la valeur de 0,453t.

- Troisième partie: Ascendante

Le déplacement augmente jusqu'à la valeur de 0,728m est c'est le déplacement maximal que peut prendre la coque avec une charge égale à 1,38t.

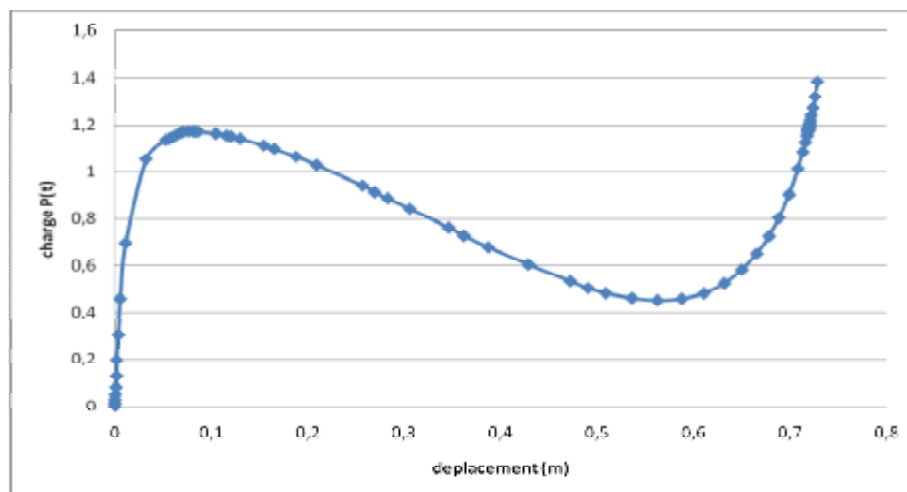


Fig. II-28 : Evolution du déplacement en fonction de la charge au niveau de la clé

D-2. A les ailes de la voute :

La courbe (**Fig. II-29**) charge déplacement passé de 3 parties caractéristiques :

- Première partie:

Le déplacement augmente linéairement jusqu'à la valeur -0,0143 m avec une charge égale 1,166 t.

- Deuxième partie:

Dans cette partie le déplacement augmente jusqu'à la valeur de 0,071m par contre la charge diminue jusqu'à la valeur de 0,453t.

- Troisième partie:

Le déplacement augmente jusqu'à la valeur de 0,206m et c'est le déplacement maximal que peut prendre la coque avec une charge égale 1,38t.

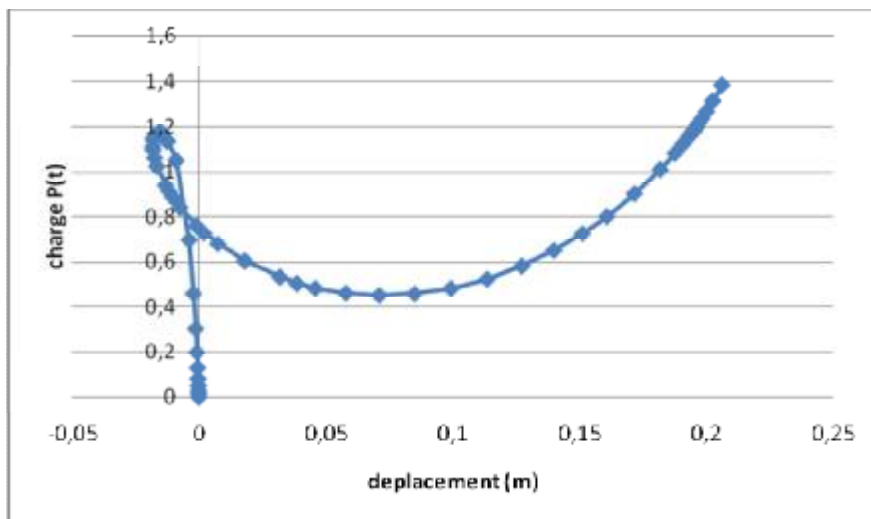


Fig. II-29: Evolution du déplacement en fonction de la charge au niveau des ailes

Conclusion :

Le comportement des voûtes cylindriques formées à partir de tôles d'acier ont un comportement non linéaire (**Fig. II-28 et II-29**).

II.5-6-5 Voute avec renfort :

II.5-6-5-1 Mode d'instabilité élastique :

Le calcul des structures exige que sous toutes les combinaisons d'actions possibles, définies réglementairement, la stabilité statique soit assurée :

- Tant globalement, au niveau de la structure.
- Qu'individuellement au niveau de chaque élément.

Les actions développent diverses sollicitations, qui génèrent des contraintes au sein du matériau et des déformations des éléments. Il s'agit donc, afin de garantir le degré de sécurité souhaité ou souhaitable, de vérifier que les contraintes et les déformations restent en deçà des limites admissibles.

Deux cas de figure se présentent :

- *Le cas des petites déformations* : Tant que l'on reste dans le domaine des petites déformations, on admet que les sollicitations ne varient pas (ou peu) sous l'effet des déformations, ce qui conduit simplement à vérifier que les contraintes restent inférieures à la contrainte de ruine.
- *Le cas des grandes déformations* : Dans ce cas, les déformations modifient considérablement les sollicitations qui les ont initiées et nécessitent des calculs spécifiques.

L'apparition de déformations importantes dans certaines pièces peut survenir :

- Dans le domaine élastique, lorsque la corrélation linéaire efforts/déformations n'est plus vérifiée, les déformations augmentant plus vite que les efforts appliqués.
- Dans le domaine élasto-plastique, lorsqu'il y a écoulement plastique.

Dans ce cas on a recours au renforcement de la voute par des tirants métalliques, cette solution du renforcement est due aux nombreux avantages que peut offrir ce type de renfort. En effet sur le plan mécanique, cette nouvelle structure permet de profiter au mieux de la résistance à la compression et celle de la traction de l'acier. Les tirants auront pour rôle d'augmenter la rigidité de la voute ce qui aura une conséquence sur la diminution des déformations de la structure.

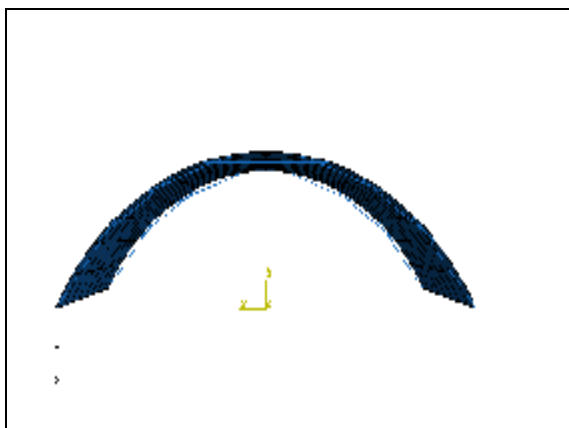


Fig. II-30: Voute renforcée

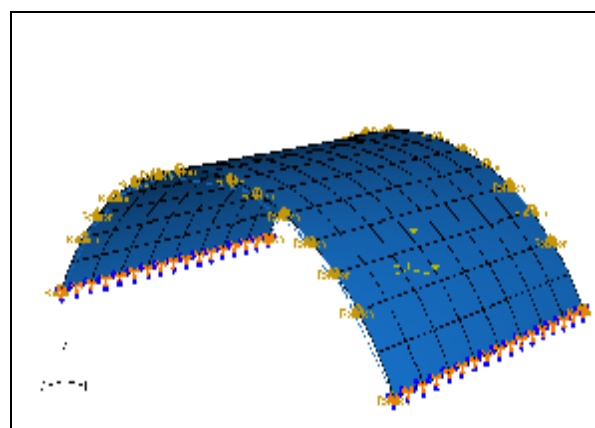


Fig. II-31: Condition inter nodale

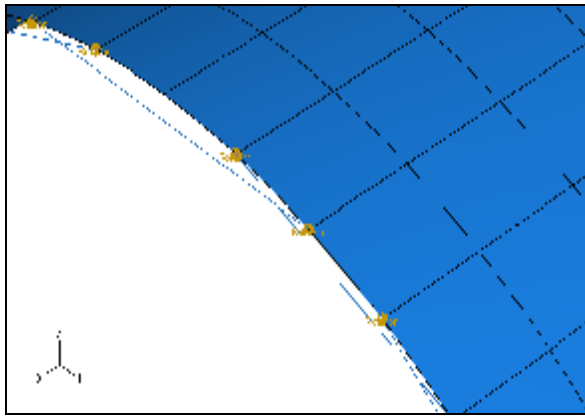


Fig. II-32: Vue sur la connexion

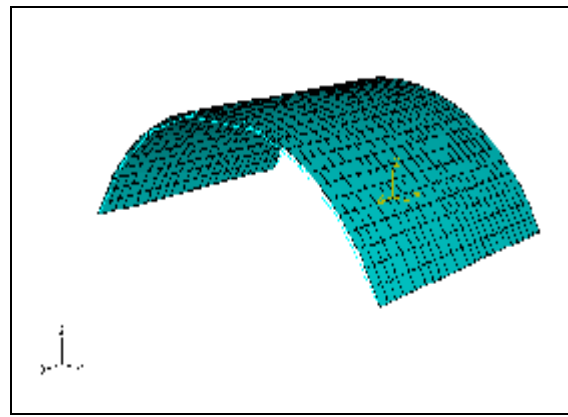


Fig. II-33: Maillage de la voûte renforcée

II.5-6-5-2 Calcul non linéaire de la voûte modèle renforcée :

A-Etat de déformation de la voûte renforcé avec analyse non linéaire :

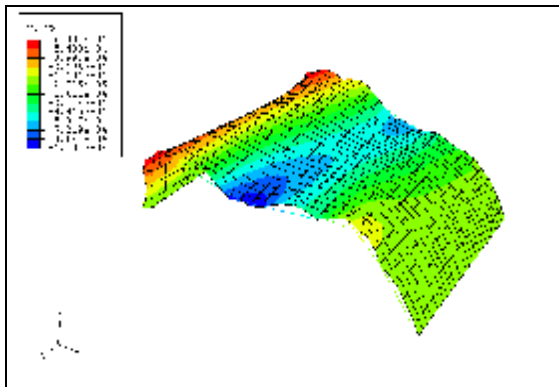


Figure II. 34-a: La déformation de la voûte
avec renfort

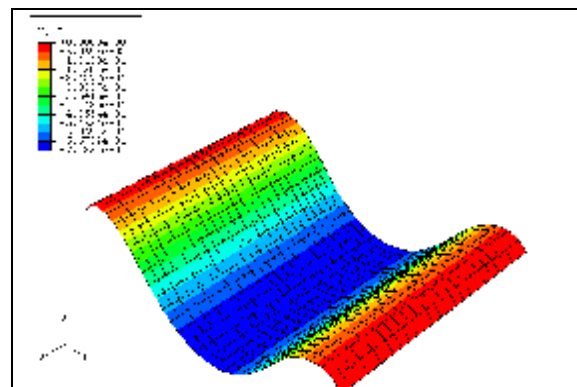


Figure II.34-b : La déformation de la voûte
sans renfort

Après avoir vu le calcul non linéaire de la voûte sans renfort pour étudier le déplacement max de la clé, on a recours à l'analyse non linéaire de la voûte avec renfort. Des même étapes, le chargement de la voûte a été étudié numériquement pour un seul cas aussi de chargement avec une augmentation de charge à savoir : Une charge uniformément répartie jusqu'à 1t.

Dans le cas de la voûte renforcée les déplacements se diffèrent par rapport au calcul non linéaire de la voûte non renforcée. On observe ici que le déplacement en analyse numérique non linéaire avec renfort pour une charge de 0,2t est moins important et atteignant une valeur de $-0,533 \times 10^{-3}$ m (Fig. II-34a ,35) par rapport a une charge en analyse non linéaire sans renfort avec une valeur de $-1,96 \times 10^{-3}$ m (Fig. II-34b, 35), et quand la voûte subit une charge de 0,3t en non linéaire avec renfort ,cette dernière provoque une déformation de la voûte c'est-à-dire un déplacement avec une valeur $-0,868 \times 10^{-3}$ m (Fig. II-34a,35) par rapport a l'analyse

non linéaire sans renfort ,cette charge provoque un déplacement de $- 3,26 \times 10^{-3}$ m (Fig. II-34b,35),représentant une diminution de $2,392 \times 10^{-3}$ m pour une charge de 300kg.

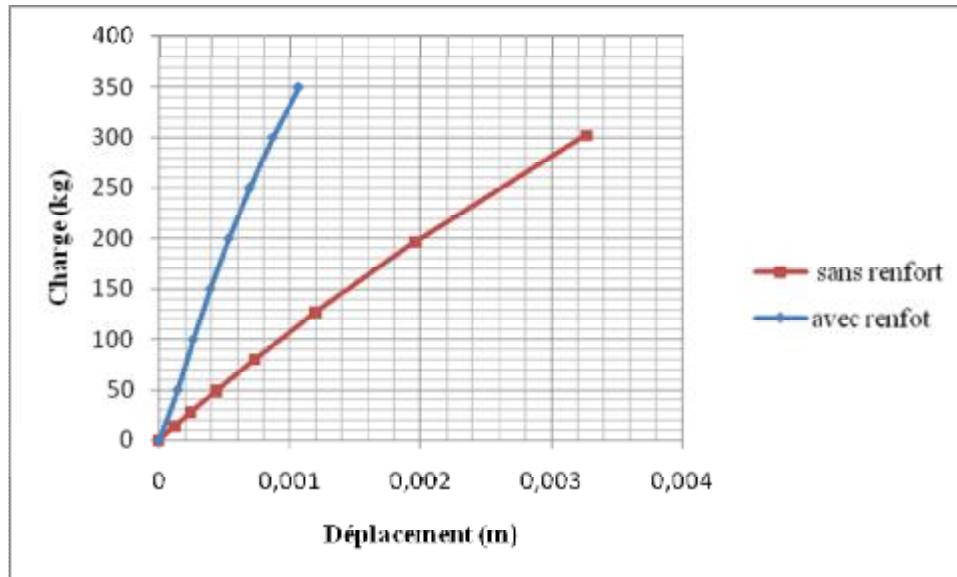


Figure II. 35 : Calcul non linéaire.

Essais sur Modèle Réduit

III.1 Méthodologie expérimentale :

III.1-1 Introduction :

Un des buts principaux de cette étude est de déterminer la charge qui provoque la rupture d'une voute autoportante. On a vu le calcul, qui reste toujours un schéma basé sur des hypothèses, n'en fournit pas tous les moyens. Le rôle et l'importance des moments de flexion et de torsion ne peuvent pas être mis en lumière au moyen des calculs présentés en première partie, puisqu'à priori on en néglige les effets. Le calcul simplifié fait apparaître indépendant de la position des sections droites, alors que certainement il n'en est pas ainsi en réalité. Pour donner une réponse à toutes ces questions et pour déterminer en même temps l'exactitude de la méthode de calcul employée il est nécessaire de procéder à des essais sur modèle.

A cet effet on a construit un modèle de la voute autoportante longue que l'on a soumis à des essais systématiques. Ces essais, leurs interprétations et leurs résultats seront décrits dans les parties suivantes. Ils ont tous été exécutés dans le laboratoire de Génie Civil de l'université d'Annaba, sous la direction du Docteur *Y.Hadidane*.

Le renforcement des voutes métalliques par des tirants en aciers est une pratique qui s'est développée avec l'usage des câbles métalliques. Pour l'étude de réhabilitation des voutes, le LGCA a élaboré un modèle physique à l'échelle 1/15 d'une voute de 20.72 m d'ouverture. Dans cette étude on fait plusieurs essais de même caractéristique, géométrique et le mode de chargement variant d'un essai à l'autre. Au total 2 essais ont été testés. Après l'exposé de la composition et de la succession des essais, on décrit le processus de conduite des essais et les équipements de mesures. « Extensométrie et photogrammétrie » du modèle.

III.1-2 Objectifs de l'étude :

L'objet de cette étude est de qualifier le comportement au flambage de coques cylindriques métalliques renforcées par plusieurs tirants métalliques. Nous utilisons les deux approches expérimental et numérique. Dans ce chapitre III nous abordons le cas de modèles réduits dans le cas du flambage de coques sous une charge verticale uniforme. Le chapitre II a été consacré à une validation sur modèles numériquement, nous avons ainsi voulu nous affranchir de la délicate question de la représentativité des essais à l'échelle du laboratoire. Nous traitons dans

ce cas des coques minces ($R/t=860$) où R =la portée de la coque, t =épaisseur de la coque ,sous chargement statique traduisant l'action d'un chargement vertical. Les diverses campagnes d'essais ont pour objet d'amener des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Les tirants permettent ils un accroissement de la charge critique ?
- Qu'en est-il de la rigidité de la structure ?
- La liaison tirant métal est elle garantie jusqu'au flambage ?
- Le comportement des coques est il linéaire?

Nous essayons d'apporter des éléments de réponse à ces interrogations en considérant deux structures principales pour cette étude.

III.1-3 Description du modèle :

III.1-3-1 Choix des échelles :

L'étude du comportement sous charges croissantes jusqu'à l'apparition des déformations partiellement irréversibles , puis de désordres importants et enfin de rupture , d'une structure prototype , par l'intermédiaire d'une structure plus petite , appelée modèle , exige les conditions suivantes :

- La géométrie du modèle doit être identique à la géométrie du prototype, à une échelle de réduction prés, égale pour tous les éléments constitutifs du prototype. Cette échelle, est celle de similitude des longueurs et peut s'exprimer sous la forme.

$$\frac{1}{L} = \frac{L_m}{L_p}$$

L'indice « m » étant relatif au modèle, l'indice « p » étant relatif au prototype, L_m est une longueur caractéristique du modèle et L_p la longueur homologue du prototype.

- Afin que la géométrie du modèle reste homothétique à celle prototype, il faut que les déformations relatives en des points homologues du modèle et prototype soient égales.
- Les lois de comportement des matériaux modèle et prototype doivent pouvoir se déduire l'une de l'autre par l'utilisation de coefficients constants permettant l'anamorphose de la courbe (contrainte-déformation) $(s_p - e_p)$ du matériau prototype pour aboutir à la courbe $(s_m - e_m)$ du matériau modèle.

Le respect de cette condition et de la précédente conduit pratiquement à construire le modèle avec le matériau du prototype.

L'égalité des déformations relatives exprimée par la relation suivante :

$$\frac{1}{e} = \frac{e_m}{e_p} = 1$$

Conduira à l'égalité des contraintes, explicitées par la relation de similitude :

$$\frac{1}{S} = \frac{S_m}{S_p} = 1$$

III.1-3-2 Choix du matériau :

L'objet de la recherche est la détermination de $(s - e)_{\max}$, les grandeurs que l'on mesure sont les déplacements pour déduire les déformations mesurées. Il est nécessaire de connaître la valeur du module d'élasticité E .



Fig. III-1 choix du matériau

III.1-3-2 -1 Techniques de caractérisation mécanique :

§ Essais de traction :

Un essai de traction est une expérience physique qui permet de mesurer le degré de résistance à la rupture d'un matériau quelconque. Certains objets fabriqués par l'homme doivent avoir un minimum de solidité pour pouvoir supporter les charges, le poids et bien d'autres efforts. L'essai de traction permet de caractériser les matériaux, indépendamment de la forme de l'objet sollicité. Cet essai ou expérience consiste à placer une petite barre du matériau à étudier entre les mâchoires d'une machine de traction qui tire sur la barre jusqu'à sa rupture. On enregistre l'allongement et la force appliquée, que l'on convertit ensuite en déformation et contrainte.

L'essai de traction donne plusieurs valeurs importantes :

- le module de Young E , ou module d'élasticité longitudinal ;

- la limite élastique R_e ou σ_e , qui sert à caractériser un domaine conventionnel de réversibilité ;
- la limite à la rupture R_m ou σ_m ;
- l'allongement à la rupture A , qui mesure la capacité d'un matériau à s'allonger sous charge avant sa rupture, propriété intéressante dans certaines applications ;
- le coefficient de Poisson, qui chiffre la variation de volume induite par la déformation des matériaux dans le domaine élastique.

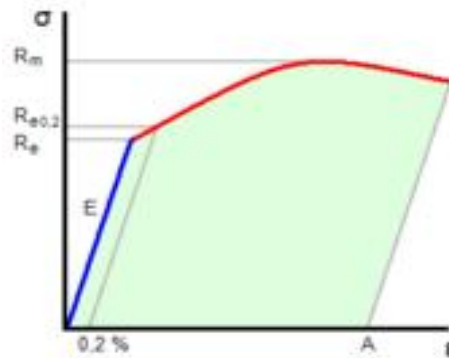


Fig. III-2 Courbe de traction typique d'un matériau ductile

Les essais mécaniques sont des expériences dont le but est de caractériser les lois de comportements des matériaux (mécanique des milieux continus). La loi de comportement établit une relation entre les contraintes (pression=force/surface) et les déformations (allongement unitaire sans dimensions). Il ne faut pas confondre une déformation avec un déplacement ou une dilatation.

Cependant, la déformation d'une pièce dépend de la forme de la pièce et de la manière dont sont exercés les efforts extérieurs sur cette pièce. Il faut donc normaliser les essais. Des normes définissent donc :

- la forme de la pièce dont est fait le matériau ; on parle d'éprouvette normalisée ;
- Comment sont exercés les efforts sur l'éprouvette ; on parle d'essai normalisé.

§ Epreuve :

Les éprouvettes destinées pour l'essai de traction **Fig. III-3** et prélevées de la tôle étudiée, ont été découpées selon le schéma ci-dessous. La longueur de la partie utile est de (25cm). Pour permettre un collage aisé de la jauge de déformation, la largeur de la partie utile a été fixée à 10mm.

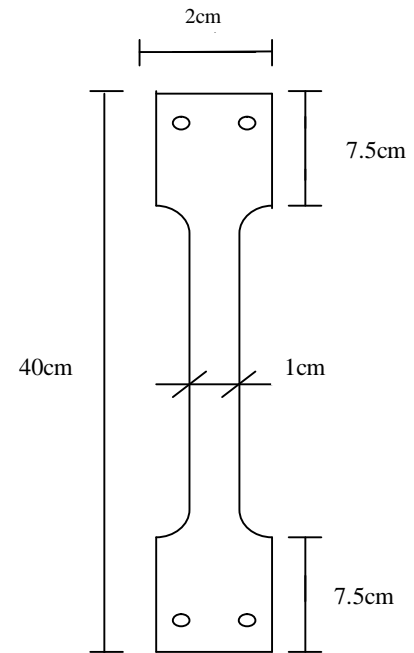


Fig. III- 3 Éprouvette de traction

§ La machine de traction :

La machine de traction spécialement développée pour ce type d'essais a été conçue par *J.C.BOYER* voir **Fig. III-4**. Le Banc d'essai de Traction-Flexion DELTALB EX 150 est l'élément de base d'une série d'expérience en résistances des matériaux permettant l'approche expérimentale complémentaire aux cours et travaux dirigés théoriques.

De conception originale, l'appareil de base est une machine de traction simple et robuste dotée de différents niveaux d'équipements en fonction des phénomènes mécaniques à observer et de la précision de mesure souhaitée. Dans sa configuration standard, le Banc EX 150 permet l'étude de la traction avec des instruments de mesure conventionnels, des comparateurs. On obtient ainsi des valeurs des raideurs d'éprouvette suffisamment précises pour déterminer l'influence de chaque paramètre intervenant dans le comportement des structures en traction, tel est le but principal des expériences illustrant les notions fondamentales des traités de résistance des matériaux de tous niveaux. Pour l'initiation aux mesures de laboratoire, ces comparateurs peuvent être remplacés, soit par des capteurs de déplacement de résolution supérieur, soit par extensomètre.

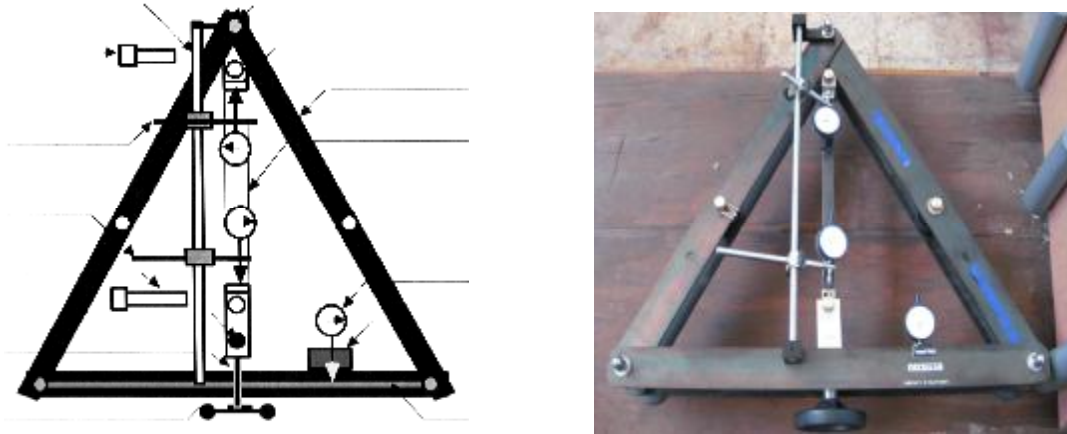


Fig. III-4 Banc d'essai de Traction-Flexion DELTALB EX 150

§ Mesure de déformation :

Les déformations précises obtenues lors des essais de traction ont été mesurées par l'intermédiaire de jauges collées sur la partie utile de l'éprouvette. Nous avons utilisé un montage en quart de pont (pont de Wheatstone qui sert à mesurer la déformation mécanique) avec compensation thermique permettant d'effectuer une mesure de déformation indépendante de la température. Fig. III-5



Fig. III-5 Machine de traction

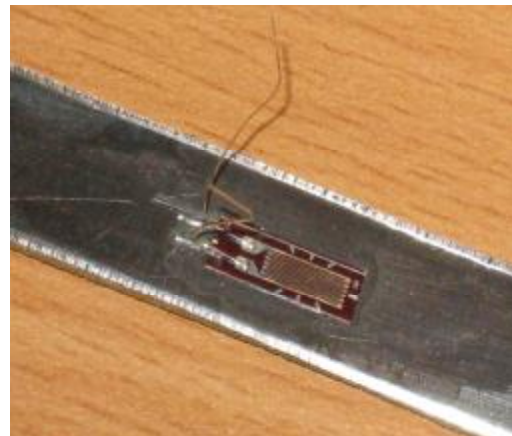


Fig. III-6 jauge de déformation

Le pont est alimenté par une tension stable continue E , la déformation dans ces conditions de montage peut être déduite de la tension d'équilibre ΔU , du facteur de jauge k et gain d'amplification du pont.

$$\xi = 2 \Delta U / kGE$$

La jauge utilisée Fig. III-6 a les caractéristiques suivantes :

$k=2.11 \pm 1\%$: Facteur de jauge

$R=120.0 \pm 0.3$: Résistivité

2 essais de tractions ont été exécutés.

Les résultats d'essai sont résumés dans le graphe **Fig. III-7** et le tableau ci dessous

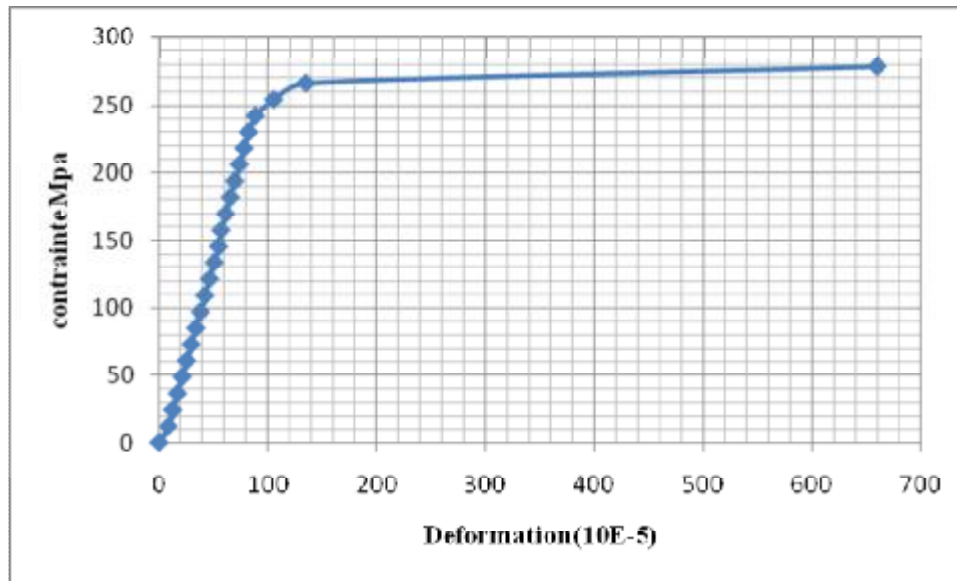


Fig. III-7 Essai de Traction

σ (MPa)	ξ	E (MPa)
230,024	0,0008229	279528,49

III.1-3-3 Dimension du modèle :

Le modèle a les dimensions suivantes :

Longueur =1 m

Rayon d'arc = 0,69 m

Epaisseur =0,002 m=2mm

Hauteur de la clé =0,406 m

Le modèle est l'image à l'échelle 1/15 d'une voute réelle .Par les lois des similitudes,on a transformé tous les résultats du modèle en résultats réels.



Fig. III-9 Géométrie des spécimens

III.1-3-4 Conditions aux limites :

On a choisi un système d'appui à confirmer plus loin ; **Fig. III-10**



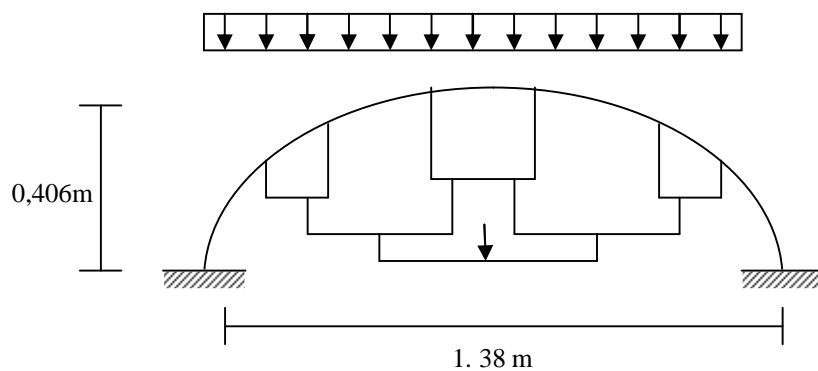
Fig. III-10 Conditions aux limites.

III.1-3-5 Système de chargement :

Il est important que le modèle ait une position parfaitement définie avant l'application de la charge. Pour cela on a appliqué sur tout le modèle une charge uniformément répartie.

Le dispositif de charge est constitué d'un système suspendu à la voute et reparti pour réaliser la surcharge uniformément répartie par unité de surface de la voute. Grâce à un mécanisme spécial qui est constitué d'un système de tiges métalliques suspendues qui assureront une distribution uniforme de la charge concentrée P provoquée par un vérin hydraulique **Fig. III-11(a,b)**

a)

**Fig. III-11a** Système de chargement

b)

**Fig. III-11b** Dispositif de charge

III.1-3-6 Appareil de mesure :

Les déplacements ont été mesurés en plusieurs points de la voûte **Fig. III-12**; pour différents cas de chargement à l'aide d'un appareil numérique « photogrammétrie » fixé dans la position **A** **Fig. III-14**. Des réflecteurs sont positionnés sur la voûte **Fig. III-13** permettent d'avoir les déplacements des différents points selon X et Z. Deux comparateurs supplémentaires **Fig. III-15** permettent de mesurer les flèches à la clé de la voûte.



Fig. III-12 Position des réflecteurs



Fig. III-13 Un réflecteur

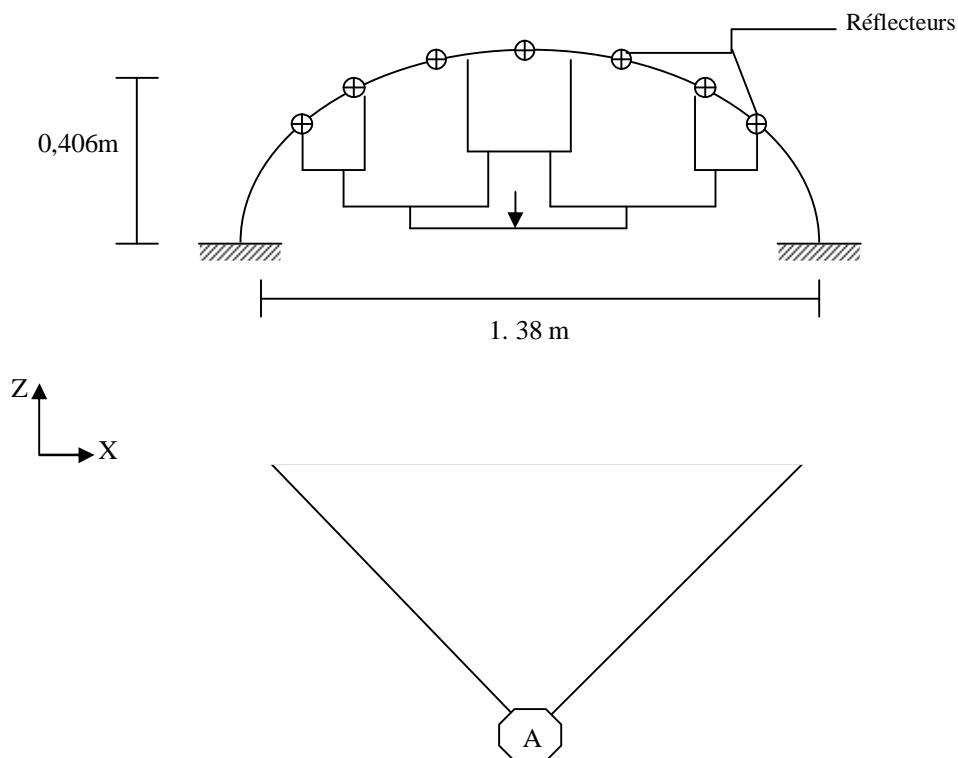


Fig. III-14 Vue en plan du système (position de l'appareil)



Fig. III-15 Position de comparateur

Essai de Traction

III. 3 Techniques de caractérisation mécanique :

III.3-1 Essais de traction :

Un essai de traction est une expérience de physique qui permet de mesurer le degré de résistance à la rupture d'un matériau quelconque. Certains objets fabriqués par l'homme doivent avoir un minimum de solidité pour pouvoir supporter les charges, le poids et bien d'autres efforts. L'essai de traction permet de caractériser les matériaux, indépendamment de la forme de l'objet sollicité. Cet essai ou expérience consiste à placer une petite barre du matériau à étudier entre les mâchoires d'une machine de traction qui tire sur la barre jusqu'à sa rupture. On enregistre l'allongement et la force appliquée, que l'on convertit ensuite en déformation et contrainte.

L'essai de traction donne plusieurs valeurs importantes :

- le module de Young E , ou module d'élasticité longitudinal ;
- la limite élastique R_e ou σ_e , qui sert à caractériser un domaine conventionnel de réversibilité ;
- la limite à la rupture R_m ou σ_m ;
- l'allongement à la rupture A , qui mesure la capacité d'un matériau à s'allonger sous charge avant sa rupture, propriété intéressante dans certaines applications ;
- le coefficient de Poisson, qui chiffre la variation de volume induite par la déformation des matériaux dans le domaine élastique.

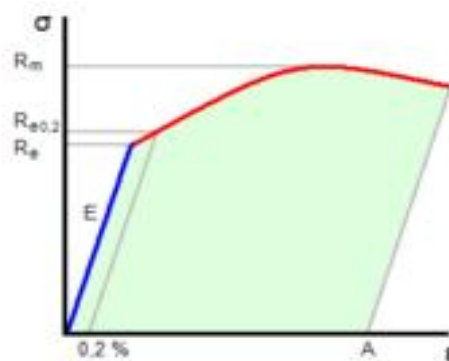


Fig. III-9 Courbe de traction typique d'un matériau ductile

Les essais mécaniques sont des expériences dont le but est de caractériser les lois de comportements des matériaux (mécanique des milieux continus). La loi de comportement

établit une relation entre les contraintes (pression=force/surface) et les déformations (allongement unitaire sans dimensions). Il ne faut pas confondre une déformation avec un déplacement ou une dilatation.

Cependant, la déformation d'une pièce dépend de la forme de la pièce et de la manière dont sont exercés les efforts extérieurs sur cette pièce. Il faut donc normaliser les essais. Des normes définissent donc :

- la forme de la pièce dont est fait le matériau ; on parle d'éprouvette normalisée ;
- Comment sont exercés les efforts sur l'éprouvette ; on parle d'essai normalisé.

III.3-2 Eprouvette de traction :

III.3-2-1 Généralité :

On a effectué les essais sur une section rectangulaire (éprouvette plate). L'éprouvette plate permet de voir ce qui se passe sur une face : apparition de lignes de glissement, forme des cristallites (métallographie), mesure de texture par diffractométrie X, ...

Les extrémités de l'éprouvette sont élargies, avec un congé, afin d'être sûr que la déformation plastique et la rupture auront lieu dans la partie centrale de l'éprouvette. Les dimensions de l'éprouvette sont normalisées, ce qui n'interdit pas d'utiliser d'autres formes d'éprouvette si l'essai n'a pas besoin de répondre aux normes (par exemple dans le cadre de la recherche et du développement). Les éprouvettes plates peuvent être obtenues par sciage d'une tôle puis fraisage .

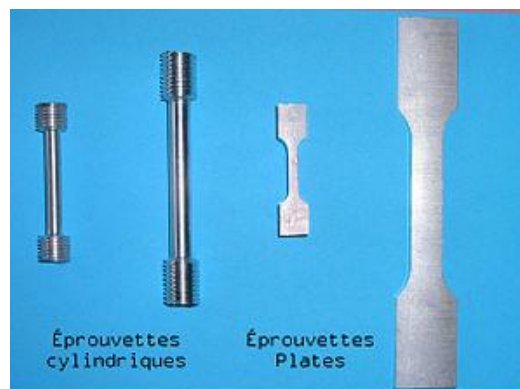
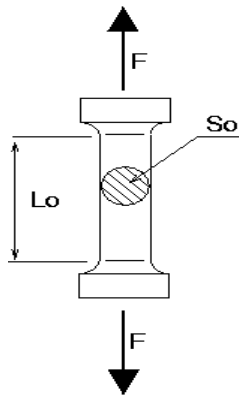


Fig. III-10 : Exemples d'éprouvettes de traction en alliage d'aluminium

Les dimensions minimales de l'éprouvette de traction :



- L_0 longueur initiale
- S_0 section initiale
- D_0 diamètre initial

Eprouvettes conventionnelles:

$$L_0 = 5,65 \times \sqrt{S_0}$$

Selon le matériau, la température et la vitesse de déformation, la courbe peut avoir différentes formes.

Caractéristiques nominale ou apparentes

- Limite d'élasticité :

$$R_e = \frac{F_e}{S_0}$$

- Résistance à la traction :

$$R_m = \frac{F_m}{S_0}$$

- Allongement à la rupture :

$$A\% = 100 \cdot \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

Dans cette expression, L_0 et L_f sont respectivement les longueurs initiales et finales après rupture.

- Striction à la rupture :

$$Z\% = 100 \cdot \frac{S_0 - S_f}{S_0}$$

Dans cette expression, S_0 et S_f sont respectivement les sections initiales et finales après rupture.

- Module de Young : représenté par la pente de la courbe dans sa partie linéaire :

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$$

- Coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{(b_0 - b)/b_0}{(L_0 - L)/L_0}$$

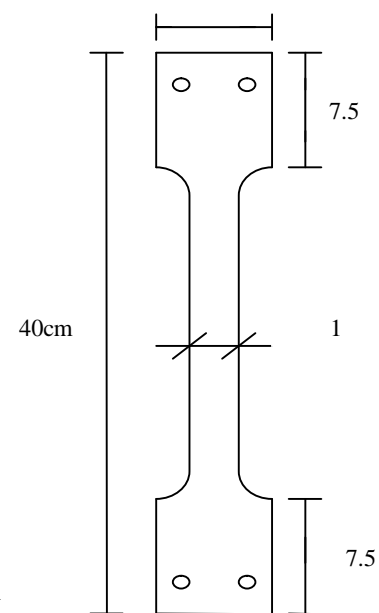
Où b_0 et b sont respectivement la largeur initiale et la largeur sous charge, L_0 et L la longueur initiale et la longueur sous charge. v est défini dans le domaine élastique.

III.3-2-2 Eprouvette :

Le plan des éprouvettes est donné sur la **Fig. III-11**, elles sont plates prés découpées par une machine spéciale () elles sont prélevés de la tôle étudié, la longueur da la partie utile est de (25cm) .Pour permettre un collage aisé de la jauge de deformation,la largeur de la partie utile a été fixé a 10mm, d'une part, pour facilité le collage des jauges, d'autre part, pour que le volume de l'éprouvette sot suffisant qu'elle constitue ainsi un bon échantillon du matériau qu'elle représente .de plus la valeur de cette largeur est suffisamment faible pour que la machine soit capable de casser l'échantillon.



Fig. III- 11 Éprouvette de traction



III.3-3 La machine de traction :

La machine de traction spécialement développée pour ce type d'essais a été conçue par *J.C.BOYER* (Conseiller-Scientifique *DELTALAB*, maitre de conférences, laboratoire de mécanique des solides, INSA Lyon) la figure présente une vue de cette machine.

Le Banc d'essai de Traction-Flexion DELTALB EX 150 est l'élément de base d'une série d'expérience en résistances des matériaux permettant l'approche expérimentale complémentaire aux cours et travaux dirigés théoriques.

De conception originale, l'appareil de base est une machine de traction simple et robuste dotée de différents niveaux d'équipements en fonction des phénomènes mécaniques à observer et de la précision de mesure souhaitée. Dans sa configuration standard, le Banc EX 150 permet l'étude de la traction avec des instruments de mesure conventionnels, des comparateurs. On obtient ainsi des valeurs des raideurs d'éprouvette suffisamment précises pour déterminer l'influence de chaque paramètre intervenant dans le comportement des

structures, en traction. tel est le but principal des expériences illustrant les notions fondamentales des traités de résistance des matériaux de tous niveaux. Pour l'initiation aux mesures de laboratoire, ces comparateurs peuvent être remplacés, soit par des capteurs de déplacement de résolution supérieure, soit par extensomètre. Ce Banc d'essais de traction et de flexion ne nécessite aucune précaution particulière d'installation, il peut être simplement posé sur une table de dimensions suffisantes et horizontalité approximative. Le poids propre du banc lui assure une stabilité suffisante pendant la mise en charge des éprouvettes **Fig. III-12**.

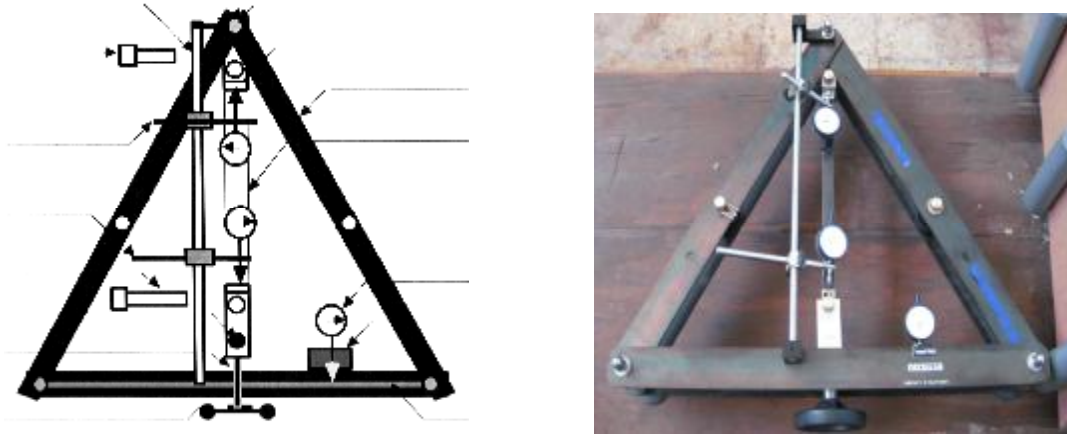


Fig. III-12 Banc d'essai de Traction-Flexion DELTALB EX 150

III.3-4 Mesure de déformation :

Les déformations précises obtenues lors des essais de traction ont été mesurées par l'intermédiaire de jauges collées sur la partie utile de l'éprouvette. Nous avons utilisé un montage en quart de pont (pont de Wheatstone qui sert à mesurer la déformation mécanique) Avec compensation thermique permettant d'effectuer une mesure de déformation indépendante de la température. **Fig. III-13**



Fig. III-13 Machine de traction

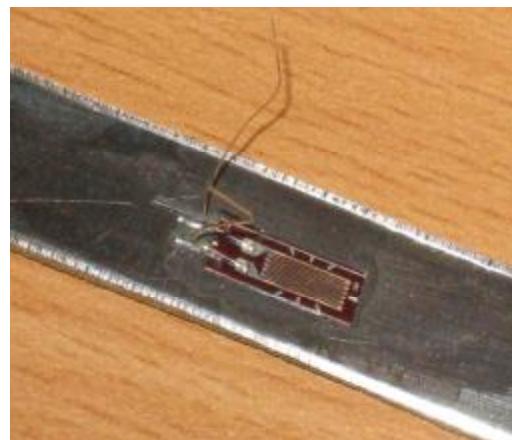


Fig. III-14 jauge de déformation

Le pont est alimenté par une tension stable continue E, la déformation dans ces conditions de montage peut être déduite de la tension d'équilibre ΔU , du facteur de jauge k et gain d'amplification du pont.

$$\xi = 2 \Delta U / kGE$$

Nous avons utilisé des jauges de marque de Vishay, Fig. III-14 de type

$k=2.11 \pm 1\%$

$R=120.0 \pm 0.3$

III.3-5 Objectifs :

Assister à 2 essais de tractions sur le même métal : acier 24.

Récupérer et faire l'analyse des essais avec un tableur (Excel) afin de déterminer les valeurs des principales caractéristiques mécaniques de ce métal.

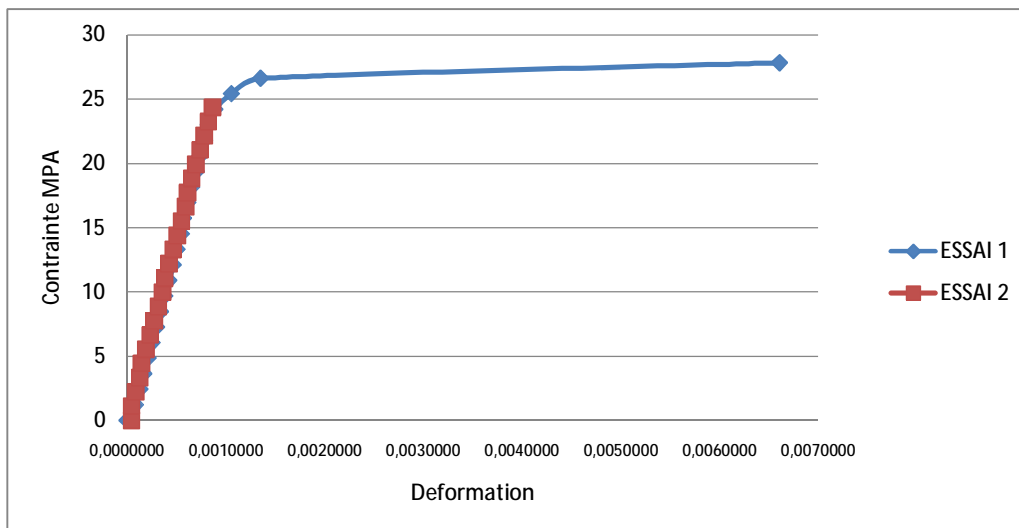


Fig. III-15

σ (MPa)	ξ	E(MPa)
210,7918	0,0007385	285432,36

III.2 Résultats expérimentaux :

III.2-1 Introduction :

Dans ce paragraphe nous nous intéressons en particulier au cas du flambage des coques minces simples et renforcées par les tirants en acier. Nous analysons le comportement au flambage de la coque sans renforcement sous charge verticale ainsi que la mode de flambement avec renforcement. L'effet des tirants est évalué, tant du point de vue de capacité portante, l'effet de la qualité de la liaison tirant /coque est aussi évalué.

Enfin la simulation à l'aide du code ABAQUS de l'ensemble des essais permet de disposer ensuite d'un outil validé qui permettrait le dimensionnement.

III.2-2 Coque témoin :

Sous flambement (charge verticale) d'une coque mince, l'état critique n'est pas caractérisé car la charge est arrêtée à un certain niveau. Nous avons testé un seul type de conditions aux limites « encastré » et dans ce cas, ce type de conditions aux limites nous permet de voir une déformation visuelle considéré axisymétrique mais le chargement étant légèrement dissymétrique causé par les conditions de laboratoire (bifurcation d'équilibre).



Fig.III-16 Etat initial de la voute sans renforcement



Fig.III-17 Etat final de la voûte sans renforcement

Une modélisation de la voûte par les deux types de conditions aux limites « encastré – articulé » en vu de calculer ou déterminer le déplacement d'un ou plusieurs points de la voûte par le calcul non linéaire, les résultats sont présentés sur les courbes :

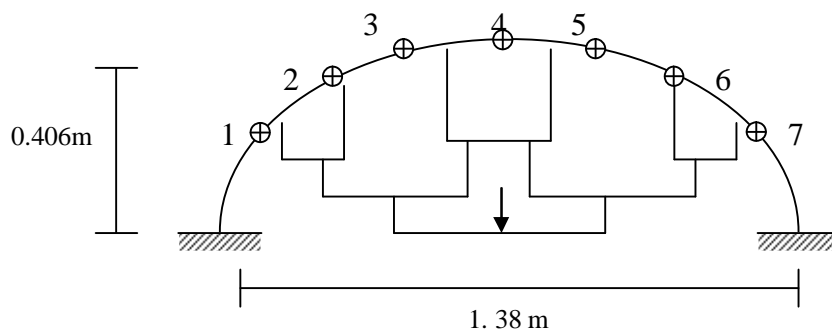
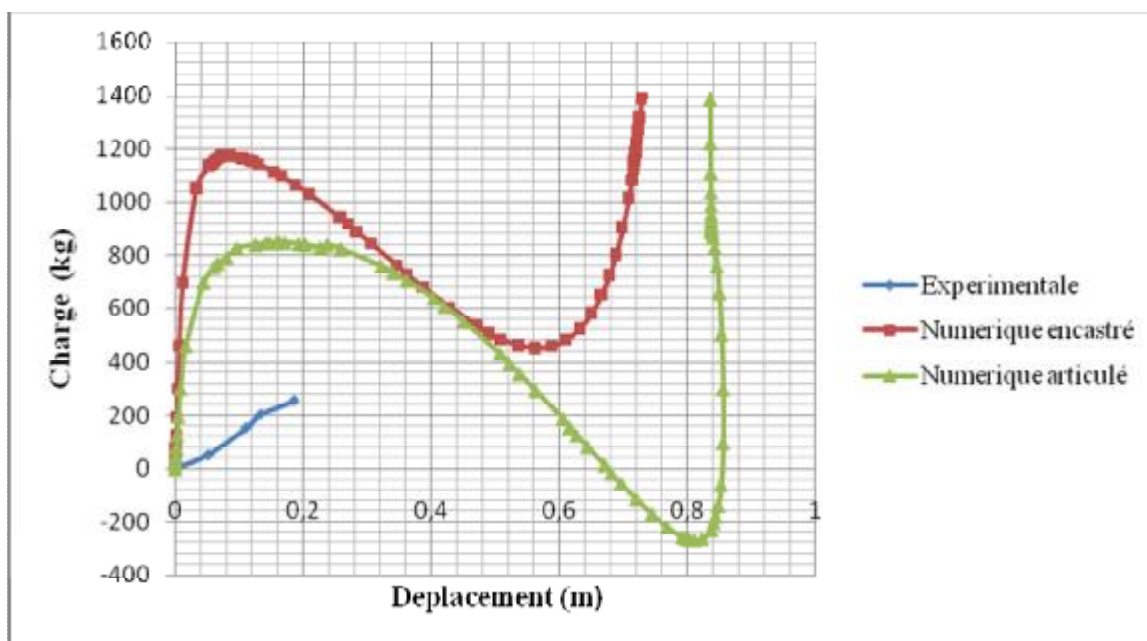
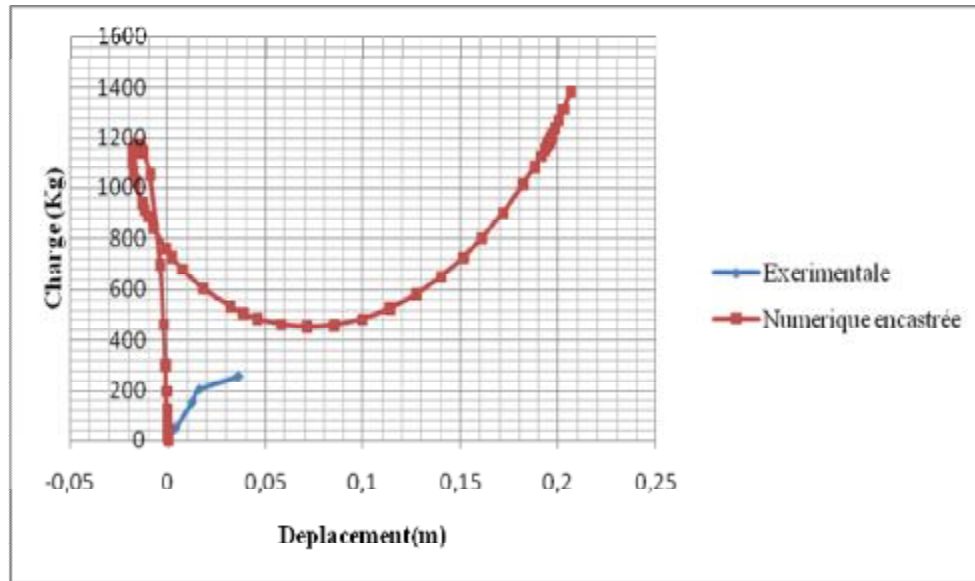


Fig. III-18 Position des réflecteurs

Position 4 : Fig.III-18**Fig.III-19** Corrélation essai /calcul –cas de la coque témoin a la clé

Le comportement mécanique à la clé de la coque non renforcée peut être caractérisé par 3 phases comme montré sur la **Fig. III-19** :

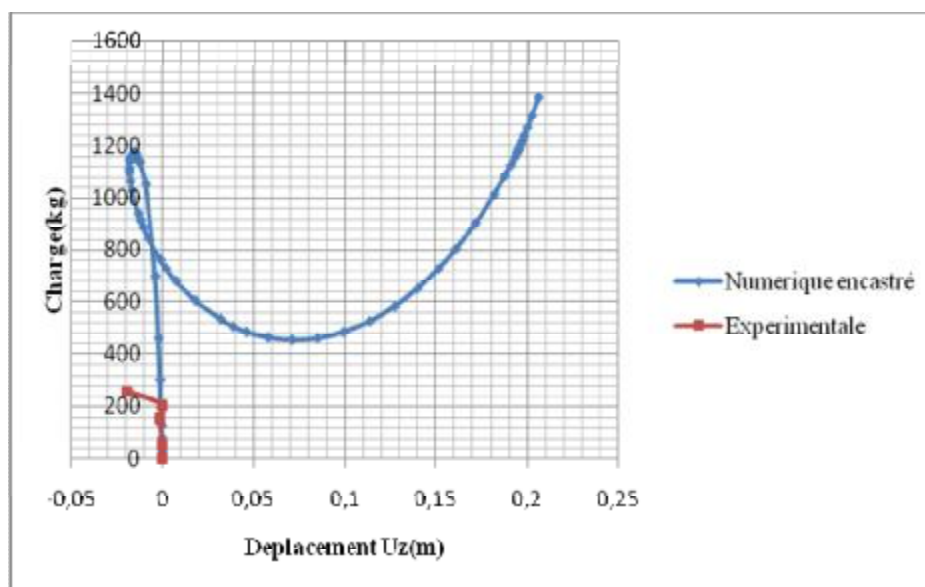
Une 1ère branche élastique qui traduit un comportement linéaire de l'acier avec une charge de 1,052 t et un déplacement de 0,032 m pour l'encastrement et une charge de 0,697 t et un déplacement de 0,043 m pour l'articulation, un comportement non linéaire 2 traduisant l'interaction de la non linéarité géométrique, début de grands déplacements liés au flambage et la non linéarité matérielle ou plastification de l'acier jusqu'à une charge de 0,453 t et un déplacement de 0,562 m pour l'encastrement et une charge de -0,267 t et un déplacement de 0,803 m pour l'articulation, l'augmentation brutale de la charge 3 correspondant au clochage de la voute avec une charge de 1,38 t et un déplacement de 0,728 m pour l'encastrement et une charge de 1,38 t et un déplacement de 0,835 m pour l'articulation. Expérimentalement on observe qu'il a une branche élastique traduisant un comportement linéaire de l'acier avec une charge de 0,2054 t et un déplacement de 0,1339 m, un comportement non linéaire 2 traduisant l'interaction de la non linéarité géométrique, début de grands déplacements avec une charge de 0,256 t et un déplacement de 0,1862 m.

Position 2 : Fig.III-18**Fig.III-20** Corrélation essai /calcul –cas de la coque témoin

Le comportement mécanique au point n°2 de la coque non renforcée peut être caractérisé par 3 phases comme décrit la **Fig.III-20**.

Une 1ère branche élastique qui traduit un comportement linéaire de l'acier avec une charge de 1,166 t et un déplacement de 0,0143 m, un comportement non linéaire 2 traduisant l'interaction de la non linéarité géométrique début de grands déplacements liés au flambage et la non linéarité du matériau ou plastification de l'acier jusqu'à la charge de 0,453 t et un déplacement de 0,071 m pour l'encastrement, le déplacement augmente jusqu'à la valeur de 0,206 m c'est le déplacement max qui peut prendre la coque avec une charge égale à 1,38 t.

Expérimentalement on observe qu'il a une branche élastique traduisant un comportement linéaire de l'acier avec une charge de 0,2054 t et un déplacement de 0,0163 m, un comportement non linéaire 2 traduisant l'interaction de la non linéarité géométrique, début de grands déplacements avec une charge de 0,256 t et un déplacement de 0,036 m.

Position 6 : Fig.III-18**Fig.III-21** Corrélation essai /calcul –cas de la coque témoin

Le comportement mécanique au point n°6 de la coque non renforcée peut être caractérisé par 3 phases comme décrit la **Fig.III-21** :

Une 1ère branche élastique qui traduit un comportement linéaire de l'acier avec une charge de 1,166 t et un déplacement de -0,0143 m, un comportement non linéaire 2 traduisant l'interaction de la non linéarité géométrique début de grands déplacements liés au flambage et la non linéarité du matériau ou plastification de l'acier jusqu'à la charge de 0,453 t et un déplacement de 0,071 m pour l'encastrement, le déplacement augmente jusqu'à la valeur de 0,206 m c'est le déplacement max qui peut prendre la coque avec une charge égale 1,38 t.

Expérimentalement on observe qu'il a une branche élastique traduisant un comportement linéaire de l'acier avec une charge de 0,1544 t et un déplacement de 0,00085 m, un comportement non linéaire 2 traduisant l'interaction de la non linéarité géométrique, début de grands déplacements avec une charge de 0,256 t et un déplacement de 0,0194 m.

III.2-3 Coque renforcée :

Afin de limiter les déformations excessives et d'augmenter la capacité portante de la voute, des renforts **Fig.III-23** ont été conçus placés le long de la courbure. Ces tirants travaillent en traction et sont disposés de façon à respecter la hauteur libre.

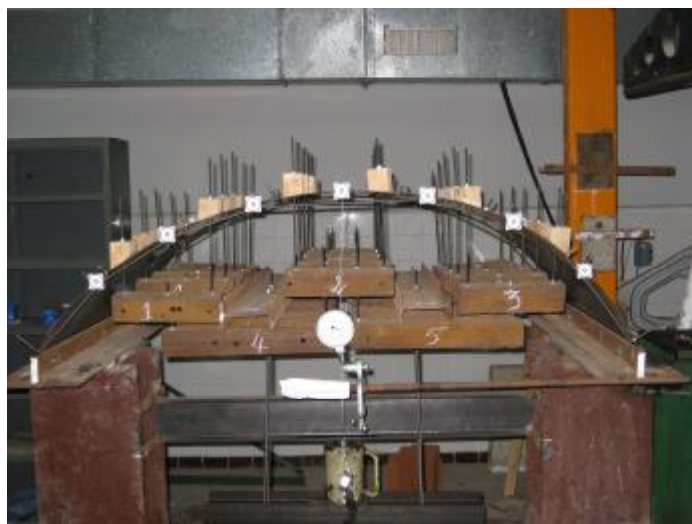


Fig. III-22 Etat initial de la voute avec renforcement



Fig. III-23 Vue sur les tirants de renforcement



Fig.III-24 Etat final de la voûte avec renforcement

Position 4 : Fig.III-18

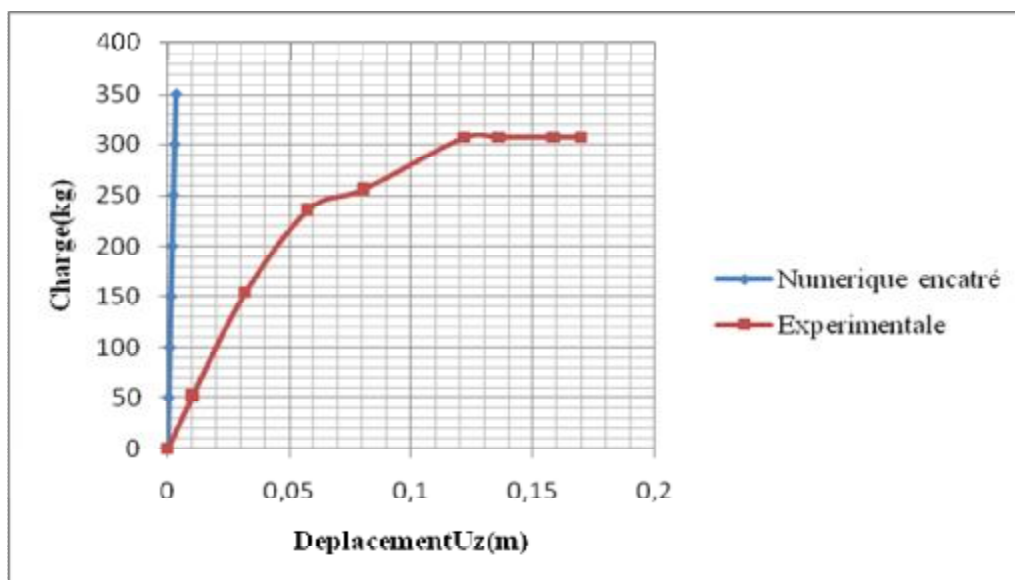


Fig.III-25 Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcée a la clé

Le comportement mécanique a la clé de la coque renforcée par les tirants en acier peut être caractérisé par 3 phases comme décrit sur la Fig.III-25 :

Une 1ère branche élastique insensible au renforcement, nous retrouvons la même rigidité initiale car la liaison induit par le tirant dans la direction non axiale est très faible comparativement à la rigidité de la coque d'acier avec une charge de 0,236 t et un déplacement de 0,0576 m, un comportement non linéaire 2 aussi, début des grands déplacements liés au flambage, et la non linéarité du matériau ou la plastification de l'acier

avec une charge de 0,307t et un déplacement de 0,122m, la stabilité de la charge 3 correspondant aux ruptures de tirants ou endommagement de la liaison du système (voute-tirant) et aux redistributions de contrainte permettant un regain de charge. Numériquement un comportement linéaire élastique.

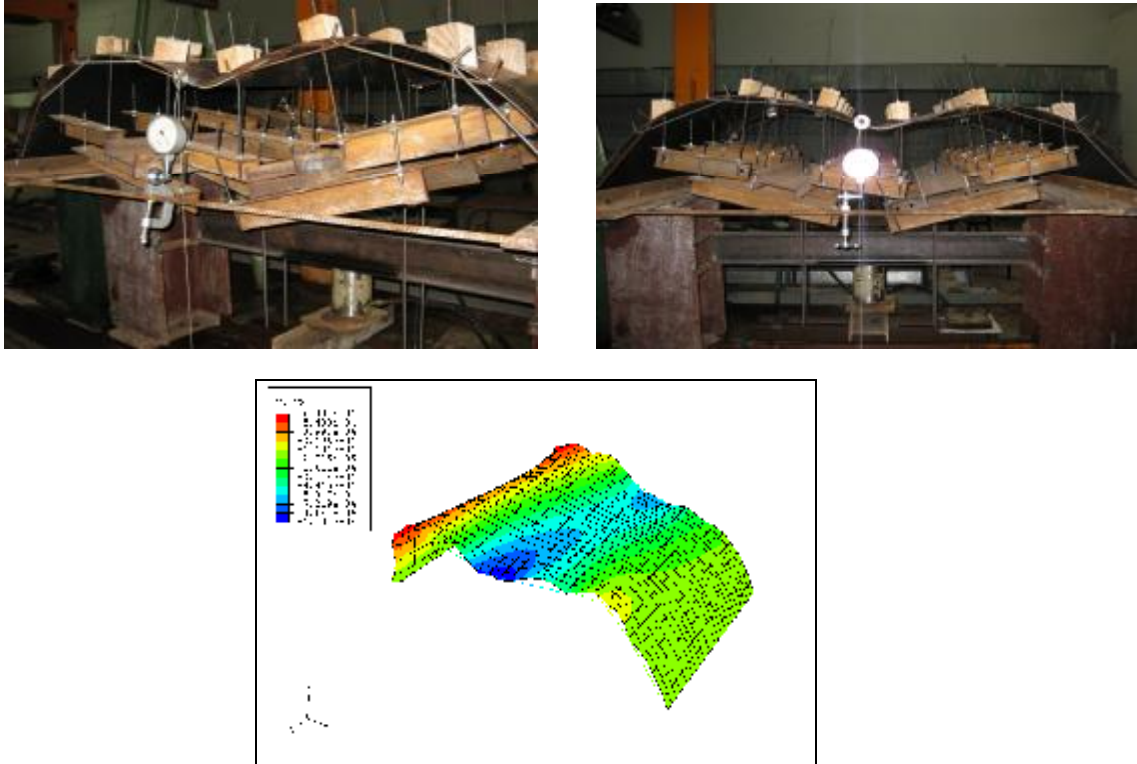


Fig.III-26 Mode flambage : expérimentale et mode critique numérique

Position 2 : Fig.III-18

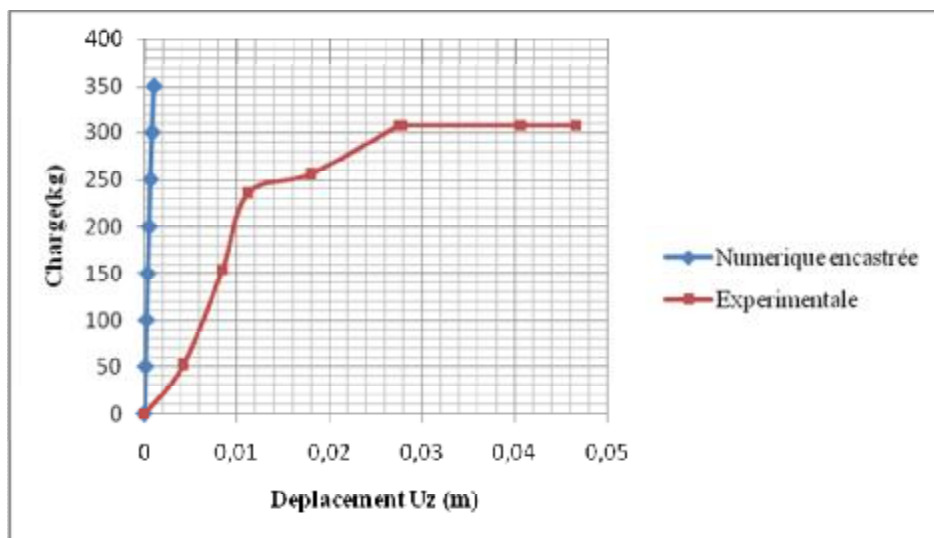


Fig.III-27 Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcé

Le comportement mécanique à la position n° 2 de la coque renforcée par les tirants en acier peut être caractérisé par 3 phases comme décrit la Fig.III-27 :

Une 1ere branche élastique insensible au renforcement, nous retrouvons la même rigidité initiale car la liaison induite par le tirant dans la direction non axiale est très faible comparativement à la rigidité de la coque d'acier avec une charge de 0,256 t et un déplacement de 0,018m, un comportement non linéaire 2 aussi début des grands déplacements liés au flambage, et la non linéarité matériau ou la plastification de l'acier avec une charge de 0,307t et un déplacement de 0,0275m, la stabilité de la charge correspondent aux ruptures de tirants ou endommagement de la liaison du système (voute-tirant) et aux redistribution de contrainte permettant un regain de charge. Numériquement un comportement linéaire élastique.

Position 6 :

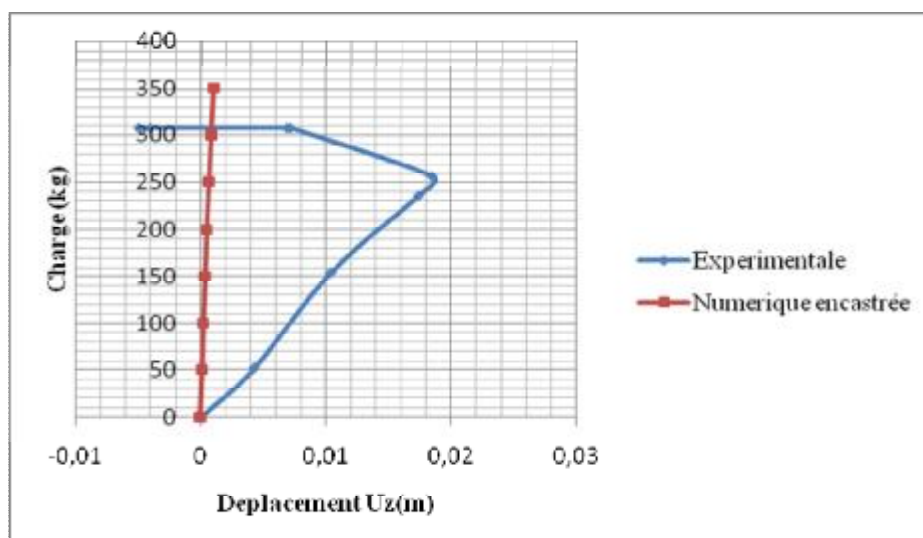


Fig.III-28 Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcée

Le comportement mécanique à la position n°6 de la coque renforcée par les tirants en acier peut être caractérisé par 3 phases comme décrit la Fig.III-28 :

Une 1ere branche élastique insensible au renforcement, nous retrouvons la même rigidité initiale car la liaison induite par le tirant dans la direction non axiale est très faible comparativement à la rigidité de la coque d'acier avec une charge de 0,256 t et un déplacement de 0,018 m, un comportement non linéaire 2 aussi début des grands déplacements liés au flambage, et la non linéarité matériau ou la plastification de l'acier avec

une charge de 0,307t et un déplacement de 0,007m, la stabilité de la charge correspondant cloquage de la voute. Numériquement un comportement linéaire élastique.

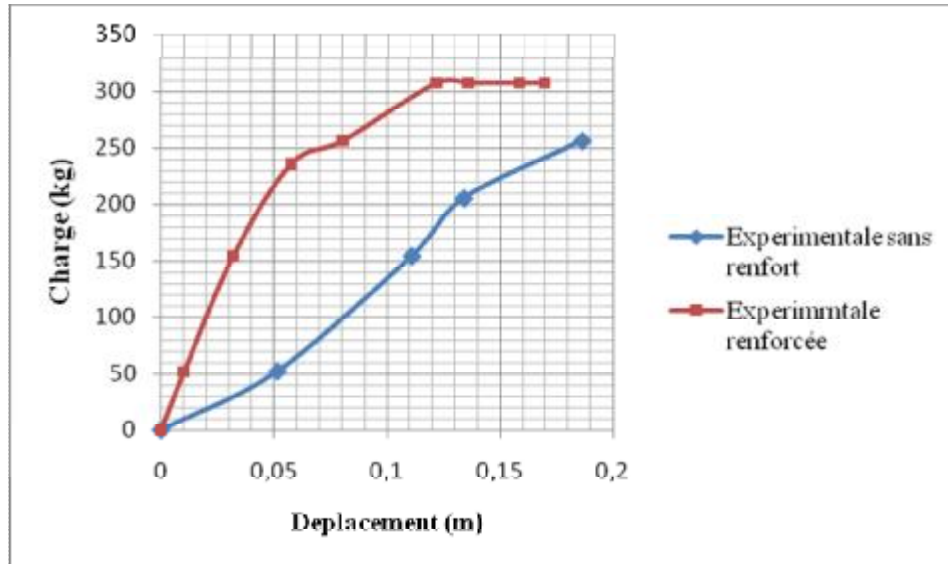


Fig.III-29 Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcé

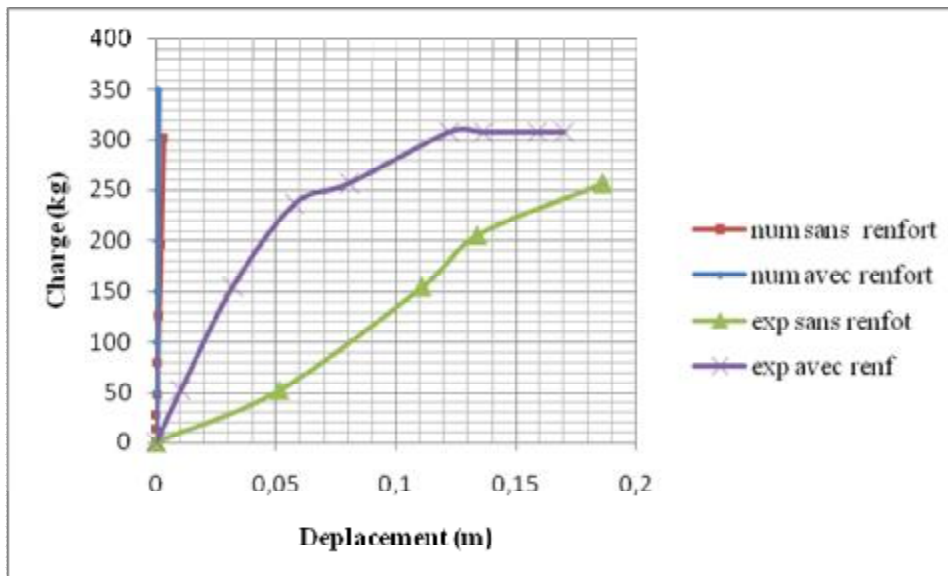


Fig.III-30 Corrélation essai /calcul –cas de la coque renforcé

III.3 Conclusions :

- Les graphes ci-dessus montrent qu'il y a une nette augmentation de la charge critique obtenue dans la structure renforcée.
- Cette amélioration atteint 351% et 50% pour des déplacements correspondants de 5 cm et 13,5cm

Conclusions et Recommandations

Cette étude a permis d'étudier l'état de déformation contrainte des enveloppes cylindriques en acier et de valider le concept de renforcement de ces structures utilisant des tirants en acier. Le procédé qui consiste simplement à fixer ces derniers sur la coque métallique par boulonnage ce qui a permis d'améliorer la capacité portante pour certaines configurations de chargement qui garantissent un mode de flambage. Le procédé est simple à mettre en œuvre et relève parfaitement d'une application sur des structures de génie civil. Pour l'ensemble des résultats obtenus lors des différentes campagnes d'essais menées sur modèles réduits, nous avons pu constater une amélioration importante de la capacité portante de la structure renforcée.

Il a été montré aussi dans notre étude que pour certaines configurations particulières, ce type de structures a un comportement non linéaire, ce qui a donné des valeurs de charges critiques obtenues expérimentalement nettement inférieures à celles données numériquement pour des chargements symétriques.

Les grands déplacements constatés lors des essais accélèrent la convergence vers la charge critique provoquant ainsi des voilements locaux

Une analyse de ces structures sous charges dissymétriques et horizontales peut faire l'objet de travaux futurs.

Le type d'appui, l'influence du rapport longueur sur portée, d'autres variantes de renforcement sont autant de paramètres à prendre en compte dans les travaux futurs.

