

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DE ANNABA

INSTITUT DE GENIE-CIVIL

MEMOIRE

**POUR L'OBTENTION DE DIPLOME
DE MAGISTER EN GENIE-CIVIL □**

**ETUDE DE L'INSTABILITE DES POTEAUX
EN PROFILS CREUX REMPLIS DE BETON
EN FLEXION BIAXIALE**

CAS DES SECTIONS RECTANGULAIRES

PRESENTE PAR

Mr FELLAH Farid

DEVANT LE JURY COMPOSE DE

Président	Mr M.L.Samai	Pr. U. de Constantine
Rapporteur	Mr A.Seridi	M.C. C.U. de Guelma
Membres	Mr M.Guenfoud	Dr. C.U. de Guelma
	Mr A.Boumekik	Dr. U. de Annaba
	Mr K.Djeghaba	Dr. U. de Annaba

ANNABA - OCTOBRE 1993

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَالصَّلَاةِ وَالسَّلَامِ عَلَى سَيِّدِنَا مُحَمَّدٍ

وَعَلَى آلِهِ وَصَحْبِهِ

وَسَلَامٌ تَسْلِيمًا كَثِيرًا إِلَى يَوْمِ الدِّينِ

A MON PERE,

A MA MERE,

A MA FEMME,

A MES FRERES ET SOEURS,

A MES ENFANTS :

KHALED, ROUMAÛSSA, MAROUA, et

R E M E R C I E M E N T S

Que Monsieur SERIDI Ahcène trouve ici, l'expression de mon profond remerciement pour m'avoir soutenu, scientifiquement et moralement, tout au long de ce mémoire.

J'adresse mes remerciements à Monsieur SAMAI M.L d'avoir eût l'honneur de présider le jury de soutenance, ainsi qu'à Messieurs :

Med. Guenfoud,

A. Boumekik,

et K. Djeghaba

d'avoir fait des critiques sur le mémoire ainsi que d'avoir acceptés de faire partie du jury de soutenance.

Je remercie tout ceux qui ont participés de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire, sans oublier le personnel du service informatique de l'ENSID et à leur tête M. Mahfoudi, pour m'avoir faciliter l'accès à l'outil informatique.

Farid FELLAH

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 **INTRODUCTION,1**

- 1.1. Généralités,1
- 1.2. Méthodes simplifiées pour la détermination de la charge de ruine,3
- 1.3. Mise en oeuvre,4

CHAPITRE 2 **MODELES DE COMPORTEMENTS** **DU BETON ET DE L'ACIER,9**

- 2.1. Le béton,10
 - 2.1.1. Résistance caractéristique à la compression,10
 - 2.1.2. Diagramme réel contraintes-déformations,12
 - 2.1.3. Diagramme contraintes-déformations conventionnel,12
 - 2.1.4. Module de déformation longitudinal,13
 - 2.1.5. Résistance caractéristique à la traction,14
- 2.2. L'acier,15
 - 2.2.1. Diagramme contraintes-déformations,15
 - 2.2.2. Définition de la limite élastique,16
 - 2.2.3. Contrainte caractéristique,16
 - 2.2.4. Diagramme contraintes-déformations conventionnel,17
- 2.3. Modèles adoptés,18
- 2.4. Effets du fluage et frettage du béton et effet de voilement dans le tube d'acier,18
 - 2.4.1. Fluage du béton,18
 - 2.4.2. Frettage du béton,19
 - 2.4.3. Voilement des parois du profil creux en acier,19

CHAPITRE 3

RELATION MOMENT-COURBURE,26

- 3.1. Généralités,26
- 3.2. Hypothèses de calcul,26
- 3.3. Procédure pour la détermination de la relation moment-courbure,27
 - 3.3.1. Discrétisation et théorie,27
 - 3.3.2. Organigramme de génération des courbes moments-courbures,31

CHAPITRE 4

DETERMINATION DE LA CHARGE DE RUINE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS,39

- 4.1. Généralités,39
- 4.2. Analyse linéaire de la stabilité,42
- 4.3. Théorie générale,42
 - 4.3.1. Approche du problème,42
 - 4.3.2. Formulation de la théorie,43
 - 4.3.3. Détermination des matrices de rigidités élémentaires [Kf] et [Kg],49
 - 4.3.3.1. Analyse 1,49
 - 4.3.3.2. Analyse 2,51
- 4.4. Détermination de la matrice de rigidité globale [KV],51
- 4.5. Procédure de la détermination de la charge de ruine,54
- 4.6. Organigramme de la procédure,54

CHAPITRE 5

DETERMINATION DE LA CHARGE DE RUINE PAR LA METHODE DE DEFORMEE COSINE WAVE,66

- 5.1. Généralités,66
- 5.2. Détermination de la forme d'équilibre,67
 - 5.2.1. Hypothèses,67
 - 5.2.2. Approche utilisée,68
- 5.3. Procédure et organigramme,70
 - 5.3.1. Procédure,70
 - 5.3.2. Organigramme,71

CHAPITRE 6

COMPARAISON DES RESULTATS, ANALYSES ET CONCLUSIONS,78

- 6.1. Généralités,78
- 6.2. Résultats expérimentaux en flexion bi-axiale,78
- 6.3. Résultats théoriques en flexion bi-axiale,79
- 6.4. Résultats théoriques et expérimentaux sous chargement axial et sous chargement uni-axial,79
- 6.5. Comparaison et analyse des résultats théoriques et expérimentaux en flexion bi-axiale,80
- 6.6. Conclusions,81

PRESENTATION DU TRAVAIL

Le but de ce mémoire est d'étudier théoriquement le comportement des poteaux composites en profils creux, de sections rectangulaires ou carrées, remplis de béton en flexion bi axiale et plus précisément en la détermination de la charge de ruine.

La charge de ruine est estimée par l'intermédiaire de deux méthodes théoriques. La première consiste à imposer une déformée du poteau ayant la forme d'une fonction cosinus (COSINE WAVE). La deuxième méthode est basée sur une discrétisation du poteau en éléments finis (MEF) à 4 degrés de liberté par élément (ELEMENT POUTRE).

L'analyse par ces deux méthodes est précédée par la génération des courbes MOMENTS-COURBURES pour les poteaux sollicités en flexion bi axiale.

Enfin, l'étude se termine par des applications. Deux cas de poteaux en chargement en flexion bi axiale sont traités; les résultats de ces cas sont comparés à ceux obtenus expérimentalement dans les mêmes conditions de chargement.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1.1. GENERALITES :

Dans le domaine de la construction, l'utilisation des structures en tube d'aciers remonte vers environ les années 1940-1950, époque où la maîtrise de la soudure s'adapte très bien avec les assemblages tubulaires [8]. Du point de vue résistance, seule la section d'acier est prise en compte, le vide intérieur était destiné à d'autres fonctions, par exemples :

- Les membrures d'une structure en barres pour passerelles sont en même temps des canalisations pour fluides;
- Irrigation de la structure de certains ouvrages tels que immeubles dans le but de les protéger contre les effets du feu;
- Remplissage du vide par du mortier ou béton, ce qui a pour effet d'une part de diminuer considérablement la transmission du bruit dans l'ouvrage et d'autre part de contribuer à la résistance à la stabilité au feu.

A l'opposé, certains constructeurs utilisaient le tube d'acier comme coffrages perdus et l'on ne tenait compte que de la résistance du noyau béton ou noyau béton armé pour résister aux efforts de la superstructure.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux acier et béton sont très bien connues. L'acier étant caractérisé par une très bonne résistance aussi bien à la traction qu'à la compression, par contre le béton travaille très bien à la compression mais résiste mal à la traction.

Pour cela, de nombreuses recherches ont été consacrées dans plusieurs pays à l'étude de ce matériau composite¹ notamment en Grande Bretagne, aux USA, en Allemagne, en Belgique et au Japon. La conclusion était très positive à propos de cette association acier-béton dans tout les points de vue, a savoir résistance, économie, technologie, etc.

Les principaux avantages de cette nouvelle technique qui est le tube d'acier remplis de béton par rapport aux techniques existantes, par exemple prise en compte du tube d'acier seul ou du noyau béton seul, sont les suivants [8] :

- Augmentation de la charge de compression et de flambement; □* Diminution du poids de l'enveloppe acier;
- Augmentation de la résistance à la stabilité au feu; □* Insonorisation dûe à la présence du noyau béton;
- Suppression dans de nombreux cas du ferrailage du béton;
- Etc.

Tous les résultats d'essais ont abouti à une conclusion fort intéressante [1] :

- LA RESISTANCE D'UN PROFIL CREUX REMPLI DE BETON N'ETAIT PAS LA SOMME DES RESISTANCES DU BETON ET DE L'ENVELOPPE ACIER;
- LE PROFIL CREUX REMPLI DE BETON EST UN NOUVEAU MATERIAU QUI A SON PROPRE COMPORTEMENT.

¹ Il existe deux type de sections composites :

1. Le 1^{er} type concerne les sections en béton-armé de forme carrés, rectangulaires, circulaires ou autres, renforcées à l'intérieur par des profils courants en acier simples ou reconstitués qui sont en général des laminés en U, I, H ou L.
2. Le 2^{ème} type concerne les sections en tubes d'acier de forme carrés, rectangulaires, ou circulaires renforcés à l'intérieur par du béton. Ce 2^{ème} type porte aussi le nom de poteaux de section mixte.

Les tubes d'acier remplis de béton sont utilisés principalement comme poteaux et comme éléments travaillant essentiellement à la compression et leurs domaine d'utilisation est très large, à savoir, structures en poteaux-poutres pour portiques, structures en barres pour fermes de ponts, fermes spatiales pour les grandes portées, pieux pour fondations profondes, et autres....

En parlant de la compression des poteaux ou autres éléments, on pense directement au flambement, surtout pour les éléments élancés, qui est caractérisé par une charge critique. Le mérite revient à Euler qui, en 1778, proposa une formule générale précise permettant de calculer la charge critique pour des barres idéales d'inerties constantes et dans le domaine purement élastique.

Seulement dans cette formule, il n'est pas tenu compte des imperfections de rectitudes qui sont inévitables et sont généralement dûs aux défauts d'usinage, de laminage, de verticalité et autres....

C'est pourquoi, de nombreux chercheurs essayèrent de trouver une approche entre la théorie et les résultats d'essais. C'est ainsi qu'en 1807, Thomas Young montra que la compression des barres réelles est influencée par les imperfections géométriques telles que courbure initiale, défauts de centrage et l'hétérogénéité du matériau [9].

1.2. METHODES SIMPLIFIEES POUR LA DETERMINATION DE LA CHARGE DE RUINE :

L'exploitation des résultats d'essais expérimentaux, qui ont conduits à une connaissance suffisante du comportement jusqu'à la ruine des poteaux mixtes, a permis la mise au point de trois méthodes principales de calcul de la capacité portante, basées d'une part sur les

recommandations de la C.E.C.M² pour l'acier et du C.E.B³ pour le béton et d'autre part sur le concept "d' ETAT ULTIME". Ces trois méthodes sont :

- a - Méthode GUIAUX et JANSS,
- b - Méthode DOWLING et VIRDI,
- c - Méthode BERGMANN-ROIK et BODE.

Les deux dernières méthodes ont donné naissance à une méthode unique dans le projet de code modèle pour constructions mixtes acier-béton conjointement par l'A.I.P.C⁴, le C.E.B et la F.I.P⁵.

Il est à noter que le code modèle est un modèle de règlements provenant de la fusion de deux textes (CEB et FIP) et couvrant tout le domaine allant du béton précontraint intégral au béton armé classique.

Le tableau (1-1) donne une présentation pratique de chacune de ces méthodes et les phénomènes pris en compte.

1.3. MISE EN ŒUVRE :

Afin d'obtenir une bonne corrélation entre les résultats d'essais et les résultats théoriques, des précautions sont à prendre lors de la mise en oeuvre du poteau composite, dont les défauts pourraient nuire au bon comportement du complexe acier-béton. Parmi les défauts rencontrés en pratique, on peut citer :

² *Convention Européenne de la Construction Métallique.*

³ *Comité Européen du Béton.*

⁴ *Association Internationale des Ponts et Charpenters.*

⁵ *Fédération Internationale de la Précontrainte.*

- La ségrégation du béton lors du remplissage;
- La formation de poches d'air locales;
- Les pertes de laitance par les joints et orifices.

Pour cela, il convient de se conformer à certaines recommandations [13] dont les principales sont citées ci-après (voir figures (a), (b), (c), (d) et (e) :

a- Profil creux en acier :

- Leurs longueurs doit être inférieure ou égale à la plus petite des valeurs suivantes:
 - 30 fois le plus petit côté ou le diamètre du profil;
 - 12 m.
- En cas d'incendie, afin d'éviter l'éclatement du poteau mixte sous l'effet de la pression de la vapeur d'eau, il est prévu des trous par groupe de deux (diamètre de 10 et 15 mm) sur chaque tronçon et aux deux extrémités (entre 100 et 200 de chaque extrémité). Si la hauteur du tronçon dépasse les 5 m, 2 trous intermédiaires sont à prévoir en ce sens.

b- Noyau béton :

- Le béton doit être suffisamment plastique et l'on doit tenir compte de l'effet de paroi des profils creux de petites dimensions, ce qui doit nous amener à augmenter la proportion de sable et de ciment et à diminuer la dimension maximale des graviers qui doit être au plus égale au 1/6 du côté ou du diamètre intérieur du profil creux.
- L'utilisation de chlorure de calcium CaCl_2 comme accélérateur de prise est interdit car il y a risque de corrosion du tube d'acier.

c- Profil creux rempli de béton :

On distingue deux modes de remplissage du profil creux:Le remplissage IN SITU et le remplissage en usine. Il peut se faire soit par gravité à l'aide d'un entonnoir, soit par gravité avec

une trémie à vidage par le fond, soit par pompe à béton ou au tube plongeur. Pour cela, il faut se conformer aux prescriptions suivantes :

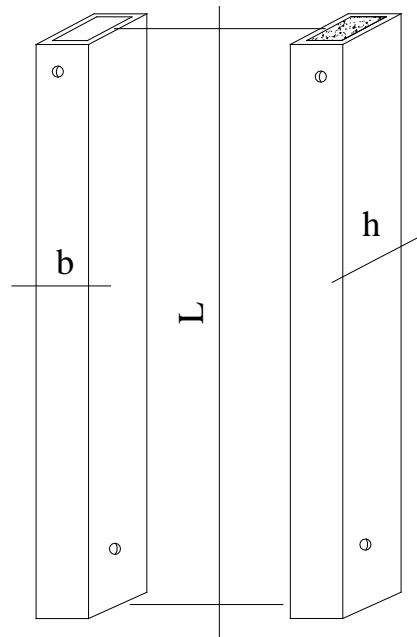


Figure (a)

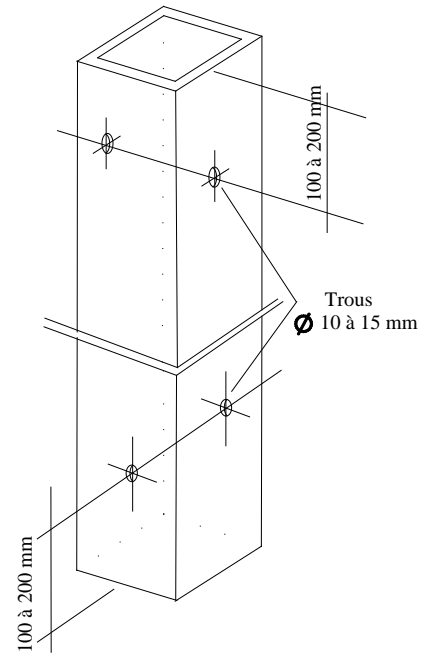


Figure (b)

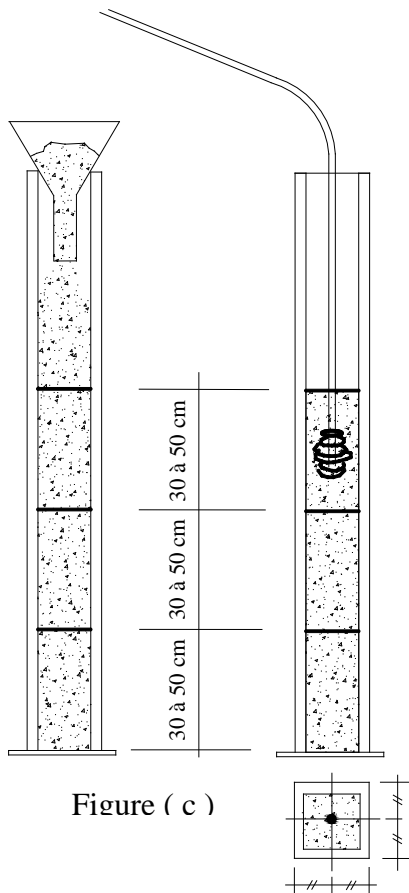


Figure (c)

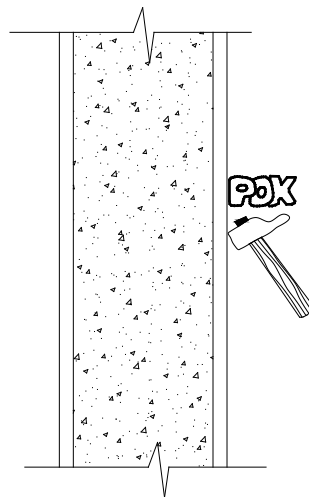


Figure (d)

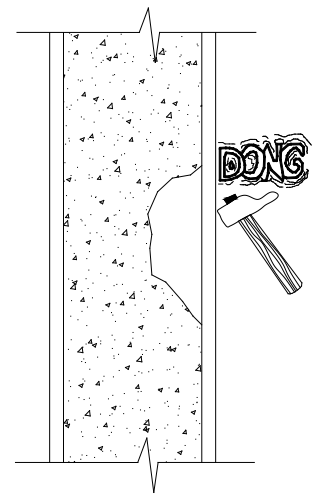


Figure (e)

- Avant le remplissage, il est bon de s'assurer que des débris ou de l'eau ne peuvent s'accumuler au bas du profil creux et une obturation provisoire est alors nécessaire.
- Lorsque la longueur du profil creux n'excède pas 3 mètres, son remplissage se fait à l'aide d'un entonnoir ou d'une trémie à vidage par le fond et chaque couche successive de béton frais doit avoir entre 30 et 50 cm de hauteur et doit être immédiatement vibrée.
- Afin d'éviter une ségrégation des constituants du béton, il est recommandé d'utiliser un entonnoir ayant une goulotte de longueur variable. Dans certains cas où les dimensions de la section du profil creux sont grandes (au delà de 200 mm), il est conseillé d'adopter un tube plongeur.
- Une fois le profil creux est rempli de béton, il est nécessaire de procéder à un contrôle du remplissage qui se fait en pratique par frappe à intervalles rapprochés de façon à détecter par le son, un éventuel défaut de remplissage. S'il est détecté un défaut de ce genre, on doit y remédier par perçage de trous dans la zone défectueuse, puis injection de ciment, puis obturation des trous.

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à l'étude théorique des poteaux en tubes d'aciers de sections rectangulaires ou carrées remplis de béton (Fig. 1-1) sollicités en flexion bi-axiale et plus précisément à la détermination de la charge critique.

METHODES	GUIAUX et JANSS	DOWLING et VIRDI	BERGMANN-ROIK et BODE
Principaux Pays Utilisateurs	Belgique - Canada France CECM	Grande-Bretagne CECM	Allemagne CECM
Charge Limite Ultime Axiale.	Nu	Nu	Nu
Base de calculs.	CECM-CEB Courbe (a)	CECM-CEB Courbe (a)	CECM-CEB Courbe (a)
Principe de vérification	Vérification par calcul sur ordinateur.	Vérification et calcul manuel avec tableaux CECM.	Vérification et calcul manuel avec tableaux CECM.
Frettage ⁶	Pris en compte.	Pas pris en compte.	Pas pris en compte.
Voilement local des parois.	Pris en compte.	utilisation d' épaisseur limite (t_{min}).	Pris en compte.
Fluage du béton.	Pris en compte.	Pas pris en compte.	Pris en compte.
Charges Limites Ultimes avec interaction compression - flexion.	Abaques simples Nu et Mu Uni-axial.	Méthodes Nu et Mu uni et bi-axial.	Méthodes Nu et Mu uni et bi-axial.

TAB (1.1)

⁶ La prise en compte du fretage s'applique exclusivement aux profils creux circulaires à l'exclusion des profils carrés ou rectangulaires.

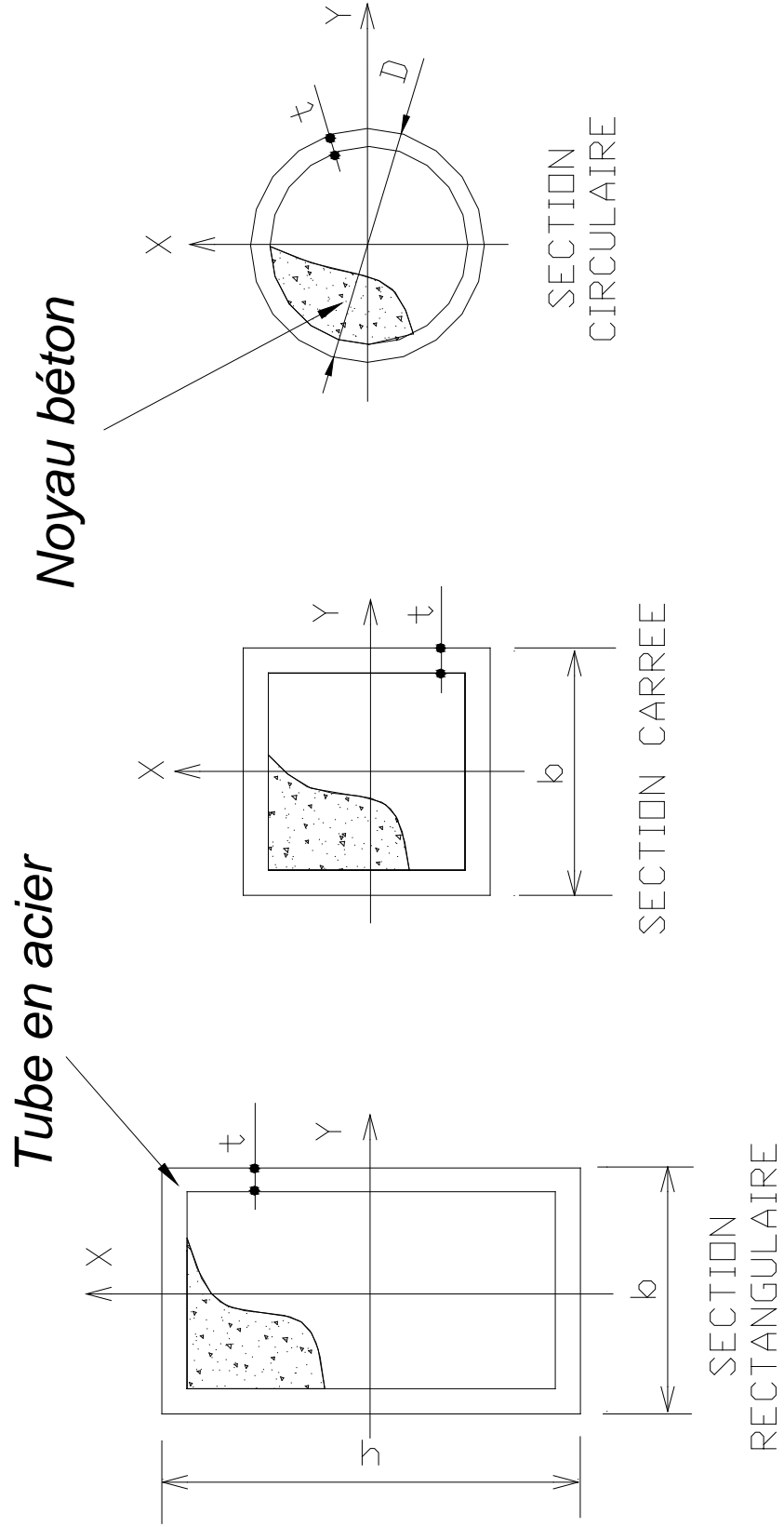


FIGURE 1.1. - QUELQUES TYPES DE SECTIONS COMPOSITES

CHAPITRE II

MODELES DE COMPORTEMENTS

DU BETON ET DE L'ACIER

2.1. LE BETON :

2.1.1. Résistance caractéristique à la compression notée f_{ck} :

Un béton est défini couramment par sa résistance à la compression, appelée résistance caractéristique et notée f_{ck} . Elle est définie aujourd'hui à partir d'essais à 28 jours sur des éprouvettes $R_{cyl} = 0.83R_{cub}$ normalisées de formes cylindriques à base circulaire de diamètre 16 cm et de hauteur 32 cm dont la section droite est d'environ 200 cm^2 [10].

Il est à noter qu'on peut aussi la définir sur éprouvette cubique, mais cette dernière présente l'inconvénient d'avoir un élancement insuffisant [2]. La résistance cylindrique en fonction de la résistance cubique est donnée par :

$$R_{cyl} = 0.83R_{cub}$$

La détermination de la résistance du béton se fait à l'aide d'essais destructifs par écrasement d'un nombre suffisant d'éprouvettes. Les résultats des essais de compression sont toujours assez dispersés en raison de plusieurs paramètres tels que l'hétérogénéité du béton, les conditions de fabrication, de la précision des plateaux de presses (parallélisme), centrage de l'effort appliqué etc.

La représentation graphique entre le nombre d'essais et les résistances croissantes obtenues donne un diagramme variant selon une loi sensiblement gaussienne (Fig. 2-1).

La résistance d'un béton sera donc définie par la moyenne arithmétique (f_{moy}) et l'écart type (s) et l'on aboutit à la notion de contrainte caractéristique notée (f_{ck}) telle que :

$$f_{ck} = f_{moy} - k.s$$

Où :

$$f_{moy} = \frac{\sum f_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (f_{moy} - f_i)^2}{n-1}}$$

Avec :

n - nombre d'essais;

f_i - résistance du $i^{\text{ème}}$ essai;

k - coefficient de probabilité, fixé à priori au départ afin d'obtenir un résultat d'essai inférieur à f_{ck} .

Avec une loi gaussienne, les valeurs de (k) sont données par le tableau (2-1).

PROBABILITE	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20
COEFFICIENT K	3.90	2.58	2.33	1.96	1.64	1.28	0.84

(TAB.2.1)

Une étude sur ordinateur effectuée par R.Peltier [2] à permis de déterminer l'influence du nombre d'essais sur le coefficient k . Les recommandations CEB-FIP proposent une valeur de k égale à 1.64 sans tenir compte du nombre d'essais [2]; c'est à dire une probabilité de 5% de rencontrer une valeur f_{ck} inférieure à celle adoptée avec un nombre d'essais plus élevé.

2.1.2. Diagramme réel contraintes-déformations :

L'essai d'une éprouvette en béton à la compression simple jusqu'à la rupture donne un diagramme contraintes déformations ayant l'allure représentée sur la Figure (2-2).

Quelque soit le type de béton, l'analyse des diagrammes contraintes déformations a donnée les résultats suivants :

- La contrainte est maximale pour une déformation environ égale à 0.2%.
- La rupture correspond à une déformation environ égale à 0.35%.

La forme de la courbe à son début est sensiblement linéaire, ce qui nous permet d'avoir un module élastique constant correspondant à l'utilisation normale du béton.

2.1.3. Diagramme contraintes-déformations conventionnel :

Le Comité Européen du Béton (CEB) adopte un modèle simplifié conventionnel de la courbe contraintes-déformations(Fig 2-3). La branche OA est assimilée à une parabole d'équation :

$$\sigma = \frac{f_{ck} \cdot \epsilon_b}{2 \cdot 10^{-3}} \left(2 - \frac{\epsilon_b}{2 \cdot 10^{-3}} \right) \quad (2-1)$$

Le palier AB étant caractérisé par une contrainte f_{ck} et un raccourcissement maximale égale à 0.35%. Dans les calculs la contrainte caractéristique du béton f_{ck} est remplacée par une contrainte de calcul notée f_{cd} telle que :

$$f_{cd} = \frac{0.85 f_{ck}}{\gamma_b} \quad (2-2)$$

γ_b - Coefficient de sécurité qui dépend du type de combinaisons entre les actions. Le code

modèle [11] adopte les valeurs suivantes :

A l'état-limite ultime de résistance, il est égal à :

- 1.5 : dans le cas de situations normales ;
- 1.4 : dans le cas de situations accidentelles (chocs, séisme,).

A l'état-limite d'utilisation⁷, il est pris égal à 1.

Le coefficient minoratif 0.85 a été introduit pour tenir compte des chargements de longue durée et à ce sujet, les essais ont montré [2] que la résistance de rupture par compression diminue lorsque la durée d'application de la charge augmente.

Le diagramme de calcul conventionnel adopté par le CEB est comme représenté dans la (Fig. 2-4). Par exemple pour un béton courant de dosage en ciment 350 Kg/m³ (800 l de graviers, 400 l de sable, 350 Kg de ciment et 175 l d'eau), les règles Françaises BAEL 83 proposent une valeur approximative de f_{ck} à 28 jours égale à 20 MPa; ce qui donne dans des conditions normales de travail du béton, une contrainte de calcul f_{cd} égale à 11.33 MPa.

2.1.4. Module de déformation longitudinal du béton :

Le module d'élasticité longitudinal instantané du béton est exprimé par la relation :

$$E = \sigma / \varepsilon$$

Il est donc fonction de la résistance du béton, et sa détermination doit être en principe faite à partir d'essais à la compression. Plusieurs formules empiriques ont été proposées pour son

⁷ Pour les états-limites d'utilisations, il faut montrer que les sollicitations agissantes de calculs ne provoquent pas le dépassement des limites qui résultent des exigences fonctionnelles tels que ouvertures de fissures, flèches,

calcul et les règles BAEL 83 proposent la valeur suivante, fonction de la contrainte caractéristique :

$$E_i = 11.10^3 \cdot (f_{cj})^{1/3}$$

Pour un béton de $f_{cj} = 20 \text{ MPa}$, on aura $E_i = 29859 \text{ Mpa}$.

Le code modèle CEB-FIP [11] propose la formule suivante :

$$E_i = 9500 \cdot (f_{ck} + 8)^{1/3}$$

Ce qui donne pour un béton de $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$: $E_i = 28848 \text{ Mpa}$.

2.1.5. Résistance caractéristique à la traction notée f_{tk} :

La résistance caractéristique à la traction du béton se mesure généralement soit par flexion d'une éprouvette prismatique de section carrée, soit par l'essai dit "*brésilien*" qui consiste à soumettre une éprouvette cylindrique à un effort de fendage par application de forces radiales de compression suivant deux génératrices diamétralement opposées.

L'essai "*brésilien*" est souvent préféré à l'essai par flexion, car les résultats obtenus sont moins dispersés. La résistance du béton à la traction est très inférieure à sa résistance à la compression, le rapport est de l'ordre de $1/12$ à $1/13$ pour un béton courant.

Il existe une certaine corrélation entre la résistance à la traction est la résistance à la compression. Une bonne approximation est donnée par le code modèle CEB-FIP :

$$f_{tk} = 0.3(f_{ck})^{2/3}$$

Les règles BAEL 83 donne une valeur de f_{tk} égale à :

$$f_{tk} = 0.6 + 0.06(f_{ck})$$

2.2. L'ACIER :

2.2.1. Diagramme contraintes-déformations :

Le but de l'étude du comportement de l'acier, c'est d'en tirer les propriétés principales, à savoir :

- La limite élastique f_s ;
- Le module d'élasticité E_s ;
- Les déformations (allongements et raccourcissements);
- Et autres.

Le comportement de l'acier s'étudie à partir d'essais mécaniques qui comprennent des essais de traction directe par actions graduées jusqu'à la rupture, des essais dynamiques ou par chocs et des essais de déformation par pliage.

L'essai de traction est le plus utilisé car il est le plus révélateur de données physiques. Il est réalisé sur éprouvettes standardisées sollicitées par un effort axial de traction croissant (environ 1kg/mm^2 par seconde) jusqu'à la rupture. Selon la norme Française NF A03-101, la longueur initiale de l'éprouvette L_0 et la section droite (S_0) (Fig. 2-5) sont reliées par la relation :

$$L_0 = 5.65\sqrt{S_0}$$

Les représentations graphiques entre les contraintes et les déformations pour les types d'aciers les plus utilisés en pratique sont représentées sur la figure (2-6).□

Pour l'acier doux qui est le plus utilisé en pratique à cause de ses bonnes propriétés, le diagramme contraintes-déformations est donné en figure (2-7).

2.2.2. Définitions de la limite élastique (f_s) :

Plusieurs définitions ont été admises pour définir la limite élastique de l'acier f_s .

1. A partir du diagramme contraintes déformations (Figure 2-7) :

- a - C'est le seuil à partir duquel les contraintes et les déformations ne sont plus proportionnelles ;
- b - Conventionnellement, c'est la contrainte qui, maintenue pendant 10 secondes puis supprimée, produit un allongement rémanent de 2%.

2. D'après les règles CM66, la limite élastique prise comme base de calcul est définie par l'une des valeurs suivantes :

- c - Valeur garantie par la norme pour les aciers de construction ;
- d - Valeur garantie par le producteur ;
- e - Valeur justifiée expérimentalement sur la base d'une étude statistique qui doit comporter
au minimum 12 essais pour chaque type et chaque dimensions de profil, ce qui nous ramène à la notion de contrainte caractéristique.

2.2.3. Contrainte caractéristique de l'acier :

La contrainte caractéristique de l'acier est la limite élastique calculée sur une base statistique telle que :

$$f_s = f_{moy} - k.s$$

où :

- s - est l'écart type ;
- k - est le coefficient de probabilité pris égal à 2.
- f_{moy} - est la moyenne arithmétique des limites élastiques obtenues à partir d'essais ;

A défaut de résultats d'essais, les normes et réglementations proposent les limites élastiques suivantes pour 04 types d'aciers les plus utilisés en pratique :

$$f_s = 235 \text{ MPa pour l'acier E24.}$$

$$f_s = 255 \text{ MPa pour l'acier E26.}$$

$$f_s = 295 \text{ MPa pour l'acier E30.}$$

$$f_s = 355 \text{ MPa pour l'acier E36.}$$

2.2.4. Diagramme contraintes-déformations conventionnel de l'acier :

Quelque soit le mode d'élaboration et le type d'acier, les règles BAEL 83 prennent en compte pour les calculs un diagramme simplifié conventionnel représenté sur la figure (2-8).

Dans les calculs, la limite élastique f_s est remplacée par une contrainte de calcul f_{sd} correspondant à un allongement limite élastique tel que :

$$f_{sd} = \frac{f_s}{\gamma_s} \quad (2-3)$$

$$\varepsilon_o = \frac{f_{sd}}{E_s} \quad (2-4)$$

où :

γ_s - Coefficient de sécurité égal à [11] :

- 1.15 : pour les situations normales et à 1 pour les situations accidentelles, dans le cas des états-limites de résistance.
- 1 : dans le cas des états-limites d'utilisations.

E_s - Module d'élasticité longitudinal pris égal à 21.10^5 Kg/cm^2 quelque soit le type d'acier ;

ε_{so} - Allongement correspondant à la limite élastique de l'acier.

ε_{\max} - Allongement maximum toléré égale à 0.10% quelque soit le type d'acier et le type de sollicitations.

2.3. MODELES ADOPTES :

Nous allons pour l'analyse de notre problème adopter les modèles de comportement représentés sur les figures (2-9a) et (2-9b) respectivement pour le béton et l'acier en utilisant les états-limites d'utilisations.

2.4. EFFETS DU FLUAGE ET DU FRETTAGE DU BETON ET DU VOILEMENT DU TUBE D'ACIER :

2.4.1. Fluage du béton :

L'effet du fluage du béton dans les profils creux remplis de béton sous l'action des charges permanentes de longues durées a pour incidence une réduction sur la charge ultime du poteau. Pour tenir compte de cet effet, il est admis [18] de modifier la loi de comportement contraintes-déformations du béton en remplaçant le modèle adopté pour le béton sous charges instantanées (voir fig. 2-9a) par un nouveau modèle comme indiqué en figure (2-10). L'équation exprimant les contraintes en fonction des déformations est toujours du type parabolique⁸. Dans notre étude, il n'est pas tenu compte de l'effet du fluage.

2.4.2. Fretage du béton :

L'augmentation de la charge de ruine, d'un profil creux en acier de section rectangulaire ou carrée rempli de béton, par l'effet de fretage est presque nulle [18]. Selon des essais du C.R.I.F (Centre de Recherches scientifiques et techniques de l'Industrie des Fabricants métalliques de Bruxelles), l'augmentation est de 2 à 3% au maximum [18]. Dans ce mémoire, il

⁸ Dans le cas d'un chargement de longue durée, pour tenir compte de l'effet du fluage du béton, il est admis [8] de prendre $E_{ce} = 450.f_{cd}$. Une interpolation linéaire peut être effectuée dans le cas où une partie des charges est de longue durée.

a été jugé utile de le négliger vu que le bénéfice qui en résulte est insignifiant au prix de calculs complexes.

2.4.3. Voilement des parois du tube d'acier :

La présence du noyau béton à l'intérieur du profil creux doit en principe contribuer favorablement contre le voilement local de la parois du profil creux. Mais l'expérience [21] montre que dans le cas de grands élancements, il y a risque prématuré de perte de stabilité par voilement local des parois du profil creux remplis de béton. Ce phénomène de voilement entraîne une diminution de la charge de ruine du profil par rapport au phénomène de flambement [21]. L'American Concrete Institute (A.C.I) donne une condition de non-voilement basée sur un élancement limite de la parois du profil creux. Cette condition est :

$$\frac{b}{t} < \sqrt{\frac{3.E_s}{f_{ck}}} \quad (6-1)$$

Où :

b et t - Respectivement largeur et épaisseur du profil creux en acier;

E_s et f_{ck} - Respectivement module d'élasticité et limite caractéristique de l'acier.

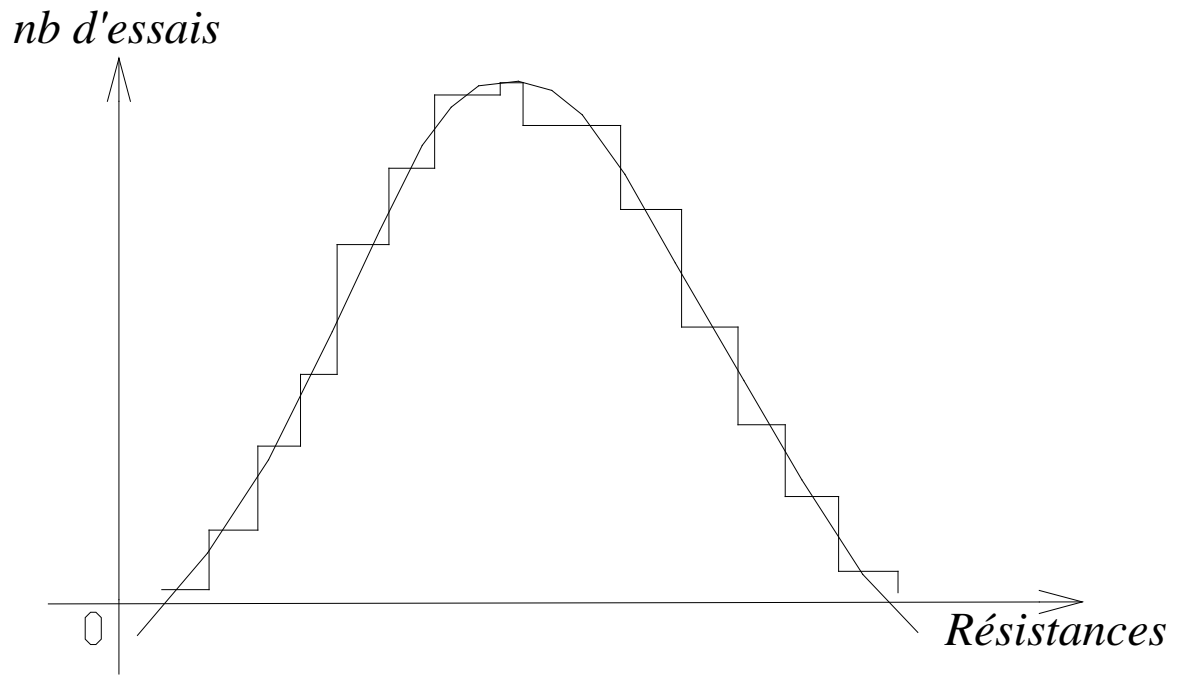


FIGURE 2.1. - COURBE DE GAUSS

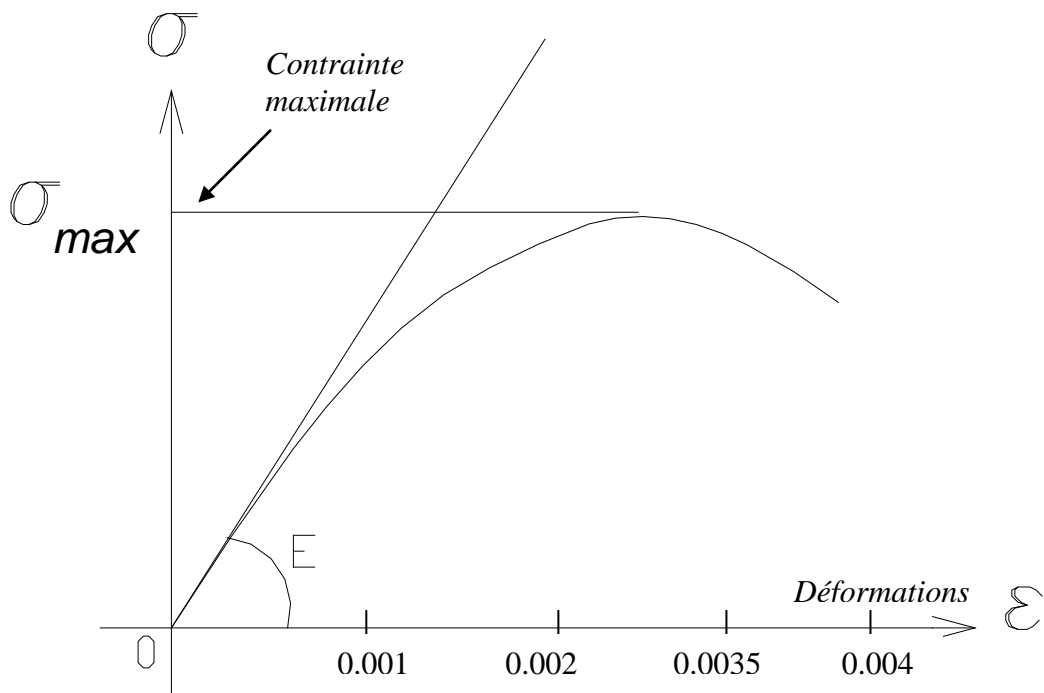


FIGURE 2.2. - COURBE CONTRAINTES-DEFORMATIONS REEL DU BETON

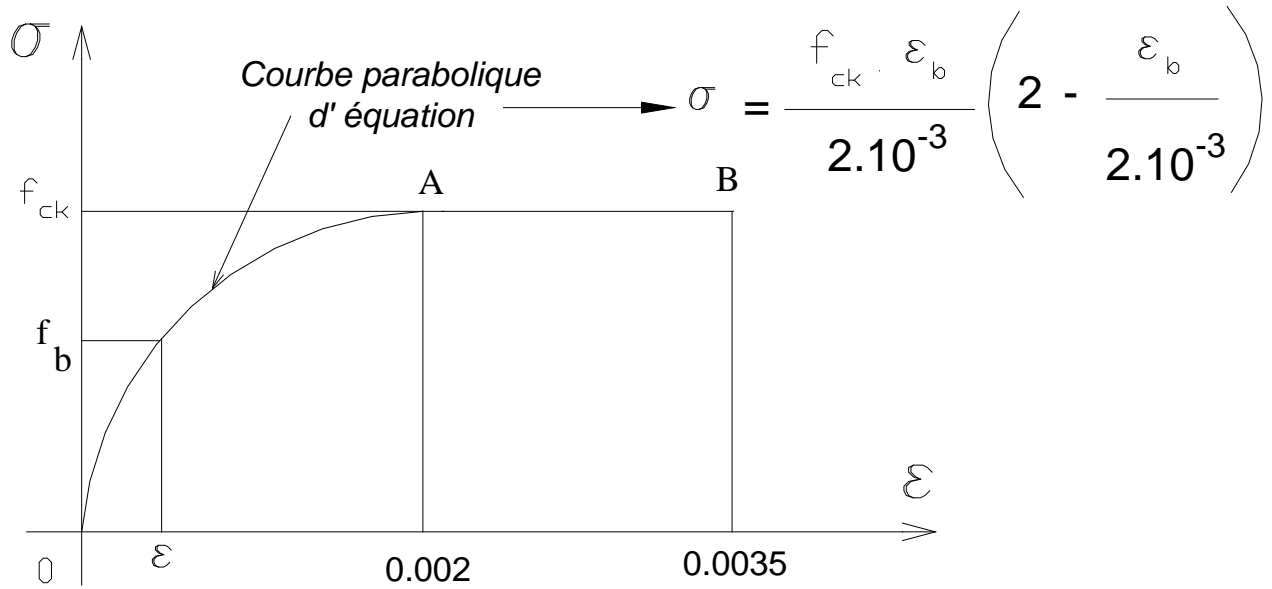


FIGURE 2.3. - DIAGRAMME CONTRAINTES-DEFORMATIONS CONVENTIONNEL DU BETON

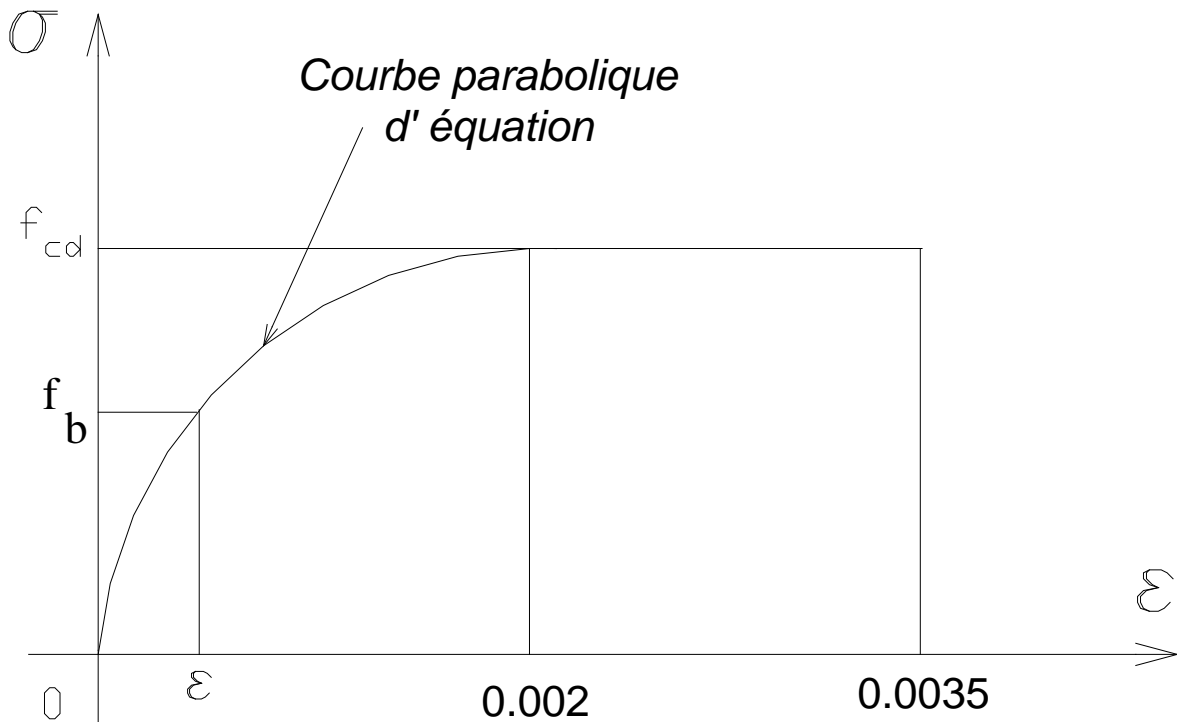


FIGURE 2.4. - DIAGRAMME CONTRAINTES-DEFORMATIONS DE CALCUL DU BETON

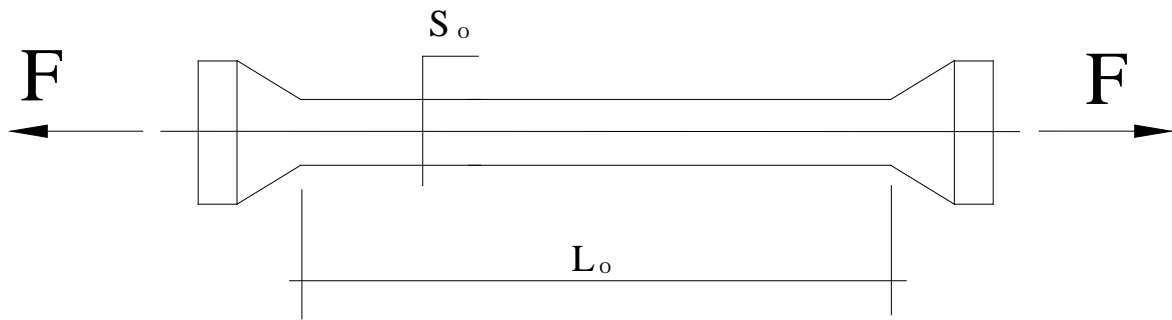


FIGURE 2.5. – EPROUVETTE D’ESSAI EN TRACTION DE L’ACIER

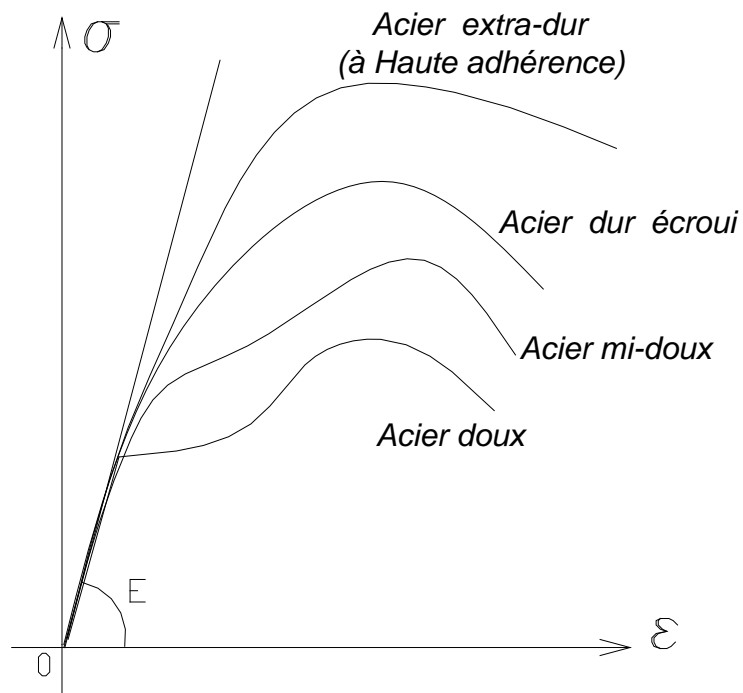


FIGURE 2.6. - DIAGRAMMES CONTRAINTES-DEFORMATIONS POUR QUELQUES TYPES D’ACIERS

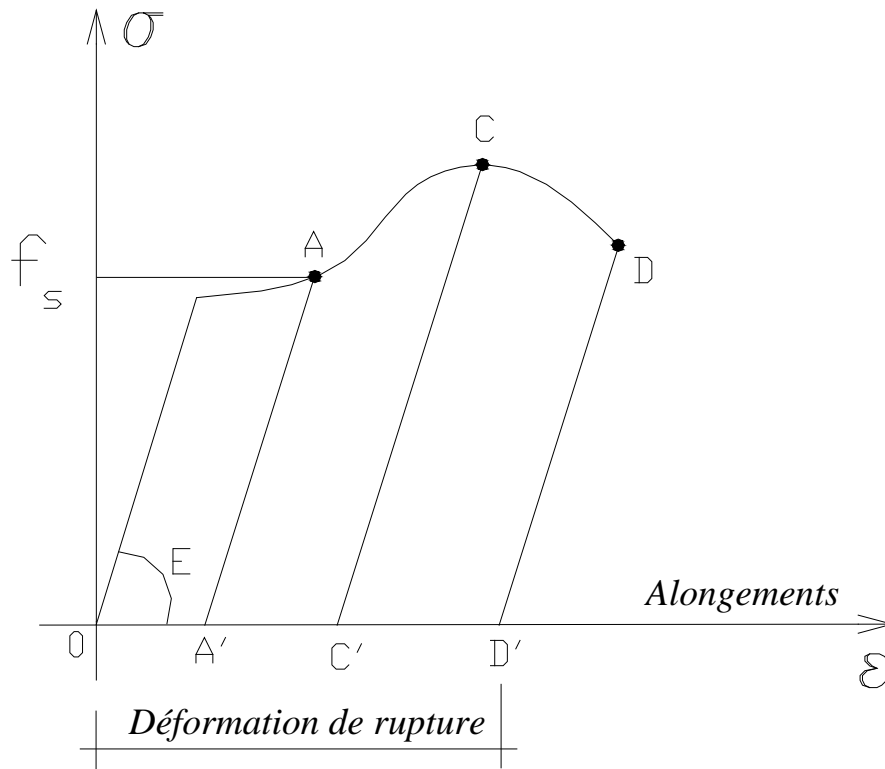


FIGURE 2.7. - DIAGRAMMES CONTRAINTES-DEFORMATIONS DE L'ACIER DOUX

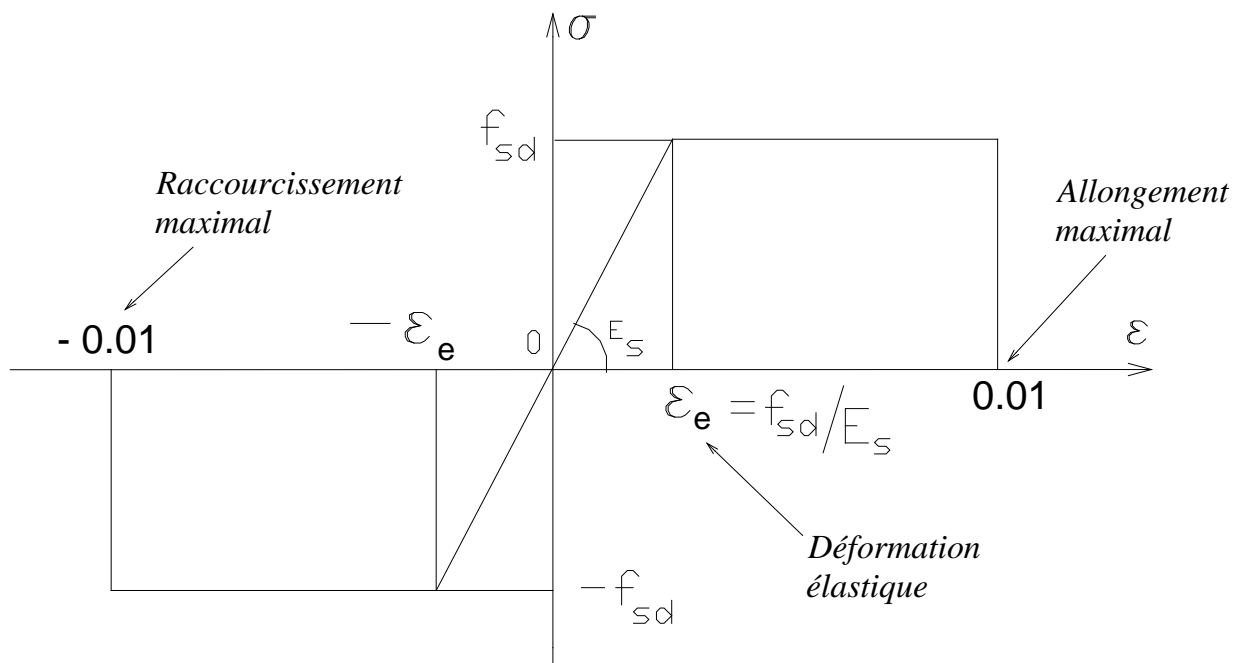


FIGURE 2.8. - DIAGRAMME DE CALCUL POUR TOUT LES ACIERS

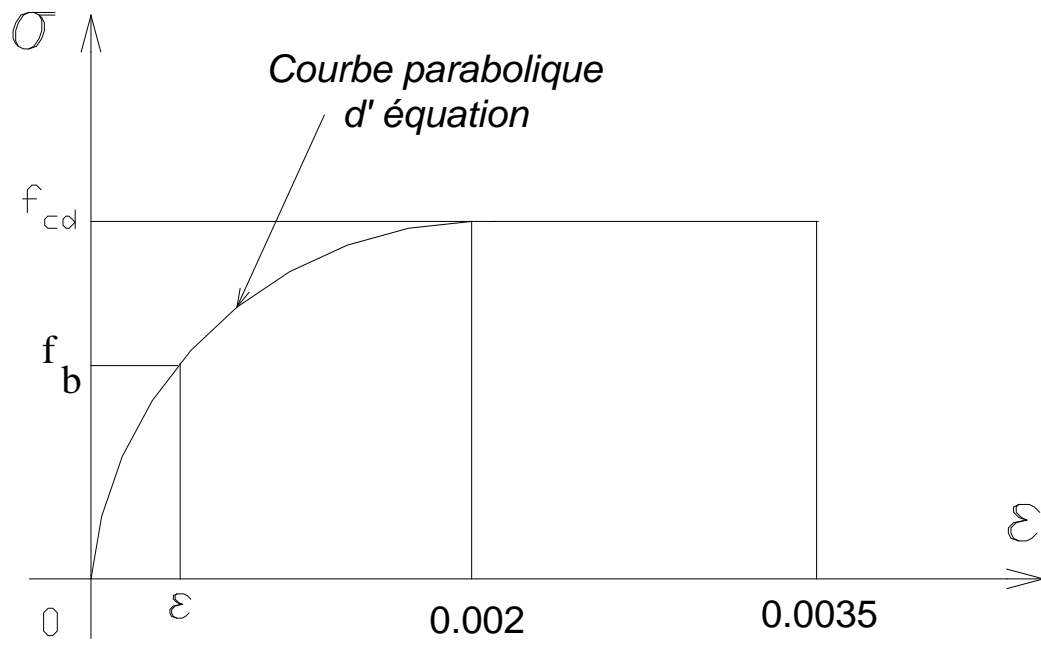


FIGURE 2.9a. – MODELE ADOPTE POUR LE BETON

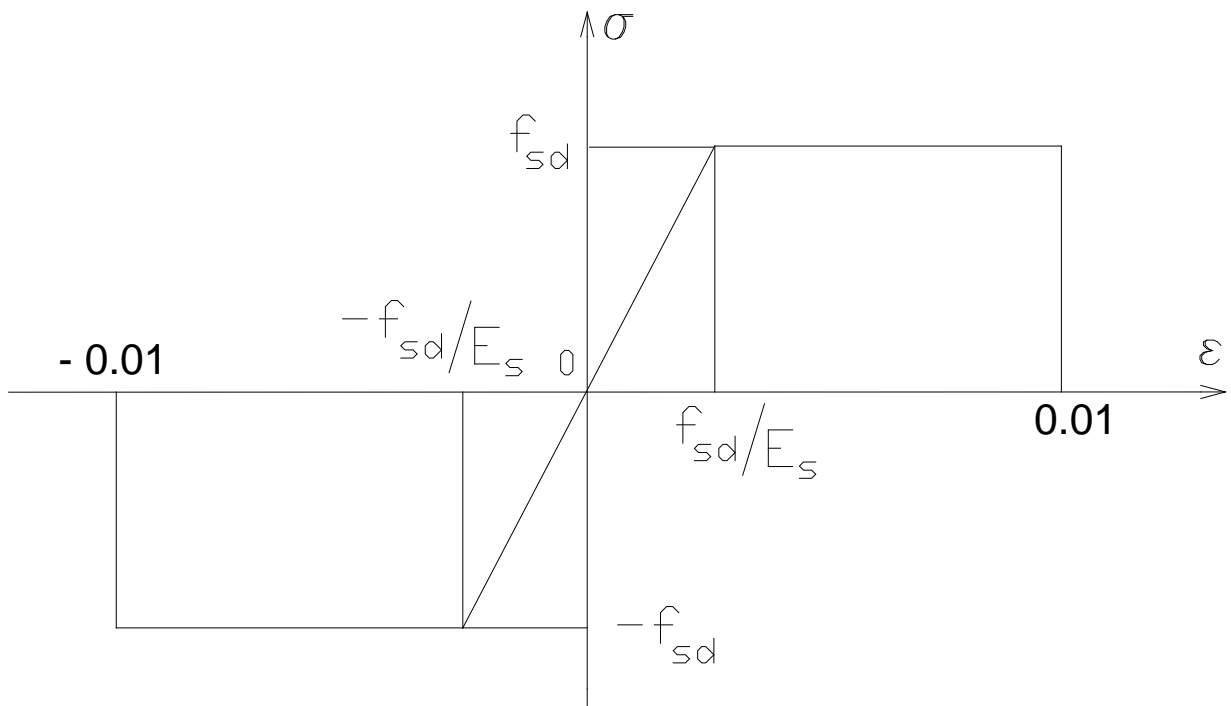


FIGURE 2.9b. – MODELE ADOPTE POUR LES ACIERS

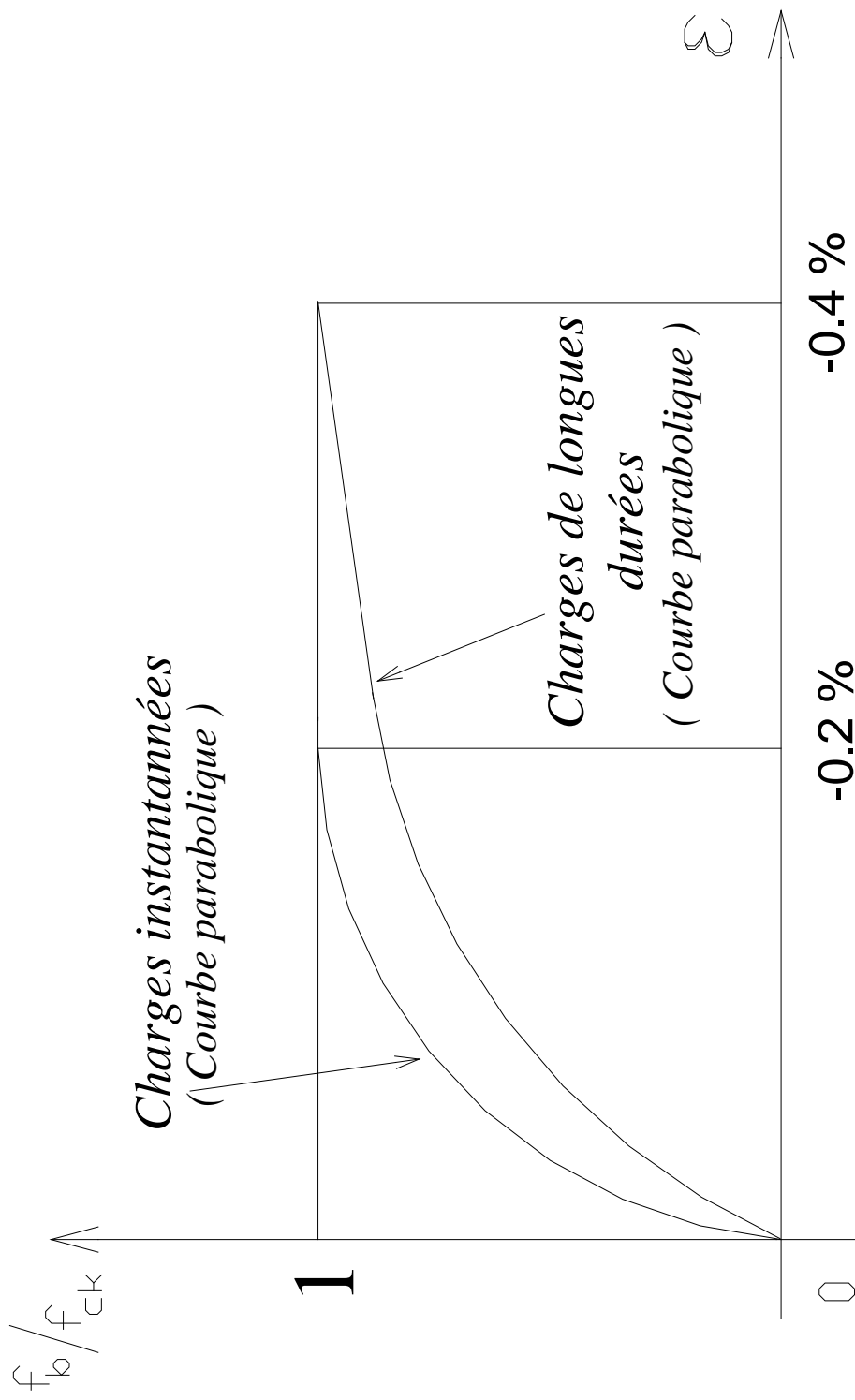


FIGURE 2.10. – DIAGRAMMES CONTRAINTES-DEFORMATIONS DU BETON SOUS CHARGES INSTANTANÉES ET SOUS CHARGES DE LONGUES DURÉES

CHAPITRE III

RELATION MOMENT-COURBURE

3.1. GENERALITES :

L'utilisation des sections composites ou mixtes comme poteaux et éléments structuraux dans le domaine de la construction, nécessite obligatoirement la connaissance des propriétés mécaniques de cette section.

En parlant des propriétés mécaniques, on pense surtout à la rigidité flexionnelle **EI**, nécessaire pour la construction des matrices de rigidité dans une analyse par éléments finis et pour le calcul des moments internes à partir de la courbure lorsque l'analyse sera basée sur une déformée cosinus (COSINE WAVE).

Pour cela, notre étude théorique va comporter une partie très importante : c'est la génération de la courbe **MOMENT-COURBURE** de la section composite.

3.2. Hypothèses de calcul :

La détermination de la charge de ruine dans les poteaux composites nécessite certaines simplifications et idéalizations qui seront résumées dans les hypothèses suivantes :

- A- Le profil creux en acier et le noyau béton sont homogènes et isotropes;
- B- Les lois de comportement des matériaux acier et béton, c'est à dire les relations contraintes-déformations, sont celle présentées dans la section (2-3).

C- Les contraintes de traction⁹ dans le béton et l'effet d'écroutissement de l'acier sont négligées.

D- La distribution des déformations dans une section droite est linéaire (Fig 3-1), c'est à dire toute section plane avant déformation reste plane et identique à elle même après déformation : c'est l'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI.

E- Il existe une interaction complète entre l'acier et le béton. Cette hypothèse exclut tout déplacement relatif longitudinal entre l'acier et le béton; la déformation dans l'acier est égale à la déformation dans le béton :

$$\varepsilon_{\text{béton}} = \varepsilon_{\text{acier}}$$

F- Les déformations de cisaillement n'ont pas un grand effet sur les flèches et sur les contraintes vu qu'elles sont petites.

3.3. PROCEDURE POUR LA DETERMINATION

DE LA RELATION MOMENT-COURBURE :

3.3.1. Discrétisation et théorie :

La figure (3-2) montre une discrétisation de la section du poteau composite. La section est subdivisée en grillages élémentaires en acier et béton sous forme de maillages carrés¹⁰.

Il est à noter qu'on entend par un cas bi-axial, un effort de compression doublement excentré, ce qui va donner un axe neutre incliné par rapport à l'axe des (y) comme le montre la figure 3-2.

⁹ Certains auteurs et notamment L.Chambaud, ont développés une théorie de la flexion des pièces en béton-armé en tenant compte du béton tendu. En fait, ces théories n'ont pas connues de succès, d'une part en raison du faible gain de résistance obtenue, au prix d'une complication notable des calculs, et, d'autre part, parce que l'intervention du retrait provoque des contraintes de traction difficiles à évaluer, qui peuvent être à l'origine d'une fissuration précoce[2].

¹⁰ Les dimensions des sections élémentaires vont influencer sur la précision des résultats à obtenir. Plus elles sont petites, plus les résultats sont précis, seulement aux prix de beaucoup de calculs nécessitant pour cela l'apport d'un ordinateur puissant en temps d'exécution. Le choix d'un maillage de 1 mm² donne des résultats satisfaisants.

Cette position inclinée de l'axe neutre va engendrée au niveau de sa frontière un maillage de formes irrégulières¹¹ (triangulaire, trapézoïdal, et autres...).

Le système d'axe (OXY) est choisit de telle façon que le point "O" représente le point le plus comprimé de la section.

Le point élémentaire $m(x_i, y_j)$ peut se trouver dans l'un des quatre domaines I, II, III, ou IV représentés respectivement sur les figures (3-2), (3-3), (3-4), et (3-5).

L'axe neutre étant caractérisé par une inclinaison variant dans les limites suivante :

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Où :

θ - Inclinaison de l'axe neutre par rapport à l'axe des (y). Les deux positions extrêmes correspondent à un cas de chargement uni axial (0° par rapport à l'axe de forte inertie et 90° par rapport à l'axe de faible inertie).

Pour chaque inclinaison intermédiaire de l'axe neutre comprise entre 0° et 90° , il lui correspond un état de déformation dû à un cas bi axial.

Les figures (3-6), (3-7) et (3-8) représentent les trois états de déformation possibles quelque soit l'inclinaison de l'axe neutre. La première figure représente un état d'une section partiellement comprimée et les deux dernières un état d'une section entièrement comprimée.

A partir des figures (3-2), (3-6), (3-7), (3-8) et de l'hypothèse (c) citée dans la section (3-2), on peut écrire les équations suivantes :

¹¹ Nous n'allons pas nous intéresser au maillages de cette frontière vu que le maillage principal adopté est très faible (1mm^2).

$$Z_{ij} = X_i \cos \theta + Y_j \sin \theta \quad (3-1)$$

$$Z_{\max} = h \cos \theta + b \sin \theta \quad (3-2)$$

avec :

$$0 \leq Z_{ij} \leq Z_{\max} \quad (3-3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta \varepsilon \cdot Z}{Z_{\max}} \quad (3-4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_1 - \Phi \cdot Z_{ij} \quad (3-5)$$

$$\Delta \varepsilon = \Phi \cdot Z_{\max} \quad (3-6)$$

$$\Delta \varepsilon_{\max} = \Phi_{\max} \cdot Z_{\max} \quad (3-7)$$

avec :

$$\Delta \varepsilon_{\max} = 0.2\% \quad (3-8)$$

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{pour } Z < Z_{\max} \quad (3-9)$$

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad \text{pour } Z > Z_{\max} \quad (3-10)$$

Où :

h et b - Respectivement hauteur et largeur de la section composite;

x_i et y_j - coordonnées du centre de l'élément $m(x_i, y_j)$

ε_{ij} - Déformation au centre de l'élément;

ε_1 - Raccourcissement maximal;

Z - Position de l'axe neutre;

Z_{ij} - Distance de l'élément $m(x_i, y_j)$ à l'origine "O" du système de coordonnées;

ϕ - Courbure.

Connaissant la déformation dans l'élément (m), on peut déduire la contrainte en son centre à partir des modèles de comportement de l'acier et du béton cités dans la section (2-3).

L'effort dans l'élément (m) sera calculé à l'aide de la relation (3-11) ci-après :

$$\Delta P_{ij} = \Delta A_{ij} \cdot \sigma_{ij} \quad (3-11)$$

où :

ΔP_{ij} - Effort dans l'élément (m);

ΔA_{ij} - Aire de l'élément (m);

σ_{ij} - Contrainte dans l'élément (m).

Par sommation sur tous les éléments élémentaires, l'effort normal sera déterminé à l'aide de l'équation (3-12) ci-après :

$$P = \sum \Delta A_{s_{ij}} \sigma_{s_{ij}} + \sum \Delta A_{c_{ij}} \sigma_{c_{ij}} \quad (3-12)$$

Où

$A_{S_{ij}}$ et $A_{C_{ij}}$ - Respectivement aire de l'élément élémentaire en acier et de l'élément de béton;

$\sigma_{S_{ij}}$ et $\sigma_{C_{ij}}$ - Respectivement contrainte dans l'élément élémentaire en acier et dans l'élément de béton.

Les moments internes M_x et M_y respectivement par rapport à (x) et par rapport à (y), calculés par rapport au centre de gravité de la section composite de coordonnées $(b/2; h/2)$, seront déterminés par les équations (3-13a) et (3-13b) ci après :

$$M_x = \sum \Delta A_{s_{ij}} \sigma_{s_{ij}} \left(y_j - \frac{b}{2} \right) + \sum \Delta A_{c_{ij}} \sigma_{c_{ij}} \left(y_j - \frac{b}{2} \right) \quad (3-13a)$$

$$M_y = \sum \Delta A_{s_{ij}} \sigma_{s_{ij}} \left(\frac{h}{2} - x_i \right) + \sum \Delta A_{c_{ij}} \sigma_{c_{ij}} \left(\frac{h}{2} - x_i \right) \quad (3-13b)$$

3.3.2. Organigramme de génération des courbes moments-courbures :

La génération de ces courbes implique la manipulation des paramètres suivants: L'effort normal axial (P), les moments internes (M_x) et (M_y), la position (Z) de l'axe neutre par rapport au point (O), la courbure et l'angle d'inclinaison de l'axe neutre.

L'organigramme de la courbe ($M-\phi$) comprend les étapes suivantes :

Etape 1. On se donne une valeur de la charge axiale (P_1), par exemple une fraction de la charge de plastification (Nu^{12}) et son incrément (ΔP);

Etape 2. On se fixe une inclinaison de l'axe neutre en fonction de (θ) et son incrément ($\Delta\theta$), dans les limites ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

Etape 3. A partir de la courbure maximale calculée à l'aide de l'équation (3-6), on peut se fixer le nombre de points de la courbe à tracer, ce qui nous permettra de déterminer l'incrément de la courbure $\Delta\phi$. Le premier point de la courbure sera ($\phi_1 = \Delta\phi$), le second sera ($\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$) et le dernier sera $\phi_n = \phi_{\max}$. On se fixera donc une première valeur de la courbure égale à ϕ_1 .

Etape 4. Par itération successive de la position de l'axe neutre dans les limites fixées par l'équation (3-3), en utilisant la méthode NEWTON-RAPHSON, on peut calculer : P , M_x , M_y à l'aide des équations (3-12) à (3-13a et 3-13b) et (ϕ_{x1} et ϕ_{y1}) à l'aide des

¹² La charge de plastification est calculée en fonction des contraintes de calcul f_{sd} et f_{cd} de l'acier et du béton et elle est égale à: $Nu = f_{sd} \cdot A_s + f_{cd} \cdot A_c$

équations (3-14), (3-15a) et (3-15b) ci-après :

$$\phi_1 = \sqrt{\phi_{X1}^2 + \phi_{Y1}^2} \quad (3-14)$$

$$\phi_{X1} = \phi_1 \cdot \cos \theta \quad (3-15a)$$

$$\phi_{Y1} = \phi_1 \cdot \sin \theta \quad (3-15b)$$

Etape 5. A ce niveau de la procédure, on fait une comparaison entre la charge axiale (P) calculée par l'équation (3-12) avec la charge (P₁) prise au départ comme précisée à l'étape 1. Dans ce genre de situations, la comparaison se fera à l'aide des tests suivants :

TEST.1.- $P \leq 0$;

TEST.2.- $[(P - P_1) / P_1] \leq P_{\text{toléré}}$;

TEST.3.- $(P - P_1) < 0$;

TEST.4.- $(P - P_1) = 0$;

TEST.5.- $(P - P_1) > 0$.

Si l'un des tests 1 ou 3 est satisfait, on doit répéter les étapes 4 à 5 en augmentant la valeur de la position de l'axe neutre (Z);

Si le test 5 est vérifié, on doit diminuer la valeur de la position de l'axe neutre (Z) et répéter les étapes 4 à 5;

Par contre, si l'un des tests 2 ou 4 s'avère concluant, on vient d'obtenir le premier point des courbes recherchées.

<u>Etape 6.</u>	On augmente la courbure précédente en lui ajoutant l'incrément $\Delta\phi$ et on répète les
------------------------	--

	étapes 3 à 5 pour l'obtention du deuxième point des courbes et ainsi de suite jusqu'au dernier point de la courbure caractérisé par une courbure maximale.
--	--

La génération de ces courbes moments-courbures nécessite l'apport de l'outil informatique et il est quasiment impossible de les traiter manuellement. Pour cela un programme en FORTRAN (M-FI-XY.FOR) a été élaboré en ce sens.

Les figures (3-9a) et (3-9b) représentent les diagrammes des courbes moments-courbures pour une section composite de section rectangulaire 120x80x5 construits à partir des résultats donnés par ce programme.

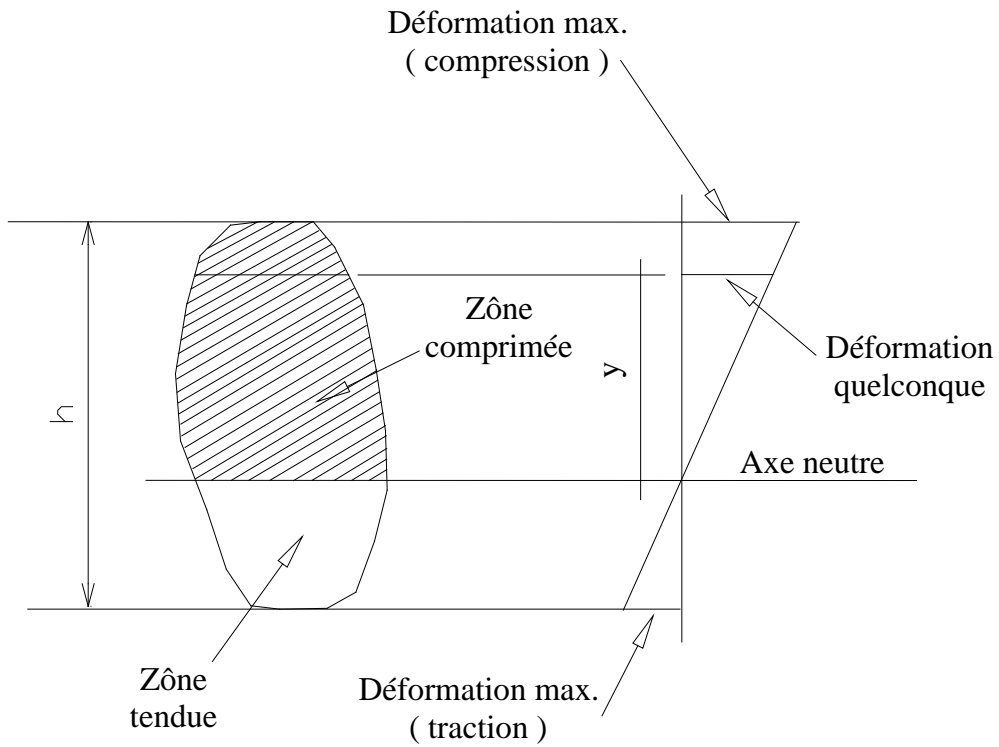


FIGURE 3.1. – DISTRIBUTION DES DÉFORMATIONS DANS UNE SECTION

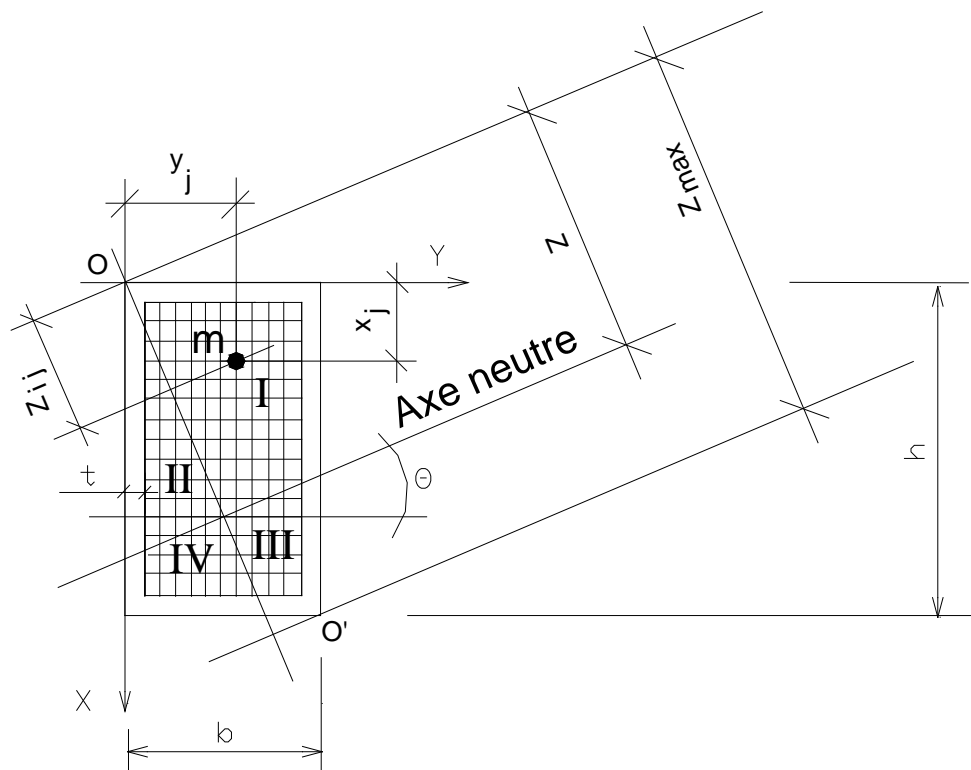


FIGURE 3.2. – DISCRETISATION DE LA SECTION COMPOSITE

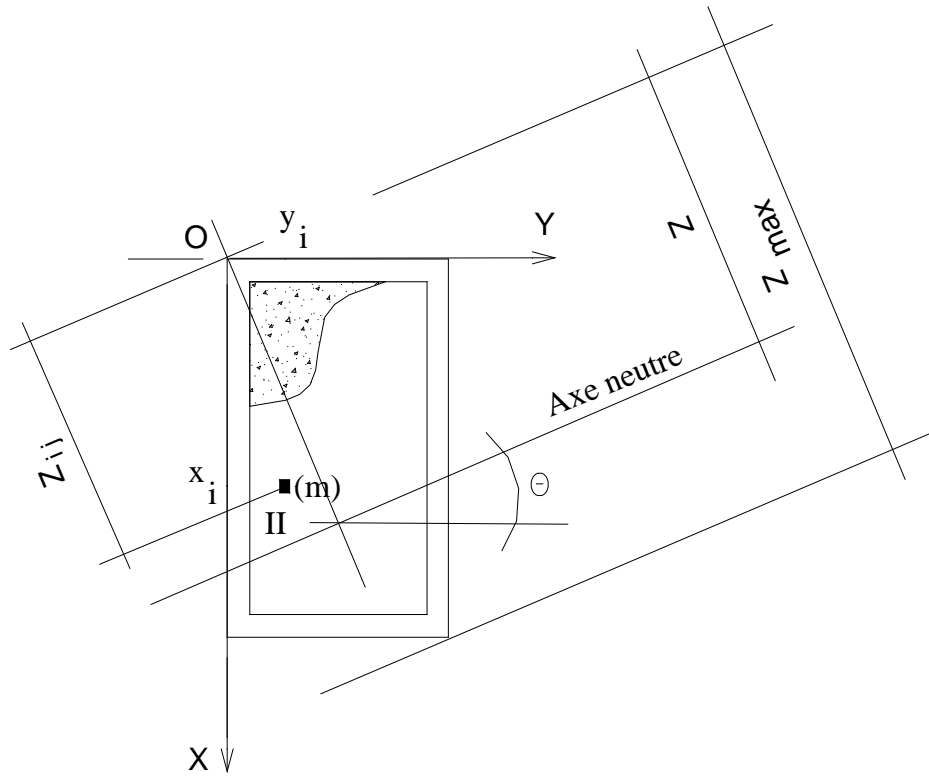


FIGURE 3.3. – POSITION DE L'ELEMENT (m) DANS A REGION II

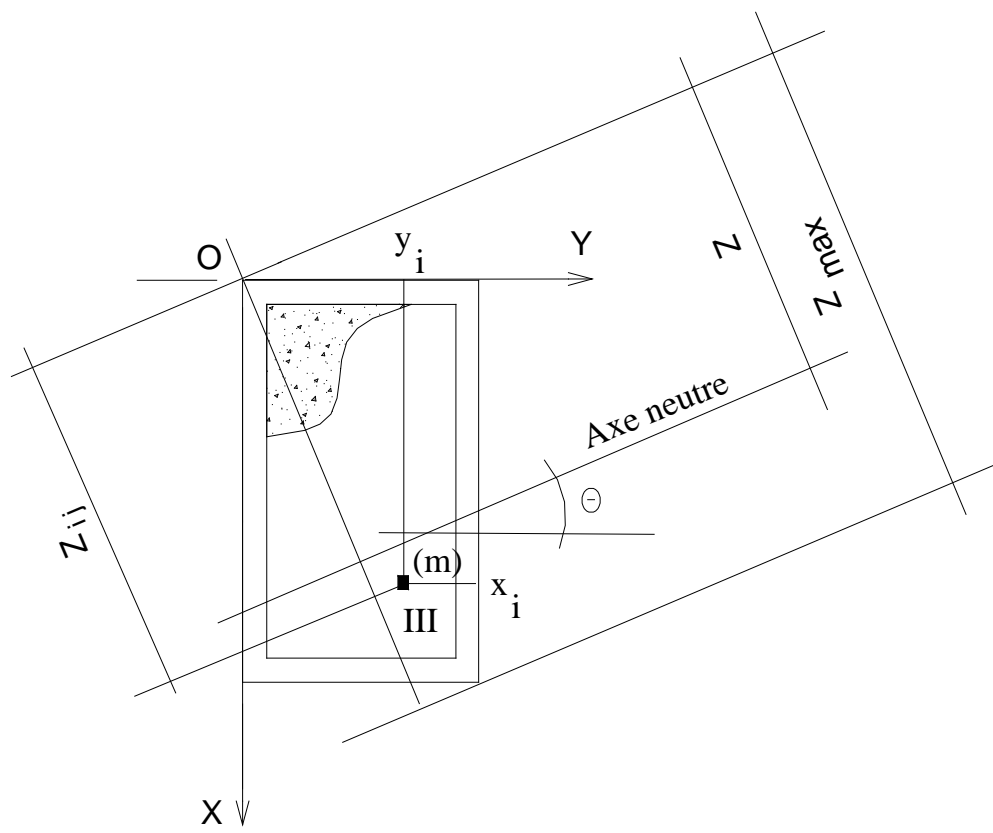


FIGURE 3.4. – POSITION DE L'ELEMENT (m) DANS A REGION III

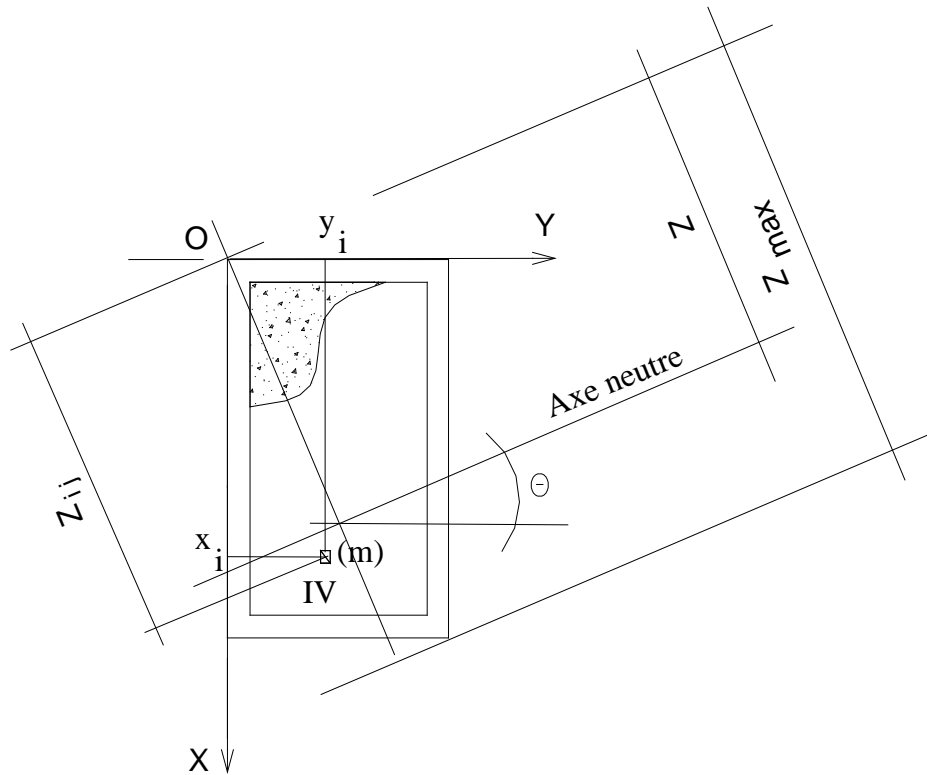


FIGURE 3.5. – POSITION DE L'ELEMENT (m) DANS A REGION IV

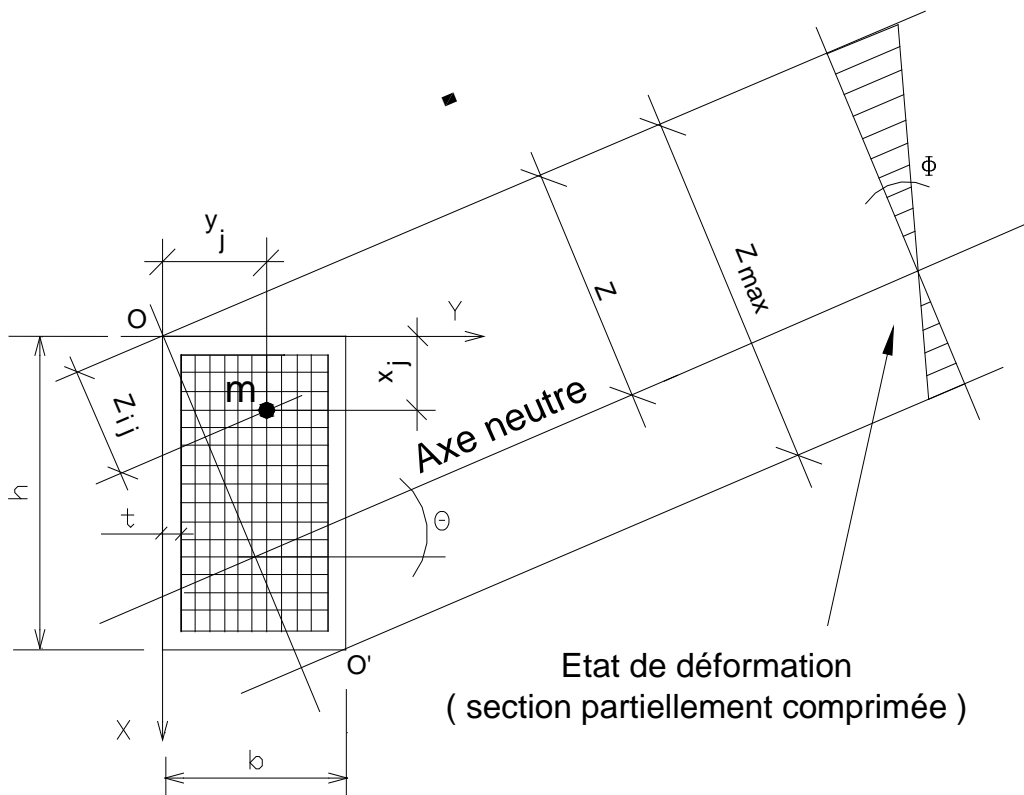


FIGURE 3.6. – ETAT DE DEFORMATIONS CARACTERISANT UNE SECTION PARTIELLEMENT COMPRIMEE

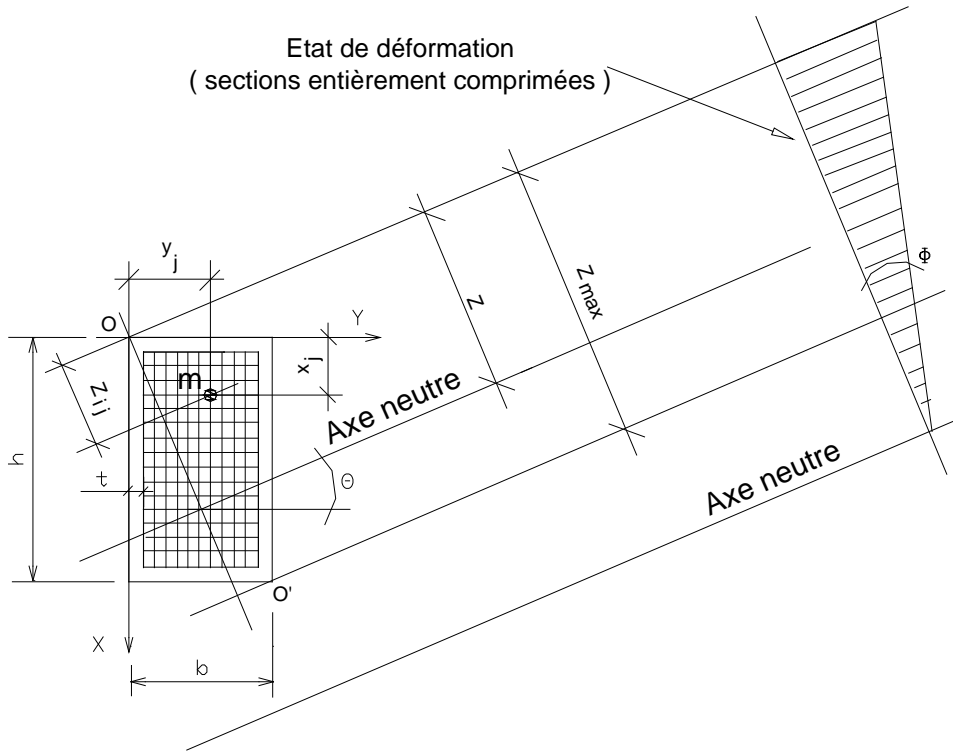


FIGURE 3.7. – ETAT DE DEFORMATIONS CARACTERISANT UNE SECTION ENTIEREMENT COMPRIMEE

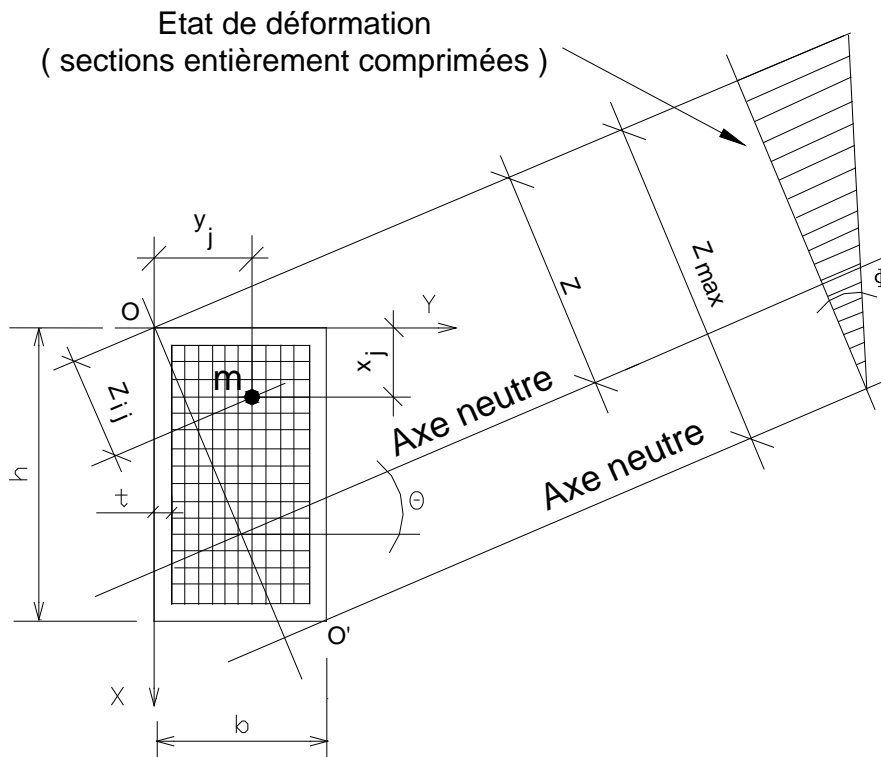


FIGURE 3.8. – ETAT DE DEFORMATIONS CARACTERISANT UNE SECTION ENTIEREMENT COMPRIMEE

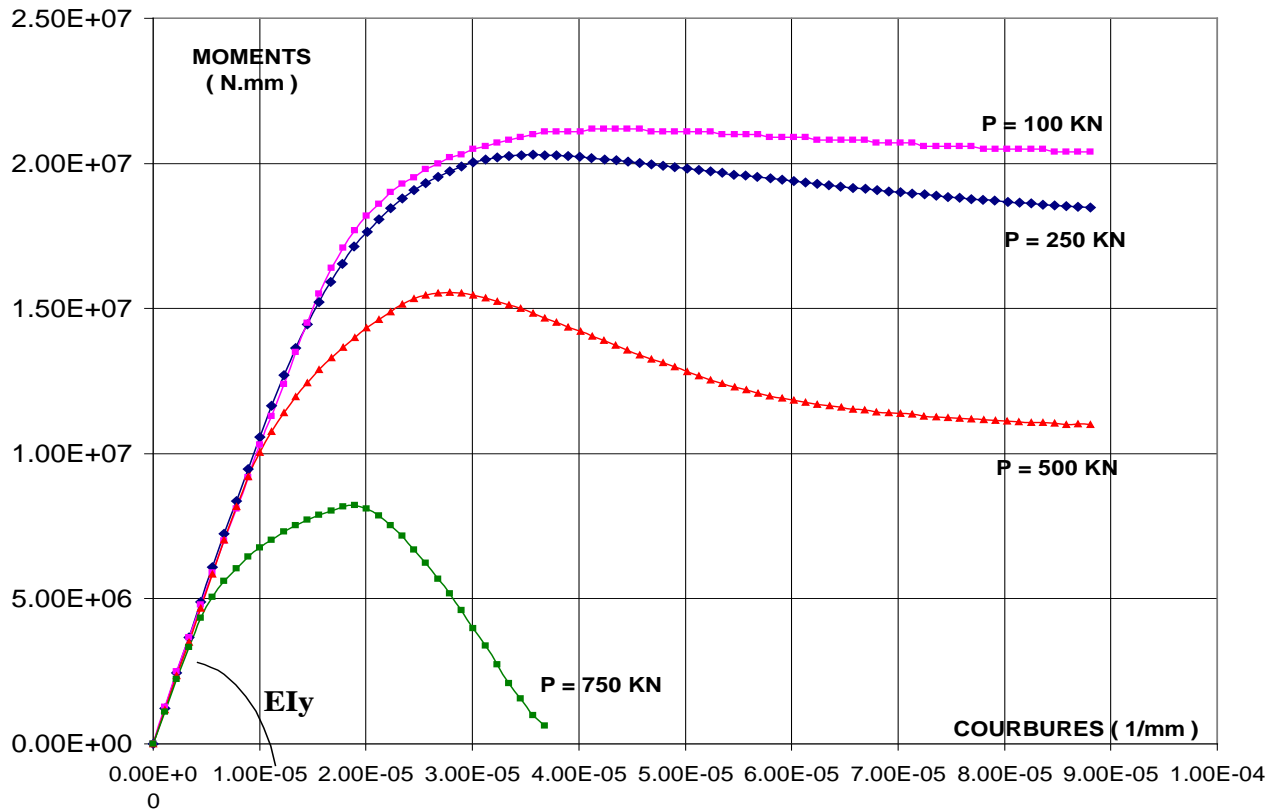


FIGURE 3.9a.- RELATION MOMENTS-COURBURES PAR RAPPORT A (Y-Y)

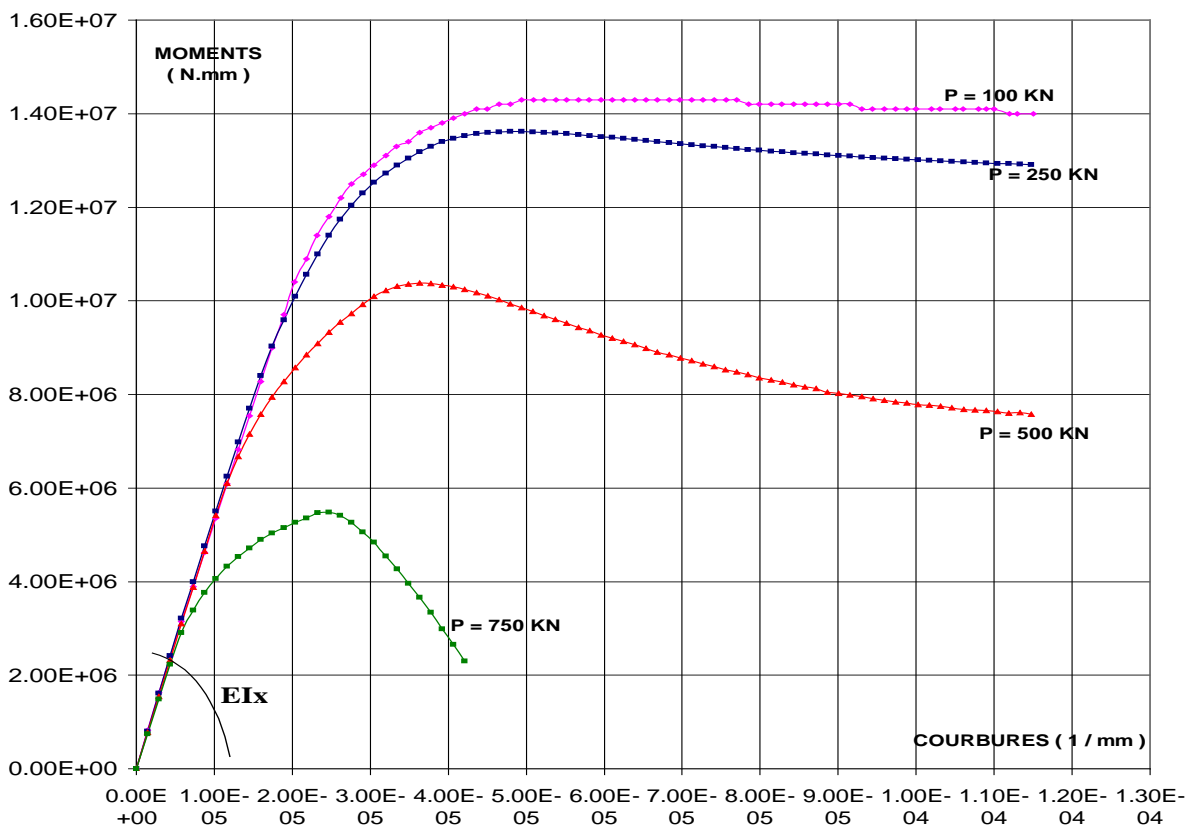


FIGURE 3.9b. - RELATION MOMENTS-COURBURES PAR RAPPORT A (x-x)

CHAPITRE IV

DETERMINATION DE LA CHARGE DE RUINE

PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

4.1. GENERALITES :

Dans le domaine de l'ingénierie, on se trouve confronter à des problèmes de la mécanique des structures et plus précisément en la détermination du champ de forces ou contraintes régnant dans une structure donnée. A titre d'exemple, on doit vérifier que les déplacements en quelques points particuliers de la structure se trouvent dans les limites autorisées.

Le calcul des contraintes doit se faire sous un système de forces extérieures et intérieures partout en équilibre et les déplacements doivent être continus : Ce sont les conditions d'équilibre et de compatibilité.

Donc, pour un problème donné, il est nécessaire de définir des équations donnant la solution, qui doivent avoir la satisfaction des conditions d'équilibre et de compatibilité. Dans ce genre de situations, on se trouve devant des difficultés de représentations des conditions réelles de la structure, c'est à dire la géométrie, le chargement et les propriétés intrinsèques des matériaux constituant la structure. Une autre difficulté réside en la résolution des équations, surtout lorsque le problème est de nature bi- ou tri-dimensionnelle, puisqu'il s'agit alors d'équations aux dérivées partielles.

La construction de la solution va être en général sous forme de développement en séries et pour obtenir une solution précise, il est alors nécessaire de prendre un grand nombre de termes de cette série. L'apport de l'ordinateur nous permet aujourd'hui de prendre un grand nombre de

termes dans les représentations en séries du champ de déplacements ou contraintes. On peut également utiliser la technique de la méthode des différences finies.

Toutes ces méthodes présentent l'avantage d'avoir marquée de leurs empreintes une histoire pleine de démonstrations rigoureuses de convergence et souvent elles mènent à des équations de formes simples.

Puis, il y eût l'apparition d'une nouvelle méthode, relativement récente, appelée : METHODE DES ELEMENTS FINIS (MEF). Cette méthode constitue une approche du problème de l'analyse dont l'idée de base, lorsqu'elle est appliquée à des problèmes de structure, est de représenter analytiquement un milieu continu en le subdivisant en domaines (ou éléments) possédant chacun ces propres fonctions.

Le choix de la forme de ces fonctions est fait de telle façon qu'elles assurent la continuité du comportement dans l'ensemble du milieu. Si le comportement d'une structure peut être exprimé par une équation différentielle unique, la MEF, avec les autres méthodes existantes, ne constitue qu'une des manières possibles de résolution approchée de cette équation. Par contre, si la structure est hétérogène, présentant plusieurs domaines ayant chacun sa propre équation, alors seule la MEF reste d'application directe.

Par rapport aux autres méthodes numériques en mécanique des structures, la MEF possède ces propres avantages qui sont :

1. La formation des équations est automatisée avec aisance;
2. Elle permet une représentation des structures et des chargements les plus complexes.

L'analyse des problèmes par éléments finis fût l'un des fruits des réussites technologiques des années cinquante et avec l'apparition des ordinateurs, les fondements de la MEF ont pus s'affermir rapidement. □

Comme il a été dit précédemment, l'analyse des structures par éléments finis consiste en sa discrétisation en plusieurs éléments de formes plus ou moins régulières. Parmi les éléments les plus utilisés en pratique, on peut citer :

A - **L'élément barre simple** : Avec d'autres éléments de même type, il sert à décrire des poutres en treillis et des ossatures à deux ou trois dimensions et il peut être associé à des éléments plaques pour servir de tirants ou raidisseurs.

B - **L'élément triangulaire et quadrilatère** : Ce sont des éléments soumis à des contraintes planes. En raison de leur utilité dans un grand nombre de problèmes pratiques, il sont à l'origine presque de tous les travaux de recherches théoriques.

C - **L'élément volumique** : De forme tétraédrique et parallélépipédique, il est généralement une généralisation tridimensionnelles des éléments de contraintes planes. Il est utilisé essentiellement dans le domaine de l'énergie nucléaire ainsi que dans les problèmes de mécanique des sols.

D - **Corps volumique de révolution** : Dans cette catégorie entre de nombreux problèmes concrets tels que réservoirs en béton et acier, réacteurs nucléaire, tuyères de fusées, etc.

E - **Plaques minces de flexion** : De forme triangulaire et quadrilatère, elles sont utilisées dans le domaine des coques, des plaque planes et des poutres à parois minces.

4.2. ANALYSE LINEAIRE DE LA STABILITE :

Dans ce chapitre, nous allons étendre la méthode des éléments finis à l'analyse des problèmes d'instabilité de l'élasticité linéaire. Ce qui nous amènera à déterminer, par une méthode de calcul, l'intensité des forces nécessaire pour faire flamber une structure élastique.

Certes la ruine d'une structure comprend sans doute des composantes d'instabilités et de déformations qui sont non-linéaires, mais l'approche du problème par une analyse linéaire est satisfaisante dans de nombreux cas et en particulier pour les poutres et pour les plaques planes [15].

Le traitement de l'instabilité élastique comprend deux étapes :

1. Formulations des équations des éléments.
2. Résolution du système complet.

Pour notre problème qui est , rappelons-le, la détermination de la charge de ruine dans les poteaux composites (mixtes) sous un chargement bi axial, on va utiliser l'élément barre prismatique ou l'élément poutre.

Le choix de ce genre d'élément est dû, d'une part à son utilisation fréquente en pratique dans des structures poteaux poutres, fermes, raidisseurs de plaques et de coques mais surtout parce que notre étude concerne les poteaux qui sont des éléments travaillant principalement en compression axiale ou en compression-flexions.

4.3. THEORIE GENERALE :

4.3.1. Approche du problème :

La structure dont il est question d'étudier est soumise à un chargement biaxial par l'application d'un effort (P) doublement excentré de (e_x) et (e_y), ce qui est équivalent à une charge (P) appliquée axialement plus deux moments de flexion comme représenté sur la figure (4-1 a et b).

A partir de cela, l'élément qui constituera la base de notre analyse est représenté en figure (4.2). L'interaction de ces différents efforts F_x , F_y , F_z , M_x et M_y donnent lieu à des phénomènes d'instabilité élastique complexes en comparaison avec les modes de flambage simple.

Une analyse indépendante est donc nécessaire pour déterminer les comportements en flexion dans les deux plans. Ce qui nous a amené à étudier les deux possibilités représentées par les figures (4.3 a et b) et (4.4 a et b). □

4.3.2. Formulation de la théorie :

Comme il a été précisé dans la section (4-3.1), l'analyse du cas bi axial va être basée sur l'élément prismatique de section constante représenté en figure (4.5).

On suppose que cet élément ne subit que des déformations longitudinales et de flexion. Les déformations d'effort tranchant sont négligées¹³.

Les déformations normales à la section droite pouvant être approchées par l'équation différentielle déformations-déplacements (4-1).

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (4-1)$$

¹³Dans les pièces fléchies à âmes pleine, les déformations dues à l'effort tranchant sont très petites devant celles du moment fléchissant et se trouvent de ce fait négligées dans la formulation des équations.

Le premier terme et le second sont les déformations longitudinales et de flexion. Le dernier terme représente la déformation associée au couplage entre l'allongement et la flexion dont l'origine peut être vu à partir de la figure (4.6).

La longueur \overline{dx} après déformation peut s'approcher à l'aide de l'équation suivante :

$$\overline{dx} = dx \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Le développement en série de cette équation donne :

$$\overline{dx} = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right] dx$$

On tronque la série après le deuxième terme, ce qui donne :

$$\overline{dx} = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx$$

A partir de cette équation, la déformation normale de l'effet du couplage est donc :

$$\frac{\overline{dx} - dx}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$$

L'énergie de déformation de l'élément est donnée par l'équation (4.2) :

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{vol} E \cdot \varepsilon_x^2 \cdot d(vol) \quad 4-2)$$

En remplaçant l'équation (4.1) dans l'équation (4.2), on obtient :

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{vol} \left[\frac{du}{dx} - z \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^2 E d(vol) \quad (4-3)$$

En posant :

$$d(vol) = dA \cdot dx \quad ; \quad \int_A dA = A \quad ; \quad \int_A Z \cdot dA = 0 \quad ; \quad \int_A Z^2 \cdot dA = I$$

On obtient :

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_L \left[A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + A \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{A}{4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 \right] E dx \quad (4-4)$$

En négligeant le terme de grand ordre $\frac{A}{4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4$, l'équation (4.4) devient :

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_L \left[A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + A \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] E dx \quad (4-5)$$

Sous l'hypothèse d'analyse avant flambage, la relation entre la force longitudinale (F_x) et l'allongement correspondant peut être exprimée linéairement à l'aide de l'équation (4.6).

$$F_x = EA \cdot \frac{du}{dx} \quad (4-6)$$

La valeur de (F_x) correspondant à une compression sera considérée comme négative. En remplaçant l'équation (4.6) dans l'équation (4.5), l'énergie de déformation de l'élément devient :

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_L \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4-7)$$

L'énergie de déformation se réduit à une forme de deux énergies découplées: Une énergie de déformation en tension notée (U_e^a) et une de déformation en flexion notée (U_e^f).

On peut donc écrire :

$$U_e = U_e^a + U_e^f \quad (4-8)$$

Avec :

$$U_e^a = \frac{1}{2} \int_L EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (4-9)$$

$$U_e^a = \frac{1}{2} \int_L \left[EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4-10)$$

Il est à noter que l'énergie de déformation (U_e^a) se rapporte à l'analyse longitudinale indépendante avant flambage. Mais comme le déplacement longitudinal est faible, nous allons le négliger dans notre formulation.

A partir de l'équation (4.10), on peut établir la relation d'Euler qui est donnée par l'équation (4.11) qui représente le flambage des poutres.

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} + F_x \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (4-11)$$

En fait, l'équation (4.11) représente l'équilibre entre les moments extérieurs et les moments intérieurs au niveau d'une section donnée.

A partir de la figure (4.7), essayons de retrouver l'équation (4.11). L'équation d'équilibre entre les moments extérieurs et les moments intérieurs donne :

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} + P.y = -Q.x + M_A$$

En dérivant deux fois par rapport a (x), on obtient :

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} + P \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (4-11')$$

On peut représenter le déplacement transversal (w) par une équation en fonction des déplacements aux nœuds w_1 , w_2 , θ_1 et θ_2 c'est à dire :

$$w = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} [N] \{ \Delta_f \} \quad (4-12)$$

Avec :

w_1 et w_2 - Les déplacements transversaux des nœuds 1 et 2.

θ_1 et θ_2 - Les rotations des nœuds 1 et 2.

On remarque que la fonction de déformée [N] n'a pas été précisée. Avec une bonne approximation, le déplacement transversal peut être approché à l'aide d'une fonction de forme cubique¹⁴ tel que :

$$w = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \quad (4-13)$$

En remplaçant l'équation (4.12) dans l'équation (4.11), on obtient :

$$EI \frac{d^4}{dx^4} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + F_x \frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4-14)$$

En utilisant la méthode des résidus pondérés et le critère de GALERKIN, l'équation (4.14)

devient :

$$\int_0^L \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} EI \frac{d^4}{dx^4} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \int_0^L \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} F_x \frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4-15)$$

En utilisant le théorème de GREEN, on peut écrire :

¹⁴La forme cubique avec laquelle le déplacement transversal est approché n'est valable que pour la flexion sans charge longitudinale.

$$EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_j}{dx^2} \right) dx + F_X \int_0^L \left(\frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \right) dx = 0 \quad (4-16)$$

A partir de l'équation (4.16), on peut écrire :

$$K_f = \left[EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_j}{dx^2} \right) dx \right] \quad (4-17)$$

$$K_g = \left[F_X \int_0^L \left(\frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \right) dx \right] \quad (4-18)$$

Avec :

K_f - Matrice de rigidité classique en flexion.

K_g - Matrice de rigidité introduisant les effets d'instabilité élastique dus à la force axiale longitudinale F_x .

La matrice de rigidité (K_g) peut être considérée comme un "incrément" apporté à la matrice de rigidité en flexion. Elle porte aussi le nom de "*matrice de rigidité incrémentale*" ou "*matrice géométrique*" puisqu'elle ne dépend que des données géométriques (dans notre cas la longueur L).

L'équilibre entre les moments extérieurs et les moments intérieurs peut être exprimé à l'aide de l'équation (4.19) ci-après :

$$\left[K_f \right] - F_X \left[K_g \right] = 0 \quad (4-19)$$

Il nous faut donc déterminer l'intensité de la force P pour que l'équation (4.19) soit satisfaite.

4.3.3. Détermination des matrices de rigidité élémentaires [Kf] et [Kg] :

Comme il a été précisé dans la section (4-3-1), nous allons faire deux études qui doivent vérifier l'équation (4.19) c'est à dire l'équation (4.11). A partir de la figure (4.2), nous allons dégager les deux cas d'analyses, qui doivent être précédés par une analyse indépendante avant flambage.

4.3.3.1. Analyse 1 :

Selon l'analyse 1, et en se référant à la figure (4.2), notre élément prismatique se présentera comme indiqué en figure (4.8). A partir de cette figure et en fonction des déplacements et rotations aux nœuds, on peut écrire :

$$\{ \Delta \} = \left[v_1 \quad \theta_{x2} \quad v_2 \quad \theta_{x2} \right]^T \quad (4-20)$$

Le déplacement transversal (v) est approché par :

$$v = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \quad (4-21)$$

Les déplacements angulaires ou rotations ($\frac{dv}{dz}$) des nœuds sont exprimés par l'équation (4.22) ci-après :

$$\theta_{x1} = - \frac{dv_1}{dz} \quad ; \quad \theta_{x2} = - \frac{dv_2}{dz} \quad (4-22)$$

Il est à noter qu'une rotation positive (>0), dans le sens des aiguilles d'une montre, provoque un déplacement transversal négatif.

En évaluant les déplacements (v) et les rotations ($-\frac{dv}{dx}$) aux points 1 et 2, on obtient :

$$v = N \{ \Delta \} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_{x1} \\ v_2 \\ \theta_{x2} \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

où : N_1, N_2, N_3 et N_4 sont les fonctions de déformées données par l'équation (4-24).

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2) & N_3 &= (3\xi^2 - 2\xi^3) \\ N_2 &= -x(\xi - 1)^2 & N_4 &= -x(\xi^2 - \xi) \end{aligned} \quad (4-24)$$

Avec :

$$\xi = \frac{x}{L}$$

En substituant les équations (4.24) dans les équations (4.17) et (4.18) et en intégrant le long de la longueur de l'élément, on obtient les matrices de rigidités $[Kfx]$ et $[Kgx]$ ci-après :

$$K_{FX} = EI_X \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

$$K_{GX} = F_{ZX} \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{-1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & \frac{-L}{30} \\ \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-L}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

4.3.3.2. Analyse 2 :

Selon l'analyse 2 et en se référant à la figure (4.2), l'élément prismatique se présentera comme indiqué sur la figure (4.9). En procédant de la même manière que pour l'analyse 1, on obtient les matrices de rigidités $[K_{fy}]$ et $[K_{gy}]$ ci-après :

$$K_{FY} = EI_Y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

$$K_{GY} = F_{ZY} \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{-1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & \frac{-L}{30} \\ \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-L}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

4.4. DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE [KV] :

Comme il a été précisé dans la section (4-1), l'étude d'une structure par éléments finis passe nécessairement par une discrétisation en sous-structures ou éléments. Notre poteau sera donc discrétisé en un certain nombre d'éléments¹⁵ (voir Fig. 4.10)

L'étude faite dans la section (4-3-3) nous a donnée les matrices de rigidité d'un élément. Il nous reste maintenant à déterminer le comportement général de toute la barre; ceci va être assuré à l'aide d'une matrice de rigidité générale appelée : Matrice de rigidité globale. Elle résulte de l'assemblage des matrices de rigidité de chaque élément provenant de la discrétisation de la structure principale.

¹⁵ La précision des résultats dépend du nombre d'éléments discrétisé. Plus il est grand, et plus la précision est grande. Dans l'étude de l'instabilité élastique, on tend vers une solution exacte sinon très satisfaisante à partir de quatre éléments[15].

En substituant les équations (4.30) dans (4.31), on obtient :

$$\begin{aligned}
 P_i = & \left(K_{ii}^A \Delta_i^A + K_{i2}^A \Delta_2^A + \dots + K_{i8}^A \Delta_8^A \right) + \\
 & \left(K_{ii}^B \Delta_i^B + K_{i2}^B \Delta_2^B + \dots + K_{i10}^B \Delta_{10}^B \right) + \\
 & \left(K_{ii}^C \Delta_i^C + K_{i1}^C \Delta_1^C + \dots + K_{i11}^C \Delta_{11}^C \right) + \\
 & \left(K_{ii}^D \Delta_i^D + K_{i1}^D \Delta_1^D + \dots + K_{i11}^D \Delta_{11}^D \right)
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

En vertu de la condition de compatibilité des déplacements, le déplacement en (i) est le même pour les éléments A, B, C et D, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 P_i = & \left(K_{ii}^A + K_{ii}^B + K_{ii}^C + K_{ii}^D \right) \Delta_i + \left(K_{i1}^C + K_{i1}^D \right) \Delta_1 + \\
 & \left(K_{i2}^A + K_{i2}^B + K_{i2}^C + K_{i2}^D \right) \Delta_2 + \dots + \\
 & \left(K_{i11}^C + K_{i11}^D \right) \Delta_{11}
 \end{aligned} \tag{4-33}$$

L'équation (4.33) peut être écrite sous la forme suivante :

$$P_i = \left(K_{ii} \Delta_i + K_{i1} \Delta_1 + K_{i2} \Delta_2 + \dots + K_{i11} \Delta_{11} \right) \tag{4-34}$$

L'équation (4.34) est la forme finale recherchée applicable à toute la structure. Elle est appelée : Equation de rigidité globale □, et les termes K_{ii} , K_{il} , sont appelés coefficients de rigidité globale.

Les éléments de la matrice de rigidité globale vont être pour une commodité de calcul stockés dans un vecteur en utilisant une routine appropriée.

4.5. PROCEDURE DE DETERMINATION DE LA CHARGE DE RUINE :

L'étude des deux analyses va être concrétiser par l'obtention de la charge critique qui sera soit F_{zx} , soit F_{zy} , selon que la perte de stabilité se fera dans le plan (Y-Z) ou (X-Z). La procédure consiste à déterminer quel est l'incrément de charge (F_{zx}) ou (F_{zy}) nécessaire pour que l'équation (4.11) soit satisfaite.

4.6. ORGANIGRAMME DE LA PROCEDURE :

ETAPE. 1 - On se donne une charge initiale (P) et son incrément.

ETAPE. 2 - On se fixe les excentricités (e_x) et (e_y) puis on détermine l'inclinaison de l'axe neutre ($M-\phi$).

ETAPE. 3 - A partir des données des étapes 1 et 2, on génère les courbes ($M-\phi$) comme précisé dans la section (3-3-2).

ETAPE. 4 - On se fixe des déplacements transversaux ainsi que leurs incréments.

ETAPE. 5 - A l'aide des courbes ($M-\phi$), on calcule les rigidités de flexion dans les deux plans en interpolant linéairement en fonction des courbures.

ETAPE. 6 - On calcule les matrices de rigidité [K_f] et [K_g] de chaque élément.

ETAPE. 7 - On forme les matrices de rigidité globales [K_v].

ETAPE. 8 - On calcule les forces extérieures aux nœuds.

ETAPE. 9 - Résolution du système d'équation linéaire.

ETAPE.10 - On calcule les vecteurs courbures.

ETAPE.11 - On calcul les moments extérieurs.

ETAPE.12 - A partir des courbes ($M-\phi$) générées à l'étape 3 et en fonction des courbures, on calcule les moments intérieurs. Une interpolation linéaire est utilisée en ce sens.

ETAPE.13 - On compare ensuite les résultats obtenus aux étapes 11 et 12.

Si $M_{ext} = M_{int}$: l'équilibre est atteint. On garde les résultats et on répète les étapes 1 à 13.

L'égalité entre M_{ext} et M_{int} peut être estimée avec une tolérance admissible selon la précision de nos calculs.

Si $M_{ext} \neq M_{int}$: dans ce cas de situation, on utilise une technique de convergence pour obtenir la solution. On utilisera pour cela la méthode NEWTON-RAPHSON.

Pour un déplacement transversal donné (δ), il est procédé un nombre d'itérations pour trouver la charge P (correspondant au déplacement transversal δ) qui vérifie l'équation (4-11) qui est en fait la vérification de l'égalité du moment intérieur (M_{int}) et du moment (M_{ext}). Un ensemble de points (δ, P) est ainsi trouvée (voir tableaux 4-1a et 4-1b et figures 4-13a et 4-13b). Le tracé des courbes δ, P donne lieu à un PEAK (charge de ruine) au delà duquel, quelque soit le nombre d'itération, la vérification de l'égalité entre le moment intérieur et le moment extérieur n'est plus possible.

Vu que cette procédure (étape 1 à 13) est très longue et nécessite l'apport de l'outil informatique (ordinateur puissant en temps d'exécution), un programme en FORTRAN (MEF.FOR) a été élaboré en ce sens.

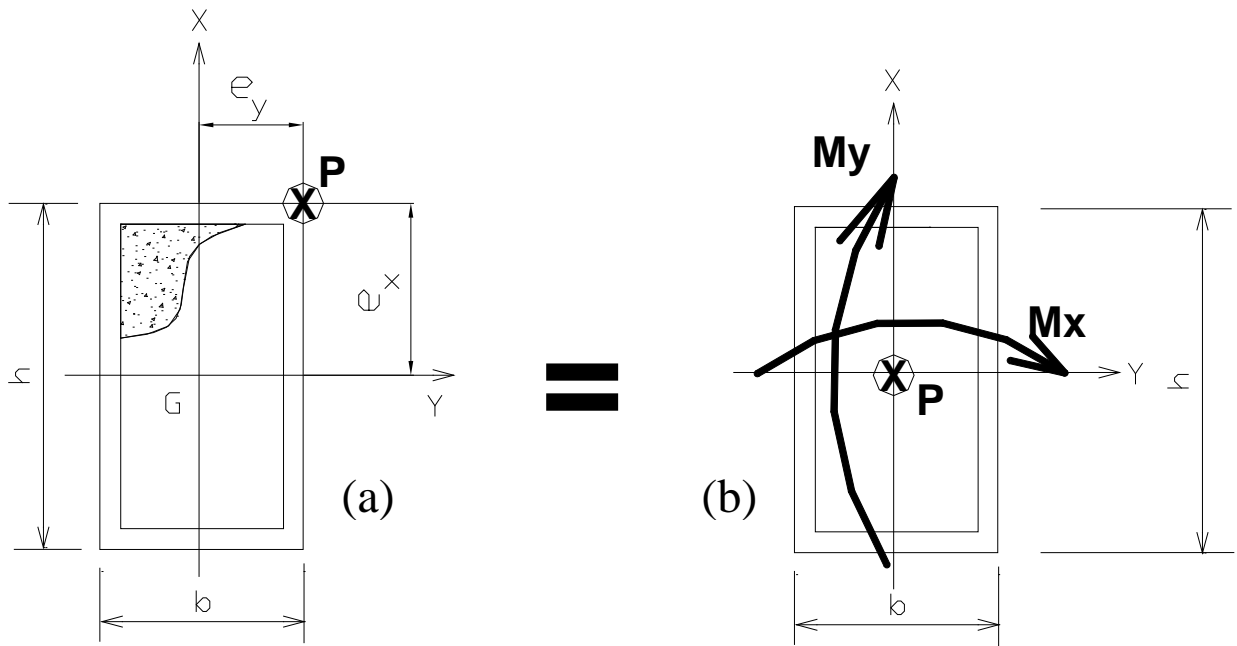


FIGURE 4.1. - SECTION SOUS CHARGE (P) DOUBLEMENT EXCENTREE

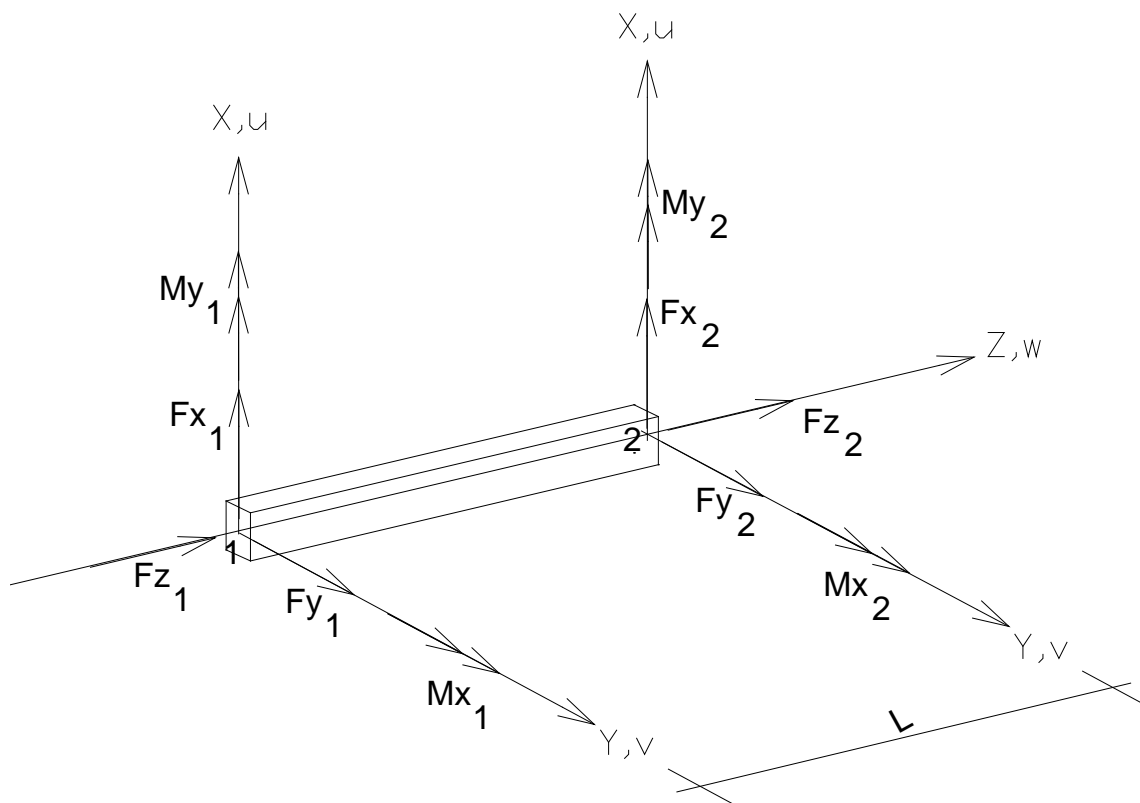


Figure 5 - MODELISATION ELEMENT BARRE en FLEXION et FLAMBAGE COMBINES

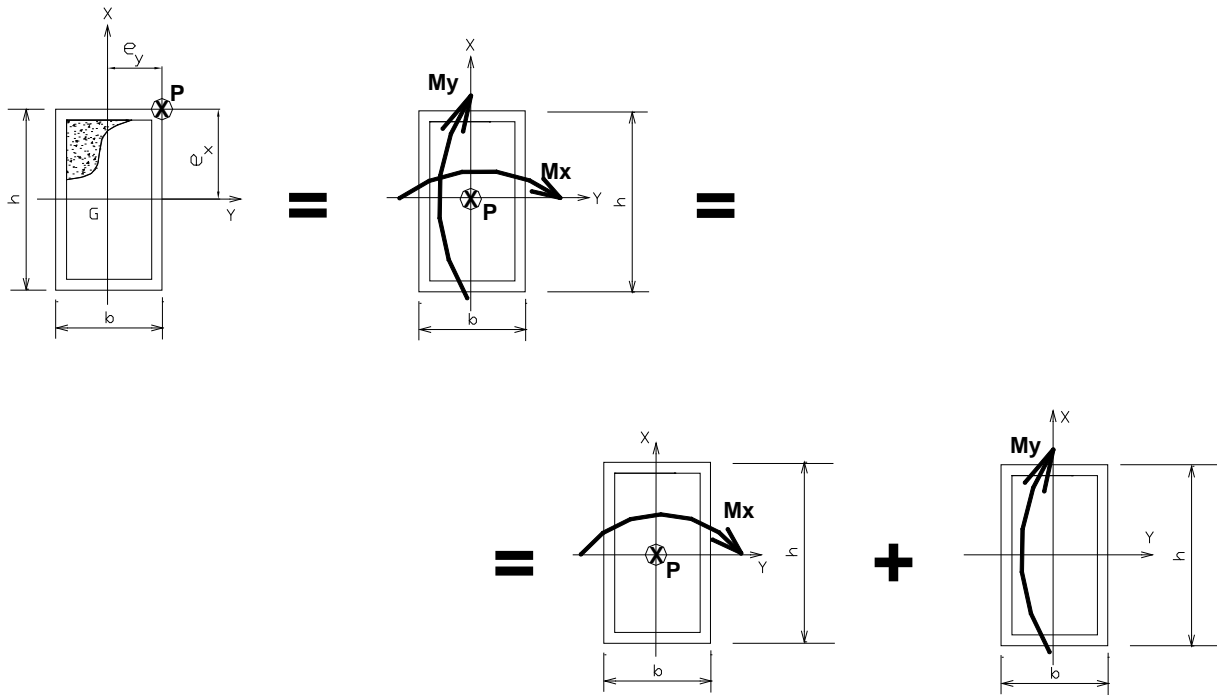


FIGURE 4.3. - ANALYSE 1 - FLAMBEMENT ET FLEXION COMBINES DANS Y - Y

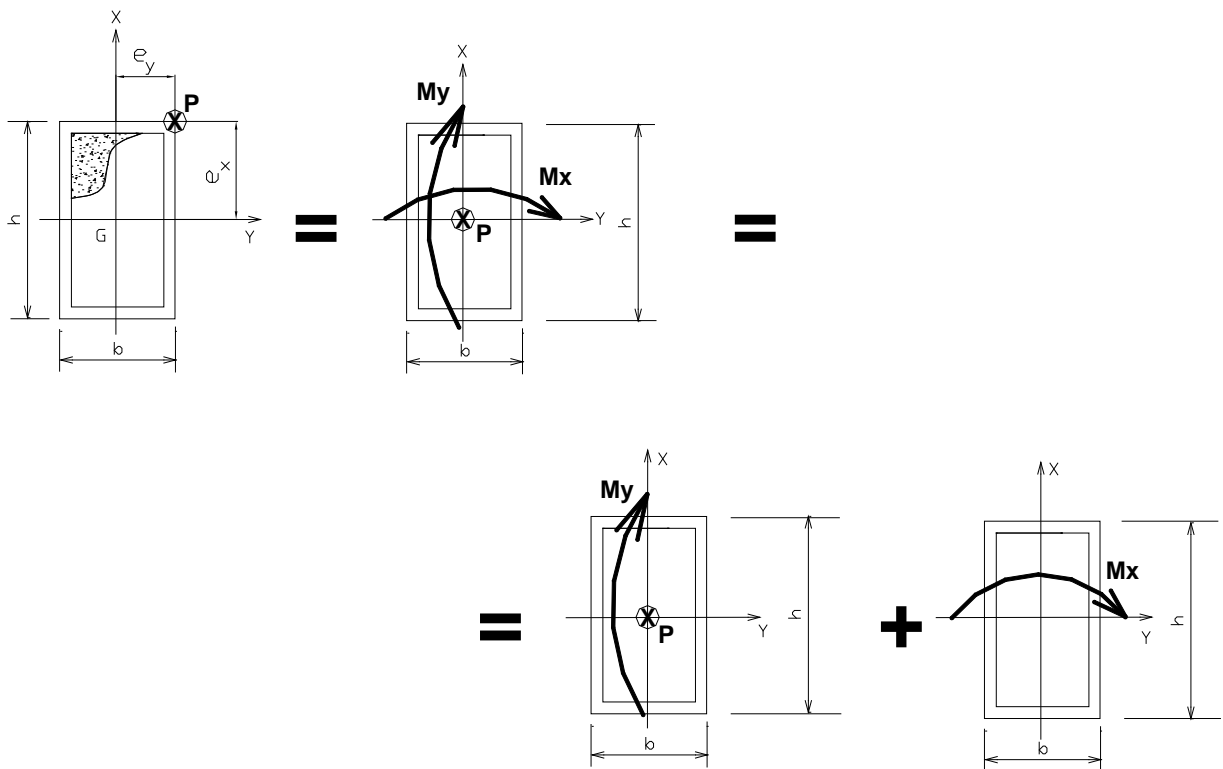


FIGURE 4.4. - ANALYSE 2 - FLAMBEMENT ET FLEXION COMBINES DANS X - X

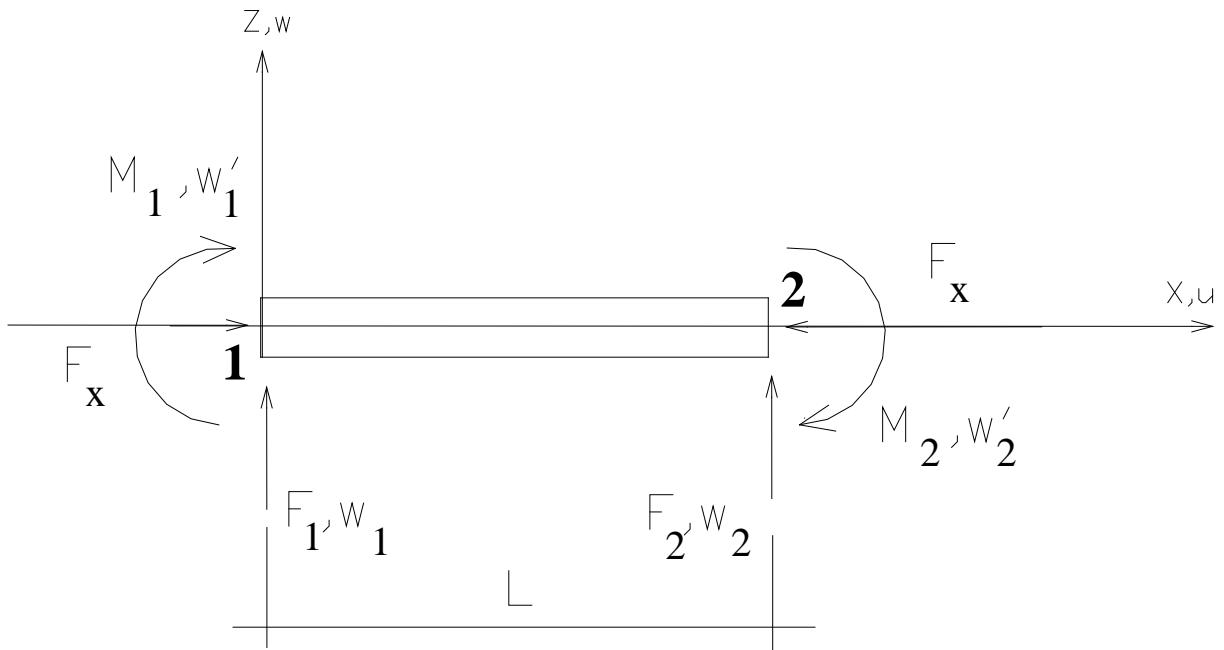


FIGURE 4.5. – BARRE PRISMATIQUE EN FLEXION

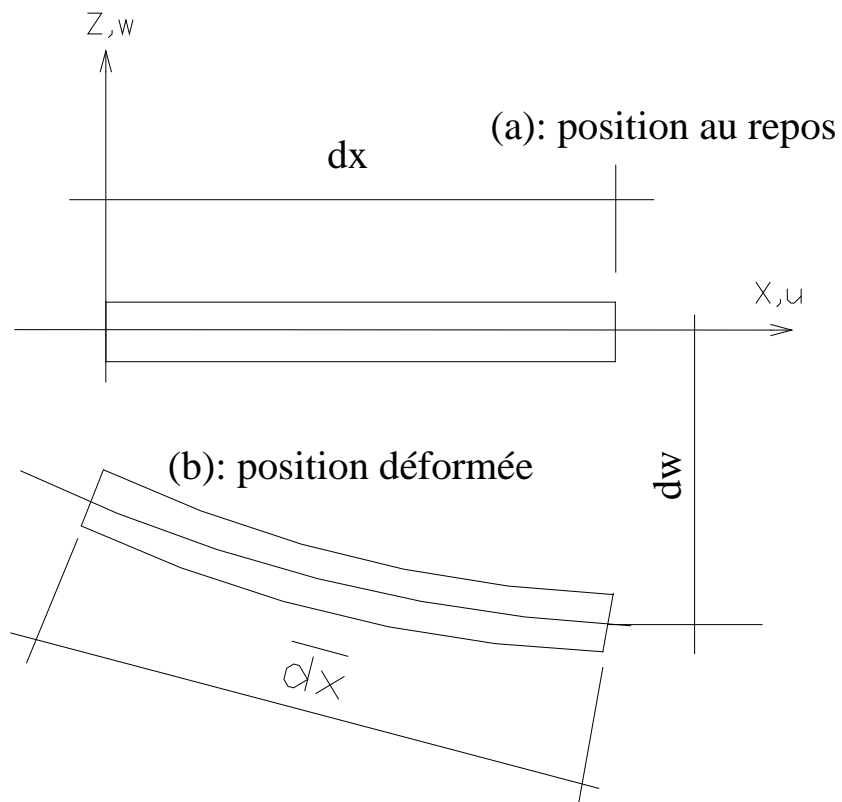


FIGURE 4.6. – FIBRE EEMENTAIRE

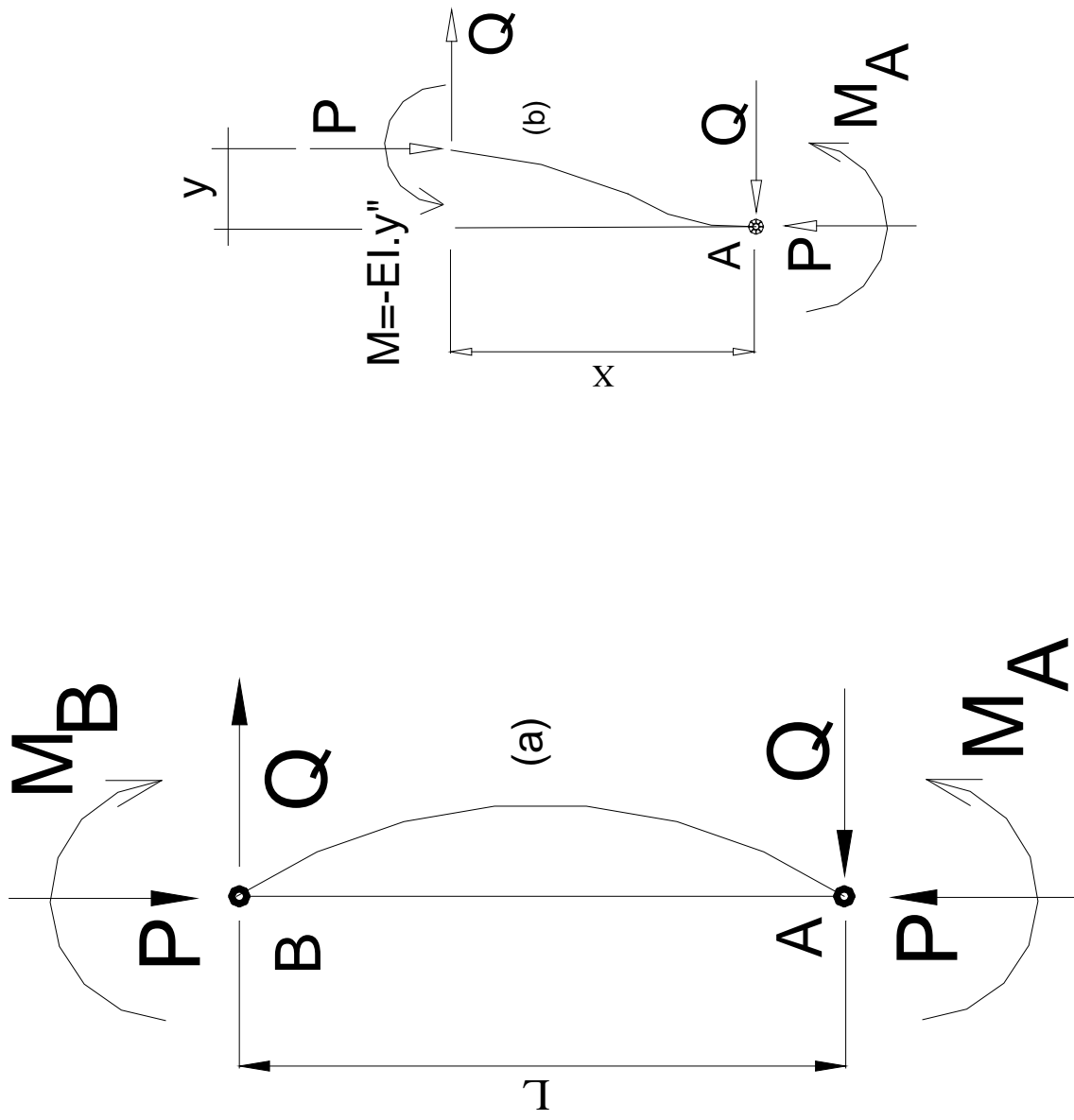


FIGURE 4.7. – POTEAU SOLLICITE EN COMPRESSION FLEXION

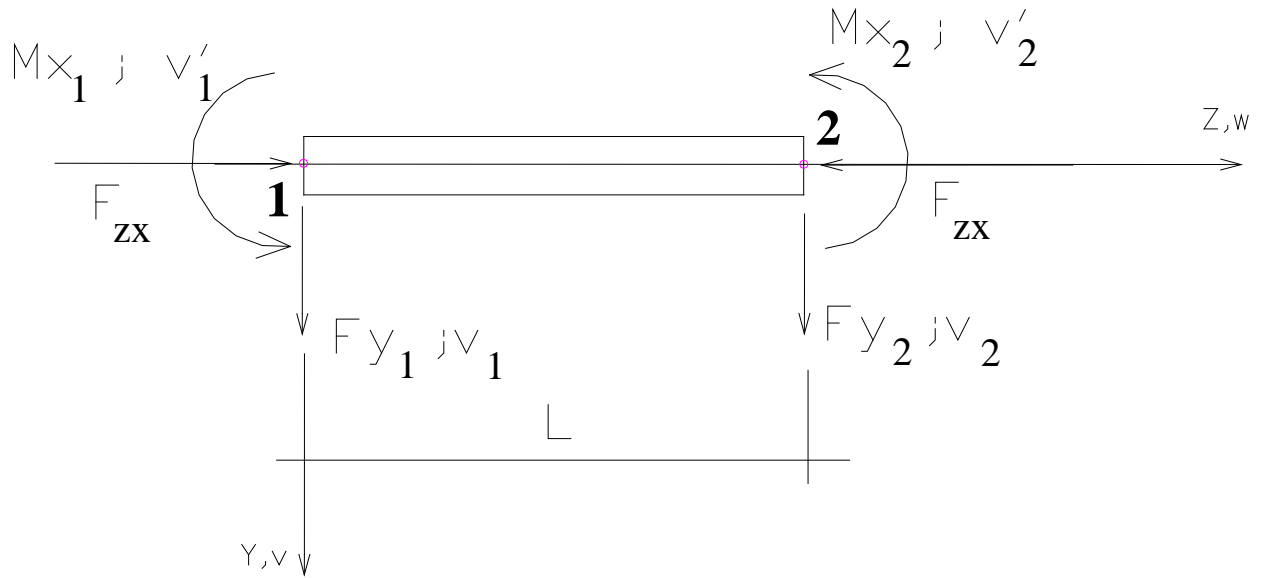


FIGURE 4.8. – BARRE PRISMATIQUE SELON L'ANALYSE 1.

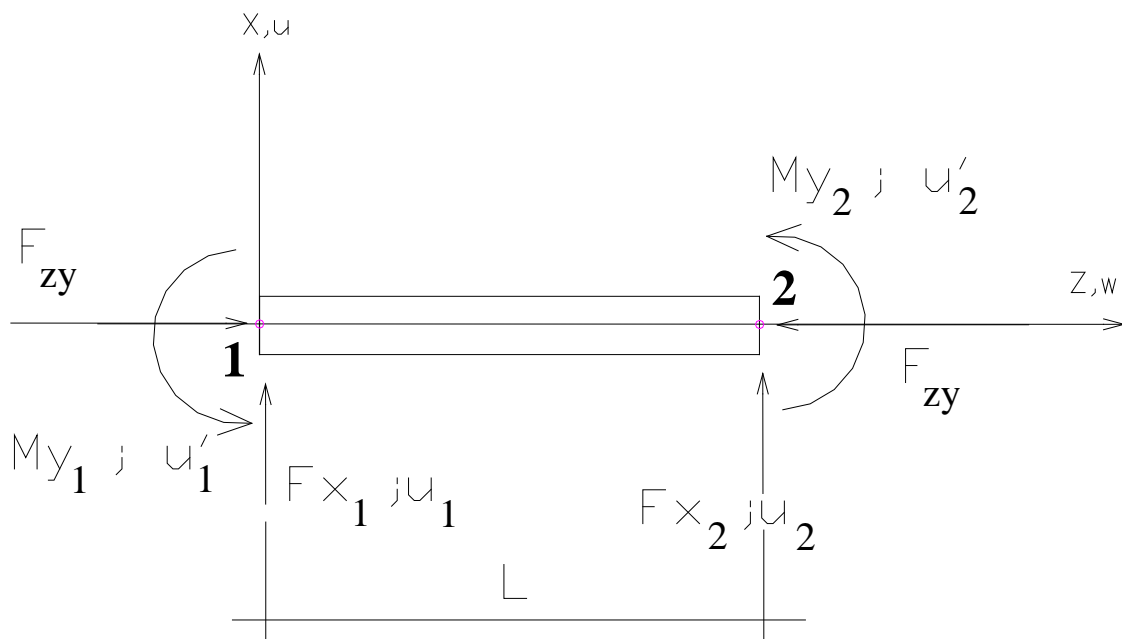


FIGURE 4.9. – BARRE PRISMATIQUE SELON L'ANALYSE 2.

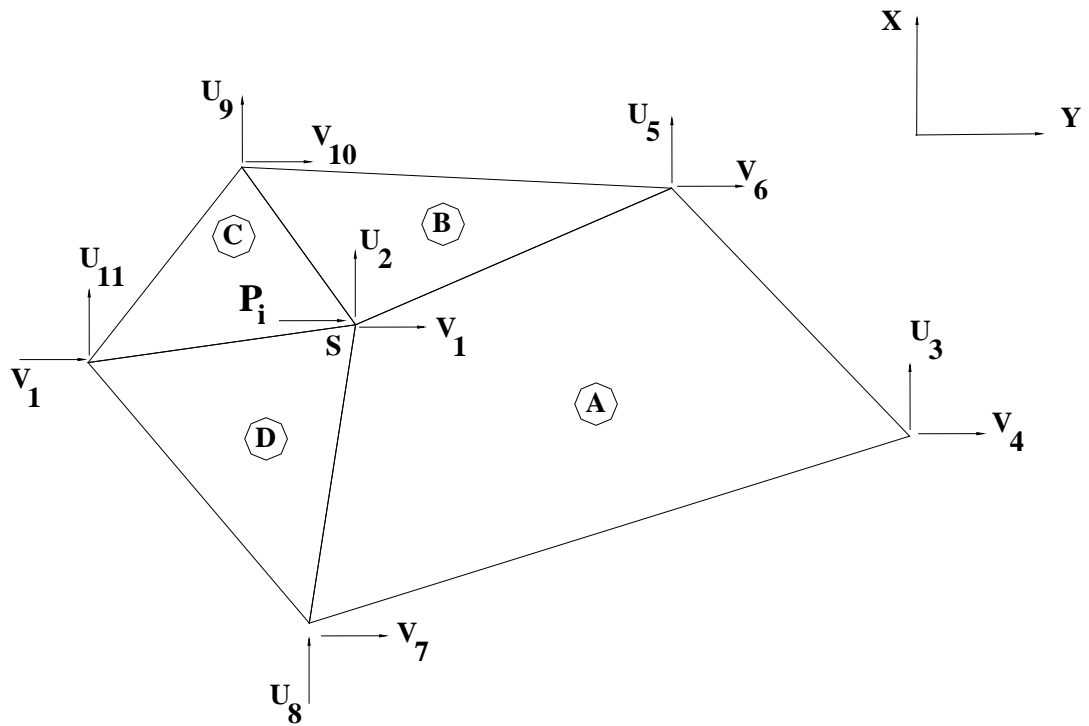


FIGURE 4.11. – REPRESENTATION D'UNE STRUCTURE QUELCONQUE

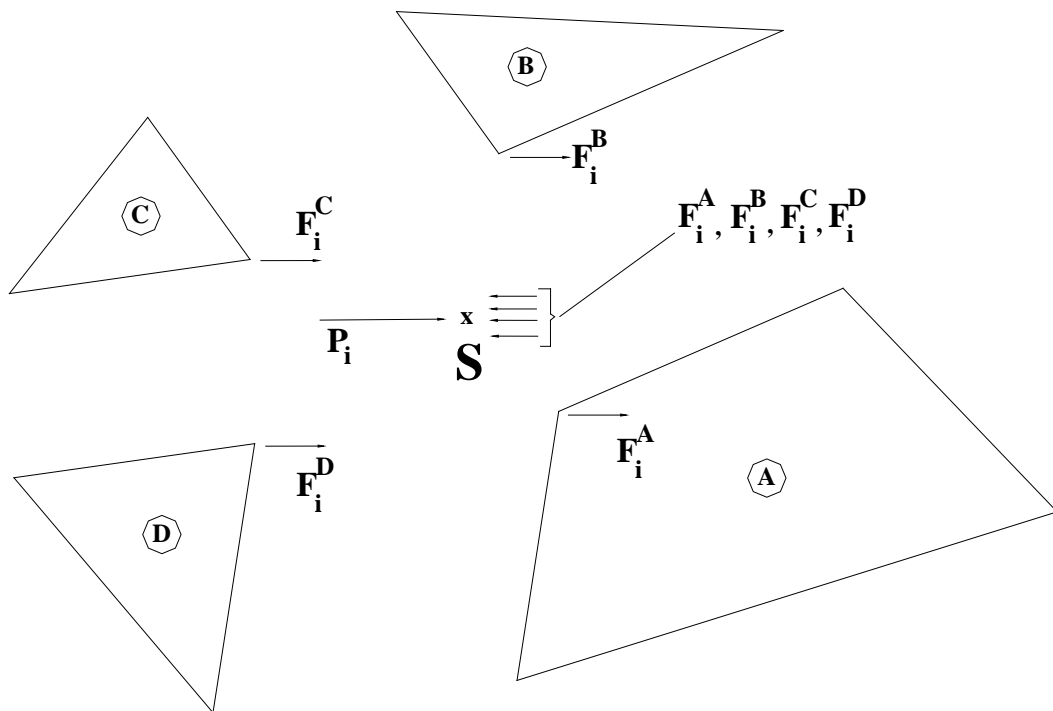
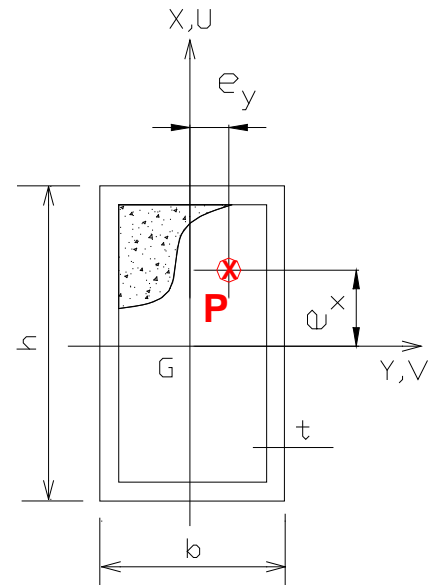


FIGURE 4.12. – ETUDE DE L'EQUILIBRE DANS LA DIRECTION (X)

RESULTATS THEORIQUES				
M.E.F. - CAS EXY1				
P (KN)	U (mm)	V (mm)	Mx (KN.m)	My (KN.m)
50	1.625	2.375	0.918	1.281
100	3.50	5.50	2.150	2.75
125	4.50	7.00	2.875	3.562
150	5.50	9.00	3.750	4.425
175	6.50	12.00	4.900	5.337
200	8.00	14.00	6.00	6.400
225	9.00	18.00	7.650	7.425
250	10.00	24.00	10.00	8.500
253	11.00	28.00	11.13	8.855
254	11.00	28.00	11.17	8.890
255	11.00	*****	*****	8.925
260	11.00	*****	*****	9.100



CAS EXY1

Section 120 x 80 x 5

Longueur poteau : 3175 mm

Excentricités : $e_x = 24$ mm

$e_y = 16$ mm

Nbr. Elements M.E.F. = 10

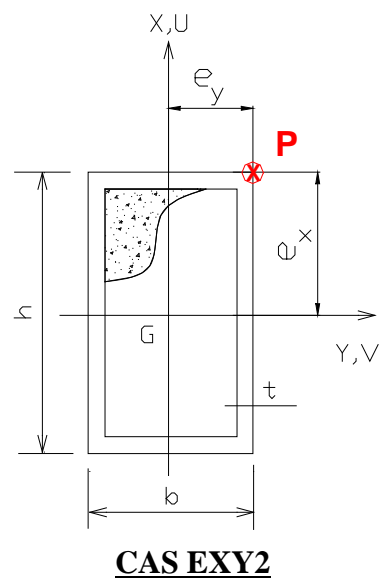
$F_s = 380$ N/mm²

$F_{cu} = 45$ N/mm²

$E_s = 239$ KN/mm²

TABLEAU (4-1a) – RESULTATS THEORIQUES (MEF) EN FLEXION BIAxiaLE

RESULTATS THEORIQUES				
M.E.F. - CAS EXY2				
P (KN)	U (mm)	V (mm)	Mx (KN.m)	My (KN.m)
50	4.00	6.00	2.30	3.20
100	9.00	14.00	5.40	6.90
120	11.00	18.00	6.96	8.52
130	12.00	20.00	7.80	9.36
140	13.00	22.00	8.68	10.22
145	14.00	24.00	9.28	10.73
146	14.00	24.00	9.34	10.80
147	15.00	28.00	10.00	11.00
150	15.00	/	/	11.25



Section 120 x 80 x 5

Longueur du poteau : 3175 mm

Excentricités : $e_x = 60$ mm

$e_y = 40$ mm

Nbr. Elements M.E.F. = 10

$F_s = 350$ N/mm²

$F_{cu} = 44$ N/mm²

$E_s = 226$ KN/mm²

TABLEAU (4-1b) – RESULTATS THEORIQUES (MEF) EN FLEXION BIAXIALE

Les notations utilisées dans les tableaux (4-1a) et (4-1b) sont les suivantes :

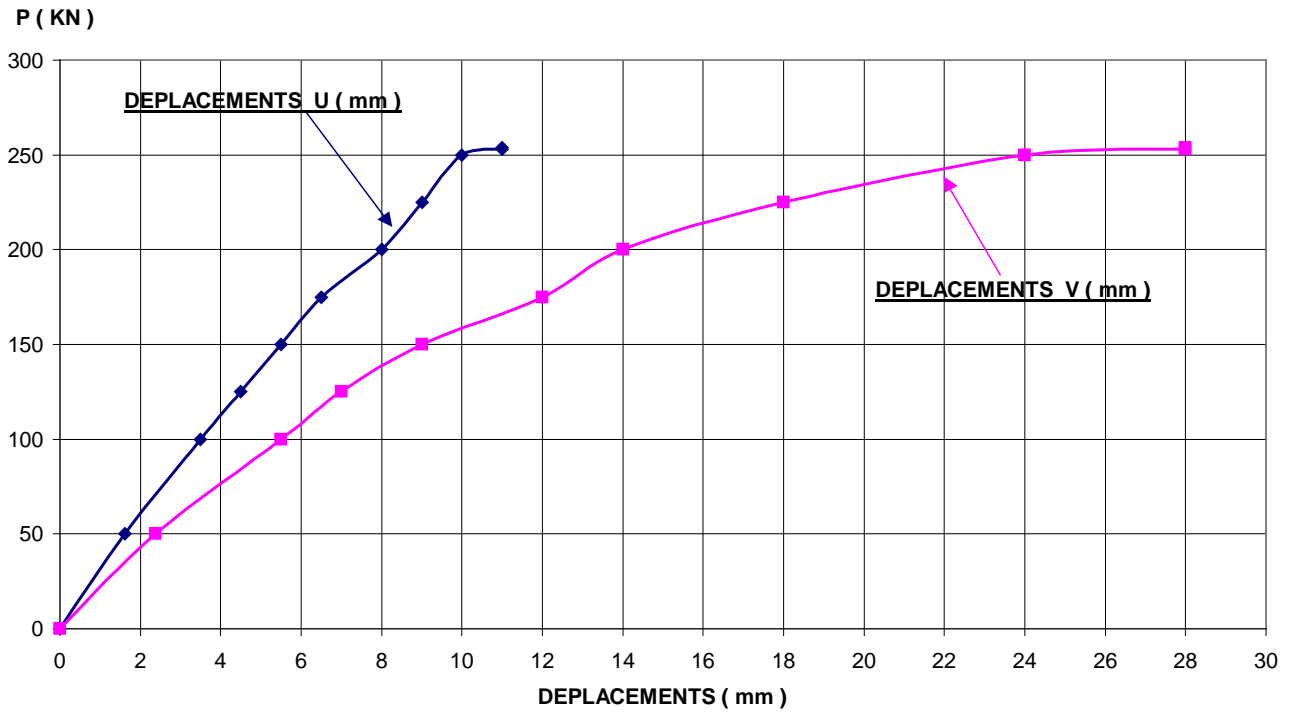
P : Charge de compression doublement excentrée appliquée au poteau.

U et V : Respectivement déplacements latéraux à mi-hauteur dans les plans X-X et Y-Y.

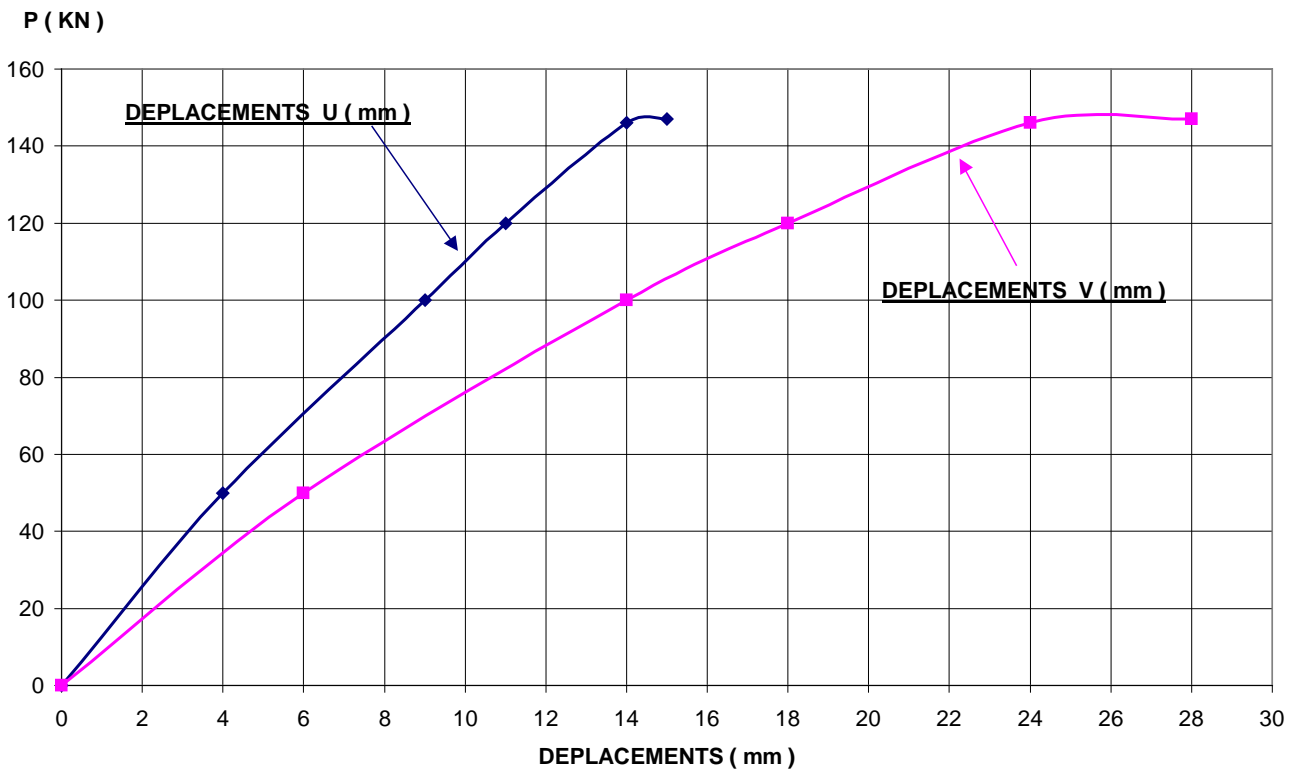
Mx et My : Respectivement moments à mi-hauteur par rapport à X et à Y avec :

$$M_x = P(e_y + v) \text{ et } M_y = P(e_x + u)$$

*Les cases vides marquées d'un (*****) signifient que pour la charge P donnée, la condition d'équilibre entre le moment extérieur et le moment intérieur n'est pas satisfaite.*



**FIGURE 4-13a – RELATIONS CHARGES-DEPACEMENTS THEORIQUES
(M.E.F. - CAS EXY1) EN FEXION BIAXIALE**



**FIGURE 4-13b – RELATIONS CHARGES-DEPACEMENTS THEORIQUES
(M.E.F. - CAS EXY2) EN FEXION BIAXIALE**

CHAPITRE V

DETERMINATION DE LA CHARGE DE RUINE

AVEC UNE DEFORMEE COSINUS (COSINE WAVE)

5.1. GENERALITES :

L'expérimentation en laboratoire effectuée sur des éléments (quelque soit le type de section) sollicités par des efforts de compression, montre que la ruine des pièces se manifeste selon l'importance de leurs élancements.

Pour les éléments courts de faibles élancements, on peut déterminer la courbe d'interaction entre la charge appliquée et le moment interne développé, seulement dans cette dépendance il n'est pas tenu compte de l'effet de flambement.

Cependant, le comportement des pièces élancées (faible section et grande longueur) est différent de celui des pièces courtes. La compression (axiale ou excentrée) produit un effet qui ne se manifeste pas ou se manifeste très faiblement chez les éléments de faible élancement. Cet effet c'est le déplacement latéral qui va en augmentant sous chargement croissant.

Pour les poteaux sollicités par un chargement uni axial (excentricité dans un seul plan), la représentation graphique de la relation charge- déplacement (Fig. 5-1) comprend deux branches caractérisant deux états: L'un stable (branche ascendante) et l'autre instable (branche descendante). Ces deux branches sont caractérisées par un maximum définit (PEAK) auquel il lui correspond une charge maximale délimitant les deux états.

Dans le cas d'un chargement bi axial (Fig. 5-2) présentant une double excentricité (e_x) et (e_y), la relation entre la charge et le déplacement le long de chaque axe reste

fondamentalement inchangée. Si (u) et (v) sont respectivement les déplacements dans les plans (XZ) et (YZ), les relations entre charges et déplacements par analogie au cas uni axial seront représentées sur la figure (5-3).

Cependant, les déplacements le long des deux axes n'augmentent pas nécessairement dans le même sens sous un chargement croissant.

Pour la détermination de la charge maximale (PEAK) en fonction de la relation charge déplacement, l'analyse va se faire en étudiant la forme d'équilibre de flexion à partir des moments extérieurs et intérieurs.

Les moments extérieurs sont ceux calculés en fonction de la charge extérieure appliquée excentriquement de (e_x) et de (e_y) et les moments intérieurs seront déterminés à partir des relations moments courbures exposées au chapitre 3.

5.2. DETERMINATION DE LA FORME D'EQUILIBRE :

5.2.1. Hypothèses :

En plus des hypothèses citées dans la section (3-2), on ajoutera celles qui suivent : □

- Vu que les déformations sont petites, on va appliquer la théorie des petites déformations ;
- L'effet de voilement (voir section 2-4-3) et l'effet de torsion de la section transversale du composite sont négligés ;
- L'effet de l'effort tranchant sur la courbure et les déplacements est négligé.

5.2.2. Approche utilisée :

La résolution de ce problème peut se faire par une approche simple en assimilant la déformée du poteau à une cosinusoïde (COSINE WAVE) dont l'équation est la suivante :

$$y_o = f_o \cdot \cos \frac{\pi Z}{L} \quad (5-1)$$

où : y_0 - Amplitude de la déformée à la distance Z .

f_0 - Amplitude maximale de la déformée à $Z = 0$.

Dans le cas d'un chargement bi axial, l'approche se fera à l'aide des équations (5-2a) et (5-2b) ci-après :

$$U = U_m \cdot \cos \frac{\pi Z}{L} \quad \square \quad (5-2a)$$

$$V = V_m \cdot \cos \frac{\pi Z}{L} \quad (5-2b)$$

où : U et V - Déplacements du poteau respectivement dans les plans (x) et (y) à la distance Z

(voir figure 5-2).

U_m et V_m - Déplacements maximums du poteau au milieu de la longueur (voir figure 5-2).

En partant de l'hypothèse des petites déformations et vu qu'en pratique, il n'est toléré que de très faibles flèches dans les éléments structuraux (car les lignes élastiques sont presque très plates), les courbures (ϕ_x) et (ϕ_y) peuvent être exprimées en fonction des déplacements u et v par les équations différentielles suivantes :

$$\phi_x = \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} \quad \square (5-3a)$$

$$\phi_y = \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \quad (5-3b)$$

Les courbures (ϕ_x) et (ϕ_y) le long des axes (x) et (y) peuvent être exprimées par les relations suivantes :

$$\phi = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} \quad (5-4a)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\phi_y}{\phi_x} \right) \quad (5-4b)$$

En combinant les équations (5-2a), (5-2b), (5-3a) et (5-3b), les courbures (ϕ_X) et (ϕ_Y) peuvent être exprimées par les équations (5-5a) et (5-5b) ci-après :

$$\phi_X = \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(V_m \cdot \cos \frac{\pi Z}{L} \right) = V_m \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi Z}{L} \quad \square (5-5a)$$

$$\phi_Y = \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(U_m \cdot \cos \frac{\pi Z}{L} \right) = U_m \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi Z}{L} \quad (5-5b)$$

En introduisant l'effet des imperfections géométriques et de manque de droiture¹⁶ dans les poteaux, leurs déformées dans les deux plans peuvent être exprimées par les équations (5-6a) et (5-6b) ci-après :

$$U_o = U_{om} \cdot \cos \frac{\pi Z}{L} \quad \square \quad (5-6a)$$

$$V_o = V_{om} \cdot \cos \frac{\pi Z}{L} \quad (5-6b)$$

De la même façon que pour (ϕ_X) et (ϕ_Y), les courbures initiales dues aux imperfections sont données par les équations (5-7a) et (5-7b) ci-après :

$$\phi_{ox} = V_{om} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi Z}{L} \quad \square (5-7a)$$

$$\phi_{oy} = U_{om} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi Z}{L} \quad (5-7b)$$

En introduisant la notion de la courbure nette (différence entre la courbure totale et la courbure due aux imperfections géométriques), et sachant que dans notre cas les déplacements

¹⁶ Les théories existantes sont presque toutes basées sur des barres idéales (par exemple celle d'Euler) parfaitement rectilignes, ce qui n'est jamais le cas en pratique. En effet, les pièces en aciers quelque soit le type présentent toutes des défauts de plusieurs natures: défauts de rectitude, de tolérances de laminage, de centrage d'effort, de montage au chantier, et d'homogénéité (par exemple le module d'élasticité E de l'acier n'est pas tout à fait constant suite aux contraintes résiduelles de laminage).

sont maximums au milieu de la longueur de flambement (origine des axes au milieu de la longueur du poteau), on aura pour ($Z=L/2$) :

$$\bar{\phi}_x = \phi_x - \phi_{ox} = \frac{\pi^2}{L^2}(V_m - V_{om}) \quad \square(5-8a)$$

$$\bar{\phi}_y = \phi_y - \phi_{oy} = \frac{\pi^2}{L^2}(U_m - U_{om}) \quad (5-8b)$$

où : $\bar{\phi}_x$ et $\bar{\phi}_y$ - Courbures nettes selon (x) et (y) ;

ϕ_x et ϕ_y - Courbures totales selon (x) et (y);

ϕ_{ox} et ϕ_{oy} - Courbures dues aux imperfections selon (x) et (y).

□

5.3. PROCEDURE ET ORGANIGRAMME DE DETERMINATION DE LA CHARGE DE RUINE :

5.3.1. Procédure :

La forme d'équilibre en tout point du poteau est définie par la condition (5-9) ci-après :

$$M_{ext} = M_{int} \quad (5-9)$$

A partir de la figure (5-2), les moments extérieurs et les moments intérieurs seront calculés par les formules (5-10a) et (5-10b) ci-après :

$$M_x^{ext} = P.(e_y + v) \quad (5-10a)$$

$$M_y^{ext} = P.(e_x + u) \quad (5-10b)$$

Les moments intérieurs seront déduits à partir des relations moments courbures exposées au chapitre 3 en fonction des courbures nettes par rapport à (x) et par rapport à (y).

5.3.2. Organigramme :

L'organigramme suivant va nous permettre d'aboutir à la condition d'équilibre donnée par l'équation (5-9). Il comprend les étapes suivantes :

ETAPE 1. On se donne une valeur de la charge initiale et son incrément

ETAPE 2. On lit les déformations initiales au milieu du poteau dues au manque de droiture.

ETAPE 3. On se fixe des déplacements au milieu de la longueur du poteau ainsi que leurs incréments.

ETAPE 4. On calcule les courbures nettes en utilisant les équations (5-8a) et (5-8b).

ETAPE 5. On calcule les moments extérieurs à l'aide des équations (5-10a) et (5-10b).

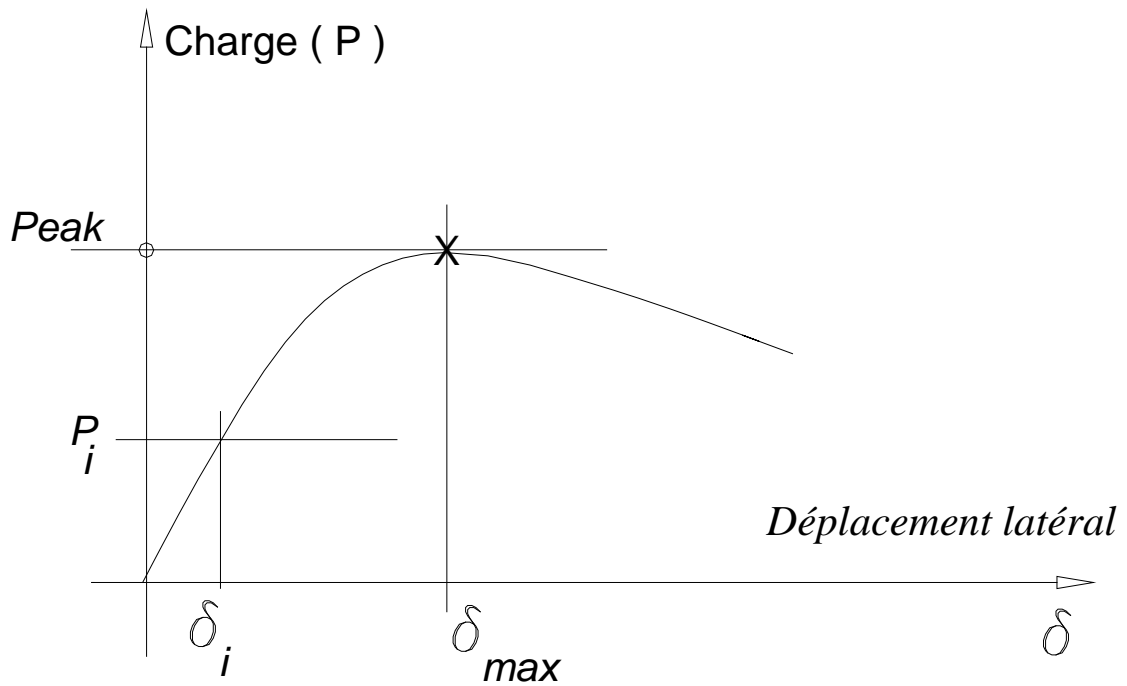
ETAPE 6. On déduit, à partir des courbes moments courbures exposées au chapitre 3, les moments intérieurs en fonction des courbures nettes déterminées à l'étape 4.

ETAPE 7. Au niveau de cette étape, une comparaison se fait entre les moments extérieurs et les moments intérieurs. Comme l'analyse se fait dans un plan donné, un point est certainement caractérisé par les paramètres $(P, M_x, \Phi_x \text{ et } v)$ et $(P, M_y, \Phi_y \text{ et } u)$. L'ensemble des points (P,u) et (P,v) qui correspond à l'égalité entre les moments intérieurs et les moments extérieurs donnera lieu à un PEAK (voir tableaux 5-1a et 5-1b et figures 5-4a et 5-4b). Dans le cas où la condition (5-9) n'est pas satisfaite, une technique de convergence appropriée est à utilisée, par exemple celle de NEWTON-RAPHSON.

ETAPE 8. On augmente ensuite la charge et on répète les étapes 2 à 7.

ETAPE 9. Le nombre d'itération des étapes 2 à 7 est limité en fonction de la précision des résultats qu'on veut obtenir. S'il est dépassé, on arrêtera la procédure et en fonction des différents résultats c'est à dire des différents points obtenus à l'étape 7, on essayera d'évaluer la charge de ruine.

Vu la complexité de la procédure et le nombre important de calcul et d'itération, un programme en langage FORTRAN (COSWAVE.FOR) a été établi pour déterminer la charge de ruine d'un poteau dont la forme de la déformée a été assimilée à une cosinusoïde (COSINE WAVE).



**FIG. 5.1. – RELATION CHARGES – DEPLACEMENTS
POUR UN CHARGEMENT UNIAxiaL**

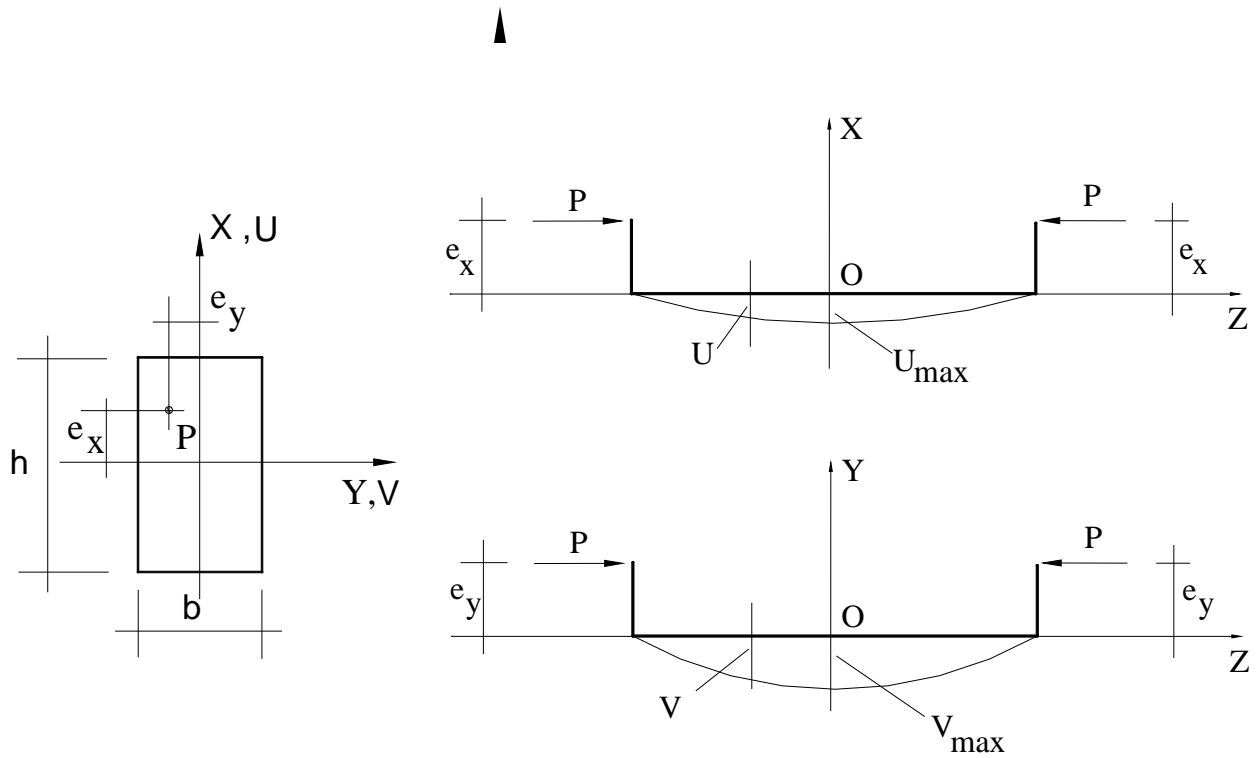


FIG. 5.2. – DEPLACEMENTS (U) et (V) DANS UN CAS BIAxiaL

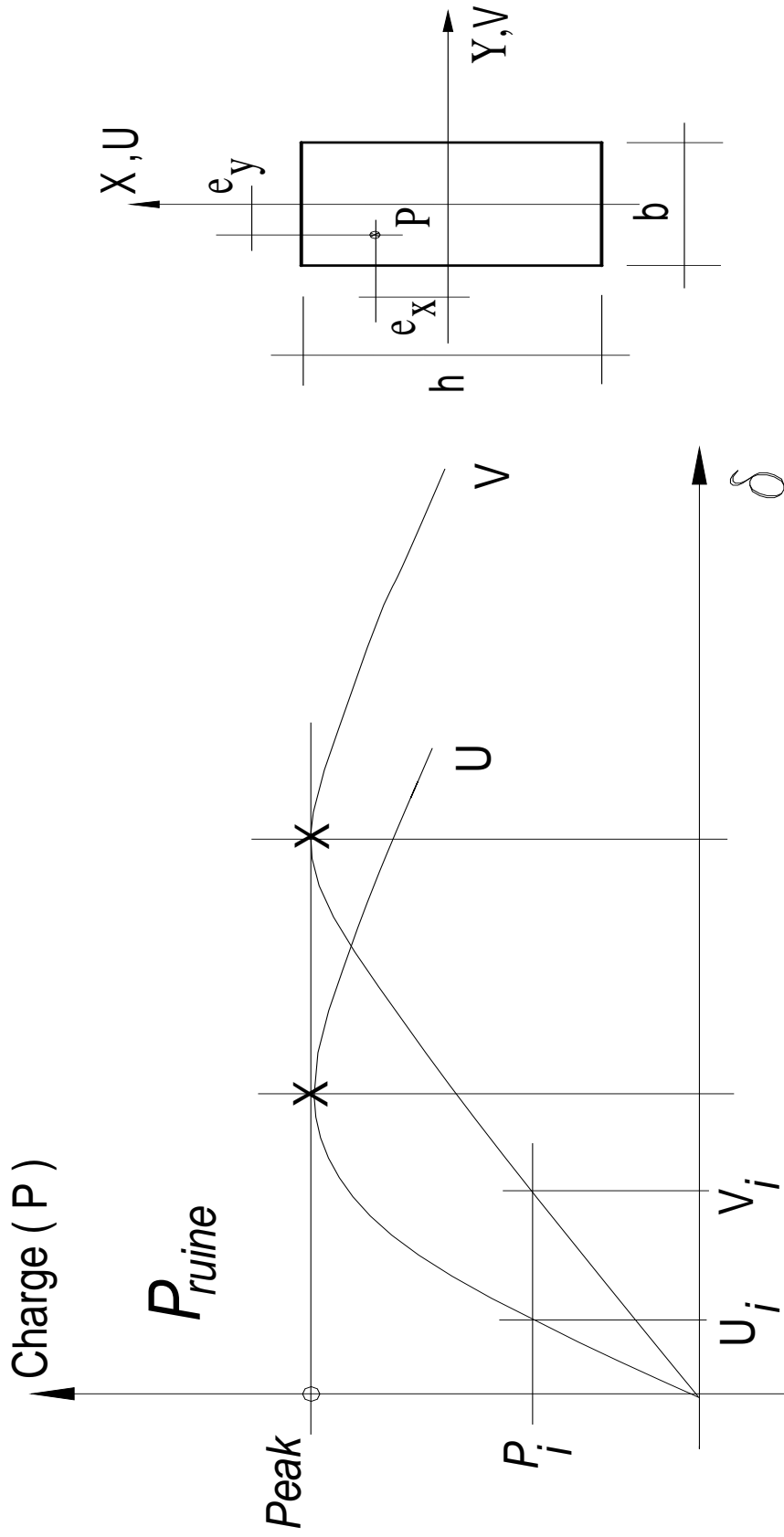


FIG. 5.3. – RELATION CHARGE-DEPLACEMENT POUR UN CHARGEMENT BIAxiaL

RESULTATS THEORIQUES

COSINE WAVE - CAS EXY1

P (KN)	U (mm)	V (mm)	Mx (KN.m)	My (KN.m)
50	3.656	4.250	1.012	1.382
100	5.062	6.625	2.262	2.906
125	5.875	8.000	3.000	3.734
150	6.687	9.625	3.843	4.603
175	7.625	11.50	4.812	5.534
200	8.500	13.75	5.950	6.500
225	9.500	16.50	7.312	7.537
250	10.75	20.00	9.000	8.687
260	11.25	24.00	10.40	9.165
261	11.25	24.00	10.44	9.200
262	11.25	/	/	9.235
263	11.25	/	/	9.270
265	11.50	/	/	9.407

**FIGURE 5-1a – RELATIONS CHARGES-DEPACEMENTS THEORIQUES
(COSINE WAVE - CAS EXY1) EN FEXION BIAXIALE**

RESULTATS THEORIQUES				
COSINE WAVE - CAS EXY2				
P (KN)	U (mm)	V (mm)	Mx (KN.m)	My (KN.m)
50	5.75	7.12	2.356	3.287
100	9.50	13.50	5.325	6.950
125	11.75	17.00	7.125	8.968
150	14.00	22.00	9.300	11.10
160	15.00	26.00	10.56	12.00
164	15.50	28.00	11.15	12.38
165	15.50	/	/	12.45

FIGURE 5-1b – RELATIONS CHARGES-DEPLACEMENTS THEORIQUES
(COSINE WAVE - CAS EXY2) EN FEXION BIAXIALE

Les notations utilisées dans les tableaux (5-1a) et (5-1b) sont les suivantes :

P : Charge de compression doublement excentrée appliquée au poteau.

U et V : Respectivement déplacements latéraux à mi-hauteur dans les plans X-X et Y-Y.

Mx et My : Respectivement moments à mi-hauteur par rapport à X et à Y avec :

$$M_x = P(e_y + v) \text{ et } M_y = P(e_x + u)$$

*Les cases vides marquées d'un (*****) signifient que pour la charge P donnée, la condition d'équilibre entre le moment extérieur et le moment intérieur n'est pas satisfaite. Les cas EXY1 et EXY2 sont définis dans la section (6-2).*

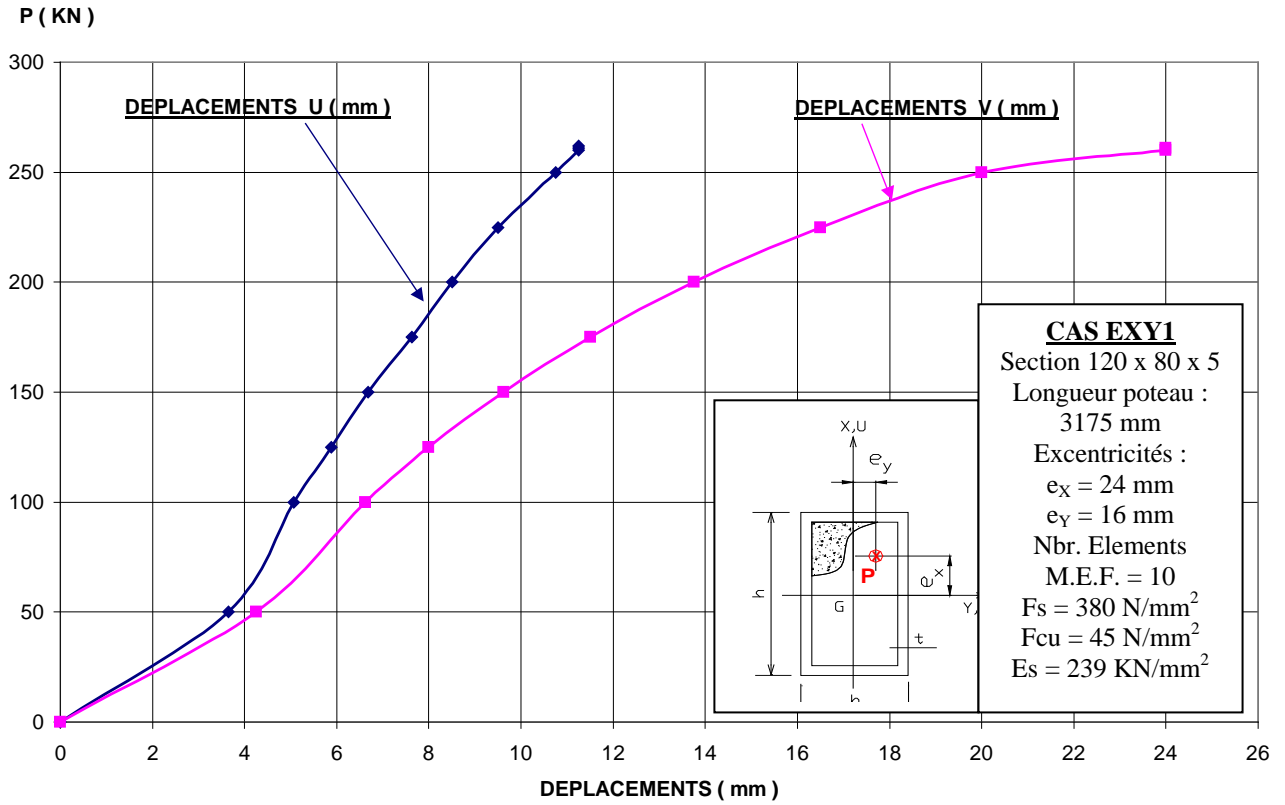


FIGURE 5-4a – RELATIONS CHARGES-DEPACEMENTS THEORIQUES (COSINE WAVE - CAS EXY1) EN FEXION BIAXIALE

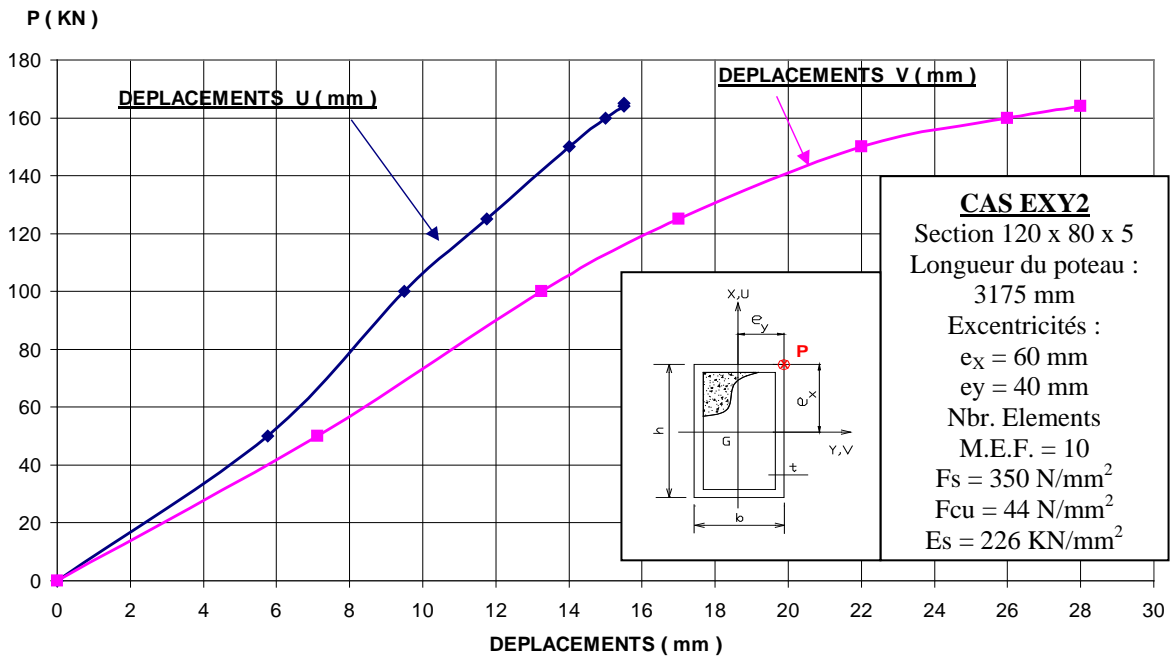


FIGURE 5-4b – RELATIONS CHARGES-DEPACEMENTS THEORIQUES (COSINE WAVE - CAS EXY2) EN FEXION BIAXIALE

CHAPITRE VI

COMPARAISON DES RESULTATS,

ANALYSES ET CONCLUSIONS

6.1. GENERALITES :

Ce chapitre concerne, d'une part, la comparaison des charges de ruine dans les poteaux composites de sections rectangulaires sollicités en flexion bi axiale obtenue à l'aide de deux méthodes théoriques (MEF et COSINE WAVE) avec celles obtenues expérimentalement[14], et d'autre part, une analyse et une conclusion sur ces résultats.

Les résultats expérimentaux [14] ont été obtenus à partir de deux cas de flexion bi axiale sur des poteaux en profil creux remplis de béton de section 120x80x5.

6.2. RESULTATS EXPERIMENTAUX EN FLEXION BIAXIALE :

Deux essais ont été conduits sur une section composite présentant les caractéristiques suivantes (voir figures 6-1a et 6-1b) :

a) ESSAI N°1 - (EXY1) :

- Excentricité de la charge P dans le plan de forte inertie (par rapport à y) : 24 mm.
- Excentricité de la charge P dans le plan de faible inertie (par rapport à x) : 16 mm.
- Contrainte caractéristique de l'acier: 380 N/mm².
- Module d'élasticité longitudinal de l'acier: 239 N/mm².
- Contrainte caractéristique cubique du béton à 28j: 45 N/mm².

a) ESSAI N°2 - (EXY2) :

- Excentricité de la charge P dans le plan de forte inertie (par rapport à y) : 60 mm.
- Excentricité de la charge P dans le plan de faible inertie (par rapport à x) : 40 mm.
- Contrainte caractéristique de l'acier: 350 N/mm².
- Module d'élasticité longitudinal de l'acier: 226 N/mm².
- Contrainte caractéristique cubique du béton à 28j: 44 N/mm².

Les essais[14] ont été conduits sur des poteaux en position horizontale dont les extrémités sont munies d'un système d'appareillage adéquat tels que plats, cylindres (voir figure 6-2), de telle façon que la rotation de la section peut se faire librement dans le plan vertical et dans le plan horizontal.

Les résultats expérimentaux [14] des deux cas EXY1 et EXY2 sont regroupés dans le tableau (6-1).

6.3. RESULTATS THEORIQUES EN FLEXION BIAXIALE :

Les tableaux (6-2a) et (6-2b) regroupent les résultats de la charge de ruine obtenus par les deux méthodes théoriques (MEF et COSINE WAVE) pour les cas EXY1 et EXY2. Les figures (6-3a) et (6-3b) montrent les relations théoriques charges-déplacements obtenues par ces deux méthodes pour les cas EXY1 et EXY2. Il est à noter que les résultats de la méthode MEF ont été trouvés à partir d'une discrétisation de la structure principale (L=3175 mm) en 10 éléments.

6.4. RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX SOUS COMPRESSION AXIALE ET SOUS FLEXION UNIAXIALE :

Avant d'entamer l'analyse des résultats des cas de chargement en flexion bi axiale, il est utile de se référer aux résultats des études expérimentales et théoriques[14], faites sur des poteaux composites en profils creux en acier de sections rectangulaires 120x80x5 remplis de

béton mais sollicités en compression axiale et en flexion uni axiale, résumés dans le tableau (6-3a).

Il est a constaté que le rapport entre la charge expérimentale et la charge théorique varie globalement de 0.722 à 1.025 (voir tableau 6-3).

6.5. COMPARAISON ET ANALYSE DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX EN FLEXION BIAXIALE :

Le tableau (6-4) regroupe les résultats expérimentaux et théoriques de la charge de ruine □ en flexion bi axiale ainsi que le rapport entre les charges expérimentales et les charges théoriques. Le rapport entre la charge expérimentale et la charge théorique varie globalement de 0.975 à 1.088.

Au vu des résultats donnés par [14], on peut dire que ceux obtenus par les deux méthodes théoriques (MEF et COSINE WAVE) dans la présente étude sont très satisfaisants et ce malgré plusieurs hypothèses simplificatrices (voir sections 3-2 et 5-2-1) et paramètres influant.

Parmi les paramètres influant sur les résultats théoriques, on peut citer :

- a) La discrétisation de la section transversale du composite en grillage ou maillage influe beaucoup sur la précision de la courbe moments- courbures, surtout au niveau de la frontière de l'axe neutre.
- b) Le nombre de points pris en compte pour la construction des courbes moments- courbures possède une grande influence sur les résultats théoriques (dans notre cas, 80 points on été pris en compte) puisque les rigidités (EI) et les moments intérieurs (Mint), nécessaires pour l'analyse théorique, sont déduits à partir de ces courbes par une interpolation linéaire.

- c) L'inclinaison de l'axe neutre, nécessaire pour la génération des courbes moments-courbures, a été déterminée à partir d'une homogénéisation de la section composite basée sur un coefficient d'équivalence entre l'acier et le béton égal à 15¹⁷.
- d) Les résultats théoriques de la charge de ruine ont été trouvés à partir d'un module d'élasticité longitudinal de l'acier constant sur toute la hauteur, ce qui n'est pas vrai en pratique.
- e) Les résultats théoriques présentés dans la section (6-3) sont basées sur des imperfections de rectitude¹⁸ égales à 0.03b, soit dans notre cas une flèche au milieu égale à 2.4 mm.
- f) Le nombre de résultats¹⁹ donné par [14] sont aussi discutables puisqu'ils ont été obtenus à partir d'un seul essai pour chaque cas.

6.6. CONCLUSIONS :

A partir des résultats théoriques obtenus, on peut tirer les conclusions suivantes :

A - L'ESTIMATION DE LA CHARGE DE RUINE DANS LES POTEAUX COMPOSITES SOLLICITES EN FLEXION BIAXIALE PAR LES DEUX METHODES THEORIQUES (MEF et COSINE WAVE) EST TRES PROCHE DE CELLE DONNEE PAR L'ETUDE EXPERIMENTALE.

B - LES MODELES DE COMPORTEMENT DE L'ACIER ET DU BETON ADOPTES PAR LES REGLES BAEL ET LE CODE MODELE (CEB et FIP) SONT ADEQUATS POUR CE TYPE DE PROBLEME.

¹⁷ Le coefficient d'équivalence entre l'acier et le béton varie de 5 à 7 pour les charges instantanées et de 15 à 21 pour les charges de longues durées [2].

¹⁸ En ce qui concerne les imperfections de rectitudes, le règlement Britannique autorise une flèche au plus égale à 0.03b. D'après le catalogue des profils creux carrés et rectangulaires en acier édité par VALEXY [25], la tolérance de rectitude est de 0.20% de la longueur du poteau.

¹⁹ Pour déterminer la corrélation entre les charges mesurées et les charges calculées dans le cas d'un chargement axial, 81 essais ont été fait en ce sens (36 à l'université de Liège et 45 en Grande-Bretagne et aux Etats -Unis)[21].

CAS de CHARGES	RESULTATS EXPERIMENTAUX				
	P (KN)	Mx (KN.m)	My (KN.m)	U (mm)	V (mm)
EXY1	268	11.30	9.60	12.00	26.00
EXY2	160	12.20	13.00	21.00	36.00

TAB. (6-1) – RESULTATS EXPERIMENTAUX SOUS CHARGEMENT BIAXIAL [14]

CAS de CHARGES	RESULTATS THEORIQUES (M. E. F.)				
	P (KN)	Mx (KN.m)	My (KN.m)	U (mm)	V (mm)
EXY1	254	11.17	8.89	11.00	28.00
EXY2	147	10.00	11.00	15.00	28.00

TAB. (6-2a) – RESULTATS THEORIQUES (M.E.F.) SOUS CHARGEMENT BIAXIAL

CAS de CHARGES	RESULTATS THEORIQUES (COSINE WAVE)				
	P (KN)	Mx (KN.m)	My (KN.m)	U (mm)	V (mm)
EXY1	261	10.44	9.20	11.25	24.00
EXY2	164	11.25	12.38	11.50	28.00

TAB. (6-2b) – RESULTATS THEORIQUES (COS) SOUS CHARGEMENT BIAXIAL

CAS de CHARGES	Excentricités (mm)		CHARGES de RUINES P (KN)			RAPPORTS $\frac{P_{exp}}{P_{the}}$	
	e_x	e_y	(EXP)	(MEF)	(SIN)	(MEF)	(SIN)
EX0	00.00	00.00	600	621	616	0.966	0.974
EX1	24.00	00.00	393	400	429	0.983	0.916
EX2	60.00	00.00	232	262	294	0.883	0.789
EY1	00.00	16.00	260	300	360	0.867	0.722
EY2	00.00	40.00	210	205	257	1.025	0.817

TAB. (6-3) – RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX EN COMPRESSION AXIALE ET EN FLEXION UNIAXIALE [14] SOUS CHARGEMENT BIAXIAL

CAS de CHARGES	CHARGES de RUINE (KN)			RAPPORTS $\frac{P_{exp}}{P_{the}}$	
	(EXP)	(MEF)	(COS)	(MEF)	(COS)
EXY1	268	254	261	1.055	1.026
EXY2	160	147	164	1.088	0.975

TAB. (6-4) – COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX EN FLEXION BIAXIALE

Les notations utilisées dans les tableaux (6-1) à (6-4) sont les suivantes :

e_x et e_y : Excentricités dans les plans (X-X) et (Y-Y) respectivement.

U et V : Déplacements latéraux, respectivement, dans les plans (X-X) et (Y-Y).

M_x et M_y : Moments de flexion par rapport à X et à Y [$M_y=P(e_x+u)$ et $M_x=P(e_y+v)$].

P : Charge de ruine.

SIN : Forme de la déformée du poteau assimilée à une sinusoïde (PART SIN WAVE).

COS : Forme de la déformée du poteau assimilée à une cosinusoïde (COSINE WAVE).

MEF : Discrétisation du poteau en éléments finis (10 éléments).

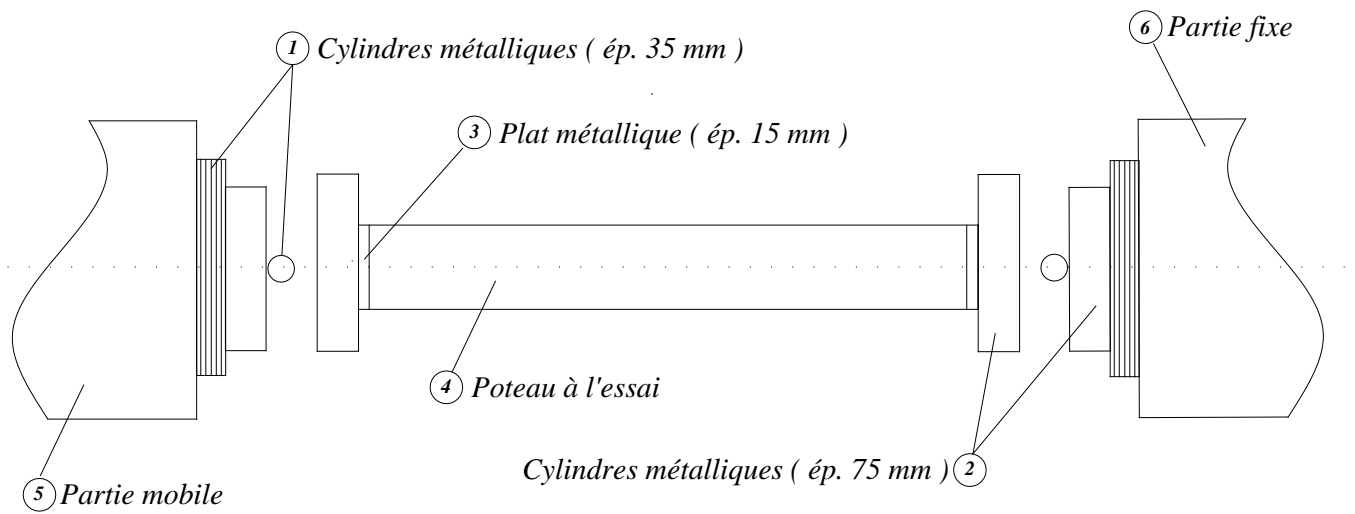


FIG (6-1) – SCHEMA DU DISPOSITIF D’ESSAI EXPERIMENTAL [14]

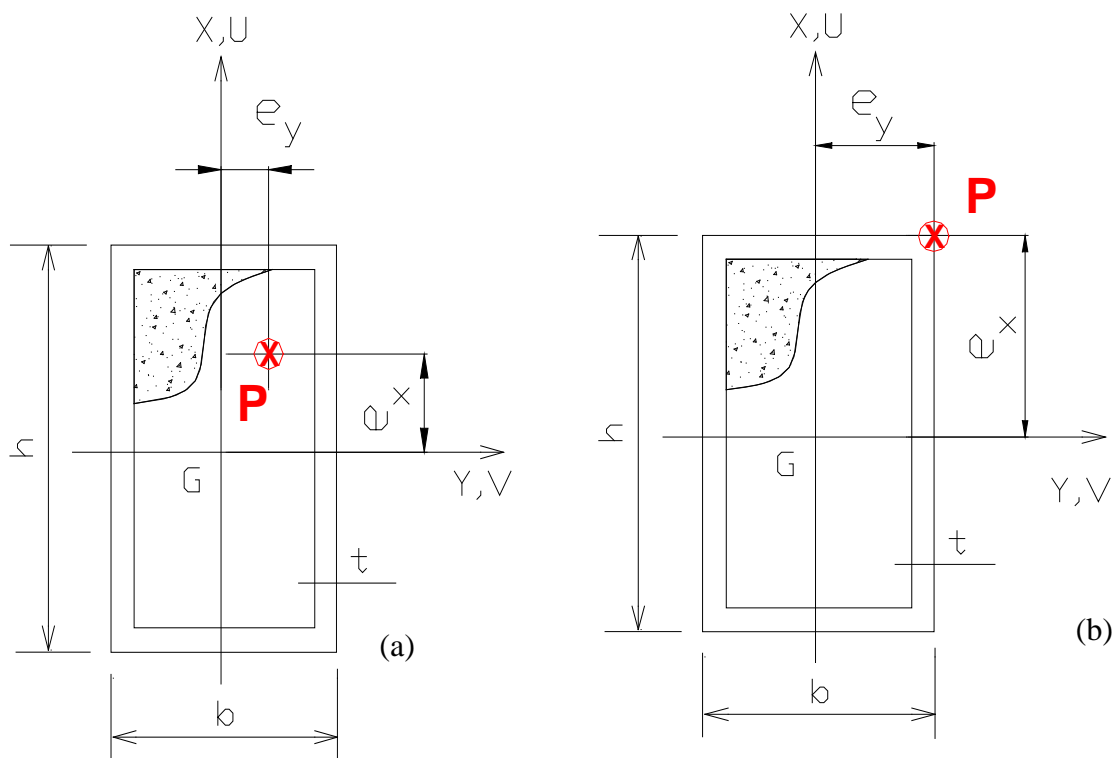
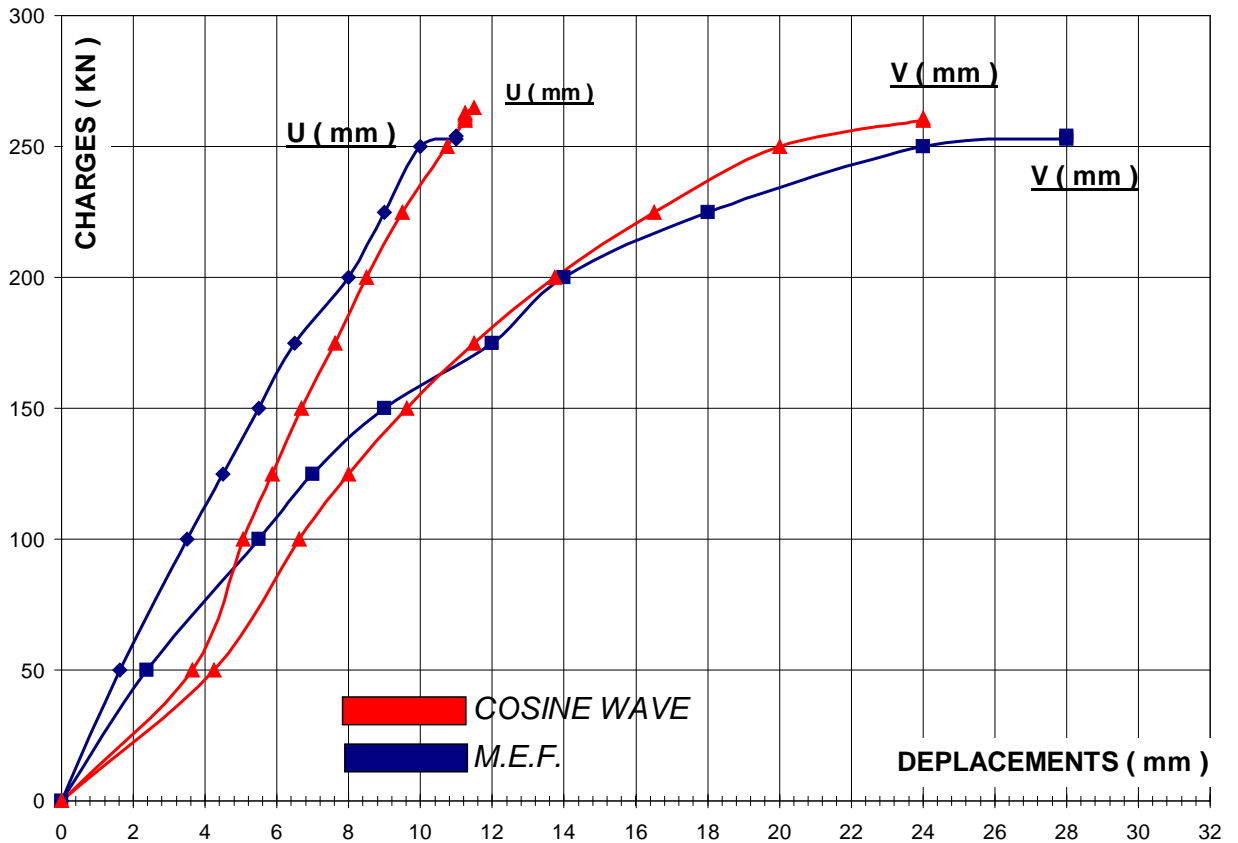
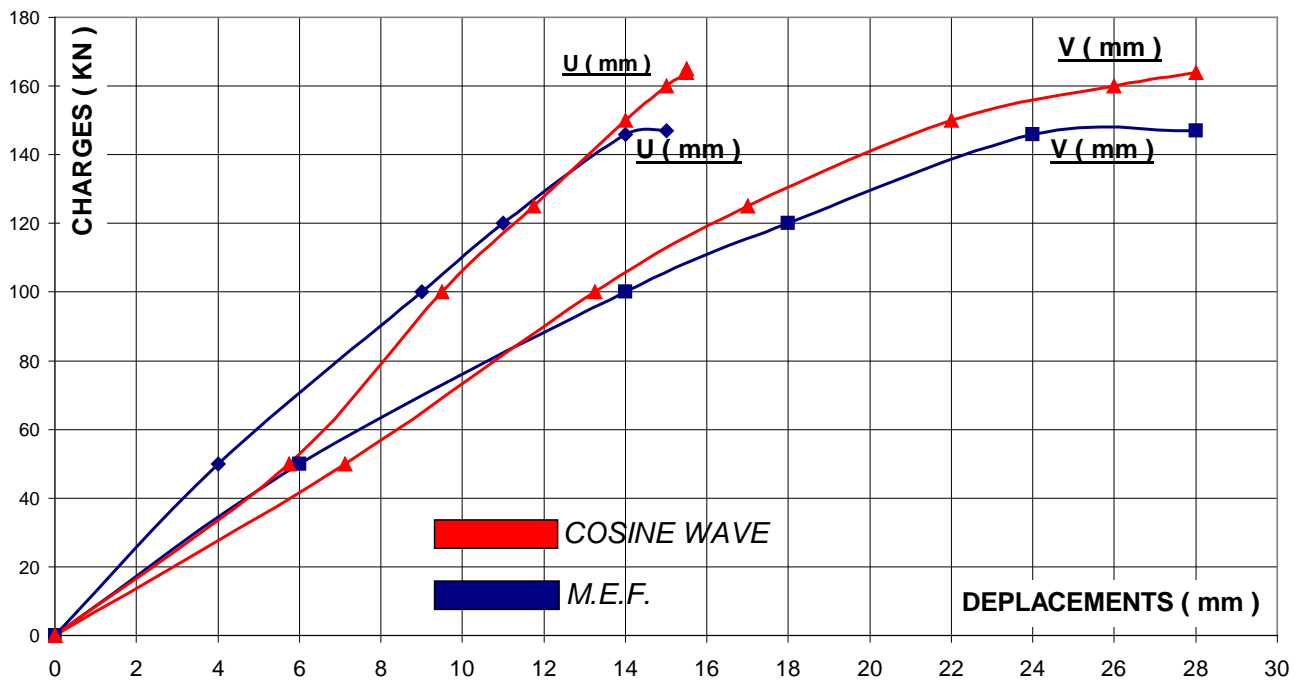


FIG (6-2) – TYPES D’ESSAIS [14]
(a) : CAS EXY1 - **(b)** : CAS EXY2



**FIGURE (6-3a) - CHARGES-DEPLACEMENTS THEORIQUES
(M.E.F. et COSINE WAVE) – CAS EXY1**



**FIGURE (6-3b) - CHARGES-DEPLACEMENTS THEORIQUES
(M.E.F. et COSINE WAVE) – CAS EXY2**

BIBLIOGRAPHIE

- [1] OTUA - L'acier pour construire. Numéro spécial. Poteaux en profil creux remplis de béton. Une nouvelle façon d'associer l'acier et le béton. Code 5.003.

- [2] R. LACROIX - A. FUENTES - H. THONIER. Traité de béton armé. Eyrolles 1982.

- [3] G. DREUX □. Nouveau guide de béton. Eyrolles 1981.

- [4] TIMOSHENKO. Résistance des matériaux. Tome 1. Dunod 1968 pour la traduction française.

- [5] A. CHAJES □. Principles of structural stability theory. Prentice Hall 1974.

- [6] J. JANSS ET R. BAILLY □. Dimensionnement des colonnes mixtes acier et béton.

- [7] K.S. VIRDI et P.J. DOWLING. The ultimate strength of composite columns in biaxial bending. Pages 251 à 272. 1973.

- [8] CIDECT-CCE-CSFTA-COMETUBE. Construire avec des profils creux en acier.

- [9] J. MOUTY ET M. BRAHAM . Progrès récents dans l'étude du flambement des profils creux et de son interaction avec le voilement éventuel des parois. Mai 1979.

- [10] REGLES BAEL 83. Béton armé aux états limites. Ed. Eyrolles 85.

- [11] JEAN PERCHAT. Règlements étrangers de béton armé. Etude comparative des codes CEB, BSI, DIN et ACI. Editions Eyrolles. 1982.

- [12] J. RONDAL et J. MOUTY. Colonnes tubulaires à parois minces remplies de béton.
- [13] J.P. GRIMAUULT. Calcul à l'incendie des profils creux remplis de béton. Manuel pratique. Juin 1982.
- [14] J. ZEGHICHE. Concrete filled composite columns. Master by research. January 1988.
- [15] R.H. GALLAGHER. Introduction aux éléments finis. Editions Pluralis pour la traduction française.
- [16] I.M. SMITH and D.V. GRIFFITHS. Programming the finite element method. John Wiley & Sons. 1988.
- [17] CM66. Règles de calculs des constructions en acier. ITBTP-CTICM. Editions Eyrolles 1982.
- [18] CIDECT. Comité international pour le développement et l'étude de la construction tubulaire.
Monographie N°5 - Fascicule 1. Calcul des poteaux en profils creux remplis de béton. Méthode de calcul et technologie de mise en oeuvre. Version Française. Septembre 1977.
- [19] FERDINAND L. SINGER. Strength of materials. Second edition. Harper & Row, Publishers. January 1962.
- [20] PING-CHUN WANG. Calcul des structures par les méthodes numériques matricielles. Traduit par R.GOLDSCHILD. Dunod. Paris 1969.
- [21] J. JANS. Charges ultimes des profils creux remplis de béton chargés axialement. Publications CRIF. MT 101. 1974. Bruxelles.
- [22] G. DHATT et G. TOUZOT. Une représentation de la méthode des éléments

finis. Deuxième édition. 1984. Maloine S.A. Editeur. Paris.

- [23] P. GUIAUX et J. JANSS. Comportement au flambement des colonnes constituées de tubes en acier remplis de béton. Publications CRIF. MT 65. Novembre 1970.
- [24] R.F. WARNER. Biaxial moment curvature relations. Journal of the structural Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers.
- [25] VALEXY. Profils creux finis à chaud suivant normes NF A 49-501. Profils carrés et rectangulaires.

NOTATIONS

Dans ce mémoire, les notations et symboles les plus important sont les suivants :

A_c Aire de la section du béton.

A_s Aire de la section de l'acier.

b Largeur de la section du composite, ou du profil creux en acier.

$EI_x ; EI_y$ Rigidités de la section transversale du poteau composite
respectivement par rapport à x et à y.

E_s Module d'élasticité de l'acier.

$e_x ; e_y$ Excentricités de la charge appliquée.

f_{ck} Contrainte caractéristique du béton à 28 jours déterminée sur
éprouvettes cylindriques.

f_{cd} Contrainte de calcul du béton.

f_{sk} Contrainte caractéristique de l'acier du profil creux.

f_{sd} Contrainte de calcul du béton.

h Hauteur de la section du composite, ou du profil creux en acier.

$K_{fx} ; K_{fy}$ Matrices de rigidités de flexion de l'élément poutre
respectivement par rapport à x et à y.

$K_{gx} ; K_{gy}$ Matrices de rigidités géométriques de l'élément poutre
respectivement par rapport à x et à y.

K Matrice de rigidité globale.

L Longueur du poteau.

$M_x ; M_y$ Moments de flexion respectivement par rapport à x et à y .

N_i Fonctions de formes ($i=1$ à 4).

P Charge appliquée au poteau.

t Epaisseur du profil creux en acier.

$u ; v$ Déplacements latéraux du poteau à la distance Z de l'origine des axes, respectivement dans le plan x et dans le plan y , provoqués par la charge P .

$u_m ; v_m$ Déplacements latéraux du poteau au milieu de la longueur de flambement, respectivement dans le plan x et dans le plan y , provoqués par la charge P .

$u_0 ; v_0$ Déplacements latéraux dus aux imperfections de rectitudes (mêmes définitions que pour u et v).

$u_{0m} ; v_{0m}$ Déplacements latéraux dus aux imperfections de rectitudes (mêmes définitions que pour (u_m et v_m)).

$x ; y$ Système de coordonnées de la section transversale du poteau composite.

$x_i ; y_i$ Coordonnées du centre de gravité de l'élément $m(x_i, y_i)$.

Z_{ij} Distance du centre de l'élément $m(x_i, y_i)$ à l'origine "O" du système de coordonnées (x, y) .

- ε_{ij} Déformation au centre de l'élément $m(x_i, y_j)$.
- ε_1 Déformation maximale de compression (Raccourcissement) à l'origine "O" des coordonnées.
- ε_2 Déformation au niveau de la fibre située au point « O' » opposé à l'origine « O » des coordonnées.
- ϕ Courbure d'une section droite quelconque.
- $\phi_x ; \phi_y$ Composantes de la courbure totale respectivement selon x et y due au chargement P appliqué.
- $\phi_{0x} ; \phi_{0y}$ Composantes de la courbure due aux imperfections de rectitudes respectivement selon x et y.
- $\bar{\phi}_x ; \bar{\phi}_y$ Composantes de la courbure nette respectivement selon x et y.
- θ Inclinaison de l'axe neutre.