

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

BADJI MOKHTAR-ANNABA

UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار

- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2024/2025

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

**SYSTEMES ELLIPTIQUES DANS DES ESPACES DE LEBESGUE-
SOBOLEV GENERALISES.**

Filière
Mathématiques

Spécialité
Mathématiques appliquées

Par
TAMRABET Sameh

DIRECTEUR DE THÈSE : SAKER Hacene

Prof. U.B.M. – Annaba

CO-DIRECTEUR DE THÈSE: DJELLIT Ali

Prof. U.B.M. – Annaba

Devant le jury

PRESIDENT:

DJEBABLA Abdelhak

Prof. U.B.M. - Annaba

EXAMINATEUR :

AISSAOUI Mohamed Zine

Prof. U. Guelma

EXAMINATEUR :

ARDJOUNI Abdelouaheb

Prof. U. Souk-Ahras

EXAMINATEUR:

AKROUT Kamel

Prof. U. Tébessa

Dédicace

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du **Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation (MDM)** de l'université de Annaba, sous la direction de Monsieur **Hacène Saker** et **Ali Djellit**, Professeurs à l'université d'Annaba, que je tiens à leur exprimer ici ma gratitude et les remercier vivement pour m'avoir proposé le sujet de cette thèse. Je voudrais aussi les remercier pour leur disponibilité qu'ils m'ont accordée tout au long de ce travail de recherche. Les orientations et les conseils qu'ils m'ont prodigués de manière continue, m'ont grandement aidé à la réalisation de ces résultats.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Djebabla Abdelhak**, Professeur à l'université de Annaba, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie vivement Monsieur **Mohamed Zine Aissaoui**, Professeur à l'université de Guelma, Monsieur **Ardjouni Abdelouaheb**, Professeur à l'université de Souk-Ahras, **Akrout Kamel** Professeur à l'université de Tébessa pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur **Abdelmalek Brahim**, Maître de conférence à l'université de Souk-Ahras, pour les critiques constructives qu'il a faites sur ces travaux.

Enfin, je n'oublie pas de remercier tous les membres du laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation (LMDM) de l'université Badji Mokhtar de Annaba.

ملخص

الأنظمة الإهليلجية في فضاءات ليبيج-سوبوليف المعممة

في هذه الأطروحة، قمنا بدراسة الأنظمة الإهليلجية غير الخطية التي تتضمن مؤثر $p(x)$ -لابلاس المعرف على مجموعات مفتوحة محدودة من R^n . إن عدم تجانس المؤثر يجعل الدراسة حساسة وتستدعي فضاءات دالية غير كلاسيكية. هذه الفضاءات هي حالات خاصة من فضاءات أورليتش تسمى بفضاءات سوبوليف المعممة ويرمز لها بـ $W^{1,p(x)}$ ، والتي يتم تولد طوبولوجيتها بواسطة نظيم صعب يسمى نظيم لوكسمبورج. وتظل تقنيات الحل هي نظرية النقاط الحرجة.

في هذه الأطروحة، قمنا بدراسة بعض أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من النوع الإهليلجي التي تتضمن مؤثر $p(x)$ -لابلاس المحدد في فضاءات ليبيج-سوبوليف المعممة، والتي تسمى أيضًا فضاءات ليبيج-سوبوليف ذات الأس المتغير. وفي الفصل الأول، نذكر الإطار الدالي الأكثر ملاءمة لحل هذه الأنظمة. الفصل الثاني مخصص لدراسة وجود حلول لفئة من أنظمة النقل الإهليلجية ذات حد غير محلي. في الواقع، نُظهر أنه يوجد على الأقل حل ضعيف غير تافه باستخدام نظرية الممر الجبلي. وفي الفصل الثالث، نصل إلى نتيجة مفادها وجود حلول متعددة غير تافهة لفئة معينة من الأنظمة. هنا يعتمد النهج على أحد نظرية الممر الجبلي التناظرية.

الكلمات المفتاحية: فضاءات ليبيج-سوبوليف ذات الأس المتغير؛ نظيم لوكسمبورج؛ مؤثر $p(x)$ -لابلاس؛ أنظمة النقل البيضاوية؛ نظرية الممر الجبلي التناظرية.

Résumé

SYSTEMES ELLIPTIQUES DANS DES ESPACES DE LEBESGUE-SOBOLEV GENERALISES.

Par

TAMRABET Sameh

Dans cette thèse, nous étudions des systèmes elliptiques non-linéaires faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien défini sur des ouverts bornés de \mathbb{R}^n . La non homogénéité de l'opérateur rend l'étude délicate et fait appel à des espaces fonctionnels non classiques. Ces espaces sont des cas particuliers des espaces d'Orlicz dits espaces de Sobolev généralisés et notés $W^{1,p(x)}$, dont la topologie est induite par une norme de manipulation ardue, appelée norme du Luxemburg. Les techniques d'approche restent la théorie des points critiques.

Dans cette thèse, nous étudions quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien défini dans les espaces de Lebesgue-Sobolev généralisés, appelés aussi espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable. Nous rappelons dans le premier chapitre le cadre fonctionnel le plus approprié pour la résolution de ces systèmes. Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour une classe de systèmes de transmission elliptiques à terme non local. En effet nous montrons qu'il existe au moins une solution faible non triviale à l'aide du théorème de Passe-montagne. Dans le troisième chapitre, nous établissons un résultat sur l'existence de multiples solutions non triviales pour une classe particulière de systèmes. Ici l'approche s'appuie sur une variante du théorème de Passe-montagne.

Mots clés : Espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable; norme de Luxemburg; opérateur $p(x)$ -Laplacien; systèmes elliptiques de transmission; théorème de Passe-Montagne symétrique.

Abstract

ELLIPTIC SYSTEMS IN GENERALIZED LEBESGUE-SOBOLEV SPACES

By

TAMRBET Sameh

In this thesis, we study some systems of nonlinear partial differential equations of the elliptic type involving $p(x)$ -Laplacian operators in variable-exponent functional spaces, in particular, generalized Lebesgue and Sobolev spaces or with variable exponent. We recall in the first chapter the most appropriate functional framework for the rest of our work. In chapter 2 is devoted to the study of the existence of solutions for a class of elliptic transmission systems with nonlocal term. Using the appropriate variational approach, more precisely the Mountain pass theorem, we obtain at least one non-trivial weak solution. In the third chapter, we establish a result on the existence of multiple non-trivial solutions for a class of $p(x)$ -Laplacian elliptic systems. Our approach relies on the theory of variable exponents of generalized Lebesgue-Sobolev spaces, combined with adequate variational methods and a variant of the Mountain pass lemma.

Keywords : Lebesgue-Sobolev spaces with variable exponent ; Luxemburg norm ; $p(x)$ -Laplacian operator ; elliptic transmission systems ; symmetric Passe-montagne theorem.

Plan de Travail

Dans le **chapitre I**, nous rappelons les propriétés des espaces de Lebesgue-Sobolev ; nous apprenons qu'ils préservent presque toutes les propriétés des espaces de Sobolev classiques, notamment sur les injections et les inégalités. Nous prêtons une attention particulière à la théorie de points critiques ; à cet effet nous énonçons le théorème de Passe-montagne et le principe variationnel d'Ekeland.

Le **chapitre II** est consacré à l'étude de systèmes elliptiques non linéaires de transmission avec un terme non locale, de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -M_1 \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = f(x, u) & \text{dans } \Omega_1 \\ -M_2 \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \right) = g(x, v) & \text{dans } \Omega_2 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (1.1)$$

la condition de transmission étant

$$\begin{array}{l} u = v, \\ \text{et } M_1 \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = M_2 \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \text{ sur } \Sigma. \end{array}$$

Ici Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^N , avec $N \geq 2$. D'autre part, étant donné $\Omega_1 \subset \Omega$ un sous-domaine de frontière Σ satisfaisant $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, on note $\Gamma = \partial\Omega$ et $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$. On a donc $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ et $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$.

On suppose que les fonctions M_1 et M_2 sont continues et $p \in C(\bar{\Omega})$. On désigne par η la normale extérieure à Ω_2 dirigée vers l'intérieur à Ω_1 . L'opérateur $\Delta_{p(x)} = \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right)$ représente le $p(x)$ -Laplacien. Sans rien enlever à la difficulté du problème (pour une meilleure présentation) nous choisissons $M_1 = M_2 = M$, $f(x, u) = \lambda_1 |u|^{q(x)-2} u$, $g(x, v) = \lambda_2 |v|^{q(x)-2} v$. Les

paramètres λ_1, λ_2 sont supposés strictement positifs. Les fonctions p, q vérifient $1 < p_- = \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p_+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) < \infty$ et $1 < q_- = \inf_{x \in \Omega} q(x) \leq q(x) \leq q_+ = \sup_{x \in \Omega} q(x) < \infty$ et appartiennent à l'espace $C(\overline{\Omega})$, telles que $1 < q(x) < p^*(x)$ ($p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ si $p(x) < N$ ou $p^*(x) = \infty$ sinon).

Sous certaines conditions sur les termes non locaux, nous montrons que la fonctionnelle d'énergie associée au problème (1.1) satisfait les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne, d'où l'existence de solution non triviale.

Le **chapitre III** traite d'un système elliptique du type $p(x)$ –Kirchhoff :

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2} u, & \text{dans } \Omega \\ \Delta_{q(x)} v = |v|^{q(x)-2} v, & \text{dans } \Omega \end{cases}, \quad (3.1)$$

avec le couple non linéaire à la frontière donné par

$$\begin{cases} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = F_u(x, u, v), & \text{sur } \partial\Omega \\ |\nabla v|^{q(x)-2} \frac{\partial v}{\partial \eta} = F_v(x, u, v), & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.2)$$

où Ω est un domaine borné dans \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière régulière $\partial\Omega$ et $p, q \in C(\overline{\Omega})$ et $1 < p_- = \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p_+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) < \infty$ et $1 < q_- = \inf_{x \in \Omega} q(x) \leq q(x) \leq q_+ = \sup_{x \in \Omega} q(x) < \infty$.

Là nous utilisons le théorème de Passe-Montagne symétrique pour montrer l'existence et la multiplicité de solutions non triviales.

TABLE DES MATIÈRES

Abstract	v
Introduction	1
1 Cadre fonctionnel	1
1 Rappels généraux	1
2 Espaces de Lebesgue à exposant variable	1
3 Espaces de Sobolev à exposant variable	4
4 Théorie de Ljusternik-Schnirelmann	5
2 Existence de solutions pour une classe de systèmes de transmission elliptiques non locaux	13
1 Introduction	13
2 Résultats préliminaires	15
3 Résultat principal	16
3 Existence et multiplicité des solutions pour un système elliptique à frontière non linéaire	25
1 Introduction	25
2 Notions préliminaires	27
3 Existence et multiplicité de solutions	27

4 Annexe 1 : Quelques résultats utilisés dans les démonstrations	36
Conclusion	38
Bibliographie	39

Introduction

Dans les dernières années, la théorie des équations aux dérivées partielles a connu un développement considérable. Notamment les problèmes elliptiques non linéaires avec des opérateurs homogènes quasi-linéaires de type p -Laplace, ces problèmes elliptiques non linéaires ne sont en général pas intégrables, ce qui signifie qu'on ne peut pratiquement pas trouver de solutions explicites, cela donne une grande importance à la recherche de solutions faibles en se basant sur la théorie des espaces de Sobolev ; ces solutions peuvent être des points critiques ou des points fixes d'une fonctionnelle, ou bien se ramener au concept de sous et sur-solution. Ainsi, lorsqu'il s'agit des problèmes qui font intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien, les espaces de Lebesgue-Sobolev généralisés s'avèrent le cadre fonctionnel le plus approprié pour une meilleure approche. Ces espaces sont apparus dans la littérature, pour la première fois en 1931 par W. Orlicz [68], puis en 1950-1951 Nakano [66], [67] a développé la théorie des espaces modulaires en généralisant les espaces d'Orlicz tout en expliquant que l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}$ constitue un cas particulier.

Suite aux travaux de Nakano, plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'étude des espaces modulaires, plus particulièrement, ceux évoluant dans les écoles japonaise, russes et néerlandaise. Un peu plus tard, une version beaucoup plus explicite de ces espaces, les espaces des fonctions modulaires, a été introduite par les mathématiciens polonais, tels que Hudzik, Kami-ska et Musielak. Pour une présentation complète des espaces des fonctions modulaires, voir le livre de Musielak [59]

Par la suite, dans les années 1970 et 1980, avec une version plus élaborée, l'étude des espaces $L^{p(x)}$ a été reprise par l'école polonaise (voir Hudzik). Les résultats sont produits au cours des années 80 et 90, fruits des travaux de ces recherches réalisés essentiellement par Kováčik et Rákosnik [54], Ces auteurs ont fourni la référence de base standard des espaces $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ et ont établi notamment les propriétés de base telles que la réflexivité, la séparabilité, les injections et la densité.

L'opérateur $p(x)$ -Laplacien est apparu après le développement de nombreux phénomènes physiques concernant les caractéristiques des matériaux non homogènes, comme l'élasticité non linéaire, les fluides électro-rhéologiques (interaction

entre fluides et champs électro-magnétiques) et thermo-rhéologiques, la propagation à travers les milieux poreux. L'introduction de cet opérateur dans les équations aux dérivées partielles est très récent. Les premiers travaux concernant l'étude des équations aux dérivées partielles avec des exposants variables sont dus à Kováčik et Rakosník au début des années 1990. Par la suite, le champ des espaces fonctionnels à exposant variable a connu une croissance accrue.

CHAPITRE 1

Cadre fonctionnel

1 Rappels généraux

Nous rappelons sommairement dans ce chapitre certaines définitions et résultats de l'analyse fonctionnelle. Dans tout ce qui suit, Ω désignera un domaine de \mathbb{R}^N avec N un entier naturel non nul. Toute fonction $p : \overline{\Omega} \rightarrow]1, +\infty[$ mesurable, est appelée *exposant variable*.

Posons

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ h : h \in L^\infty(\Omega), \text{ess inf}_{x \in \overline{\Omega}} h(x) > 1 \right\}.$$

Pour tout $h \in L_+^\infty(\Omega)$, on définit

$$h^+ = \text{ess sup}_{x \in \overline{\Omega}} h(x) \text{ et } h^- = \text{ess inf}_{x \in \overline{\Omega}} h(x)$$

2 Espaces de Lebesgue à exposant variable

Pour tout $p \in L_+^\infty(\Omega)$, l'espace de Lebesgue à exposant variable est défini par :

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

On munit $L^{p(x)}(\Omega)$ de la norme, dite norme de **Luxemburg** (cf [59], page 7), définie par :

$$|u|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Remarque : Dans le cas constant ($p(x) = p$, une constante), $L^{p(x)}(\Omega)$ coïncide avec l'espace de Lebesgue classique $L^p(\Omega)$. En outre, par la définition de $|\cdot|_{p(x)}$, il est clair que

$$|u|_{p(x)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On définit

$$\varphi(x, s) = s^{p(x)}, \forall x \in \Omega, s > 0.$$

On a, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$s \rightarrow \varphi(x, s)$$

est continue, croissante, convexe, $\varphi(x, s) > 0$ pour tout $s > 0$ avec $\varphi(x, 0) = 0$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(x, s) = +\infty$. De plus, (cf [59], page 33) pour tout $s \geq 0$, $\varphi(\cdot, s)$ est mesurable.

On définit de même la fonction $\rho : L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$\rho(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, |u|) dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx.$$

En vertu de la définition donnée dans (cf [59], page 1), ρ est un modulaire convexe sur $L^{p(x)}(\Omega)$, c'est à dire

1. $\rho(u) = 0 \iff u = 0$
2. $\rho(-u) = \rho(u)$,
3. $\rho(\alpha u + \beta v) \leq \alpha \rho(u) + \beta \rho(v)$, $\forall u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Remarque 2.1 *On peut écrire*

$$|u|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Le modulaire joue un rôle important dans la manipulation des espaces $L^{p(x)}(\Omega)$. Ses propriétés principales sont regroupées dans la proposition suivante dont la démonstration se trouve dans ([54])

Proposition 2.1 *Pour tout $u_n, u \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a*

1. $|u|_{p(x)} = a \iff \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$, pour $u \neq 0$ et $a > 0$.
2. $|u|_{p(x)} > 1 (= 1; < 1) \iff \rho(u) > 1 (= 1; < 1)$.
3. $|u|_{p(x)} \rightarrow 0$ (resp. $\rightarrow +\infty$) $\iff \rho(u) \rightarrow 0$ (resp. $\rightarrow +\infty$).
4. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u|_{p(x)} = 0$,
 - (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0$,
 - (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ en mesure dans Ω et $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n) = \rho(u)$.

Si $p^+ < \infty$, alors

5. $|u|_{p(x)} > 1 \implies |u|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^+}$.
6. $|u|_{p(x)} < 1 \implies |u|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^-}$.

Les espaces de Lebesgue à exposant variable jouissent (presque) des mêmes propriétés que les espaces de Lebesgue classiques ; notamment les propriétés de séparabilité, de réflexivité, de densité et d'immersion. Toutes ces propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 2.2 1. *L'espace $(L^{p(x)}(\Omega), |\cdot|_{p(x)})$ est de Banach (c.f. ([54], Théorème 2.5)), son dual est $L^{q(x)}(\Omega)$; $q(x)$ étant la fonction conjuguée de $p(x)$, c'est à dire*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \forall x \in \Omega.$$

2. *De plus, l'espace $(L^{p(x)}(\Omega), |\cdot|_{p(x)})$ est :*

- séparable si $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ (cf. ([41], Théorème 1.6)),
 - uniformément convexe si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ (cf. ([41], Théorème 1.10))
 - réflexif si et seulement si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ (cf. ([54], Corollaire 2.7)).
3. *On suppose mes $(\Omega) < \infty$. Si $p_1, p_2 \in L_+^\infty(\Omega)$ sont telles que*

$$p_1(x) \leq p_2(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

alors

$$L^{p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega),$$

l'injection étant continue (cf. ([54], Théorème 2.8))

4. Inégalité de Hölder (cf. ([54], Théorème 2.8)) :

Pour $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, on a

$$\left| \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) |u|_{p(x)} |v|_{q(x)}.$$

5. si $p^+ < \infty$, alors

i) C_0^∞ est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$ (cf. ([54], Théorème 1.8))

ii) L'ensemble des fonctions continues est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$ (cf. ([54], Théorème 2.11)).

3 Espaces de Sobolev à exposant variable

Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ un multi-indice d'entiers α_i , $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ et $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u$, (la dérivation est prise au sens des distributions).

Pour tout entier $k \geq 1$ et $p \in L_+^\infty(\Omega)$, l'ensemble défini par

$$W^{k,p(x)}(\Omega) := \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

s'appelle espace de Sobolev à exposant variable (ou généralisé). Son dual est noté $W^{-k,q(x)}(\Omega)$. Muni de la norme

$$\|u\|_{k,p(x)} := \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{p(x)},$$

$W^{k,p(x)}(\Omega)$ est un Banach, séparable et réflexif (cf.([41], théorème 2.1)).

Comme pour le cas constant, $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ désigne le complété de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{k,p(x)}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{k,p(x)}$.

Remarque 3.1 Dans le cas constant ($p(x) \equiv p$), $W^{k,p(x)}(\Omega)$ coïncide avec l'es-

pace de Sobolev classique $W^{k,p}(\Omega)$, voir [3].

Proposition 3.1 (Théorème d'injections)

Supposons que Ω est borné.

1. Si $p_1, p_2 \in L_+^\infty(\Omega)$ avec $p_1(x) \leq p_2(x)$ pour tout $x \in \Omega$, alors

$$W^{k,p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p_1(x)}(\Omega)$$

et l'injection est continue (cf. ([41], Théorème 2.2)).

2. Soit $p, r \in C(\overline{\Omega})$ avec $p, r \in L_+^\infty(\Omega)$. On note $p_k^*(x) := \frac{Np(x)}{N-kp(x)}$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.

Si $kp(x) < N$ et $r(x) \leq p_k^*(x)$, alors l'injection

$$W^{k,p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$$

est continue et compacte (cf. ([41], Théorème 2.3)).

4 Théorie de Ljusternik-Schnirelmann

La théorie de Ljusternik-Schnirelmann est une extension de la théorie hilbertienne sur des espaces de Banach. D'une manière générale, il s'agit de minimiser des fonctionnelles définies sur des variétés pour montrer l'existence de points et valeurs critiques (cf. [74]). En ce qui nous concerne, nous nous limitons exclusivement à énoncer une variante du principe du mini-max. Pour cela, nous allons introduire quelques objets mathématiques indispensables.

Soit X un espace de Banach et soit $Sym(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles symétriques de X .

Pour $A \in Sym(X)$, on définit le genre de A , notée $\gamma(A)$, par :

$$\gamma(A) = \inf \{k \in \mathbb{N} / \exists f : A \rightarrow \mathbb{R}^k / \{0\} \text{ continue et impaire}\}.$$

Si une telle application n'existe pas, alors $\gamma(A) = +\infty$. On convient de poser $\gamma(\emptyset) = 0$.

Proposition 4.1 (cf. [79])

Soient A et $B \in \text{Sym}(X)$, on a :

1. $\gamma(A) = 0$ si et seulement si $A = \emptyset$.
2. $\gamma(S) = \dim X$ où $S = \{u \in X / \|u\|_X = 1\}$ est la sphère unité de X .
3. S'il existe une application continue et impaire $f : A \rightarrow B$, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
4. Si $A \subset B$, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
5. $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.
6. Si K est compact, alors $\gamma(K) < +\infty$ et il existe $U \in \text{Sym}(X)$ un voisinage de K tel que $\gamma(K) = \gamma(U)$.
7. Si Y est un sous-espace vectoriel de X de co-dimension K et si $\gamma(A) \geq K$, alors $A \cap Y \neq \emptyset$.

Théorèmes de points critiques

Soit $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 . Un point u de X est dit point critique de Φ si $\Phi'(u) = 0$. La valeur correspondante $c = \Phi(u)$ est appelée valeur critique de Φ .

Définition 4.1 Une suite (u_n) de X sera dite de Palais-Smale de niveau c (en abrégé $(PS)_c$), $c \in \mathbb{R}$ si :

1. $\Phi(u_n) \rightarrow c$.
2. $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$.

Nous dirons que Φ satisfait la condition de Palais-Smale de niveau c si toute suite de $(PS)_c$ possède une sous-suite convergente.

On dira que Φ satisfait la condition de Palais-Smale (en abrégé (PS)) si elle vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Définition 4.2 [22] Nous dirons que Φ vérifie la condition (C) au point c (en abrégé $(C)_c$), si et seulement si

- i) Φ satisfait $(PS)_c$ sur les parties bornées, c'est à dire, pour toute suite bornée (u_n) telle que $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$ et $\Phi(u_n) \rightarrow c$ possède une sous suite convergente.
- ii) Il existe $R, \delta, \alpha > 0$ tel que

$$\|\Phi'(u)\|_{X'}, \|u\|_X \geq \alpha, \forall u \in \Phi^{-1}([c - \delta, c + \delta]) \text{ avec } \|u\|_X \geq R.$$

On dira que Φ satisfait la condition (C) si elle vérifie $(C)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Lemme 4.1 (Principe de Ljusternik-Schnirelmann, cf. ([74], Corollaire 4.1))

Soit V une sous-variété fermée, symétrique, de classe C^1 d'un espace de Banach réel et $0 \notin V$. Supposons que $\Phi \in C^1(V, \mathbb{R})$ est une fonctionnelle paire et bornée inférieurement.

Posons

$$c_n = \inf_{K \in \Sigma_n} \sup_{x \in K} \Phi(x),$$

avec $\Sigma_n = \{K \subset V; K \text{ symétrique, compact et } \gamma(K) \geq n\}$.

Si $\Sigma_n \neq \emptyset$ pour un certain $n \geq 1$ et Φ satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ pour $c = c_j, j = 1, 2, \dots, n$, alors Φ a au moins n paires de points critiques distincts associés aux valeurs critiques C_1, C_2, \dots, C_n .

Théorèmes de points critiques

Le théorème ci-dessus va jouer un rôle fondamental. nous rappelons qu'un point u de X est dit point critique de Φ si $\Phi'(u) = 0$ et la valeur correspondante $c = \Phi(u)$ est appelée valeur critique de Φ .

Théorème 4.1 (Théorème de passe-montagne, cf. [6])

Soient $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R}), e \in X, r > 0$ tel que $\|e\| > r$. Si Φ vérifie la condition (PC) et

$$\max \{ \Phi(0), \Phi(e) \} < \inf_{\|u\|=r} \Phi(u) = \beta,$$

alors, Φ possède une valeur critique $c \geq \beta$ caractérisée par

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

où $\Gamma = \{ \gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = e \}$.

Théorème 4.2 [[6], Théorème 3.5]

Soient $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaisant la condition (C) et Q une partie fermée non vide telle que ∂Q est connexe et $\partial Q \cap (-\partial Q) \neq \emptyset$. Supposons que :

i. $\forall K \in A_2, \exists v_K \in K, \exists \beta \in \mathbb{R} :$

$$\Phi(v_K) \geq \beta, \quad \text{et} \quad \Phi(-v_K) \geq \beta,$$

ii. $\sup_{\partial Q} \Phi < \beta$.

iii. $\sup_Q \Phi(x) < \infty$.

Alors, Φ admet une valeur critique $c \geq \beta$ caractérisée par :

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} \Phi(h(u)),$$

où $A_2 = \{K \text{ fermé et symétrique} : \gamma(K) \geq 2\}$, γ est le genre de Krasnosel'skii, et $\Gamma = \{h \in C(X, X) : h|_{\partial Q} = id\}$.

Théorème 4.3 (Lemme de Passe-montagne symétrique, cf [58], Théorème 1)

Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaisant les conditions suivantes :

i_1 — Φ est paire, bornée inférieurement, satisfait la condition (PS) et $\Phi(0) = 0$.

i_2 — Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n \in \Gamma_n$ tel que $\sup_{u \in H_n} \Phi(u) < 0$ avec

$$\Gamma_n = \{H \subset X; \text{ fermé, symétrique, } 0 \notin H \text{ et } \gamma(H) \geq n\},$$

Alors, Φ admet une suite de points critiques (u_n) tel que

$$\Phi(u_n) \leq 0, u_n \neq 0 \text{ et } \lim_n u_n = 0.$$

Principe variationnel d'Ekeland

Théorème 4.4 (cf.[38])

Soit (X, d) un espace métrique complet et $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i, bornée inférieurement et non identiquement égale à $+\infty$. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $\delta > 0$ et chaque $u \in X$ tel que

$$\Phi(u) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon,$$

il existe $v \in X$ ayant les propriétés suivantes :

i. $\Phi(v) \leq \Phi(u)$,

ii. $d(u, v) \leq \delta$,

iii. $\Phi(v) < \Phi(w) + \frac{\varepsilon}{\delta}d(v, w)$, pour tout $w \neq v$ dans X .

Corollaire 4.1 (cf [38])

Soient X un espace de Banach et $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable au sens de Gateaux, s.c.i et bornée inférieurement. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $u \in X$ tel que

$$\Phi(u) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon,$$

il existe $v \in X$ vérifiant :

- i. $\Phi(v) \leq \Phi(u)$,
- ii. $\|v - u\|_X < \sqrt{\varepsilon}$,
- iii. $\|\Phi'(v)\|_{X'} < \sqrt{\varepsilon}$.

Opérateur $p(x)$ -Laplacien

Soient \mathbb{R}^n un ouvert et $p \in C_+(\overline{\Omega})$. L'opérateur $p(x)$ -Laplacien est un opérateur aux dérivées partielles qui à toute fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ associe la fonction

$$\Delta_{p(x)}u(x) := \operatorname{div} \left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \right); \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Si $p(x) \equiv p$ est une constante, on retrouve l'opérateur p -Laplacien

$$\Delta_p u(x) := \operatorname{div} \left(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \right), \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

et si $p = 2$, on retrouve l'opérateur de Laplace

$$\Delta_2 u(x) := \operatorname{div}(\nabla u(x)) = \Delta u(x), \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

L'opérateur $p(x)$ -Laplacien possède des structures beaucoup plus compliquées que l'opérateur p -Laplacien, par exemple, il est inhomogène. Cette inhomogénéité constitue un obstacle pour la généralisation de certains résultats dans le cas d'un exposant constant. Dans la suite, nous présenterons l'opérateur $p(x)$ -Laplacien comme un opérateur abstrait entre deux espaces de Banach. Nous utiliserons les méthodes variationnelles de l'analyse fonctionnelle pour étudier les problèmes liés aux équations aux dérivées partielles dans lesquelles intervient cet opérateur.

Définition 4.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $p \in C_+(\overline{\Omega})$. L'opérateur $p(x)$ -Laplacien peut être vu comme une application de dualité entre l'espace de Sobolev

$W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ et son dual de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -\Delta_{p(x)} & : W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \\ \langle -\Delta_{p(x)}u, v \rangle & = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

pour tous $u, v \in W^{1,p(\cdot)}$.

Remarque 4.1 Si $u, v \in W_0^{1,p(\cdot)}$ alors

$$\langle -\Delta_{p(x)}u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx \quad (1.2)$$

Proposition 4.2 ([40]). L'opérateur $p(x)$ -Laplacien satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $-\Delta_{p(x)} : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ est un homéomorphisme.
- (ii) $-\Delta_{p(x)} : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ est un opérateur strictement monotone, i.e., $-\langle \Delta_{p(x)}u - \Delta_{p(x)}v, u - v \rangle > 0$, pour tous

$$u \neq v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$$

- (iii) $-\Delta_{p(x)} : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ est une application de type (S_+) , i.e.,

$$\text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ dans } W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle -\Delta_{p(x)}u_n, u_n - u \rangle \leq 0,$$

alors $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

Proposition 4.3 ([19]). La fonctionnelle $\Psi : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

est continûment différentiable au sens de Fréchet et $\Psi'(u) = -\Delta_{p(x)}u$, pour tout $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Opérateurs de Nemytskii et leurs potentiels

Soient Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et \mathcal{M} l'ensemble de fonctions mesurables définies dans Ω à valeur réelle.

Définition 4.4 Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de **Carathéodory** si
 (1) pour tout $s \in \mathbb{R}^k$, la fonction $x \rightarrow f(x, s)$ est mesurable (Lebesgue),
 (2) pour p.p. $x \in \Omega$, la fonction $x \rightarrow f(x, s)$ est continue.

Proposition 4.4 ([45]). Si $u \in \mathcal{M}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de **Carathéodory**, alors la fonction $x \mapsto f(x, u(x))$ est mesurable.

Définition 4.5 L'opérateur de **Nemytskii** associé à la fonction f est défini par

$$N_f : \mathcal{M}^k \rightarrow \mathcal{M}$$

$$(u_1, \dots, u_k) \mapsto f(\cdot, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)),$$

Nous rappelons à présent certaines propriétés fondamentales de l'opérateur de **Nemytskii**.

Proposition 4.5 ([78]). Supposons que $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory et satisfait la condition de croissance suivante

$$|f(x, t)| \leq c |t|^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} + h(x), \text{ pour tous } x \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R},$$

où $\alpha, \beta \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha(x), \beta(x) > 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $c > 0$ est une constante et $h \in L^{\beta(x)}(\Omega)$. Alors $N_f(L^{\alpha(x)}(\Omega)) \subseteq L^{\beta(x)}(\Omega)$. De plus, N_f est continu de $L^{\alpha(x)}(\Omega)$ dans $L^{\beta(x)}(\Omega)$ et envoie un ensemble borné dans un ensemble borné.

En particulier, si $\alpha = p$ et $\beta = q$ avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, $\forall x \in \Omega$, alors la fonctionnelle $\psi : L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$$

où $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$ est appelée le potentiel de f est bien définie et de classe C^1 sur $L^{p(x)}(\Omega)$ et $\psi'(u) = f(x, u)$ pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposition 4.6 ([78]). *Supposons que $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory et satisfait la condition de croissance*

$$|f(x, t)| \leq c |t|^{\alpha(x)-1} + h(x), \text{ pour tout } x \in \Omega, t \in \mathbb{R},$$

où $c \geq 0$ est une constante, $\alpha, \beta \in C_+(\overline{\Omega})$, $h \in L^{\beta(x)}(\overline{\Omega})$ avec β l'exposant conjugué de α d'expression $\beta(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}$. Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le potentiel de N_f , alors :

(i) *La fonction F est de Carathéodory et il existe une constante $c_1 \geq 0$ et $\sigma \in L^1(\Omega)$ tels que*

$$|F(x, t)| \leq c_1 |t|^{\alpha(x)} + \sigma(x), \text{ pour tout } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}.$$

(ii) *La fonctionnelle $\Phi : L^{\alpha(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$ est continûment différentiable au sens de Fréchet et $\Phi'(u) = N_f(u)$; pour tout $u \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$.*

CHAPITRE 2

Existence de solutions pour une classe de systèmes de transmission elliptiques non locaux

1 Introduction

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , avec $N \geq 2$, soit $\Omega_1 \subset \Omega$ un sous-domaine de frontière Σ satisfaisant $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. En écrivant $\Gamma = \partial\Omega$ et $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$ on a $\Omega = \overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ et $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$.

Considérons le système elliptique non linéaire de transmission avec un terme non locale

$$\left\{ \begin{array}{ll} -M_1 \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = f(x, u) & \text{dans } \Omega_1 \\ -M_2 \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \right) = g(x, v) & \text{dans } \Omega_2 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec la condition de transmission

$$u = v,$$

$$\text{et } M_1 \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = M_2 \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \text{ sur } \Sigma.$$

Ici $p \in C(\overline{\Omega})$ avec $1 < p_- = \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p_+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) < \infty$, M_1 et M_2 sont des fonctions continues. η est la normale extérieure à Ω_2 dirigée vers l'intérieur à Ω_1 . Nous plaçons dans le cas où $M_1 = M_2 = M$.

Le problème (1.1) est lié au problème stationnaire de deux équations d'onde de type Kirchhoff suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - M_1 \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) \quad \text{in } \Omega_1 \\ v_{tt} - M_2 \left(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx \right) \Delta v = g(x, v) \quad \text{in } \Omega_2 \end{array} \right. ,$$

qui modélise les vibrations transversales de la membrane composée de deux matériaux différents en Ω_1 et Ω_2 . La contrôlabilité et la stabilisation des problèmes de transmission pour les équations d'onde peuvent être trouvées dans [65],[70]. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour les problèmes stationnaires de type Kirchhoff, à [23] pour l'équation elliptique de type p -Kirchhoff, et à [1] pour l'équation de type $p(x)$ -Kirchhoff dans un domaine non borné.

Nous étudions le problème (1.1) dans le cas $f(x, u) = \lambda_1 |u|^{q(x)-2} u$, $g(x, v) = \lambda_2 |v|^{q(x)-2} v$ où $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tels que $1 < q(x) < p^*(x)$. La fonction $M(t)$ est supposée vérifiées les deux assertions suivantes :

- (M₁) Il existe $m_0 > 0$ tel que $m_0 \leq M(t)$.
- (M₂) Il existe $0 < \mu < 1$ tel que $\widehat{M}(t) \geq (1 - \mu)M(t)t$.

$$\text{avec } \widehat{M} = \int_0^t M(s) ds.$$

Nous allons chercher les solutions du problème (1.1) dans l'espace

$$E := \left\{ (u, v) \in W^{1,p(x)}(\Omega_1) \times W_{\Gamma}^{1,p(x)}(\Omega_2) : u = v \text{ sur } \Sigma \right\},$$

où

$$W_{\Gamma}^{1,p(x)}(\Omega_2) = \left\{ v \in W^{1,p(x)}(\Omega_2) : v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

muni de la norme $\|(u, v)\|_E = \|\nabla u\|_{p(x),\Omega_1} + \|\nabla v\|_{p(x),\Omega_2}$.

Définition 1.1 *On dit que $(u, v) \in E$ est une solution faible de (1.1) si*

$$\begin{aligned} & M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)} \nabla u \nabla z dx \\ & + M \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_2} |\nabla v|^{p(x)} \nabla v \nabla w dx \\ & - \lambda_1 \int_{\Omega_1} |u|^{q(x)-1} u z dx - \lambda_2 \int_{\Omega_2} |v|^{q(x)-1} v w dx = 0, \end{aligned}$$

pour tout $(z, w) \in E$.

2 Résultats préliminaires

Lemme 2.1 ([21]) *Soit E est un sous-espace fermé de $W^{1,p(x)}(\Omega_1) \times W^{1,p(x)}(\Omega_2)$ et*

$$\|(u, v)\| = \|u\|_{p(x),\Omega_1} + \|v\|_{p(x),\Omega_2} = |\nabla u|_{p(x),\Omega_1} + |\nabla v|_{p(x),\Omega_2}$$

définie une norme dans E équivalente à la norme standard de $W^{1,p(x)}(\Omega_1) \times W^{1,p(x)}(\Omega_2)$.

3 Résultat principal

Il est clair que la fonctionnelle de Euler-Lagrange $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ associée au problème (1.1) a pour expression :

$$I(u, v) = J(u, v) - K(u, v),$$

avec

$$J(u, v) = \widehat{M} \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) + \widehat{M} \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right)$$

et

$$K(u, v) = \lambda_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx + \lambda_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{q(x)} |v|^{q(x)} dx.$$

Lemme 3.1 [21] *La fonctionnelle I est bien définie sur E , de classe $C^1(E, \mathbb{R})$. De plus, sa dérivée équivaut à :*

$$I'(u, v)(z, w) = J'(u, v)(z, w) - K'(u, v)(z, w),$$

où

$$\begin{aligned} J'(u, v)(z, w) &= M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla z dx \\ &\quad + M \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_2} |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \nabla w dx, \end{aligned}$$

et

$$K'(u, v)(z, w) = \lambda_1 \int_{\Omega_1} |u|^{q(x)-1} uz dx + \lambda_2 \int_{\Omega_2} |v|^{q(x)-1} vw dx.$$

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses (M1) et (M2), et si $p^+ > q^-$, alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda_1 + \lambda_2 \in (0, \lambda^*)$, il existe η, b tels que $I(u, v) \geq b$ pour $(u, v) \in E$ sur la sphère de rayon η , notée $S(0, \eta)$.*

Preuve. Il est clair que I est pair et $I(0, 0) = 0$.

En utilisant l'injection compact de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$, on en déduit que :

$$|u|_{q(x),\Omega_1} \leq C_1 \|u\|_{p(x),\Omega_1},$$

et

$$|v|_{q(x),\Omega_2} \leq C_2 \|v\|_{p(x),\Omega_2}.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} |u|_{q(x),\Omega_1} + |v|_{q(x),\Omega_2} &\leq C_1 \|u\|_{p(x),\Omega_1} + C_2 \|v\|_{p(x),\Omega_2} \\ &\leq C \|(u, v)\|_E. \end{aligned}$$

Fixons $\eta \in]0, 1[$ tel que $\eta < \frac{1}{C}$. Alors la relation ci-dessus implique

$$|u|_{q(x),\Omega_1} + |v|_{q(x),\Omega_2} < 1, \quad (u, v) \in E.$$

En tenant compte des propositions 2.1 chapitre 1 et 2.1 chapitre 2, nous obtenons

$$\int_{\Omega_1} |u|^{q(x)} dx \leq c_4 \left(\|u\|_{q(x),\Omega_1}^{q^+} + \|u\|_{q(x),\Omega_1}^{q^-} \right), \quad u \in W^{1,p(x)}(\Omega_1),$$

et

$$\int_{\Omega_2} |v|^{q(x)} dx \leq c_5 \left(\|v\|_{q(x),\Omega_2}^{q^+} + \|v\|_{q(x),\Omega_2}^{q^-} \right), \quad v \in W^{1,p(x)}(\Omega_2).$$

Ensuite, pour tout $(u, v) \in E$

$$\int_{\Omega_1} |u|^{q(x)} dx + \int_{\Omega_2} |v|^{q(x)} dx \leq C_6 \left(\|u\|_{q(x),\Omega_1} + \|v\|_{q(x),\Omega_2} \right).$$

Par conséquent, nous en déduisons que

$$\int_{\Omega_1} |u|^{q(x)} dx + \int_{\Omega_2} |v|^{q(x)} dx \leq C_7 \|(u, v)\|_E.$$

En utilisant **(M1)** et **(M2)**, et compte tenu de l'inégalité élémentaire

$$|a + b|^s \leq 2^{s-1} (|a|^s + |b|^s),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
J(u, v) &= \widehat{M} \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) + \widehat{M} \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \\
&\quad - \lambda_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx - \lambda_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{q(x)} |v|^{q(x)} dx \\
&\geq (1 - \mu) M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \\
&\quad + (1 - \mu) M \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \\
&\quad - \lambda_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx - \lambda_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{q(x)} |v|^{q(x)} dx \\
&\geq \frac{m_0(1 - \mu)}{p^+} \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_2} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \\
&\quad - \frac{\lambda_1}{q^-} \int_{\Omega_1} |u|^{q(x)} dx - \frac{\lambda_2}{q^-} \int_{\Omega_2} |v|^{q(x)} dx \\
&\geq \frac{m_0(1 - \mu)}{p^+} \left(|\nabla u|_{p(x), \Omega_1}^{p^+} + |\nabla v|_{p(x), \Omega_2}^{p^+} \right) \\
&\quad - C_7 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{q^-} \|(u, v)\|_E \\
&\geq \frac{m_0(1 - \mu)}{p^+} \left(\|u\|_{p(x), \Omega_1}^{p^+} + \|v\|_{p(x), \Omega_2}^{p^+} \right) \\
&\quad - C_7 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{q^-} \|(u, v)\|_E \\
&\geq \frac{2^{1-p^+} m_0(1 - \mu)}{p^+} \left(\|u\|_{p(x), \Omega_1} + \|v\|_{p(x), \Omega_2} \right)^{p^+} \\
&\quad - C_7 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{q^-} \|(u, v)\|_E \\
&\geq \frac{2^{1-p^+} m_0(1 - \mu)}{p^+} \|(u, v)\|_E^{p^+} - C_7 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{q^-} \|(u, v)\|_E
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre

$$\lambda^* = \frac{2^{1-p^+} m_0 (1-\mu) \eta^{p^+-1}}{C_7 p^+}$$

en déduire le résultat. ■

Lemme 3.3 *Supposons que les hypothèses (M1) et (M2) sont vérifiées. Alors il existe $(e_1, e_2) \in E$ avec $\|(e_1, e_2)\| > \eta$ tels que $I(e_1, e_2) < 0$.*

Preuve. Soit t_0 une constante arbitraire, strictement positive. En vertu de l'hypothèse (M2), nous pouvons montrer que pour $t > t_0$

$$\widehat{M}(t) \leq \frac{\widehat{M}(t_0)}{t_0^{\frac{1}{1-\mu}}} t^{\frac{1}{1-\mu}} \leq C t^{\frac{1}{1-\mu}}.$$

Ici C est une constante.

Choisissons $u_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega_1)$ et $v_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega_2)$, $u_0, v_0 \neq 0$ et $\|(u_0, v_0)\|_E > \eta$.

$$\begin{aligned} \text{Il s'ensuit que pour } t > 0 \quad I(tu_0, tv_0) &= \widehat{M} \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla tu_0|^{p(x)} dx \right) + \widehat{M} \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla tv_0|^{p(x)} dx \right) \\ &\quad - \lambda_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{q(x)} |tu_0|^{q(x)} dx - \lambda_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{q(x)} |tv_0|^{q(x)} dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla tu_0|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} + C \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla tv_0|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \\ &\quad - \lambda_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{q(x)} |tu_0|^{q(x)} dx - \lambda_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{q(x)} |tv_0|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{C t^{\frac{p^-}{1-\mu}}}{(p^-)^{\frac{1}{1-\mu}}} \left[\left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_0|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} + \left(\int_{\Omega_2} |\nabla v_0|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \right] \\ &\quad - \frac{\lambda_1 t^{q^+}}{q^+} \int_{\Omega_1} |u_0|^{q(x)} dx - \frac{\lambda_2 t^{q^+}}{q^+} \int_{\Omega_2} |v_0|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{C t^{\frac{p^-}{1-\mu}}}{(p^-)^{\frac{1}{1-\mu}}} \left[\max \left\{ |\nabla u_0|_{p(x), \Omega_1}^{\frac{p^-}{1-\mu}}, |\nabla u_0|_{p(x), \Omega_1}^{\frac{p^+}{1-\mu}} \right\} + \max \left\{ |\nabla v_0|_{p(x), \Omega_2}^{\frac{p^-}{1-\mu}}, |\nabla v_0|_{p(x), \Omega_2}^{\frac{p^+}{1-\mu}} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{\lambda_1 t^{q^+}}{q^+} \min \left\{ |v_0|_{q(x), \Omega_1}^{q^-}, |v_0|_{p(x), \Omega_1}^{q^+} \right\} - \frac{\lambda_2 t^{q^+}}{q^+} \min \left\{ |v_0|_{q(x), \Omega_2}^{q^-}, |v_0|_{p(x), \Omega_2}^{q^+} \right\}.$$

Il est facile de voir que pour t suffisamment petit et $q^+ < \frac{p^-}{1-\mu}$ on a $I(tu_0, tv_0) < 0$. ■

Lemme 3.4 *La fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $(u_n, v_n) \subset E$ une suite de Palais-Smale de niveau $c \in \mathbb{R}$, satisfaisant $I(u_n, v_n) \rightarrow c$ et $I'(u_n, v_n) \rightarrow 0$. Nous allons montrer que (u_n, v_n) est une suite bornée. En effet,

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq I(u_n, v_n) - \frac{1}{q^-} \langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle \\ &\geq \widehat{M} \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) + \widehat{M} \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) - \lambda_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &\quad - \lambda_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{q(x)} |v|^{q(x)} dx - \frac{1}{q^-} M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \\ &\quad - \frac{1}{q^-} M \left(\int_{\Omega_2} \frac{1}{p(x)} |\nabla v_n|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_2} |\nabla v_n|^{p(x)} dx + \frac{\lambda_1}{q^-} \int_{\Omega_1} |u|^{q(x)} dx + \frac{\lambda_2}{q^-} \int_{\Omega_2} |v|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{(1-\mu)m_0}{p^+} \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{(1-\mu)m_0}{p^+} \int_{\Omega_2} |\nabla v_n|^{p(x)} dx - \lambda_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &\quad - \lambda_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{q(x)} |v|^{q(x)} dx - \frac{m_0}{q^-} \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \frac{m_0}{q^-} \int_{\Omega_2} |\nabla v_n|^{p(x)} dx \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{q^-} \int_{\Omega_1} |u|^{q(x)} dx + \frac{\lambda_2}{q^-} \int_{\Omega_2} |v|^{q(x)} dx \\ &\geq m_0 \left(\frac{(1-\mu)}{p^+} - \frac{1}{q^-} \right) \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + m_0 \left(\frac{(1-\mu)}{p^+} - \frac{1}{q^-} \right) \int_{\Omega_2} |\nabla v_n|^{p(x)} dx \\ &\quad + \lambda_1 \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{q^-} - \frac{1}{q(x)} \right) |u|^{q(x)} dx + \lambda_2 \int_{\Omega_2} \left(\frac{1}{q^-} - \frac{1}{q(x)} \right) |v|^{q(x)} dx \\ &\geq m_0 \left(\frac{(1-\mu)}{p^+} - \frac{1}{q^-} \right) \left(\|\nabla u_n\|_{p(x), \Omega_1}^{p(x)} + \|\nabla v_n\|_{p(x), \Omega_2}^{p(x)} \right) \\ &\geq m_0 \left(\frac{(1-\mu)}{p^+} - \frac{1}{q^-} \right) \left(\|u_n\|_{1, p(x), \Omega_1}^{p^-} + \|v_n\|_{1, p(x), \Omega_2}^{p^-} \right) \end{aligned}$$

$$\geq 2^{1-p^-} m_0 \left(\frac{(1-\mu)}{p^+} - \frac{1}{q^-} \right) \|(u_n, v_n)\|^{p^-}$$

Puisque $p^+ < q^-$, par passage à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient une contradiction.

La suite (u_n, v_n) étant bornée, on peut extraire une sous-suite notée encore (u_n, v_n) faiblement convergente dans $W_{p(x), q(x)}$. Nous allons prouver que cette sous-suite (u_n, v_n) est fortement convergente vers (u, v) dans E .

Tout d'abord, on rappelle l'inégalité bien connue dans \mathbb{R}^N . Pour tout $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\begin{cases} 2^{2-p} |\zeta - \eta|^p \leq (|\zeta|^{p-2} \zeta - |\eta|^{p-2} \eta) (\zeta - \eta), & \text{if } p \geq 2 \\ (p-1) |\zeta - \eta|^2 (|\zeta| + |\eta|)^{p-2} \leq (|\zeta|^{p-2} \zeta - |\eta|^{p-2} \eta) (\zeta - \eta) & \text{if } 1 < p < 2 \end{cases}$$

En outre, la suite (u_n, v_n) contient une sous-suite de Cauchy. Pour le montrer, nous allons commencer par décomposer le domaine d'intégration en quatre sous domaines :

$$\begin{aligned} U_{p, \Omega_1} &= \{x \in \Omega_1, p(x) \geq 2\} & V_{p, \Omega_1} &= \{x \in \Omega_1, 1 < p(x) < 2\} \\ U_{p, \Omega_2} &= \{x \in \Omega_2, p(x) \geq 2\} & V_{p, \Omega_2} &= \{x \in \Omega_2, 1 < p(x) < 2\} \end{aligned}$$

Ainsi pour $p(x) \geq 2$, compte tenu de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} & 2^{2-p^+} M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \int_{U_{p, \Omega_1}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx \\ & \leq M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \int_{U_{p, \Omega_1}} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\ & \quad - M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \int_{\dot{U}_p} |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\ & \leq M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \int_{U_{p, \Omega_1}} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\ & \quad - M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \int_{\Omega_1} |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) J'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\
 &- M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) J'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0) \\
 &= M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) I'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\
 &- M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) I'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0) \\
 &+ M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) K'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\
 &- M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) K'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0).
 \end{aligned}$$

Puisque la suite numérique

$$X_n := M \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right)$$

est positive et bornée, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 &2^{2-p^+} X_n X_m \int_{U_{p, \Omega_1}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx \leq X_m I'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\
 &- X_n I'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0) + X_m K'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\
 &- X_n K'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0).
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $1 < p(x) < 2$, nous utilisons la deuxième inégalité pour obtenir

$$\begin{aligned}
 &\int_{V_{p, \Omega_1}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx \leq \int_{V_{p, \Omega_1}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} (|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} \\
 &(|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx \\
 &\leq 2 \left| |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} \cdot |\nabla u_n + \nabla u_m|^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} \right|_{\frac{2}{p(x)}} \times \left| |\nabla u_n + \nabla u_m|^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right|_{\frac{2}{2-p(x)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \max_{i=\pm} \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)-2} dx \right)^{\frac{p^i}{2}} \times \max_{i=\pm} \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2-p^i}{2}} \\
&\leq 2 \max_{i=\pm} (p^- - 1)^{\frac{-p^i}{2}} \cdot \max_{i=\pm} \left[\int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_1} |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \right]^{\frac{p^i}{2}} \times \max_{i=\pm} \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2-p^i}{2}}.
\end{aligned}$$

En prenant en compte la Proposition 2.3., la Proposition 2.4., le fait que $\|I'(u_n, v_n)\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et le fait que l'opérateur K' est compact, on en déduit que :

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx = 0.$$

De manière analogue, nous montrons que

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} |\nabla v_n - \nabla v_m|^{p(x)} dx = 0.$$

Par conséquent, (u_n, v_n) contient une sous-suite de Cauchy. La preuve est terminée. ■

Théorème 3.1 *Le système (1.1) a au moins une solution non triviale (u, v) .*

Preuve. Compte tenu des lemmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4, nous pouvons appliquer le théorème de Passe-montagne pour conclure que le système (1.1) admet une solution faible non triviale dans E . ■

CHAPITRE 3

Existence et multiplicité des solutions pour un système elliptique à frontière non linéaire

1 Introduction

Dans cette partie, nous considérons le système elliptique non linéaire

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)}u = |u|^{p(x)-2}u & , \text{ dans } \Omega \\ \Delta_{q(x)}v = |v|^{q(x)-2}v & , \text{ dans } \Omega \end{cases}, \quad (1.1)$$

avec le couple non linéaire à la frontière donné par

$$\begin{cases} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = F_u(x, u, v), & \text{sur } \partial\Omega \\ |\nabla v|^{q(x)-2} \frac{\partial v}{\partial \eta} = F_v(x, u, v), & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.2)$$

où Ω est un domaine régulier borné dans \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière $\partial\Omega$ et $p, q \in C(\overline{\Omega})$, tel que $1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$ avec $p_- = \inf_{x \in \Omega} p(x)$ et $p_+ = \sup_{x \in \Omega} p(x)$, et $1 < q_- \leq q(x) \leq q_+ < \infty$ avec $q_- = \inf_{x \in \Omega} q(x)$ et $q_+ = \sup_{x \in \Omega} q(x)$.

Ces dernières années, l'étude des problèmes aux limites non linéaires avec des exposants variables a reçu beaucoup d'attention. Nous les retrouvons dans des

applications telles que la modélisation électro-rhéologique des fluides [10], [33], [54] et le traitement d'images [23], car ces problèmes méritent d'être étudiés également d'un point de vue purement mathématique.

L'étude de l'existence d'une infinité de solutions pour les problèmes aux limites et les systèmes a suscité un grand intérêt ces dernières années. Nous renvoyons ici à quelques auteurs qui ont étudié ces types de problèmes dans \mathbb{R}^N [30].

Dans [14], les auteurs ont démontré à l'aide du théorème de Passe-montagne, l'existence de solutions non triviales du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = u & , \text{ dans } \Omega \\ \Delta v = v & , \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

avec le couple non linéaire à la frontière donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = F_u(x, u, v) & , \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = F_v(x, u, v) & , \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En utilisant le théorème du point fixe, les auteurs dans [15] ont obtenu l'existence de solutions pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = u & , \text{ dans } \Omega \\ \Delta v = v & , \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x, u, v) & , \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(x, u, v) & , \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Dans [16], les auteurs ont considéré l'existence de solutions faibles pour le système p -laplacien suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= |u|^{p-2} u && \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v &= |v|^{q-2} v && \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = F_u(x, u, v) & , \text{ sur } \partial\Omega \\ |\nabla v|^{q-2} \frac{\partial v}{\partial \eta} = F_v(x, u, v) & , \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2 Notions préliminaires

Nous adoptons de prime abord les mêmes notations déjà introduites aux chapitres précédents. Par suite, on pose :

$$p_{\partial}^* = \begin{cases} \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)}, & \text{si } p(x) < N \\ \infty, & \text{si } p(x) \geq N \end{cases} .$$

Il est alors possible de rappeler la proposition suivante sur les injections de Sobolev.

Proposition 2.1 ([52]) *Si $q \in C_+(\overline{\Omega})$ et $q(x) < p_{\partial}^*(x)$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$, alors l'injection de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\partial\Omega)$ est compacte et continue.*

Théorème 2.1 ([58]) *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfait les deux hypothèses suivantes :*

(A₁) *$I(u)$ est pair, borné inférieurement, $I(0) = 0$ et $I(u)$ satisfait la condition de Palais-Smale (PS);*

(A₂) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $A_k \in \Gamma_k$ tel que $\sup_{u \in A_k} I(u) < 0$.*

Alors $I(u)$ admet une suite de points critiques u_k tels que $I(u_k) < 0$; $u_k \neq 0$ et $u_k \rightarrow 0$, quand $k \rightarrow \infty$.

où Γ_k désigne la famille des sous-ensembles fermés symétriques A de E tels que $0 \notin A$ et $\gamma(A) \geq k$.

3 Existence et multiplicité de solutions

Nous cherchons la solution de (1.1)–(1.2) dans l'espace produit $W_{p(x),q(x)}(\Omega) = W^{1,p(x)}(\Omega) \times W^{1,q(x)}(\Omega)$ équipé de la norme $\|(u, v)\| = \|u\|_{1,p(x),\Omega} + \|v\|_{1,q(x),\Omega}$.

Pour plus de commodité, nous écrivons $W_{p(x),q(x)}$, $\|u\|_{p(x)}$, $\|v\|_{q(x)}$ au lieu de $W_{p(x),q(x)}(\Omega)$, $\|u\|_{1,p(x),\Omega}$, $\|v\|_{1,q(x),\Omega}$ respectivement..

Définition 3.1 On appelle $(u, v) \in W_{p(x),q(x)}$ une solution faible de (1.1) – (1.2) si pour tout $(z, w) \in W_{p(x),q(x)}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla z dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u z dx \\ & + \int_{\Omega} |\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \nabla w dx + \int_{\Omega} |v|^{q(x)-2} v w dx \\ & - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) z dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) w dx = 0, \end{aligned}$$

La fonctionnelle d'énergie associée à (1.1) est défini par $I : W_{p(x),q(x)} \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(u, v) = J(u, v) + F(u, v),$$

où

$$J(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} \left(|\nabla v|^{q(x)} + |v|^{q(x)} \right) dx,$$

et

$$F(u, v) = - \int_{\partial\Omega} F(x, u, v) d\sigma.$$

On peut vérifier facilement que pour tout couple (u, v) et tout couple (φ, ψ) dans $W_{p(x),q(x)}$, on a :

$$J'(u, v)(\varphi, \psi) = D_1 J(u, v)(\varphi) + D_2 J(u, v)(\psi)$$

$$F'(u, v)(\varphi, \psi) = D_1 F(u, v)(\varphi) + D_2 F(u, v)(\psi)$$

avec

$$D_1 J(u, v)(\varphi) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi dx + |u|^{p(x)-2} u \varphi \right) dx$$

$$D_2 J(u, v)(\psi) = \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \nabla \psi dx + |v|^{q(x)-2} v \psi \right) dx$$

$$D_1 F(u, v)(\varphi) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) \varphi dx$$

$$D_2 F(u, v)(\psi) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) \psi dx$$

De plus, la fonctionnelle $I(u, v)$ est bien définie et $C^1(W_{p(x), q(x)}, \mathbb{R})$ et nous avons

$$I'(u, v)(\varphi, \psi) = D_1 I(u, v)(\varphi) + D_2 I(u, v)(\psi).$$

Nous remarquerons au passage que si $F(x, 0, 0) = F_u(x, 0, 0) = F_v(x, 0, 0) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$, alors $u \equiv v \equiv 0$ est une solution triviale du système (1.1) – (1.2).

Pour montrer l'existence et la multiplicité de solutions, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H₁) $F \in C^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F(x, 0, 0) = 0$.

(H₂) $|F(x, u, v)| \leq c_1 + c_2 |u|^{p_1(x)} + c_3 |v|^{q_1(x)}$, $\forall (x, u, v) \in (\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$ avec $p_1, q_1 \in C_+(\bar{\Omega})$, $p_1 < p_{\partial}^*$, $q_1 < q_{\partial}^*$, $p_1^- > p^+$, $q_1^- > q^+$.

(H₃) $F(x, -s) = -F(x, s)$, $x \in \partial\Omega$, et $s \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 3.1 *Si les hypothèses (H₁) – (H₃) sont vérifiées, alors le système (1.1) – (1.2) admet une infinité de solutions non triviales.*

Afin de prouver le théorème, nous allons vérifier que toutes les conditions du théorème de Passe-montagne symétrique sont satisfaites. Il revient de fait de valider les lemmes suivants :

Lemme 3.1 *Sous les hypothèses (H₁) – (H₃), la fonctionnelle I est borné inférieurement.*

Preuve. Il est clair que la fonctionnelle I est pair et $I(x, 0, 0) = 0$. En outre, nous

avons

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} \left(|\nabla v|^{q(x)} + |v|^{q(x)} \right) dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} F(x, u, v) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{p^+} \rho(u) + \frac{1}{q^+} \rho(v) - \int_{\partial\Omega} F(x, u, v) d\sigma. \end{aligned}$$

L'injection de Sobolev de $W^{1,s(x)}(\Omega)$ dans $L^{t(x)}(\partial\Omega)$ telle que $t < s_{\partial}^*$, nous conduit à l'existence de deux constantes λ_1 et λ_2 incluses dans $]0, 1[$ telles que

$$\|u\|_{W^{1,s(x)}(\Omega)} \leq \lambda_1 \Rightarrow \|u\|_{L^{t(x)}(\partial\Omega)} \leq \lambda_2,$$

En utilisant le même argument que dans [35], on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} F(x, u, v) d\sigma \leq C \left(\|u\|_p^{p_1^-} + \|v\|_q^{q_1^-} \right).$$

Alors, pour (u, v) sufficiently small, we get

$$I(u, v) \geq \frac{1}{p^+} \|u\|_{p(x)}^{p^+} + \frac{1}{q^+} \|u\|_{q(x)}^{q^+} - C \left(\|u\|_{p(x)}^{p_1^-} + \|v\|_{q(x)}^{q_1^-} \right).$$

Comme $p_1^- > p^+$ et $q_1^- > q^+$, I est borné inférieurement et coercive.

Maintenant, soit (u_n, v_n) une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle d'Euler-Lagrange I . ■

Lemme 3.2 *Si les hypothèses (\mathbf{H}_1) – (\mathbf{H}_3) sont satisfaites, alors (u_n, v_n) est bornée.*

La suite (u_n, v_n) étant de Palais-Smale, cela signifie que $I(u_n, v_n)$ est bornée et $\|I'(u_n, v_n)\|_* \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. En vertu de la coercivité de la fonctionnelle I , on en déduit que la suite (u_n, v_n) est bornée.

Lemme 3.3 *Avec les mêmes conditions (\mathbf{H}_1) – (\mathbf{H}_3) la suite (u_n, v_n) admet une sous-suite convergente.*

Preuve. D'après le lemme 3.4 la suite (u_n, v_n) est bornée dans $W_{p(x), q(x)}$; par conséquent on peut extraire une sous-suite notée à nouveau (u_n, v_n) qui converge faiblement vers (u, v) . Cependant

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n, v_n) - I'(u, v), (u_n - u, 0) \rangle &= \int_{\Omega} \left((|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \nabla (u_n - u) \right. \\ &\quad \left. + (|u_n|^{p(x)-2} u_n - |u|^{p(x)-2} u) (u_n - u) \right) dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, v_n) - \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) \right) (u_n - u) d\sigma. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n, v_n) - I'(u, v), (u_n - u, 0) \rangle &\rightarrow 0, \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) (u_n - u) d\sigma &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

$u_n \rightarrow u$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$, $u_n \rightarrow u$ dans $L^{p(x)}(\partial\Omega)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors

$$\int_{\Omega} (|u_n|^{p(x)-2} u_n - |u|^{p(x)-2} u) (u_n - u) dx \rightarrow 0,$$

quand $n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, v_n) (u_n - u) d\sigma \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \left| c_1 + c_2 |u|^{p_1(x)} + c_3 |v|^{q_1(x)} \right| |u_n - u| d\sigma \\ &\leq c_1 |u_n - u|_1 + \left| |u|^{p_1(x)} \right|_{p'_1(x)} |u_n - u|_{p_1(x)} + \left| |u|^{q_1(x)} \right|_{q'_1(x)} |u_n - u|_{q_1(x)}, \end{aligned}$$

tel que $\frac{1}{p_1(x)} + \frac{1}{p'_1(x)} = 1$, $\frac{1}{q_1(x)} + \frac{1}{q'_1(x)} = 1$.

Nous obtenons $|u_n - u|_1 \rightarrow 0$, $\left| |u|^{p_1(x)} \right|_{p'_1(x)}$, $\left| |u|^{q_1(x)} \right|_{q'_1(x)}$ sont bornés et $|u_n - u|_{p_1(x)} \rightarrow 0$, $|u_n - u|_{q_1(x)} \rightarrow 0$.

Il reste à montrer que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} U_p &= \{x \in \Omega, p(x) \geq 2\} & V_p &= \{x \in \Omega, 1 < p(x) < 2\}, \\ U_q &= \{x \in \Omega, q(x) \geq 2\} & V_q &= \{x \in \Omega, 1 < q(x) < 2\}, \end{aligned}$$

Pour $p(x) \geq 2$, en utilisant l'inégalité élémentaire introduite dans le précédent chapitre, nous obtenons :

$$\int_{U_p} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \leq c \int_{U_p} \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0.$$

Ceci entraîne que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \rightarrow 0.$$

D'autre part, pour $1 < p(x) < 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{V_p} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx &\leq \int_{V_p} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx \\ &\leq 2 \left| |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} \cdot |\nabla u_n + \nabla u|^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} \right|_{\frac{2}{p(x)}} \times \left| |\nabla u_n + \nabla u|^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right|_{\frac{2}{2-p(x)}} \\ &\leq 2 \max_{i=\pm} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^2 |\nabla u_n + \nabla u|^{p(x)-2} dx \right)^{\frac{p^i}{2}} \max_{i=\pm} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2-p^i}{2}} \\ &\leq 2 \max_{i=\pm} (p^- - 1)^{\frac{-p^i}{2}} \cdot \max_{i=\pm} \left[\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) dx \right]^{\frac{p^i}{2}} \max_{i=\pm} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2-p^i}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{\Omega} |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)} dx \rightarrow 0.$$

En conséquence $u_n \rightarrow u$, dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Nous procédons de la même manière pour prouver que $v_n \rightarrow v$, dans $W^{1,q(x)}(\Omega)$.

■

Lemme 3.4 *Supposons que les hypothèses (\mathbf{H}_1) – (\mathbf{H}_3) sont satisfaites. Alors pour chaque $k \in N$, il existe un $A_k \in \Gamma_k$ tel que*

$$\sup_{u \in A_k} I(u, v) < 0.$$

Preuve. Soit $w_1, w_2, \dots, w_k \in C^\infty(\Omega)$ tels que

$$\overline{\{x \in \partial\Omega; w_i(x) \neq 0\}} \cap \overline{\{x \in \partial\Omega; w_j(x) \neq 0\}} = \emptyset, \text{ si } i \neq j,$$

et

$$|\{x \in \partial\Omega; w_i(x) \neq 0\}| > 0,$$

$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Considérons le sous-espace F_k engendré par w_1, w_2, \dots, w_k ; il est clairement de dimension k .

Désignons par $S = \{w \in W_{p(x), q(x)}; \|w\| = 1\}$ et par $A_k(t) = t(F_k \cap S)$ pour $t > 0$. Bien évidemment $\gamma(A_k(t)) = k$. Maintenant nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $t > 0$ tel que

$$\sup_{u, v \in A_k(t)} I(u, v) < 0.$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in A_k(t)} I(u, v) &\leq \sup_{w \in F_k \cap S} I(tw) = \sup_{u_0, v_0 \in F_k \cap S} I(tu_0, tv_0) \\
&= \sup_{u_0, v_0 \in F_k \cap S} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla tu_0|^{p(x)} + |tu_0|^{p(x)} \right) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} \left(|\nabla tv_0|^{q(x)} + |tv_0|^{q(x)} \right) dx - \int_{\partial\Omega} F(x, tu_0, tv_0) d\sigma \right\} \\
&= \sup_{u_0, v_0 \in F_k \cap S} \left\{ \int_{\Omega} \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \left(|\nabla u_0|^{p(x)} + |u_0|^{p(x)} \right) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{t^{q(x)}}{q(x)} \left(|\nabla v_0|^{q(x)} + |v_0|^{q(x)} \right) dx - c \int_{\partial\Omega} |tu_0|^{p_1(x)} d\sigma \right. \\
&\quad \left. - c \int_{\partial\Omega} |tv_0|^{q_1(x)} d\sigma - c |\Omega| \right\} \\
&\leq \sup_{u_0, v_0 \in F_k \cap S} \left\{ \frac{t^{p^-}}{p^-} \rho(u_0) + \frac{t^{q^-}}{q^-} \rho(v_0) - ct^{p_1^+} \int_{\partial\Omega} |u_0|^{p_1(x)} d\sigma \right. \\
&\quad \left. - ct^{q_1^+} \int_{\partial\Omega} |v_0|^{q_1(x)} d\sigma - c |\Omega| \right\} \\
&\leq \sup_{u_0, v_0 \in F_k \cap S} \left\{ \frac{t^{p^-}}{p^-} + \frac{t^{q^-}}{q^-} - ct^{p_1^+} \int_{\partial\Omega} |u_0|^{p_1(x)} d\sigma - ct^{q_1^+} \int_{\partial\Omega} |v_0|^{q_1(x)} d\sigma - c |\Omega| \right\}
\end{aligned}$$

Si on pose $\alpha = \int_{\partial\Omega} |u_0|^{p_1(x)} d\sigma$ et $\beta = \int_{\partial\Omega} |v_0|^{q_1(x)} d\sigma$, alors $\sup_{u \in A_k} I(u, v) < 0$ pour t assez grand. ■

Preuve.

De toute évidence, $I(0, 0) = 0$ et I est une fonctionnelle paire. Alors, d'après les lemmes (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4), les conditions (\mathbf{A}_1) et (\mathbf{A}_2) du théorème 4.1 sont satisfaites. Par conséquent, le problème (1.1)-(1.2) admet une infinité de solutions $(u_k, v_k) \in W_{p(x), q(x)}$ qui convergent vers $(0, 0)$ et (u_k, v_k) peuvent être supposées

positives puisque $I(u_k, v_k) = I(|u_k|, |v_k|)$. ■

CHAPITRE 4

Annexe 1 : Quelques résultats utilisés dans les démonstrations

Théorème 0.2 (convergence monotone) Soit $\{f_k\}_k$ une suite de fonctions de L^1 tel que

$$\sup_k \int_E f_k < \infty.$$

Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$, de plus $f \in L^1$ et

$$\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Théorème 0.3 (convergence dominée de Lebesgue) Soit f_n une suite de fonction de L^1 . On suppose que

- i. $f_n \rightarrow f$ p.p. sur Ω ,
- ii. il existe une fonction $g \in L^1$ telle que, pour chaque n , $|f_n| \leq g(x)$ p.p. sur Ω . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Théorème 0.4 Soit f une fonction positive intégrable sur E . Pour tout $\varepsilon > 0$, il

existe $\eta > 0$ tel que pour tout sous-ensemble $A \subset E$ avec $m_n(A) < \eta$, on a

$$\int_A f < \varepsilon.$$

Théorème 0.5 (du Dois-Reymond) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N .

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} fu = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

alors $f = 0$ p.p. dans Ω

Preuve. Pour la démonstration voir [13] ■

Conclusion

DDans cette thèse, nous avons traité des systèmes elliptiques non linéaires faisant intervenir des opérateurs non homogènes. Nous avons établi des théorèmes d'existence ainsi d'existence et multiplicité des solutions en utilisant la théorie des points critiques, précisément nous avons utilisé le théorème de Passe-Montagne pour montrer l'existence d'au moins une solution, puis le théorème de Passe-Montagne symétriques pour la multiplicité des solutions.

En perspective, nous envisageons d'étudier des systèmes de même nature en appliquant le théorème de la fontaine et prouver aussi l'existence d'une multitude de solutions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **B. Abdelmalek, A. Djellit and S. Tas**, *Existence of solutions for an elliptic $p(x)$ -Kirchhoff-type systems in unbounded domain*, Bol. Soc. Paran. Mat. 36 3 (2018) : 193–205.
- [2] **B. Abdelmalek , S. Tamrabet and A. Djellit**, *Existence of solutions for a class of nonlocal elliptic transmission systems*, , Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. 2025 (43) : 1–9
- [3] **R. A. Adams**, *Sobolev spaces*, Academic Press, New york (1975).
- [4] **C. O. Alves and F. J. S. Correa**, *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Communication on Nonlinear Anal, Vol. 8, no. 2, 2001, pp. 43-56.
- [5] **C. O. Alves and M. A. S. Souto**, *Existence of solutions for a class of problems in \mathbb{R}^N involving the $p(x)$ -Laplacian*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 66 (2005), 17-32.
- [6] **A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz**, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. , 14 (1973), 349-381.
- [7] **A. Ayoujil**, *Etude spectrale de l'opérateur $p(x)$ -biharmonique et multiplicité de solutions d'un problème nonlinéaire via la théorie de Morse*, Thèse de Doctorat. Univ Oujda Maroc, 2008.
- [8] **A. Ayoujil and A. Ourraoui**, *On a nonlocal elliptic system with transmission conditions* , Adv. Pure Appl. Math. 2016, 09 pages.

- [9] **E. Acerbi and G. Mingione**, *Gradient estimates for the $p(x)$ -Laplacian system*, J. Reine Angew. Math. 584 (2005),117-148.
- [10] **E. Acerbi and G. Mingione**, *Gradient estimates for the $p(x)$ -Laplacian system*, J. Reine Angew. Math. 584 (2005),117-148.
- [11] **A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz**, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.
- [12] **A. Anane, O. Chakrone, A. Zerouali and B. Karim**, *Existence of solutions for a Steklov problem involving the $p(x)$ -Laplacian*, Bol. Soc. Paran. Mat. 32 1 (2014) : 207–215.
- [13] **R.G. Bartle**, *The elements of intégration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [14] **J. F. Bonder, J. P. Pinasco and J. D. Rossi**, *Existence results for hamiltonian elliptic systems with nonlinear boundary conditions*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 1999 (1999), No. 40, p.p. 1–15.
- [15] **J. F. Bonder and J. D. Rossi**, *Existence for an elliptic systems with nonlinear boundary conditions via fixed point methods*, Adv. in Diff. Equ. Vol 6. p.p. 1-20.
- [16] **J. F. Bonder, S. Martinez and J. D. Rossi**, *Existence results for Gradient elliptic systems with nonlinear boundary conditions*, Nonlinear differ. equ. appl. 14 (2007) 153—179.
- [17] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.
- [18] **M. M. Boureau**, *Existence of solutions for an elliptic equation involving the $p(x)$ -Laplace operator*, EJDE., Vol. 2006 (2006), No. 97, p.p. 1–10.
- [19] **K. C. Chang**, *Critical point theory and applications*, Shanghai Scientific and Technology Press, Shanghai, 1986.
- [20] **B. Cekic, R. Mashiyev and G.T. Alisoy**, *On The Sobolev-type Inequality for Lebesgue Spaces with a Variable Exponent*, International Mathematical Forum, 1, 2006, no.27, 1313-1323
- [21] **B. Cekic and R. A. Mashiyev**, *Nontrivial solution for a nonlocal elliptic transmission problem in variable exponent Sobolev space*, Abstract and applied analysis,.V2010 Article ID 385048, 12 pages.

- [22] **G. Cerami**, *Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà illimitate*, Rend. Acad. Sci. Lett. Ist. Lombardo, 112 (1978) 332-336.
- [23] **G-S Chen, H-Y Tang, D-Q Zhang, Y-X Jiao and H-X Wang**, *Existence of three solutions for a nonlocal elliptic system of (p, q) -Kirchhoff type*, Boundary Value Problems 2013, 2013 :175 pp 01-09.
- [24] **N. T. Chung**, *On Some $p(x)$ -Kirchhoff-type equations with weights*; J. Appl. Math. & Informatics Vol. 32(2014), No. 1 - 2, pp. 113 - 128.
- [25] **Y. Chen, S. Levine and M. Rao**, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM, App. Math. 66 (2006) 1383-1460.
- [26] **Cícero Januário Guimarães**, *Sobre os espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados e aplicações envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano*, Document présenté du programme d'études supérieures en Mathématiques - CCT - UFCG. Université fédérale de Campina Grande, Brésil, 2006.
- [27] **G. Dai and X. Li**, *On nonlocal elliptic systems of $p(x)$ -Kirchhoff-type under Neumann boundary condition*, J. Math. Resea with app., Vol. 33 (2013), No. 4, p.p. 443-450
- [28] **G. Dai**, *Existence of solutions for nonlocal elliptic systems with nonstandard growth conditions*, Elec. J. of Diff. Equ., Vol. 2011 (2011), No. 137, p.p. 1-13.
- [29] **D.G. De Figueiredo and P.L. Felmer**, *On Superquadratic elliptic systems*; Transactions of the AMS, Vol. 343(1994), No. 1 -pp. 99 - 116.
- [30] **A. Djellit, Z. Youbi and S. Tas**, *Existence of solution for elliptic systems in \mathbb{R}^N involving the $p(x)$ -Laplacian*, Elec. J. of Diff. Equ., Vol. 2012 (2012), No. 131, pp. 1-10.
- [31] **A. Djellit and S. Tas**, *Existence of solution for elliptic systems in \mathbb{R}^N involving the p -Laplacian*, Elec. J. of Diff. Equ., Vol. 2003(2003), No. 56, pp. 1-8.
- [32] **L. Diening**, *Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$* , Math. Nachr. 268 (2004), 31-43.
- [33] **Diening**, *Theoretical and numerical results for electro-rheological fluids*, Ph.D thesis, University of Friburg, Germany, 2002.

- [34] **D. E. Edmunds and J. Rázkosník**, *Sobolev embedding with variable exponent*, Studia Mathematica 143 (2000) 267-293.
- [35] **A. El Hamidi**, *Existence results to elliptic systems with nonstandard growth conditions*, J. Math. Anal. Appl, 300 (2004) 30–42.
- [36] **A. R. El Amrouss**, *Critical Point Theorems and applications to Differential Equations*, Acta Mathematica Sinica, English Series, 21 (2005) 129-142.
- [37] **D. E. Edmunds and J. Rázkosník**, *Sobolev embedding with variable exponent*, Studia Mathematica 143 (2000) 267-293.
- [38] **I. Ekeland**, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., 47 (1974) 324-353.
- [39] **X. Fan, J. Shen & D. Zhao**, *Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$* , J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749–760.
- [40] **X. Fan, Q. H. Zhang**; *Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem*, Nonlinearanal. 52 (2003), 1843 1852.
- [41] **X. Fan & D. Zhao**, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$* , J. Math. Anal. Appl.263 (2001), 424–446.
- [42] **X. Fan**, *A constrained minimization problem involving the $p(x)$ -Laplacian in \mathbb{R}^N* , Nonlinear anal 69(2008) 3661-3670.
- [43] **X. Fan, X.Y Han**, *Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$ -Laplacian equations in \mathbb{R}^N* , Nonlinear Anal. 59 (2004) 173-188.
- [44] **Y. Fu and X. Zhang**, *A multiplicity result for $p(x)$ -Laplacian problem in \mathbb{R}^N* , Nonlinear Anal. 70 (2009) 2261-2269.
- [45] **D. G. Figueiredo**; *Lectures on Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Inst. of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1989.
- [46] **Y. Fu, X. Zhang**, *Multiple solutions for a class of $p(x)$ -Laplacian system*, J. of ineq. Appl. V2009 id191649 12page
- [47] **E. Guo and P. Zhao**, *Existence and multiplicity of solutions for nonlocal $p(x)$ -Laplacian problems in \mathbb{R}^N* , Boundary Value Problems 2012, 2012 :79.
- [48] **X. Han and G. Dai**, *On the sub-supersolution method for $p(x)$ -Kirchhoff type equations*, Journal of Inequalities and Applications 2012, 2012 :283.

- [49] **T. C. Halsay**, *Electrorheological fluids*, sciences 258 (1992) 761-766.
- [50] **X. Han and G. Dai**, *On the sub-supersolution method for $p(x)$ -Kirchhoff type equations*, Journal of Inequalities and Applications 2012, 2012 :283.
- [51] **In Hyoun Kim and Yun-Ho Kim**, *Positivity of the infimum eigenvalue for equations of $p(x)$ -Laplace type in \mathbb{R}^N* , Boundry Value problem, 2013, 2013 :214.
- [52] **P. Harjulehto, P. Husto, M. Koskenoja and S. Varonen**, *The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values*, Potential Anal. 25 (2006), no. 3, 205–222.
- [53] **G. Kirchhoff**, *Mechanik*, Teubner, Leipezig,1983.
- [54] **O. Kovácik & J. Rákosník**, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$* , Czechoslovak Math, J. 41 (116) (1991), 592–618.
- [55] **O. Kavian**, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et applications, vol. 13, Springer-Verlag, 1993.
- [56] **K. Kefi**, *$p(x)$ –Laplacian with indefinite weight*, Proceedings of the AMS 139, 12 (2011) 4351-4360.
- [57] **G. Kirchhoff**, *Mechanik*, Teubner, Leipezig,1983.
- [58] **R. Kajikiya**, *A critical point theorem related to the symmetric mountain pass lemma and its applications to elliptic equations*, Journal of Functional Analysis 225 (2005) 352–370.
- [59] **J. Musielak**, *Orlicz spaces and modular spaces*, volume 1034 of Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [60] **Mohamed Badr Benboubker**, *Sur certains problèmes elliptiques quasili-néaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann*, thèse de doctorat, Univ Sidi Mohamed ben Abdellah, Dhar El Mahraz-Fès, Maroc. 2013.
- [61] **Q. Miao, Z. Yangv**, *Existence of solutions for $p(x)$ -Kirchhoff type equations with singular coefficients in \mathbb{R}^N* , J. Adv. Rese in Dyn. Cont. Sys. Vol. 5, Issue. 2, 2013, pp. 34-48.

- [62] **M. Mihailescu and V. Radulescu**, A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 462 (2006), 2625-2641.
- [63] **M. Mihailescu and V. Radulescu**, *On a Nonhomogeneous Quasilinear Eigenvalue Problem in Sobolev Spaces with Variable Exponent*. Proceedings of the AMS 135, (2007) 416-423.
- [64] **R. Ma, G. Dai and C. Gao**, *Existence and multiplicity of positive solutions for a class of $p(x)$ -Kirchhoff type equations*, Boundary Value Problems 2012, 2012 :16 pp. 01-16.
- [65] **J.E. Munoz Rivera and H. P. Oquendo**, *The transmission problem of viscoelastic waves*, Acta. Appl. Math. 62 (2000) no. 1, 1-21.
- [66] **H. Nakano**, *Modulated semi-ordered linear spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1950.
- [67] **H. Nakano**, *Topology of linear topological spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1951.
- [68] **W. Orlicz**, *Über konjugierte exponentenfolgen*, Studia Math., 3 :200 211, 1931.
- [69] **S. Ogras, R. A. Mashiyev, M. Avci, and Z. Yucedag**, *Existence of Solutions for a Class of Elliptic Systems in \mathbb{R}^N Involving the $(p(x), q(x))$ -Laplacian*, J. of Inequ. and Appl., Volume 2008, Article ID 612938, 16 pages.
- [70] **J. Y. Park, J.J. Bae and I. H. Jung**, *Uniform decay of solution for wave equation of Kirchhoff type with nonlinear boundary damping and memory term*, Nonlinear analysis, 62 (2002) no. 7 871-256.
- [71] **M. Ruzicka**, *Electrorheological fluids; modeling and mathematical theory*, Springer, Berlin. Lecture note in mathematics, 1748 (2000).
- [72] **Seung Dae Lee, Kisoeb Park and Yun-Ho Kim**, *Existence and multiplicity of solutions for equations involving nonhomogeneous operators of $p(x)$ -Laplace type in \mathbb{R}^N* , Boundry Value problem, (2014) 2014 :261.

- [73] **S. G. Samko and B. Vakulov**, *Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operator*, J. Math. Anal. Appl. 310 (2005) 229-246.
- [74] **A. Szulkin**, *Ljusternik-Schnirelmann theory on C-manifolds*. Ann. I. H. Poincaré, Anal. Nonlin, 5 (1988) 119-139.
- [75] **S. Tamrabet, A. Djellit and B. Abdelmalek**, *Existence and multiplicity of solutions for an elliptic system with nonlinear boundary*, Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. 2025 (43) : 1–8.
- [76] **M-C. Wei and C-L. Tang**, *Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$ -Kirchhoff-Type Problem in \mathbb{R}^N* , Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 36(3). (2013), 767–781.
- [77] **X. Xu and Y. An**, *Existence and multiplicity of solutions for elliptic systems with nonstandard growth condition in \mathbb{R}^N* , Non. Ana. : Theo., Meth. & App., vol. 68, no. 4, pp. 956–968, 2008.
- [78] **D. Zhao, X. L. Fan**, *On the Nemytskii operators from $L^{p_1(x)}(\Omega)$ to $L^{p_2(x)}(\Omega)$* , J. Lanzhou Univ. 34 (1998), 1–5.
- [79] **E. Zeidler**, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Tome III, in the space L, (Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 7 (1961) 25-37.