PROJET DE MAGISTÈR DE L'UNIVERSITÉ DE ANNABA

***Spécialité*** : Mathématiques

*présenté par*

**Abdelkader BOUADI**

Sujet du mémoire :

# Calcul de variations pour les problèmes à arguments déviés

| | |
|---|---|
| *Directeurs du mémoire* | **M.HAIOUR** |
| *Président* | H.SISSAOUI |
| *Examinateurs* | J.BLOT |
| | M.R.RIMITA |
| | S.SAADI |

*A mes parents, ma raison d'être,*
*à ma femme,*
*à toute ma famille et à tous mes amis.*

# Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier très vivement mon directeur de Magister : le docteur M.HAIOUR pour son soutien moral constant, se conseil et encouragement qui m'ont permis de mener à terme ce travail. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude.

Mes remerciements et ma gratitude s'adresse aussi au professeur H.SISSAOUI qui me fait l'honneur d'être le président de mon jury.

Je remercie très chaleureusement les docteurs M.R.RIMITA, S.SAADI et le professeur J.Blot pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce Magister.

Un grand merci à mes amis, A.MAATOUG, S.BOUZEBDA, et tant d'autres avec qui j'ai partagé de bons moments.

Mes pensées vont enfin à tous mes proches, mes parents, mes frères et soeurs, toute ma famille pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de la préparation de ce Magister.

# Résumé

Ce travail est une synthèse des derniers résultats obtenus, sur les problèmes de calcul des variations des fonctionnelles à arguments déviés. On va expliquer comment L.SMASSI a pu établir, dans [12], l'existence des solutions pour un problème à arguments déviés dans un espace de Sobolev relié à la déviation, ensuite on va détailler le travail fait par R.TAHRAOUI et L.SMASSI, dans [15] ou ils donnent des conditions nécessaire d'optimalité de ce problème. Une applications sur un modèle de marché financier est donnée à la fin de ce mémoire.

# Abstact

This work is a synthesis of recent results about the problems of calculs of variation for functionals with deviating arguments. First, we will explain how L.SMASSI established in [12], the existence of solutions to a problem with deviating arguments in a Sobolev space connected to the deviation, then, we will detail the work of R.TAHRAOUI and L.SMASSI, in [15], where necessary optimality conditions for this problem are given, and finaly a sumilation based on the financial market model is computed.

# Table des matières

# Introduction Générale

L'analyse des problèmes de calcul des variations des fonctionnelles à arguments déviées a suscité à un grand intérêt. intéressés par ce problème, les travaux les plus marquants sont ceux de G.A.Kamenski [11] , A.A.Gruzdev et S.A.Gusarenko [8]. , A.Braides[1] et R.TAHRAOUI et L.SMASSI [14],dans [10] , et comme application direct de ce sujet, on peut citer les problèmes de finance mathématique on été étudiés par E.Jouini, P.F.Koehl et N.Touzi.

Nous proposons, dans ce travail, une synthése des derniers résultats obtenus, sur les problèmes de calcul des variations des fonctionnelles à arguments déviées. On va expliquer comment L.SMASSI a pu établir, dans [12], l'existence des solutions pour un problème à arguments déviés dans un espace de Sobolev relié à la d´eviation, ensuite on va détailler le travail fait par R.TAHRAOUI et L.SMASSI, dans [15] où ils donnent des conditions nécessaire d'optimalité de ce problème.
les problémes traités içi s'écrit sous la forme suivante.

$$J(u)=\int_0^1 f(x,u(\phi_1(x))),\dots,u(\phi_k(x)),u'(\psi_1(x)),\dots,u'(\psi_k(x))\ \mathrm{dx}, \tag{1}$$

où les fonctions

$$\phi_i\ :[0,1]\longrightarrow[0,1]\quad i=1,\dots,k$$

et

$$\psi_j:[0,1]\longrightarrow[0,1]\quad j=1,\dots,l$$

sont appelées fonctions de déviation. Considérons la fonctionnelle suivante

$$J(u)=\int_0^1 f(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))\ \mathrm{d}x, \tag{2}$$

où

$$\theta\ :[0,1]\longrightarrow[0,1],\quad \varphi\ :[0,1]\longrightarrow[0,1]\ \text{et}$$

$$f: \ [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si on introduit les opérateurs suivants.

$$T_\varphi u(x) = u(\varphi(x)),$$

et

$$S_\theta u(x) = u(\theta(x)).$$

Alors la fonctionnelle (2) s'exprime sous la forme

$$J(u) = \int_0^1 f(x, S_\theta u(x), T_\varphi u'(x)) \ \mathrm{d}x. \tag{3}$$

$f(x, \eta, \xi)$ est une fonction convenablement choisie, l'espace de travaille $E$ est un sous-ensemble d'un espace fonctionnel de type Sobolev, $\theta$ et $\varphi$ étant des déviations définies de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On rencontre de tels problèmes en contrôle optimal où l'état joue le rôle de la déviation. Ce sont des problèmes de type suivant, minimisation de $J(u)$ où

$$J(u) = \int_0^1 f(x, x(t), x \circ \theta_\upsilon(t), \theta_\upsilon(t), \upsilon(t)) \ \mathrm{dt} \ \ \text{avec} \ \ (x, \upsilon) \in \ U_{ad}, \tag{4}$$

sous des contraintes d'état,

$$\begin{cases} \frac{d\theta_\upsilon(t)}{dt} & = g(t, \theta_\nu(t), \upsilon(t)) \\ \theta_\upsilon(0) & = \theta_0, 0 < \theta_0 < 1, \quad \theta_\upsilon(t) \in [0,1], \ (\forall \ t \in [0,1]), \end{cases} \tag{5}$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un ensemble de contrôle admissibles de type classique i.e, un sous-ensemble convexe d'un espace fonctionnel classique. La fonction $\theta_\upsilon(\cdot)$ joue le rôle de la déviation. Ces problèmes ont été considérés dans [9] et [10] les auteurs ont étudié un modèle de finance mathématique relié au contrôle optimal, il s'agit d'un investissement avec taxes, dont le paiement s'effectue avec un certain délai endogène.

# Plan du mémoire

Dans le $1^{er}$ chapitre, nous fournissons quelques définitions, des notions et espaces fontionnels utilisés dans ce mémoire, plus précisément le calcul variationnel sur les espaces de Sobolev, en se basant surtout sur le livre de Bernard Dacorogna [2], nous introduisons également quelques notions supplémentaires qui nous serons utiles dans les chapitres à suivre, tels que , le théorème d'existence et l'équations d'Euler-Lagrange pour les méthodes directs

Dans Le chapitre 2, on va parler des conditions d'existence pour les problèmes à arguments déviés, établis par L.SAMASSI dans ([12]), pour un espace de Sobolev à poids relié à la déviation. Le choix de cet espace fonctionnel a l'avantage de mettre en évidence quelques situations non prévues dans les travaux de certains auteurs, notamment [4] et [5] dans lesquels M. E. Drakhlin, E. Stepanov et E. Litsyn qui donnent des résultats d'existences pour les problèmes à arguments déviés dans les espaces d'Orlicz et dans les espaces des fonctions absolument continues à dérivées dans les espaces de Lesbesgue.

Un detail de l'article [14] traitant des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (2), sera donné dans Le chapitre 3. En fin du chapitre, on présente une application de ce qui précède, sur un modèle de marché financier ([10]), ou l'état joue le rôle d'une déviation.

# Chapitre 1

# Introduction au calcul de variations-méthodes directes

## 1.1 Bref historique

Le calcul des variations est une branches anciennes des mathématiques.Rappelons, que c'est Euler, au vue des travaux de Lagrange sur ce sujet,qui donna à cette branche des mathématiques le non qu'elle porte encore aujourd'hui. Dans la plupart des ouvrages qui lui sont consacrés, on fait remonter ces débuts, soit á Zénodore (200 ans avant J-C), à Fermat (1662), à Newton(1685), soit, le plus souvent, à Jean Bernoulli (1696).

Comme déjà mentionné, les travaux de fermat sur l'optique géométrique peuvent être considérer comme le début de notre sujet. Par la suite, il faut mentionner Newton pour son étude sur le mouvement des corps Dans un fluide. la plupart des livres sur le calcul des variations font remonter ses débuts au défi que lança Jean Bernoulli en 1696 aux mathématiciens de son époque pour résoudre le probléme de la *brachistochrone* formulé par Galilée en 1638.

Une étape importante de calcul de variations fut franchi par Euler puis par Lagrange, lorsqu'ils établirent leur fameuse condition nécessaire connue sous le nom d'*équation d'Euler-Lagrange*. par la suite, il faut mentionner les travaux entre autres, de Legendre, Jacobi, Hamilton, Weiestrass, Hilbert et Carathéodory.

Au $XIX^e$ siécle, le probléme variationel du principe de Direchlet, qui concerne cette fois-ci, les intégrales multiples, a influencé considérablement sur l'évolution de la géométrie et de l'analyse. Mais c'est au tournant du siécle, avec la résolution du probléme par Hilbert, que le calcul de variations entra dans son ère moderne grâce à l'introduction des méthodes directe qui ont été développées par Lebesgue, Tonelli, puis par d'autre.

## 1.2 Rappels

Il nous faut maintenant introduire les différents espaces fonctionnels, indispensables pour notre travail, voici un résumé de ce qu'on utilise :

**Définition 1.2.1.** :

- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 < p < \infty$. Une fonction mesurable $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ appartient à $L^p(\Omega)$ si et seulement si

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{dx})^{\frac{1}{\mathrm{p}}} < \infty,$$

  où d$x$ désigne la mesure de Lebesgue.

- $u_n$ converge fortement vers $u$ dans $L^p(\Omega)$ si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0,$$

  on note $(u_n \longrightarrow u)$
- On dit que $u_n \in L^p(\Omega)$ converge faiblement vers $u \in L^p$ et on note $u_n \rightharpoonup u \in L^p$ si $\forall \varphi \in L^{p'}(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

  où $p' = p/(p-1)$.

**Remarque 1.2.1.** :
On a toujours que $u_n \longrightarrow u \Longrightarrow u_n \rightharpoonup u \; L^p$. La réciproque est fausse $(u_n(x) = \sin(nx), \text{ avec } \Omega = (0, 2\pi))$.

Un résultat important pour notre analyse est la généralisation suivante à $L^p$ du *théorème de Bolzano-Weierstrass.*

**Théorème 1.2.1.** :
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $1 < p < \infty$.
Et $u_n \in L^p(\Omega)$ tel qu'il existe $k < 0$ avec $\| u_n \|_{L^p} \leq k$.
Alors il existe $u \in L^p(\Omega)$ et on peut extraire une sous suite $u_{n_i}$
telle que $u_{n_i} \rightharpoonup u \; L^p$

**Théorème 1.2.2. (Lemme fondamental de calcul des variation*)***
soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in L^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{dx} = 0, \quad (\forall \mathrm{v} \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega))$$

alors $u = 0 \quad (p.px \in \Omega)$

**Espaces de Sobolev**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $1 < p < \infty$. On dit que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ ,si $u \in L^p$ et $\nabla u \in L^p$, en d'autre termes si

$$\| u \|_{W^{1,p}} = (\| u \|_{L^p}^p + \| \nabla u \|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Si $p = 2$ on notera parfois $W^{1,2} = H^1$.
Notons q'on a toujours $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.
On définit aussi $W^{1,p}(\bar{\Omega})$ comme l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}$ qui sont nulles sur $\partial\Omega$.
On utilise souvent les résultats suivants :
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert borné suffisamment régulier et $1 \leq p < \infty$.

**Théorème de Sobolev.**
Si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ c'est-à-dire les fonctions de $W^{1,p}$ sont continues dés que $p > n$.
**Théorème de Rellich.**
Si $u_n \rightharpoonup u \; W^{1,p}$ ( c'est-à-dire $u_n \rightharpoonup u \; L^p$ et $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \; L^p$) alors $u_n \rightarrow u \; L^p$.
**Inégalité de Poincarré.**
Il existe une constante $C = C(\Omega, p) > 0$ telle que

$$\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

## 1.3 Fonctions et ensembles convexes

**Définition 1.3.1.** – *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un convexe si $\forall x, y \in \Omega$, $\forall \lambda \in [0,1]$ alors $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$.*

– *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un convexe. Alors $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall x, y \in \Omega, \forall \lambda \in [0,1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \ \lambda \ f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1.1}$$

## 1.4 Caractérisation des fonctions convexes

Le théorème suivant donne un critère simple pour vérifier la convexité d'une fonction

**Théorème 1.4.1.** *:*
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

**(i)** Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f$ est convexe si et seulement si

$$f(x) \geq f(y) + \langle f'(y), x-y \rangle, \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denote le produit scalaire.

**(ii)** Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, alors $f$ est convexe si et seulement si $\nabla^2 f$ est définie positive.

## 1.5 Théorème d'existence

On considère le problème général

$$(\mathcal{P}) \quad \inf\{J(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\mathrm{dx} : \mathrm{x} - \mathrm{u}_0 \in \mathrm{W}_0^{1,\mathrm{p}}(\Omega)\} = \mathrm{m}$$

ou

– $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Lipschitzienne.

– $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue ($f = f(x, \eta, \xi)$).

- $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ est fixé, avec $I(u_0) < \infty$ , (on rappelle que $u - u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$) veut alors dire que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $u = u_0$ sur $\partial\Omega$ dans un sens approprié).

**Théorème 1.5.1.** :
Si en outre $f$ satisfait

- (H1) $f(x, \eta, .)$ est convexe pour tout $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}$

- (H2) Il existe un $q$, $p$ et $\alpha > 0$ tel que

$$f(x, \eta, \xi) \geq \alpha(|\xi|^p - |\eta|^q - 1) \text{ pourtout } (\mathrm{x}, \eta, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}},$$

alors $(\mathcal{P})$ admetun minimum $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ $(\overline{u} - u_0 \in W_0^{1,p})$. De plus, si $f(x, ., .)$ est strictement convexe pour tout$x \in \Omega$ alors le minimum est unique.

**Remarque 1.5.1.** :
Les hypothèses du théorème sont presque optimales dans le sens oú tout affaiblissement de l'une d'entre elles conduit á un contr-exemple. la seule hypothèse qui peut étre affaiblie légèrement est la continuité de $f$. En effet, le théorème reste vrai si $f$ est une fonction de *Carathéodory*, c'est-á-dire $f(\cdot, \eta, \xi)$ est mesurable pour $(\eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f(x, \cdot, \cdot)$ est continue pour tout $x \in \Omega$.

**Démonstration** :
(page 91) du livre de De Bernard Dacoragna([2])

# 1.6 Equation d'Euler Lagrange

## 1.6.1 Dérivation de l'équation d'Euler Lagrange

Nous allons maintenant rappeler d'Euler Lagrange associe à $(\mathcal{P})$. On suppose que la solution est dans un espace de Sobolev $W^{1,p}$.

**Théorème 1.6.1.** :
soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné Lipschizien, $(p \geq 1)$
$f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ satisfaisant :

(H3) $\forall(x,\eta,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad |f_u(x,\eta,\xi)|, |f_\xi(x,\eta,\xi)| \leq \ \beta(1+|\eta|^{p-1}+|\xi|^{p-1})$
Si $\bar{u} \ \in W^{1,p}$ solution de :

$$(P) \quad \inf\{I(u) = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))dx : x - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

ou $u_0 \in \ W^{1,p}$ est une fonction donnée, alors $\bar{u}$ satisfait l'équation d'Euler Lagrange faible, c'est-à-dire
$\forall \varphi \in \ W^{1,p}(\Omega)$,

$$(E_f) \quad \int_\Omega f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\varphi(x) + \langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)); \nabla\varphi\rangle dx \ = 0$$

Si de plus $f \in C^2$ et $\bar{u} \in \ C^2(\bar{\Omega}), alors \bar{u}$ satisfait l'équation d'Euler Lagrange($forte$)

**Démonstration** (page 96) du livre de B.Dacoragna([2])

## 1.7 Réciproque du théorème

Soit $f$ comme dans le théorème précédent. Si de plus $f(x,.,.)$ est convexe pour tout $x \in \Omega$ alors tout solution de l'équation d'Euler-Lagrange (*faible ou forte*)est un minimum de $(P)$.
**Démonstration** :
(page 98) ([2])

# Chapitre 2

# Résultats d'existence pour des problèmes à arguments déviés

## 2.1 Problème en dimension 1

**Position du Problème :**

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$, considérons le problème suivant :
$(\mathcal{P})$ la minimisation de $J(u)$ où

$$J(u) = \int_0^1 f(x, uo\theta(x), u'o\varphi(x)) \, \mathrm{d}x \text{ pour } u \in W \tag{2.1}$$

où les déviations $\varphi$ et $\theta$ vérifient la condition $(\star)$ que nous rappelons pour la suite :
$(\star)$ pour toute partie mesurable $e$ de [0,1] telle que,

$$|e| = 0 \ \ alors \ \ |\psi^{-1}(e)| = 0, \tag{$\star$}$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue, et $\psi(\cdot)$ est une fonction mesurable.
Nous définissons

$$W = \{v \in L^1(0,1) \ / \ v' \in L^p(0,1; \frac{d\mu_\varphi}{dm}), \ v(0) = v(1) = 0\},$$

où $v'$ désigne la dérivée au sens des distributions de $v$ et le poids $\frac{d\mu_\varphi}{dm}$ la dérivée au sens de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue $dm$, de la mesure positive $\mu_\varphi$, définie par

$$\forall e \text{ mesurable de } [0,1], \ \mu_\varphi(e) = |\varphi^{-1}(e)|,$$

on munit $L^p\left(0,1,\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)$ de la norme

$$\|v\|_{L^p\left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)} = \left(\int_0^1 |v(x)|^p \frac{d\mu_\varphi}{dm}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

Puisque les déviations $\varphi$ et $\theta$ vérifient la condition $(\star)$, alors $\mu_\varphi$ et $\mu_\theta$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, le théorème de Radon-Nikodym permet de dire qu'il existe des fonctions positives notées $\frac{d\mu_\varphi}{dm}$ et $\frac{d\mu_\theta}{dm}$ appartenant à $L^1(0,1)$.
On introduisant la proposition suivante, L.Smassi [12] a pu transferer la recherche de minimum à un espace de sobolev $W_0^{1,p}([0,1])$ où l'éspace $W$ peut être injecter

**Proposition 2.1.1.** :
Soit $p$ et $q$ tels que $1 < q \leq p < +\infty$, on suppose que

$$(\frac{d\mu_\varphi}{dm})^{-1} \in L^{\frac{q}{p-q}}(0,1),$$

avec la convention

$$\frac{q}{p-q} = +\infty \quad si \quad p = q.$$

Alors

$$W \subset W_0^{1,\,q}(0,1),$$

où

$$\forall\, v \in W, \|v\|_W = \|v\|_{L^1\ (0,1)} + \|v'\|_{L^p(\frac{d\mu_\varphi}{dm})}$$

$$\forall\, v \in W_0^{1,q}(0,1),\ \|v\|_{W_0^{1,q}(0,1)} = \|v'\|_{L^q\ (0,1)}.$$

**Démonstration** :
Notre démonstration sera identique a celle proposer par L.Smassi [12].
Soit $v \in W$, on va montrer tout d'abord que $v' \in L^q(0,1)$, en effet on a

$$\int_0^1 |v'(x)|^q \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |v'(x)|^q \left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}(x)\right)^{\frac{q}{p}} \left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}(x)\right)^{\frac{-q}{p}} \mathrm{d}x,$$

comme $v \in W$ alors, on a

$$\int_0^1 |v'(x)|^q dx\ \frac{d\mu_\theta}{dm}(x)\ \mathrm{d}x \ < \ +\infty,$$

ce qui nous permet de constater que

$$v'^q \left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)^{\frac{q}{p}} \in L^{\frac{p}{q}}(0,1),$$

de plus, par hypothèse on a

$$\left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)^{-1} \in L^{\frac{q}{p-q}}(0,1),$$

donc

$$\left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)^{\frac{-q}{p}} \in L^{\frac{p}{p-q}}(0,1),$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_0^1 |v'(x)|^q dx \leq \left(\int_0^1 |v'(x)|^p dx \,\frac{d\mu_\varphi}{dm}(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^1 |v'(x)|^{\frac{-q}{p-q}}\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-q}{p}},$$

il s'ensuit que :

$$\|v'\|_{L^q(0,1)} \leq C_0 \,\|v'\|_{L^P(\frac{d\mu_\varphi}{dm})}$$

où

$$C_0 = \left(\int_0^1 \left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}(x)\right)^{\frac{-q}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

c'est-à-dire

$$C_0 = \|(\frac{d\mu_\varphi}{dm})^{-1}\|^{\frac{1}{p}}_{L^{\frac{q}{p-q}}(0,1)},$$

comme $v(0) = v(1) = 0$, par l'inégalité de Poincaré on a

$$\|v\|_{L^q(0,1)} < \infty,$$

puisque

$$\|v\|_{W_0^{1,q}(0,1)} < \infty,$$

on a montré que

$$v \in W_0^{1,q}(0,1),$$

de plus, on a

$$\|v\|_{W_0^{1,q}(0,1)} \leq \|v'\|_{L^q(0,1)} + \|v\|_{L^1(0,1)},$$

or

$$\|v'\|_{L^q(0,1)} \leq C_0\|v'\|_{L^p\left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)},$$

donc

$$\|v\|_{W_o^{1,q}(0,1)} \;\le\; C_0\|v'\|_{L^p\left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)} + \|v\|_{L^1(0,1)},$$

on a aussi

$$C_0\|v'\|_{L^p\left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)} \le\; C_0\|v\|_W \text{ et } \|v\|_{L^1(0,1)} \;\le\; \|v\|_W,$$

ce qui montre que

$$\|v\|_{W_o^{1,q}(0,1)} \;\le\; (C_0+1)\|v\|_W.$$

**Remarque 2.1.1.** $W \subset W_0^{1,q}(0,1) \subset C[0,1]$,

Les deux propositions suivantes sont considérés comme un moyen indispensable, dans les travaux de [12] afin de montrer la semi continuité inférieure de la fonctionelle $J$ .

**Proposition 2.1.2.** :
Soit $\beta$ et $q$ tels que $1 < \beta \le\; q \le \infty$, on suppose que

$$\frac{d\mu_\varphi}{dm} \;\in\; L^{\frac{q}{q-\beta}}(0,1).$$

Alors l'opérateur

$$T_\varphi : L^q(0,1) \longrightarrow\; L^\beta(0,1)$$

défini par

$$T_\varphi u(x) = u(\varphi(x)),$$

est un opérateur linéaire et continu.

**Démonstration**
La linéarité de $T_\theta$ étant triviale, montrons sa continuité.
On sait que par changement de variable, on obtient

$$\int_0^1 |T_\varphi(x)|^\beta \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |u(x)|^\beta \frac{d\mu_\varphi}{dm}\,\mathrm{d}x,$$

or $u \in\; L^q(0,1)$, donc $u^\beta \in\; L^{\frac{q}{\beta}}(0,1)$, et de plus par hypothèse, on a

$$\frac{d\mu_\varphi}{dm} \;\in\; L^{\frac{q}{q-\beta}}(0,1),$$

on peut donc appliquer l'inégalité de Hölder qui permet de dire

$$\int_0^1 |T_\varphi u(x)|^\beta \, \mathrm{d}x \ \leq \ \left(\int_0^1 |u(x)|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{\beta}{q}} \left(\int_0^1 (\frac{d\mu_\varphi}{dm}(x))^{\frac{q}{q-\beta}} \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-\beta}{q}},$$

c'est-à-dire que

$$\|T_\varphi\|_{L^\beta(0,1)} \ \leq \ \left(\|\frac{d\mu_\varphi}{dm}\|_{L^{\frac{q}{q-\beta}}(0,1)}\right)^{\frac{1}{\beta}} \ \|u\|_{L^q(0,1)},$$

On a ainsi montré que $T_\varphi$ est continu de $L^q(0,1)$ dans $L^\beta(0,1)$.

**Proposition 2.1.3.** :
Soit $\alpha$ tel que, $1 \leq \ \alpha < \infty$, alors l'opérateur

$$S_\theta : L^\beta(0,1) \longrightarrow L^\alpha(0,1)$$

défini par

$$S_\theta u(x) = u(\theta(x)),$$

est un opérateur linéaire et continu .

**Démonstration** :comme dans [12], la démonstration est identique à celle de la proposition 2.1.2

Finalement l'inègalitè vérifie par la fonction $f$ dans la proposition qui suit, nous assure la coèrcitivitè de la fonctionnelle $J$.

**Proposition 2.1.4.** :
Soit $p$ et $q$ tels que, $1 < q \leq \ p < \infty$. On suppose satisfaites les hypothèses suivantes :

**(i)** $(\frac{d\mu_\varphi}{dm})^{-1} \in \ L^{\frac{q}{p-q}}(0,1)$

**(ii)** Soit $\bar{u} \in W$ tel que $J(\bar{u}) < +\infty$

**(iii)** $f \ : \ [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait l'estimation suivante

$$a_1 + b_1|\xi|^p \ \leq \ f(x,\eta,\xi)$$

$$\forall(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2, avec, \ a_1 \ \in \ \mathbb{R} \text{ et } b_1 > 0,$$

Sous ces hypothèses, la fonctionnelle $J$ est bien définie sur $W$ et est coercive.

**Démonstration** :
Montrons maintenant sa coercivité de $J$ :
On sait que

$$J(v) \geq a_1 + b_1 \int_0^1 |v'(x)|^p \frac{d\mu_\varphi}{dm}(x)\ \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire que

$$J(v) \geq a_1 + b_1 \|v'\|^p_{L^p\left(\frac{d\mu_\varphi}{dm}\right)} . \tag{2.2}$$

En utilisant la proposition 2.1.1, on obtient

$$J(v) \geq a_1 + \frac{b_1}{C_0^p} \|v'\|^p_{L^p(0,1)} ,$$

grâce à l'inégalité de Poincaré on a

$$J(u) \geq a_1 + k_1 \|v\|^p_{L^1(0,1)} \qquad \text{où } k_1 = \frac{b_1}{C_0^p}, \tag{2.3}$$

les inégalités (2.1) et (2.3) permettent de dire que

$$J(v) \geq \ a_1 + k_2(\|v\|^p_{L^1(0,1)} + \|v'\|^p_{L^p\left(\frac{d\mu_\varphi}{d\mu}\right)}),$$

avec $k_2 = \frac{k_1}{2}$ ,c'est-à-dire que

$$J(v) \geq a_1 + k_3(\|v\|^p_W),$$

ce qui montre que $J$ est coercive sur $W$.

### 2.1.1 Existence de solution du problème $(\mathcal{P})$ :

**Théorème 2.1.1.** :
Soit $p$, $\beta$ et $q$ tels que $1 < \beta \leq q \leq p < +\infty$, on suppose les hyopthèses suivantes satisfaites

**(i)** $(\frac{d\mu_\varphi}{dm}) \ \in \ L^{\frac{q}{q-\beta}}\big(0,1\big)$

**(ii)** $(\frac{d\mu_\varphi}{dm})^{-1} \in \ L^{\frac{q}{p-q}}\big(0,1\big)$

**(iii)** Soit $\bar{u} \in W$ tel que $J(\bar{u}) < +\infty$

**(iv)** $f\ :\ [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory convexe en la dernière variable qui satisfait l'estimation suivante

$$a_1 + b_1|\xi|^p \leq f(x,\eta,\xi)$$

$$\forall(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^2$$

avec $a_1\in\mathbb{R}\in\mathbb{R}$ et $b_1>0$.

Sous ces hypothèses, le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution.

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoin de la proposition suivante :

**Proposition 2.1.5.** :
Soit $p$ et $q$ des réels tels que $1<q<\infty$, soit $f_n\in\ L^p(0,1)$ telle que $f_n\rightharpoonup w$ dans $L^p(0,1)$. alors $f_n\rightharpoonup w$ dans $L^q(0,1)$

La démonstration du théorème 2.1.1 sera identique a celle faite par L.Samassi [12].

**Démonstration du théoreme2.1.1.**
Gráce à la proposition 2.1.4 on a

$$-\infty < inf(P) < +\infty.$$

Soit $(u_n)\in W$ une suite minimisante de $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire

$$J(u_n)\longrightarrow\ inf(P) \text{ quand n} \longrightarrow\infty.$$

Comme

$$-\infty < inf(P) < +\infty,$$

il existe une constante $C$ telle que

$$\forall n\geq n_0\quad -C < J(u_n)\leq C+1.$$

La proposition 2.1.4 permet de dire que

$$\|u_n\|_W\leq K_1. \tag{2.4}$$

D'aprés la proposition 2.1.1, ceci entraîne que

$$\|u_n\|_{W_0^{1,q}(0,1)} \leq K_2, \tag{2.5}$$

on peut donc dire qu'il existe une sous-suite encore notée $u_n$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ uniformément sur } [0,1] \quad \text{et} \quad u'_n \rightharpoonup u' \text{ dans } L^q(0,1). \tag{2.6}$$

Nous allons montrer à présent les convergences suivantes

$$S_\theta u_n \longrightarrow S_\theta u \text{ fortement dans } L^\alpha(0,1),\ \forall\ \alpha \geq 1, \tag{2.7}$$

et

$$T_\varphi u'_n \rightharpoonup T_\varphi u' \text{ dans } \mathrm{L}^{\mathrm{p}}(0,1). \tag{2.8}$$

Montrons d'abord la convergence (2.7).

Comme $u_n \longrightarrow u$ uniformément sur $[0,1]$, alors grâce à la proposition 2.1.3, on a

$$S_\theta u_n \longrightarrow S_\theta u \text{ dans } L^\alpha(0,1) \text{ fort, } (\forall\ \alpha \geq 1),$$

ce qui montre la convergence (2.7). Montrons maintenant l'autre convergence , d'après (2.6) on a :

$$u'_n \rightharpoonup u' \text{ dans } L^q(0,1),$$

or d'après la proposition 2.1.2, $T_\varphi$ est linéaire et continu de $L^q(0,1)$ dans $L^\beta(0,1)$, on peut donc dire que $T_\varphi$ est faiblement continu de $L^q(0,1)$ dans $L^\beta(0,1)$,

par conséquent on a

$$T_\varphi u'_n \rightharpoonup T_\varphi u' \text{ dans } \mathrm{L}^\beta(0,1)\ . \tag{2.9}$$

Or l'hypothése (iii) du théorème permet de dire que

$$\|T_\varphi u'_n\|_{L^p(0,1)} \leq K_3, \tag{2.10}$$

où $K_3$ est une constante indépendante de $n$.

Il existe donc une sous-suite encore notée $T_\varphi u'_n$ telle que

$$T_\varphi u'_n \rightharpoonup w \ \mathit{dans}\ L^p(0,1), \tag{2.11}$$

or $\beta \leq\ p$, donc par la proposition2.1.4, la convergence (2.10) entraîne que :

$$T_\varphi u_n' \rightharpoonup \ w\ faiblement\ dans\ L^\beta(0,1). \tag{2.12}$$

Les convergences (2.9) et (2.12) impliquent que $w = T_\varphi u'$, c'est-à-dire que :

$$T_\varphi u_n' \rightharpoonup T_\varphi u' \ \ dans \ \ L^p(0,1) faible, \tag{2.13}$$

ce qui montre la convergence (2.8).
Nous venons de démontrer ainsi toutes les hypothèses du théorème 3.4 de ([3]) grâce auquel nous pouvons conclure que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} inf \int_0^1 f(x,(S_\theta u_n)(x)\ ,\ (T_\varphi u_n')(x))\ dx\ \geq \ \int_0^1 f(x,(S_\theta u)(x)\ ,\ (T_\varphi u'(x))\ \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf J(u_n) \geq J(u),$$

ce qui montre que

$$inf(\mathcal{P}) \geq \ J(u),$$

donc $u$ est solution de $(\mathcal{P})$.

**Remarque 2.1.2.** Dans [12], L.Samassi, R.Tahraoui ont donné une généralisation des résultats précédentes dans le sens où la fonction $u$, ainsi que les déviations $\theta$ et $\varphi$ seront prises à valeurs vectorielles. ce qui est le sujet de la section suivante.

## 2.2 Problème en présence de déviations vectorielles

### 2.2.1 Position du Probléme

Soit $N$ et $p$ tel que $N > 1$ et $1 < p < \infty$.
Soit $\upsilon : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$\upsilon(x) = (\upsilon_1(x), \ldots, \upsilon_N(x)).$$

Soit $\theta : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$\theta(x) = (\theta_1(x), \dots, \theta_N(x)),$$

et $\varphi : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)),$$

nous définissons les opérateurs suivants :

$$S_\theta(\upsilon)(x) = \begin{cases} (\upsilon_1(\theta_1(x)), \dots, \upsilon_N(\theta_N)) & si\ \theta_i(x) \in [0,1]\ \ (\forall i = 1, \dots, N) \\ (0, \dots, 0)\ \ \text{sinon} \end{cases}$$

$$T_\varphi(\upsilon)(x) = \begin{cases} (\upsilon_1(\varphi_1(x)), \dots, \upsilon_N(\varphi_N)) & si\ \varphi_i(x) \in [0,1]\ \ (\forall i = 1, \dots, N) \\ (0, \dots, 0)\ \ \text{sinon} \end{cases}$$

On note :

$$|\upsilon(x)| = \max_{1 \le i \le N} |\upsilon_i(x)|,$$

et $L^p(0,1; \frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm})$, l'espace de Lebesgue des fonctions mesurables $\upsilon_i(x)$ telles que

$$\int_0^1 |\upsilon_i(x)|^p \frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm}(x)dx < \infty \ (\forall\ i = 1, ..., N).$$

On considère l'espace fonctionnel suivant :

$$E = \{\upsilon \in (L^1(0,1))^N /\ \forall\ i = 1, ..., N \quad \upsilon_i \in L^p((0,1), \frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm}), \quad \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0\},$$

où $\upsilon'$, désigne la dérivé au sens distribution de $\upsilon$, on munit l'espace $E$ de la norme suivante

$$\forall\ \upsilon \in\ E, \|\upsilon\|_E = \|\upsilon\|_{(L^1(0,1))^N} + \|\upsilon'\|_{\prod_{i=1}^N L^p(\frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm})},$$

où

$$\|\upsilon\|_{\prod_{i=1}^N L^p(\frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm})} = \max_{1 \le i \le N} \|\upsilon'\|_{L^p(\frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm})}.$$

Nous allons résoudre le problème suivant

$$(\mathcal{P}_N) :\ \text{minimisation de } J(u) \text{ où}$$

$$J(u) = \int_0^1 f(x, (S_\theta)u(x), (T_\varphi u'))\ \mathrm{d}x \text{ pour } u \in E.$$

**Théorème 2.2.1.** :
Soit $p$, $\beta$ et $q$ tels que $1 < \ \beta \ \leq \ q \ \leq \ p \leq \ \infty$, on suppose les hypothèses suivantes satisfaites

**(i)** $\forall i = 1, \dots, N \quad (\frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm}) \in L^{\frac{q}{q-\beta}}(0,1)$

**(ii)** $\forall i = 1, \dots, N \ (\frac{d\mu_{\varphi_i}}{dm})^{-1} \in \ L^{\frac{q}{p-q}}(0,1)$

**(iii)** Soit $\bar{u} \in W$ tel que $J(\bar{u}) < +\infty$.

**(iii)** $f \ : \ [0,1] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait l'estimation suivante

$$a_1 + b_1|\xi|^p \leq f(x,\eta,\xi) \quad \forall (\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

avec $a \in \mathbb{R}, \ b_1 > 0$.

sous ces hypothèses , le problème $(P_N)$ admet une solution.

**Démonstration [12]** :
la démonstration est identique à celle du théorème 2.1.1 , à la différence que pour $u_n$ une suite minimisante de $(P_N)$ ,on obtient que

$$\|u_n\|_{(W_0^{1,q}(0,1))^N} \leq K,$$

ce qui montre

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \ \text{ uniformément sur } [0,1] \\ u'_n \longrightarrow u' \ \text{ dans } \big(L^q(0,1)^N\big) \text{ faible}, \end{cases}$$

comme dans la démonstration du théorème 2.1.1, on montre que :

$$\begin{cases} S_\theta u_n \longrightarrow S_\theta u \ \text{ dans}\big(L^\theta(0,1)^N\big) \quad \text{faible} \\ T_\varphi u'_n \longrightarrow T_\varphi u' \ \text{ dans } \big(L^p(0,1)^N\big) \quad \text{faible}, \end{cases}$$

on conclut alors de la même manière que $\inf(\mathcal{P}_N) \geq \ J(u)$, c'est-à-dire que $u$ est solution de $(\mathcal{P}_N)$.

# Chapitre 3

# Conditions nécessaires d'optimalité du problème à arguments déviés

## 3.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre de donner un résumé des travaux faites par R.Tahraoui dans [15] où il a présente une idée générale permettant d'établir, pour le problèmes $(\mathcal{P})$, des conditions nécessaires d'optimalité.
Les fonctions scalaires, $\theta$ *et* $\varphi$ sont prises comme étant deux déviations convenables satisfaisant les notations $\theta([0,1]) = [0,1], \varphi([0,1]) = [0,1]$, ce résultat s'exprime comme suit

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left\langle \nu_s^\theta, f(.,\bar{u}(s),\bar{u}'o\varphi(.))\right\rangle + \sum_{i\in I}\delta_{t_i}\int_{\{\theta=t_i\}}\frac{\partial f}{\partial\eta}(s,\bar{u}o\ \theta(s),\bar{u}'o\varphi(s))ds$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle \mu_s^\varphi, f(.,\bar{u}o\theta(.),\bar{u}'(s))\right\rangle\right) = 0, \tag{3.1}$$

les dérivations sont prises au sens des distributions $\mathcal{D}'_t(0,1)$, les mesures $\nu_t^\theta$ et $\mu_t^\varphi$, désignent les mesures de comptage dépendant des déviations $\theta(.)$ et $\varphi(.)$, les réels $t_i$ sont supposés en nombre au plus dénombrable tels que

$$|\{s\in[0,1]\ /\ \theta(s)=t_i\}|>0,$$

par contre $\varphi(\cdot)$ est supposée satisfaire

$$\forall \text{ e mesurable de } [0,1] \text{ tel que } |e| = 0, \text{ on a } |\varphi^{-1}(e)| = 0,$$

La proposition suivante est une adaptation des données de notre problème $(\mathcal{P})$, à la formule d'aire qui a été généralisée par R.Tahraoui dans [14], est qui abouti après verification de quelques conditions des régularités, au corollaire suivante, qui est le noyau de la démonstration de l'equation d'Euler Lagrange vérifie par l'optimum $\bar{u}$,

**Proposition 3.1.1.** Soit $q$ tel que $1 \leq q \leq +\infty$.
On suppose les hypothèses suivantes satisfaites

(i) $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue telle que $|\theta'(.)|$ appartient à $L^q(0,1)$

(ii) $g \in L^{q'}(0,1)$, avec $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$,

alors on a

$$I = \int_0^1 g(x)|\theta'(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)|\theta'(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \big( \sum_{t \in \theta^{-1}(y)} g(t)\big) dy, \tag{3.2}$$

où $h = g\mathcal{X}_{[0,1]}$, $\mathcal{X}_{[0,1]}$, désigne la fonction caractéristique de $[0,1]$.

**Corollaire 3.1.1.** *Soit* $q$ et, $\nu$ tels que, $1 \leq q < +\infty$ , $1 \leq \nu < +\infty$,
on suppose les hypothèses suivantes satisfaites

(i) $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue telle que

$$|\theta'(.)| \in L^\rho(0,1), \ \frac{1}{|\theta'(.)|} \in L^\mu(0,1), \ \mu \geq 1,$$

(ii) $card(\theta^{-1}(s)) \in \ L^\nu(0,1), \nu \ \geq \ 1,$

(iii) $f \in L^q(0,1)$

(i$v$) $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{\mu} \leq 1,$

$(\upsilon)$ $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu}+\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{\nu}(\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\rho})\leq 1,$

alors la fraction

$$k(s)=\frac{dF(s)}{ds}=-\sum_{x\in\theta^{-1}(s)}\frac{|f(x)|}{|\theta'(x)|} \text{ appartient à } L^{\Lambda}(0,1),$$

où

$$\Lambda=\frac{q\mu\nu(\rho-1)}{(\rho-1)q\mu+\nu\rho(\mu+q)-\rho(\mu+q)} \text{ et } F(s)=\int_{\{} x/\theta(x)>s\}f(x)dx$$

**Démonstration**

La démonstration est identique a celle de [14].

## 3.2 Équation d'Euler-Lagrange du problème à arguments déviés

Les hypotheses suivantes sont nécessaires pour établir l'équation d'Euler-Lagrange du problème $(\mathcal{P})$ :
on se donne une fonction $f:(0,1)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$, régulière en $(\eta,\xi)$ à $x$ fixé, convexe en $\xi$. Tous les résultats de ce travail sont obtenus pour $N\geq 1$. L'essentiel des idées sera présenté dans le cadre $N=1$

$$\left\{\begin{array}{c} a_1\left|\xi\right|^p+b_1\leq f(x,\eta,\xi)\leq a_2\left|\xi\right|^p+b_2 \\ \left|\frac{\partial f}{\partial\eta}(x,\eta,\xi)\right|,\left|\frac{\partial f}{\partial\xi}(x,\eta,\xi)\right|\leq a_2\leq a_3\left|\xi\right|^{p-1}+b_3 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

afin de simplifier les notations, les déviations $\theta(.)$ et $\varphi(.)$ sont prises telles que $\theta\,[0,1]=[0,1]$ et $\varphi\,[0,1]=[0,1]$, avec $\theta(.)$ et $\varphi(.)$ absolument continues. Comme la fonction $t\longmapsto\{s\in[0,1]\,/\theta(s)>t\}$ est décroissante, il existe une famille dénombrable de réels $(t\{i\})_{i\in I}\subset[0,1]$, avec $I$ éventuellement vide, telle que

$$|\{s\in[0,1]\,/\theta(s)=t_i\}|>0,\forall i\in I. \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} |\theta'(\cdot)|\in L^{\rho}(0,1),\ \frac{\chi_\theta(\cdot)}{|\theta'(\cdot)|}\in L^{\mu}(0,1),\ card(\theta^{-1}(\cdot))\in L^{\nu}(0,1) \\ avec\ \frac{1}{p'}+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\mu}\leq 1,\ \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{p'}-\frac{1}{\nu}(\frac{1}{p'}+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\mu})\leq 1. \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \end{cases} \tag{3.5}$$

*Où*

$\chi_\theta(.) = \chi_E(.)$ avec $E = \{s \in [0,1]/\theta(s) \neq t_i \ \ \forall\ i\ \in I\}$

$$\begin{cases} |\varphi'(.)| \in L^{\rho'}(0,1),\ \frac{1}{|\varphi'(.)|} \in L^{\mu'}(0,1),\ card(\varphi^{-1}(\cdot)) \in L^{\nu'}(0,1) \\ \frac{1}{p'} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\mu'} \leq 1,\ \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\nu'} + \frac{1}{p'} - \frac{1}{\nu'}(\frac{1}{p'} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\mu'}) \leq 1. \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

**Théorème 3.2.1.** *:*
*Sous les hypothèses (3.3) à (3.6), toute solution u dans W de (2.1) satisfait l'équation suivante*

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left\langle \nu_s^\theta, f(., u(s), u'o\varphi(.))\right\rangle + \sum_{i \in I} \delta_{t_i} \int_{\{\theta = t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(s, uo\theta(s), u'o\varphi(s))ds$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left\langle \mu_s^\varphi, f(., uo\theta(.), u'(s))\right\rangle\right) = 0, \tag{3.7}$$

*où les ensembles $\{\theta = t_i\} = \{s \in [0,1]\,/ \theta(s) = t_i\}$ sont définis en (3.5).*
*Les dérivations par rapport à s sont prises au sens des distributions $\mathcal{D}_s'(0,1)$. $\nu_s^\theta$ et $\mu_s^\varphi$ désignent des mesures de comptage dépendant des déviations $\theta(.)$ et $\varphi(.)$ définies respectivement par*

$$\left\langle \nu_t^\theta, f(., u(t), u' \circ \varphi(.))\right\rangle = \sum_{x \in \theta^{-1}(s)} \frac{\chi_\theta(x) f(x, u(s), u' \circ \varphi(x))}{|\theta'(x)|} \qquad p.p.t$$

$$\left\langle \mu_t^\varphi, f(., u \circ \theta(x), u'(s))\right\rangle = \sum_{x \in \varphi^{-1}(s)} \frac{\chi_\theta(x) f(x, u \circ \theta(x), u'(s))}{|\varphi'(x)|} \qquad p.p.t$$

On va reprendre intégralement la démonstration faite dans [15]. **Démonstration du Théorème 3.2.1.**
Si $u$ une solution dans $W$ du problème (2.1) alors on a :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathcal{D}(0,1) \qquad J(u + \epsilon v) - J(u) \geq 0,$$

pour établir notre résultat, nous partirons dans un premier temps de la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange du problème (2.1) i.e. de

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} = 0 \tag{3.8}$$

Ensuite, à l'aide de quelques transformations judicieuses, nous allons mettre en évidence dans (3.8) les deux fonctions suivantes

$$s \rightarrow \int_{\{x,\ \theta(x)>s\}} f_\eta(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x))dx,$$

$$s \rightarrow \int_{\{x,\ \varphi(x)>s\}} f_\xi(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x))dx,$$

et enfin, l'étude de la régularité Sobolev de ces deux fonctions nous permettra d'établir le résultat cherché.

**Première étape**

Nous allons établir dans cette première étape la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange du problème (**??**) . Posons

$$\frac{J(u+\epsilon v)-J(u)}{\epsilon}=\int_0^1 \Psi_\epsilon(x)dx \quad \text{pour tout } \epsilon \text{ dans } ]-1,1[\ , \tag{3.9}$$

*où*

$$\Psi_\epsilon(x)=g_\epsilon(x)+f_\epsilon(x),$$

avec

$$\begin{aligned} g_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon}[f(x,u\circ\theta(x)+\epsilon v\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x)+\epsilon v'\circ\varphi(x)) \\ -f(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x)+\epsilon v'\circ\varphi(x))], \end{aligned}$$

et

$$f_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon}\left[f(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x)+\epsilon v'\circ\varphi(x))-f(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))\right],$$

ces décompositions permettent de dire que :

$$\lim_{\epsilon\to 0} g_\epsilon(x)=\frac{\partial f}{\partial\eta}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))v\circ\theta(x) \qquad x\ p.p\in(0,1),$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x)=\frac{\partial f}{\partial\xi}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))v'\circ\varphi(x) \qquad x\ p.p\in(0,1),$$

le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$S(x)=\lambda(x)u\circ\theta(x)+(1-\lambda(x))\epsilon v\circ\theta(x)$ avec $0\le\lambda(x)\le 1$,

de l'hypothèse (3.3), on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\eta}(x,S(x),u'\circ\varphi(x)+\epsilon v'\circ\varphi(x))\right|\le\left(b_3+a_3\left|u'\circ\varphi(x)+\epsilon v'\circ\varphi(x)\right|^{p-1}\right),$$

ce qui implique
$\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}(x, S(x), u' \circ \varphi(x) + \epsilon v' \circ \varphi(x))\right| |v \circ \theta(x)| \leq$

$$\left(b_3 + a_3 C \left|u' \circ \varphi(x)\right|^{p-1} + \left|\epsilon v' \circ \varphi(x)\right|^{p-1}\right) |v \circ \theta(x)| ,$$

où $C$ est une constante qui dépend de p ,

ainsi, on peut dire que $|g_\epsilon(x)| \leq h(x)$,
avec

$$h(x) = \left(a_3 C \left|u' \circ \varphi(x)\right|^{p-1} + \left|v' \circ \varphi(x)\right|^{p-1} + b_3\right) |v \circ \theta(x)| .$$

$h(.)$ étant intégrable, le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet de dire que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^1 g_\epsilon(x) dx = \int_0^1 \lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) v \circ \theta(x) dx. \quad (3.10)$$

$x \quad p.p \in (0, 1)$, en procédant de la même façon, on obtient que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^1 f_\epsilon(x) dx = \int_0^1 \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) v' \circ \varphi(x) dx. \quad (3.11)$$

$p.p \quad x \in (0, 1)$, ainsi, d'après (3.10) et (3.11) l'existence de la limite en (3.9) est assurée et donne la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange suivante

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) v o \theta(x) dx + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u \circ \theta(x),\ u' \circ \varphi(x)) v' \circ \varphi(x) dx = 0. \quad (3.12)$$

$x \quad p.p \in (0, 1)$

**Deuxième étape** :

Par une transformation judicieuse, nous allons mettre en évidence dans (3.12) les deux fonctions suivantes :

$$s \to \int_{\{x \ ,tq \ \ \theta(x) > t\}} f_\eta(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) dx,$$

$$s \to \int_{\{x \ ,tq \ \ \varphi(x) > t\}} f_\xi(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) dx,$$

pour cela posons

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) v \circ \theta(x) dx,$$

et

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) v' \circ \varphi(x) dx \qquad x \; p.p \in (0,1)$$

comme il existe une famille dénombrable de réels $(t_i)_{i \in I}$ avec $I$ éventuellement vide telle que l'on ait

$$\forall i \in I, \quad |\{s \in [0,1] \,/ \theta(s) = t_i\}| > 0,$$

on peut donc mettre $I_1$ sous la forme suivante

$$I_1 = \textstyle\sum_{i \in I} \int_{\{x \in [0,1]/\theta(x) = t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) v(t_i) dx$$
$$+ \int_{\{x \in [0,1]/\theta(x) \neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) v \circ (\theta(x)) dx \qquad \forall v \in D(0,1),$$

nous utilisons alors la remarque simple suivante

$$v \circ \theta(x) = \int_0^{\theta(x)} v'(t) dt = \int_{\{t \in [0,1]/\theta(x) \geq t\}} v'(t) dt \qquad \forall v \in D(0,1),$$

donc en reportant dans le deuxième terme de $I_1$, on obtient
$\int_{\{x \in [0,1]/\theta(x) \neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) \; v \circ \theta(x) dx$

$$= \int_{\{x \in [0,1]/\theta(x) \neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) \left[ \int_{t \in [0,1]/\theta(x) \geq t} v'(t) dt \right] dx.$$

Posons

$$F(x,t) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u \circ \theta(x), u' \circ \varphi(x)) \; v'(t),$$

et

$$D = \{(t,s) \in [0,1] \times [0,1] \text{ tel que } 0 < t < \theta(x), \theta(x) \neq t_i \;\; \forall \; i \in I\},$$

montrons que

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} |F(x,s)| \, dxds < \infty$$

Utilisons l'hypothèses (3.3), on a

$$\int_{\{[0,1] \times [0,1]\}} |F(x,s)| \, dxds \leq \int_{\{[0,1] \times [0,1]\}} \left[ a_2 \left| u' o \varphi(x) \right|^p + |b_2| \right] v(t) dxdt,$$

or

$$\int_{\{[0,1] \times [0,1]\}} \left[ a_2 \left| u' o \varphi(x) \right|^p + |b_2| \right] v(t) dxdt = \left\{ \int_0^1 \left[ a_2 \left\| u \right\|^p \frac{\partial \mu_\varphi}{\partial m}(x) + |b_2| \right] dx \right\} \left\| v' \right\|_\infty,$$

donc on peut dire que

$$\int_{\{[0,1]\times[0,1]\}} |F(x,s)|\, dxdt < \infty \quad puisque \quad u \in W \quad et \quad v \in D(0,1),$$

comme $D \subseteq [0,1] \times [0,1]$, alors on a

$$\int_D |F(x,s)|\, dxds < \infty,$$

on peut donc appliquer le théorème de Fubini pour dire que
$\int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)\neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x)) \left[\int_{\{t\in[0,1]/\theta(x)\geq t\}} v'(t)dt\right] dx$

$$= \int_0^1 v'(t) \left(\int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)\neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x))dx\right) dt,$$

or

$$\int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)>t, \theta(x)\neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x))dx.$$

$$= \int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)>t\}} \chi_\theta(x) \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x))dx,$$

de la même manière, considérons

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u\circ\theta(x), u\circ\varphi(x)) v'\circ\varphi(x)dx$$

et utilisons le fait que

$$\forall v \in D(0,1) \qquad v'\circ\varphi(x) = \int_0^{\varphi(x)} v''(t)dt,$$

alors on obtient que

$$I_2 = \int_0^1 v''(t) \left[\int_{\{x\in[0,1]/\varphi(x)>t\}} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x))dx\right] dt$$

ainsi (3.12) est équivalente à l'équation suivante

$$\forall v \in D(0,1) \quad \textstyle\sum_{i\in I} \int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)=t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x)) \; \langle \delta_{t_i}, v\rangle dx \; +$$

$$\int_0^1 v'(t) \left(\int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)>t\}} \chi_\theta(x) \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x))dx\right) dt +$$

$$\int_0^1 v''(t)\left(\int_{\{x\in[0,1]/\varphi(x)>t\}}\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,uo\theta(x),u'o\varphi(x))dx\right)dt=0 \tag{3.13}$$

**Troisième étape**

Posons

$$H(t)=\int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)>t\}}\chi_\theta(x)\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))dx$$

et

$$G(t)=\int_{\{x\in[0,1]/\varphi(x)>t\}}\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))dx,$$

nous allons montrer que

$$x\longmapsto\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))\text{ appartient à }L^{p'}(0,1),\text{ avec }\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1,$$

et

$$x\longmapsto\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))\text{ appartient à }L^{p'}(0,1),\text{ avec }\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1,$$

d'après (3.3), on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))\right|\le a_3\left|u'\circ\varphi(x)\right|^{p-1}+b_3,$$

ou encore

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,u\circ\theta(x),u'o\varphi(x))\right|^{p'}\le C\left|u'o\varphi(x)\right|^{p}+b_3^{p'}$$

où $C$ est une constante qui dépend de $p'$ avec $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$, Ce qui implique que

$$\int_0^1\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,uo\theta(x),u'o\varphi(x))\right|^{p'}\le C\int_0^1\left|u'o\varphi(x)\right|^{p}+b_3^{p'},$$

Nous venons ainsi de montrer que

$$x\longmapsto\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,uo\theta(x),u'o\varphi(x))\text{ appartient à }L^{p'}(0,1),\text{ avec }\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1,$$

de la même manière, nous prouvons que

$$x\longmapsto\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,uo\theta(x),u'o\varphi(x))\text{ appartient à }L^{p'}(0,1),\text{ avec }\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$$

De plus d'après (3.4) et (3.5), $\theta(.)$ *et* $\varphi(.)$ vérifient les hypothèses du corollaire 3.1.1. D'après ce corollaire on a

$$p.p.t \quad \frac{dH(t)}{dt} = - \sum_{x\in\theta^{-1}(t)} \chi_\theta(x) \frac{\frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u(t), u'o\varphi(x))}{\mid \theta'(x) \mid}, \tag{3.14}$$

et

$$\frac{dH(t)}{dt} \in L^{\wedge}(0,1),$$

où

$$\wedge = \frac{p'\mu\nu(\rho-1)}{(\rho-1)p'\mu + \nu\rho(\mu+p') - \rho(\mu+p')}$$

De même on a

$$p.p.s \quad \frac{dG(t)}{dt} = - \sum_{x\in\varphi^{-1}(t)} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u(s), u'o\varphi(x))\varphi'(x), \tag{3.15}$$

$$\frac{dG(t)}{dt} \text{ appartient à } L^{\wedge'}(0,1),$$

où

$$\wedge' = \frac{p'\mu'\nu'(\rho'-1)}{(\rho'-1)p'\mu' + \nu'\rho'(\mu'+p') - \rho'(\mu'+p')}$$

Une utilisation dela dérivation au sens des distributions dans (3.13) permet de l'écrire sous la forme suivante :
$\forall v \in \mathcal{D}((0,1))$

$$\left\langle \delta_{t_i} \sum_{i\in I} \int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)\neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x)), v \right\rangle - \left\langle v, \frac{dH(t)}{dt} \right\rangle + \left\langle v, \frac{d^2G(t)}{dt} \right\rangle = 0 \tag{3.16}$$

Grâce à(3.14) et (3.15) nous déduisons de (3.16) que

$$\delta_{t_i} \textstyle\sum_{i\in I} \int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)\neq t_i\}} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, u\circ\theta(x), u'\circ\varphi(x)$$

$$+ \sum_{x\in\theta^{-1}(s)} \chi_\theta(x) \frac{\frac{\partial f}{\partial \eta}(x, u(s), u'o\varphi(x))}{\theta'(x)}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\sum_{x\in\varphi^{-1}(s)}\frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,u(s),u'o\varphi(x))}{\varphi'(x)}\right)$$
$$= 0 \text{ dans } \mathcal{D}_t^{'}(0,1),$$

c'est-à-dire que

$$\delta_{t_i}\textstyle\sum_{i\in I}\int_{\{x\in[0,1]/\theta(x)\neq t_i\}}\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,u\circ\theta(x),u'\circ\varphi(x))$$
$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left\langle \nu_t^{\theta}, f(x,u(s),u'\circ\varphi(x))\right\rangle$$
$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle \mu_t^{\varphi}, f(x,u\circ\theta(x),u'(t))\right\rangle\right)$$
$$= 0 \text{ dans } \mathcal{D}_t^{'}(0,1),$$

où

$$\left\langle \nu_t^{\theta}, f(.,u(t),u\circ\varphi(.))\right\rangle = \sum_{x\in\theta^{-1}(t)}\chi_{\theta}(x)\frac{\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,u(t),u'\circ\varphi(x))}{\theta'(x)} \quad p.p.s\in[0,1]$$

et

$\langle \mu_t^{\varphi}, f(x,u\circ\theta(x),u'(s))\rangle$

$$= \sum_{x\in\varphi^{-1}(t)}\frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,u(s),u'\circ\varphi(x))}{\varphi'(x)} \quad p.p.s\in[0,1].$$

**Remarque 3.2.1.** :
si $\theta(x) = x$ et $\varphi(x) = x$, alors on retrouve l'équation d'Euler-Lagrange classique suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial\eta}(t,u(t),u'(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial\xi}(t,u(t),u'(t))\right] = 0 \quad dans\ \mathcal{D}_t^{'}(0,1)$$

## 3.3 Application a un problème de marché financier : Le modèle de Jouini-Koehl-Touzi

Dans [12], ( section 2.4 du chapitre2), l'auteur a établi des conditions nécessaires d'optimalité pour les problèmes de la forme

$$J(u) = \int_0^1 f(x, x(t), x \circ \theta_v(t), \theta_v(t), v(t)) \text{ dt} \quad \text{avec} \quad (x, v) \in \ U_{ad}, \tag{3.17}$$

sous la contrainte d'état,

$$\begin{cases} \frac{d\theta_v(t)}{dt} = c(t) \\ \theta_v(0) = \theta_0, \ \theta_v(t) \in [0,1], \ (\forall \ t \in [0,1]), \end{cases} \tag{3.18}$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un ensemble de contrôle admissibles de type classique i.e, un sous-ensemble convexe d'un espace fonctionnel classique.
Une application directe de ce résultat est le modèle de Juini-Koehl-Touzi. Pour être complet, nous allons présenter brièvement ce modèle.

## 3.4 Le modèle

### 3.4.1 le marché financier

Il y a une seule marchandise disponible pour la consommation pendant $[0, T\ ]$ où $T$ est un horizon de temps fini.

Le marché financier consiste en un actif sans risque, appelé caution, la fonction prix est donnée par

$$S(t) = S(0) \exp \int r(s)\, ds \quad t \in [0, T\ ]$$

où $r(.)$ est une fonction positive ou nulle définie sur $[0, T\ ]\, ; r(t)$ est le taux d'intérêt à l'instant $t$.

### 3.4.2 Règle de fiscalité

Dans ce papier, on suppose que les ventes sont soumises à des taxes sur les bénéfices [1] . Plus précisément, nous considérerons la règle usuelle "first in first out" , règle selon laquelle la caution vendue à un certain temps $t$ devrait être la plus ancienne,dans portefeuille du temps $t$.

Nous introduisons l'ensemble

$$\Delta = \left\{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq t \leq T\right\}$$

Fixons certain $(t, u)$ en $\Delta$. Pour chaque unité monétaire investie à l'instant $t$ c'est-à-dire le montant de la taxe payée par l'investisseur

$$\frac{S\,(T)}{S\,(U)} - \varphi\,(t, u)$$

La fonction rendement après taxation $\varphi$ définie sur $\Delta$ est supposée satisfaire aux conditions suivantes.

### 3.4.3 Hypothèses

$\varphi$ est une function de classe $C^1$ de $\Delta$ dans $[1, +\infty[$ avec $\varphi\,(t, t) = 1$ ,pour tout $t \in [0, T]$ ,et

$$\frac{\varphi_t}{\varphi}\,(t, .)\,\text{est décroissante pour t} \in [0, T] \tag{3.19}$$

et

$$f(t, .) :\longmapsto \varphi(t, u)S(u) \;\; \text{est croissante :} \;\; \mathrm{t} \in [0, \mathrm{t}] \tag{3.20}$$

Il est naturel de supposer que $\varphi \geq 1$ sur la fonction rendement après taxation $\varphi$ puisque le prix des actifs $S\,(t)$ est croissant et la taxe est (probablement variable ) une proportion des gains du capital .la restriction $\varphi\,(t, t) = 1$ est condition naturelle qui exprime le fait qu'il n'y a pas de bénéfice de la vente et l'achat de la même part d'un actif financier au même instant $t$ .La condition technique 3.19 est nécessaire pour la preuve du théorème (3.1)du [10] qui est essentiel pour tous nos analyses, cette condition est remplie dans la plupart des cas de taxation classiques.

Notons que la condition 3.19, ainsi que les autres conditions de l'hypothèse 3.19 est plus forte que l'économie de l'appel :

$$\varphi\,(t, u)\,\varphi\,(u, v) \leq \varphi\,(t, v)\,\text{for all} \;\; 0 \leq v \leq u \leq t \leq T \tag{3.21}$$

Cette dernière condition dit que l'on ne peut économiser certaines taxes par la vente et la achat de l'actif $S$ à toute date intermédiaire $u$, entre $\nu$ et $t$.

### 3.4.4 Stratégie de tarification

On note $L_+^1$ l'ensemble de toutes les fonctions positives $L^1[0,T]$. Soit $(x,y)$ un couple de fonctions de $L_+^1$. Ici, $x(t)$ (resp. $y(t)$) est le taux d'investissement (resp. désinvestissement) en unités de l'actif risqué à l'instant $t$. En d'autres termes, $\int_0^1 x(s)ds$ (resp. $\int_0^1 y(s)ds$) est le nombre cumulé de actifs acquis (revendus) jusqu'à l'instant $t$. Un tel couple $(x,y)$ est dit être une stratégie de tarification si la contrainte de non-vente courte

$$\int_0^t y(s)ds \leq \int_0^T x(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.22}$$

est vérifiée. La condition 3.22 dit que la vente ne doit pas dépasser les achats en aucun instant. Étant donné une stratégie de tarification $(x.y)$ , on définit la fonction deviance $\theta^{x.y}$ par

$\theta^{x,y}(t) = \sup\left\{s \in [0,t] \ : \ \int_0^t x(u)du \leq \int_0^t y(u)du\right\}$.

Dans la suite, pour simplification de notation nous allons écrire $\theta$ pour $\theta^{x,y}$. Par définition, $\theta$ est croissante et quand $\int_0^t y(s)ds \geq 0, \theta(t)$ est la date d'achat du dernier actif vendu dans le portefeuille. Si $\int_0^t y(s)ds = \int_0^t x(s)ds = 0$ (pas de participation du marché jusqu'à l'instant $t$ p.p.) alors $\theta(s) = s$ pour tout $s \in [0,t]$. En outre, à partir de la contrainte de pas de ventes 3.22, nous avons $\theta(0) = 0 \leq \theta(t) \leq t, 0 \leq t \leq T$.

**Remarque 3.4.1.** *Puisque $x$ et $y$ sont Lebesgue-intégrables , les fonctions $t \mapsto \int_0^t x(s)ds$ et $t \mapsto \int_0^t y(s)ds$ appartiennent à l'espace de Sobolev $W^{1,1}[0,T]$ qui coincide avec l'ensemble de toutes les fonctions absolument continues, voir par exemple Brézis [13], Remarque 8, p.125. Nous avons alors les propriétés suivantes de $\theta$.*

**Remarque 3.4.2.** $(i)$ *$\theta$ est continue à droite sur $[0,T]$ , i.e $\theta(t^+) = \theta(t)$ pour tout $t \in [0,T]$,*

$(ii)$ pour tout $t \in [0,T]$ , $\int_0^{\theta(t)} x(s)ds = \int\limits_0^t y(s)ds$,

$(iii)$ pour tout $t \in [0,T]$ , $\int_{\theta(t^-)}^{\theta(t)} x(s)ds = 0$.

**Preuve.**

$(i)$ Fixons un $t \in [0,T]$ . Par définition de $\theta$, on a $\int_0^{\theta(t+\varepsilon)} x(s)ds \leq \int_0^{t+\varepsilon} y(s)ds$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme $y \in L_+^1$, cela donne

$\int_0^{\theta(t^+)} x(s)ds \leq \int_0^t y(s)ds$, voir Remarque 2.2. Maintenant, comme $\theta(t^+) \leq t$ (car $\theta(t+\varepsilon) \leq t+\varepsilon$), cela montre que $\theta(t^+) \leq \theta(t)$, par définition de $\theta$, et donc $\theta(t^+) = \theta(t)$, puisque $\theta$ est croissante.

$(ii)$ D'abord, supposons que $\theta(t) \leq t$. Alors, par définition de $\theta$, on a $\int_0^{\theta(t)} x(s)ds \leq \int\limits_0^t y(s)ds, \leq \int_0^{\theta(t)+\varepsilon} x(s)ds$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Alors le résultat demandé est obtenu en faisant tendre $\varepsilon$ vers zéro, rappelons que $x \in L^1_+$, et utilisons la Remarque 2.2. Si $\theta(t) = t$, alors, à partir de la contrainte de pas de vente et la positivité de $y$, on a $\int_0^t y(s)ds \leq \int\limits_0^t x(s)ds = \int_0^{\theta(t)} x(s)ds \leq \int_0^t y(s)ds$.

$(iii)$ Du fait que $x$ et $y$ sont dans $L^1_+$, on peut facilement vérifier que $\int_0^{\theta(t^+)} x(s)ds = \int\limits_0^{\theta(t^-)} x(s)ds = \int_0^t y(s)ds$, voir Remarque 2.2.

Le problème de l'agent

À chaque instant $t \in [0, T\ ]$, l'agent est doté d'un taux de revenu $\omega(t)$ en unités de bien de consommation. Ici $\omega$ est une fonction donnée continue, positive sur $[0, T]$ Alors, étant donnée une stratégie de tarification $(x, y)$, la fonction taux de consommation de l'agent est donnée par

$$e^{x,y}(t) = \omega(t) - x(t) S(t) + y(t) \varphi(t, \theta^{x,y}(t)) S(\ \theta^{x,y}(t)) \quad , t \in [0, T\ ]. \qquad (3.23)$$

Par conséquent, une stratégie de tarification $(x, y)$ est dite réalisable si la fonction taux de consommation induite est positive.

Les préférences de l'agent sont représentées par une fonction d'utilité additive (par rapport au temps) de la consommation $U(t, c)$.

Nous supposons tout au long de ce texte que $U$ est $C^{1,2}([0, T\ ], \mathbb{R}^+)$, décroissante en $t$ et concave croissante en $c$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire le problème de contrôle de l'agent.

Une stratégie de tarification admissible telle que

$$\int\limits_0^T |U(t, c^{x,y}(t))| \, dt < \infty \qquad (3.24)$$

Nous notons par $\delta$ l'ensemble de toutes les stratégies de tarification admissibles ,ie.

$$\delta = \left\{ (x, y) \in L^1_+ . L^1_+ : \text{Eqs}(1.3) \text{ and } (1.3)\text{hold and } c^{x,y} \geq 0 \right\} \qquad (3.25)$$

Le problème de contrôle optimal de l'agent est

$$\sup_{(x,y\in\delta)} \int_0^T |U(t, c^{x,y}(t))|\, dt < \infty \tag{3.26}$$

C'est-à-dire maximiser l'utilité de la consommation sur l'ensemble de toutes les stratégies de tarifications.

Ici, nous donnons les conditions du premier ordre correspondantes à un problème optimal (2.8) qui est non standard pour deux raisons :

(i) la présence de la fonction deviance $\theta^{x,y}$ dans l'expression de la fonction taux de consommation (2.5).

(ii)la contrainte $c^{x,y} \geq 0$ qui implique $x, y$ et $\theta^{x,y}$.

Notre démarche est la suivante :

Dans la section 3, nous démontrons qu'il n'est pas optimale d'acheter de nouveaux actifs et de revendre du portefeuille au même instant $t$ (dans sense p.p.).

Nous verrons que la condition donnée par l'équation (2.2) ne semble pas être suffisante pour la dérivation de cette propriété.

Ce résultat économique est essentiel, afin de simplifier la contrainte de positivité sur la consommation et de réduire les contraintes standards.

Dans la section 4, nous imposons des conditions de lissage sur $x$ et $y$, nous dérivons la condition du premier ordre en adaptant l'approche classique du calcul variationnel qui permet de tirer le principe pontryaging .

## 3.5 Simplification de la contrainte de positivité sur la consommation

Dans la présente section, on montre le résultat de base suivant.

**Théorème 3.5.1.** *Soit $(x, y)$ une stratégie admissible dans $\delta$. Alors ,il existe une stratégie admissible $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \delta$ telle que $e^{x,y} \leq e^{\tilde{x},\tilde{y}}$ et*

$$\tilde{x}(t)\,\tilde{y}(t) = 0 \quad ,0 \leq t \leq T p.p \tag{3.27}$$

***[9]***

*Ce théorème a une interprétation économique : S'il existe une stratégie optimale pour le problème d'investissement optimal de la consommation , il pourra être choisi de telle sorte que jamais l'agent ne revendra de son portefeuille et achètera de nouveaux actifs simultanément. Théorème 3.5.1 affirme que l'ensemble des stratégies admissibles dans le problème d'optimisation 3.26 peut être restreint au sous-ensemble* $\delta_0$ *de* $\delta$ *dont les éléments satisferons la condition (3.1).*

*Compte tenu de l'expression de la fonction taux de consommation dans 3.22 , il s'ensuit que, pour tout* $(x, y) \in \delta$ *,*$e^{x,y}(t) < 0$ *si et seulement si*

$x(t)\, S(t) > \omega(t)$*(comme* $y(t)\, \varphi(t, \theta(t))\, S(\theta(t)) \geq 0$*). Nous avons alors le résultat suivant.*

**Remarque 3.5.1.** *Par un argument similaire à la remarque (3.4), il est facile de vérifier que* $\Psi(., z, \varepsilon)$ *est continue sur* $[0, T]$ *pour tout* $(z, \varepsilon)$ *fixés.*

**Proposition 3.5.1.** *Soit* $\varepsilon \in [0, T]$*.Supposons qu'il existe une solution continue* $z^\varepsilon$ *à l'équation intégrale*

$$Z(t) = \int_0^t \left[\phi_t(u, \Psi(u, z(u), \varepsilon), \varepsilon) y(u) f(u, \theta(u)) \varepsilon h(u)\right] du$$

$0 \leq t \leq T$*(avec* $\theta = \theta^{x,y}$*), vérifiant*

$\Psi(t, z^\varepsilon(t), \varepsilon) \leq t$ *pour tout* $t \in [0, T]$.

*Alors, il existe une solution* $y^\varepsilon$ *à l'équation* (3.3) *telle que* $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ *est une stratégie de tarification admissible. De plus, on a*

$$z^\varepsilon(t) = \Phi\left(t, \theta^{x^\varepsilon, y^\varepsilon}(t), \varepsilon\right), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

***Preuve***

**Proposition 3.5.2.** *Soit* $(x, y) \in \delta$ *une stratégie de tarification admissible avec* $x \leq \delta < 0$*. Supposons que* $y > 0$ *sur un sous ensemble borélien* $A$ *de mesure positive. Alors il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel que le couple* $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ *définit par les équations (3.2) et (3.3) est une stratégie de tarification admissible, donnant la même fonction taux de consommation,i.e* $e^{x,y} = e^{\tilde{x},\tilde{y}}$ *et vérifiant* $\theta(T) \leq \theta(T)$ *. Et cela montre que* $\theta_n^1 \to \theta^1$ *dans le sense de la métrique de Levy, éventuellement sur une sous suite, où* $\overset{1}{\theta}$ *est une fonction croissante continue à droite.*

***Preuve***

*Comme* $\theta_n^1 \leq \theta_n$ *pour tout* $n$ , *on a*

$\theta^1(t) \leq \theta(t)$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

*Ensuite nous utilisons un résultat de hennequin tortrat* [6] *,p.194 et 198 qui dit que la convergence au sens de Levy implique la convergence ponctuelle à chaque point de continuité de la fonction limite. À partir de l'équation* (3.3) *définissant* $y_n^1$ *et comme toute fonction croissante est continue p.p, on peut conclure que*

$y_n^1 \to y^1 \in L_n^1$ *p.p.*

*Avec*

$$y^1(t) = \frac{y(t) f(t,\theta(t)) - h(t)}{f(t,\theta(t))} t \in [0,T] \ \ p.p. \tag{3.28}$$

*Il reste à montrer que* $\theta^1$ *est la fonction déviation associée à la stratégie de tarification perturbée* $(x^1, y^1)$, *i.e*

$\theta^1 = \theta^{x^1,y^1}$. *Pour voir cela rappelons que*

$$\int_0^t y_n^1(u) \quad du = \int_0^{\theta^1(t)} x_n^1(u) \quad du \ , 0 \leq t \leq T.$$

*À partir de l'équation* (3.14) *avec le théorème de la convergence dominée, le terme de gauche converge vers* $\int_0^t y_n^1(u) \quad du$ *quand* $n \to \infty$(*utilisant l'équation* (3.3) . *Ensuite, notons que* $\left|\int_0^{\theta^1(t)} x_n^1(u) \quad du - \int_0^{\theta^1(t)} x^1(u)\, du\right| \leq \int_0^{\theta^1(t)} |x_n^1(u) - x^1(u)| du + \left|\int_{\theta_n^1(t)}^{\theta^1(t)} x^1(u)\, du\right|$

$$\leq \int_0^T |x_n^1(u) - x^1(u)|\, du + \left|\int_{\theta_n^1(t)}^{\theta^1(t)} x^1(u)\, du\right|.$$

*À partir des équations* (3.12) *et* (3.13) , *le terme de droite de la dernière inégalité converge vers zéro quand* $n \to \infty$. *Alors on a démontré que* $\int_0^t y^1(u)\, du \leq \int_0^{\theta^1(t)} x^1(u)\, du$

*Cela montre que* $\theta^1 = \theta^{x^1,y^1}$.

## 3.6 Condition du premier ordre pour une fonction de déviation lisse

### 3.6.1 Régimes d'invesstissement

*Comme on l'a noté dans la section précédente, étant donné une stratégie de tarification admissible* $(x.y)$ *, la fonction de déviation associée* $\theta^{x,y}$ *présente quelques saut par définition. Ceci est conforme à l'interprétation de* $\theta$ *comme le temps d'achat du dernier des actifs vendus à l'investisseur.*

*Dans le reste du document, nous donnons les conditions du premier ordre pour le problème d'investissement optimal avec des taxes dans le cas où la fonction de déviation optimale* $\overset{*}{\theta} = \theta^{\overset{*}{x},\overset{*}{y}}$ *est lisse. L'étude du cas général est laissée pour des travaux futurs.*

#### Hypothèses

*Le problème de maximisation de l'utilité* (2.8) *admet une solution* $\left(\overset{*}{x},\overset{*}{y}\right)$ *telle que* $\overset{*}{\theta} = \theta^{\overset{*}{x},\overset{*}{y}}$ *est continue sur* $[0,T]$ *.*

*Supposant la continuité de la fonction de déviation* $\overset{*}{\theta}$ *est une hypothèse forte et impose, en particulier, certaines restrictions sur La fonction d'investissement optimale associée* $\overset{*}{x}$*.*

**Proposition 3.6.1.** *Soit* $(x,y)$ *une stratégie de tarification admissible non-nulle telle que* $\theta^{x,y}$ *est continue sur* $[0.T]$ *et*

$$\int_0^T x(u)du = \int_0^T y(u)du. \tag{3.29}$$

*Alors il existe* $0 \leq b^x < c^x < T$ *telle que :*

$(i)$ *Pas de régime de participation du marché : sur*$[0.b^x]\,, x = y = 0 p.p.$ *et donc* $\theta^{x,y}(t) = t$

$(ii)$*Régime d'investissement : sur* $[b^x.c^x]\,, x > 0$ *et* $y = 0$ *p.p et donc* $\theta(t) = b,$

$(iii)$*Pas de régime d'investissement : sur* $[c^x,T]$ *,*$x = 0$ *p.p,* $\theta^{x,y}(T) = c$ *et il existe une suite croissante* $(t_n)_n$ *à valeurs dans* $(c.T)$ *telle que* $\theta^{x,y}(t_n) < c$ *et* $\theta^{x,y}(t_n) \;\; \rightarrow \;\; c.$

**Preuve** *Comme $x \neq 0$, On peut définir*

$$b^x = \inf \left\{ t \in [0.T] : \int_0^t x(u)\, du > 0 \right\}, \tag{3.30}$$

$$c^x = \inf \left\{ t \in [0.T] : \int_t^T x(u)\, du + 0 \right\} \tag{3.31}$$

.

*Il est clair que nous avons $0 \leq b < c \leq T$. à partir du Lemme 2.1 $(iii)$ ,Il s'ensuit que nous devons avoir $x > 0$ sur $[b^x.c^x]$ p.p pour que $\theta^{x,y}$ soit continue. Le reste se déduit facilement de la condition* (4.1)*, la continuité de $\theta^{x,y}$ ainsi que le Théorème 3.1.*

*Notez que la condition* (4.1) *est claire par la stratégie de tarification optimale $\left(\overset{*}{x}.\overset{*}{y}\right)$ ; c'est une conséquence immédiate (3.27) de la monotonie de la fonction d'utilité $U$ en la variable c.*

*L'étape suivante consiste à réécrire le problème de contrôle optimal* (2.8) *en termes de $(\hat{x}, \theta)$ plutôt que $(x, y)$ où $\hat{x} = xS$ correspond à l'investissement à l'instant t dans l'actif financier en unités de consommation du bien. Ceci est une conséquence immédiate du lemme 2.1(ii) qui dit que $\int_0^t y(u)\, du = \int_0^{\theta(t)} x(u) du$. Comme $\theta$ est une fonction croissante (alors différentiable p.p. sur $[0.T]$ par le théorème de lebesgue ) et $(x.y) \in L^1_+ \times L^1_+$, cela donne*

*$y(t) = \theta(t)\, x(\theta(t))$ p.p. sur $[0.T]$ où le point correspond à la dérivée par rapport à la variable t. Par conséquence, la fonction taux de consommation*(2.5) *peut être écrite en termes de $(\hat{x}, \theta) = (xS, \theta)$ quand*

$$c^{\hat{x},\theta}(t) = \omega(t) - \hat{x}(t) + \dot{\theta}(t)\, \hat{x}(\theta(t))\, \varphi(t, \theta(t)), t \in [0.T]\, p.p. \tag{3.32}$$

*Afin de tirer les conditions du premier ordre en utilisant le calcul de variations, nous devons imposer de nouvelles conditions de régularité sur la stratégie de tarification optimale de l'hypothèse 4.1.*

### Hypothèse

*La stratégie de tarification optimale $(x^*, y^*)$ de l'hypothèse 4.1 est telle que*

*$(i)$ la fonction taux d'investissement $x^*$ est $C^1$ par morceau sur $[0.T]$.*

*$(ii)$ la fonction déviation $\theta^* = \theta^{x^*,y^*}$ est $C^1$ par morceau sur $[0.T]$.*

**Remarque 3.6.1.** *Puisque la fonction prix de l'actif financier $S(t)$ est $C^1$ et positive sur $[0.T]$ , l'hypothèse (4.2) $(i)$ affirme (équivalence) que $\hat{\theta}^*$ est $C^1$ par morceau sur $[0.T]$.*

**Remarque 3.6.2.** *Soit $x$ une fonction investissement avec $0 \leq x \leq \omega$ et considérons une fonction croissante $\theta$ avec*

*$0 \leq \theta(t) \leq t$ pour tout $t \in [0.T]$ .Supposons que $\theta$ est continue et $C^1$ par morceau (comme requis dans les hypothèse 4.1 et 4.2 $(ii)$ pour la stratégie optimale). Alors la fonction désinvestissement associée*

*$y = \dot{\theta} x(\theta)$ est telle que $(x.y) \in \mathcal{A}$. Dans la suite nous allons identifier les couples $(\hat{x}.\theta)$ et $(x.y)$ . En particular $(\hat{x}.\theta)$ sera désignée comme stratégie de tarification.*

*Nous terminons ce paragraphe par une discussion de la partie $(ii)$ de la dernière hypothèse. Définissons la fonction $\overset{*}{X}$ on$\left[b^{x^*}, c^{x^*}\right]$ par $X^*(t) = \int\limits_0^t x^*(u)\,du$. Comme une fonction croissante continue , $X^*$ admet une fonction inverse $X^{*^{-1}}$ définie sur $X^*\left(\left[b^{x^*}, c^{x^*}\right]\right) = \left[0, \int\limits_0^T x^*(u)\,du\right]$. Ensuite, soit $Y^*$ une fonction définie sur $[0,T]$ par*

*$Y^*(t) = \int\limits_0^t y^*(u)\,du$. Alors , à partir du lemme 2.1$(ii)$ et la condition de pas de vente courte $(2.3)$ , on a*

*$\overset{*}{\theta}(t) = X^{*^{-1}}\left(\overset{*}{Y}(t)\right)$. Comme $\overset{*}{x} > 0$ sur $\left[b^{x^*}, c^{x^*}\right]$p.p., cela donne $\dot{\theta}^*(t) = \frac{\overset{*}{y}(t)}{\overset{*}{x}\left(\overset{*}{\theta}(t)\right)}, t \in \left[b^{x^*}, T\right]$.*

*Par conséquent, l'hypothèse 4.2 $(ii)$ impose que la fonction $t \rightarrow \overset{*}{y}(t)\,\overset{*}{x}\left(\overset{*}{\theta}(t)\right)$ soit définie et continue par morceau sur $\left[b^{x^*}, T\right]$.*

**Conditions Nécessaires à partir du calcul de variations** *Sous les hypothèses (4.1) et (4.2), le problème de maximization de l'utilité ( 2.8) peut être écrit sous la* *forme*

$$\sup \int_0^T U(t, c(t))\, dt; \quad c(t) = \omega(t) - \hat{x}(t) + v(t)\, \hat{x}(\theta(t))\, \varphi(t, \theta(t)) \tag{3.33}$$

*Où* $\hat{x}$ *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceau et* $v$ *est continue par morceau sur* $[0.T]$ $.(\hat{x}, v)$ *sont les contrôles sous réserve des contraintes :*

$$0 \leq \hat{x}(t) \leq \omega(t), \forall t \in [0.T]. \tag{3.34}$$

$$v(t) \geq 0, \forall t \in [0.T]. \tag{3.35}$$

*La fonction* $\theta$ *est une variable d'état continue définie par les dynamiques*

$$\dot{\theta}(t) = v(t) \text{ et } \theta(0) = 0 \tag{3.36}$$

*avec les contraintes d'état*

$$0 \leq \theta(t) \leq t \text{ pour tout } t \in [0.T]. \tag{3.37}$$

*L'originalité de ce problème de contrôle optimal consiste en la présence de La variable d'état* $\theta$ *comme argument de la variable contrôle* $\hat{x}$*,Ce qui rend invalides les conditions d'optimalité classiques du premier ordre dans ce contexte. Dans cette section, nous allons fournir les conditions nécessaires d'optimalité pour ce problème, en adaptant l'approche classique variationnelle, qui permet de tirer le principe de pontryagin* $\dot{T}$*out au long de ce paragraphe,* $v$ *et* $\hat{x}$ *dénotent les variables du problème de contrôle optimal et* $\theta$ *est la variable d'état induite. Afin de tirer les conditions nécessaires d'optimalité de* $v$ *et* $\hat{x}$*, nous considérons des petites variations de la forme :*

$v(t, \varepsilon) = v(t) + \varepsilon \delta^v(t)$ *et* $\hat{x}(t, \varepsilon) = \hat{x}(t) + \varepsilon \delta^{\hat{x}}(t)$

*où* $\varepsilon \geq 0, \delta^v$ *est une fonction continue par morceau sur* $[0.T]$ *et* $\delta^{\hat{x}}$ *est différentiable sur* $[0.T]$ *avec des dérivées bornées. Nous notons aussi par* $\theta(t, \varepsilon)$ *la solution de l'équation* (4.8) *où* $v(t)$ *est remplacé par* $v(t, \varepsilon)$ *et nous définissons*

$c(t, \varepsilon) = \omega(t) - \hat{x}(t, \varepsilon) + v(t, \varepsilon)\, \hat{x}(\theta(t, \varepsilon), \varepsilon)\, \varphi(t, \theta(t, \varepsilon)),$

*Nous allons continuer à utiliser la notation* $\dot{\theta}(t,\varepsilon)$ *pour les dérivées par rapport à la variable* $t$ *. Maintenant, considérons la fonction :*

$$J\left(\hat{x}+\varepsilon\delta^{\hat{x}}, v+\varepsilon\delta^{v}\right)=\int_{0}^{T} U\left(t, c\left(t,\varepsilon\right)\right) dt. \tag{3.38}$$

*Par souci de simplicité, nous allons noté* $x(t,0)=\hat{x}(t)$ *. Comme* $(\hat{x},v)$ *est supposé être un contrôle optimal, on a par définition que* $J(\hat{x},v)$ *est la fonction valeur du problème de contrôle optimal en considération.*

*Supposons que* $\hat{x}(t,a), v(t,a)$ *et* $\theta(t,a)$ *remplissent les contraintes* $(4.6),(4.7)$ *et* $(4.9)$ *pour un* $a>0$*,i.e.*$(\hat{x}(.,a), v(.,a))$ *est un contrôle admissible. Alors, pour tout* $\varepsilon\in[0,a], (\hat{x}(.,\varepsilon), v(.,\varepsilon))$ *est un contrôle admissible et* $(\hat{x},v)$ *est appelé point radial de l'ensemble des contrôles admissible dans la direction* $\left(\delta^{\hat{x}},\delta^{v}\right)$*. Pour un tel couple* $\left(\delta^{\hat{x}},\delta^{v}\right)$*, les conditions nécessaires pour le maximum donnent* $J(\hat{x},v)\geq J\left(\hat{x}+\varepsilon\delta^{\hat{x}}, v+\varepsilon\delta^{v}\right)$*. Lorsque la dérivée à droite par rapport à* $\varepsilon$ *de* $J\left(\hat{x}+\varepsilon\delta^{\hat{x}}, v+\varepsilon\delta^{v}\right)$
*existe, nous devons avoir*
$\frac{d^{+}}{d\varepsilon}J\left(\hat{x}+\varepsilon\delta^{\hat{x}}, v+\varepsilon\delta^{v}\right)|_{\varepsilon=0}\leq 0$
*où* $d^{+}$ *désigne la dérivée à droite.*

*Si* $(\hat{x},v)$ *est un point radial ( dans l'ensemble de tous les contrôles admissible) à la fois dans direction* $\left(\delta^{\hat{x}},\delta^{v}\right)$ *et* $\left(-\delta^{\hat{x}},-\delta^{v}\right)$ *then* $(\hat{x},v)$ *est dit un point interne dans la direction* $\left(\delta^{\hat{x}},\delta^{v}\right)$*. Pour un tel couple* $\left(\delta^{\hat{x}},\delta^{v}\right)$*, Lorsque la dérivée par rapport à* $\varepsilon$ *de* $J\left(\hat{x}+\varepsilon\delta^{\hat{x}}, v+\varepsilon\delta^{v}\right)$ *existe, nous devons avoir*
$\delta J\left(\hat{x}+\varepsilon\delta^{\hat{x}}, v+\varepsilon\delta^{v}\right):=\frac{d}{d\varepsilon}J\left(\hat{x}+\varepsilon\delta^{\hat{x}}, v+\varepsilon\delta^{v}\right)|_{\varepsilon=0}=0.$

*La dernière remarque sont les outils de base pour tirer le principe pontryagin. En adaptant les méthodes classiques à notre problème de contrôle avec une déviation endogen, on obtient le résultat suivant*

*Supposons que le contrôle optimal* $(\hat{x},v)$ *est un point radial l'ensemble des contrôles admissible dans la direction* $\left(\delta^{\hat{x}},\delta^{v}\right)$*. Alors, on a*
$\int_0^T \delta^{v}(t)\,\psi(t)\,dt+\int_0^T \delta^{\hat{x}}(t)\,\phi(t)\,dt\leq 0,$
*où*

$$\psi(t)=-\int_{t}^{T}\left[\dot{\hat{x}}\left(\theta(s)\right)\varphi\left(s,\theta(s)\right)+\right.$$

$(\theta(s))\,\varphi_\theta(s,\theta(s))\,U_c(s,c(s))\,v(s)]ds + \hat{x}(\theta(t))\,\varphi(t,\theta(t))\,U_c(t,c(t))$
(3.39)

$$\phi(t) = -U_c(t,c(t)) + \varphi\left(t,\theta^{-1}(t)\right)U_c\left(\theta^{-1}(t), c\left(\theta^{-1}(t)\right)\right)1_{\{t\leq\theta(T)\}} \tag{3.40}$$

*pour tout* $t \in [0,T]$.

**Preuve** Voir l'annexe de [9].

De la définition de la fonction d'utilité $U(t,c)$ ainsi que les hypothèses 4.1 et 4.2 , on peut facilement vérifier que $\psi$ est continue et $C^1$ par morceau sur un interval $[0,T]$.

On va maintenant donner les conditions nécessaires d'optimalité en considérons des variations $\left(\delta^{\hat{x}}, \delta^v\right)$ tel que le contrôle optimal $(\hat{x}, v)$ est un point radial dans la direction $\left(\delta^{\hat{x}}, \delta^v\right)$. On va considérer séparément les directions $(0, \delta^v)$ et $\left(\delta^{\hat{x}}, 0\right)$ et nous allons montrer que cela suffit pour englober toutes les conditions du premier ordre.

**Lemme .** Soit $t^* \in [0.T]$ tel que $\theta$ est croissante sur un voisinage $V$ de $t^*$ dans $[0.T]$ et $0 < \theta(t^*) < t^*$.

Alors $\dot{\psi} = 0$ sur $V$.

**Preuve**

Comme $\theta$ est croissante sur $V$, l'ensemble $W = \left\{t \in V : \dot{\theta}(t) > 0\right\}$ est dense dans $V$. Soit $t$ un element de $W$

et soit $[t_1,t_2]$ un voisinage de $t$ tel que $\dot{\theta}(s) \geq \alpha$ pour un alpha $\alpha > 0$ et $0 < \theta(s) < s$ pour tout $s \in [t_1,t_2]$. Soit $k = \min_{t_1\leq s\leq t_2}\{s-\theta(s), \theta(s)\}$ qui est évidemment positive . considérons une fonction $h$ de classe $C^1$ à support dans $[t_1,t_2]$ et choisissons un $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon\|h\|_\infty \leq k$ et $\varepsilon\left\|\dot{h}\right\|_\infty \leq \alpha$ ce qui montre que $\theta + \varepsilon h$ est croissante et $0 \leq \theta(t) + \varepsilon h(t) \leq t$ pour $0 \leq t \leq T$. Alors $v + \varepsilon\,\dot{h}$ et $v - \varepsilon\,h$ sont des contrôles admissible. De plus, en posant $\delta^v = \dot{h}$ et $\delta^{\hat{x}} = 0$, on voit que $(\hat{x}, v)$ est un point interne dans la direction

$\left(\delta^{\hat{x}}, \delta^{v}\right)$ et la condition du premier ordre d'optimalité pour $(\hat{x}, v)$ est donnée par $\delta J\left(\hat{x}, v, \delta^{\hat{x}}, \delta^{v}\right)=0$.

Cela donne

$\int_0^T \dot{h}(s)\,\psi(s)\,ds=\int_{t_1}^{t_2} \dot{h}(s)\,\psi(s)\,ds=0.$

En intégrant par partie, on obtient $\int_{t_1}^{t_2} h(s)\,\dot{\psi}(s)\,ds=0$ pour toute fonction $h$ de classe $C^1$ à support dans $[t_{1,} t_2]$, ce qui montre que $\dot{\psi}=0$ on $[t_{1,} t_2]$. Le résultat du lemme s'ensuit de la densité de $W$ dans $V$.

**Lemme**

Soit $[t_{0,} t_1]$ un intervalle sur lequel $\theta(t)=t$. Alors on a $\dot{\psi}(t) \leq 0$ pour tout $t \in [t_{0,} t_1]$.

**Preuve**

Soit $h$ une fonction négative de classe $C^1$ à support dans $[t_{0,} t_1]$. Alors, quitte à multiplier par une constante , on peut supposer que $\left\|\dot{h}\right\|_{\infty} \leq 1$ et donc $v+\dot{h}$ est un contrôle admissible et $(\hat{x}, v)$ est un point radial dans la direction $\left(0, \dot{h}\right)$. Cela montre que $\int_0^T \dot{h}(t)\,\psi(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(t)\,\psi(t)\,dt=-\int_{t_0}^{t_1} h(t)\,\dot{\psi}(t)\,dt \leq 0$. Le résultat découle du fait que la fonction négative $h$ de classe $C^1$ est arbitraire.

**Lemme .**

Soit $[t_{1,} t_2] \subset [0.T]$ un intervalle maximal sur lequel $\dot{\theta}=0$. Alors on a $\psi(t_1)=\psi(t_2)$ et $\psi(t) \leq \psi(t_1)$ pour tout $t \in [t_{1,} t_2]$.

**Preuve**

La preuve est organisée en deux étapes. On montre premièrement que $\psi(t) \leq \psi(t_2)$ pour tout $t \in [t_{1,} t_2]$ ensuite

$\psi(t) \leq \psi(t_1)$ pour tout $t \in [t_{1,} t_2]$.

$(i)$ considérons un $\eta>0$. Comme $[t_{1,} t_2]$ est un intervalle maximal sur lequel $\dot{\theta}=0$, il existe $t_3$ et $t_4$ dans l'intervalle $[t_2, t_2+\eta]$ tel que $\dot{\theta}(t)>0$ on $[t_3, t_4]$ ; on introduit alors $\Delta=\theta(t_4)-\theta(t_3)$.

Soit $h$ une fonction de classe $C^1$ (non nulle) croissante sur $[t_{1,}t_2]$ avec $h(t_1) = 0$. Quitte à multiplier par une constante positive bien choisie, on peut supposer $h(t_2) = \Delta$. Ensuite on fait une extension continue de $h$ à $[0.T]$

comme suit :

$*\dot{h} = 0$ sur $[t_{2,}t_3]$

$*\dot{h} = -\ \dot{\theta}$ sur $[t_3, t_4]$

$*\ h = 0$ en dehors de l'intervalle $[t_1, t_4]$.

Alors, on peut facilement vérifier que $v + \dot{h}$ est un contrôle admissible et donc $(\hat{x}, v)$ est un point radial dans la direction $(0, \dot{h})$. Cela montre que $\int_0^T \dot{h}(t)\,\psi(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{h}(t)\,\psi(t)\,dt + \int_{t_3}^{t_4} \dot{h}(t)\,\psi(t)\,dt \leq 0$. En faisant une intégration par partie et notant que $\dot{\psi} = 0$ sur $[t_3, t_4]$ par le lemme 4.1, cela donne :

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{h}(t)\,\psi(t)\,dt - \psi(t_3)\,h(t_3) \leq 0.$$

Maintenant, comme $h(t_3) = h(t_2)$ et $h(t_1) = 0$, on obtient $\int_{t_1}^{t_2} [\psi(t) - \psi(t_3)]\,\dot{h}(t)\,dt \leq 0$ pour toute fonction $\dot{h}$ positive sur $[t_{1,}t_2]$ ce qui implique que $\psi(t) \leq \psi(t_3)$ pour tout $t \in [t_{1,}t_2]$. En faisant tendre $\eta$ vers zéro et utiliser la continuité de $\psi$, on a $\psi(t) \leq \psi(t_2)$ pour tout $t \in [t_{1,}t_2]$.

$(ii)$ On montre maintenant que $\psi(t) \leq \psi(t_1)$ pour tout $t \in [t_{1,}t_2]$. Considérons un $\eta > 0$. Comme $[t_{1,}t_2]$ est un intervalle maximal sur lequel $\dot{\theta} = 0$, il existe $t_{-1}$ et $t_0$ dans l'intervalle $[t_1 - \eta, t_1]$ tel que $\dot{\theta} > 0$ on $[t_{-1}, t_0\ ]$. Soit $t^*$ une valeur arbitraire dans $[t_{1,}t_2]$. Étant donné un $\varepsilon > 0$, suffisamment petit, considérons la fonction suivante $h$ continue définie sur $[0, T]$ par

$*h = 0$ en dehors de l'intervalle $[t_{-1}, t^* + \varepsilon]$,

$*\dot{h} = -\dot{\theta}$ sur $[t_{-1}, t_0\ ]$

$*\dot{h} = 0$ sur $[t_0\ , t^* - \varepsilon]$

$*\dot{h} = [\theta(t_0\ ) - \theta(t_{-1})]/2\varepsilon$ sur $[t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$.

Alors on peut facilement vérifier que $v + \dot{h}$ est un contrôle admissible et donc $(\hat{x}, v)$ est un point radial dans la direction $\left(0, \dot{h}\right)$. Il s'ensuit par les conditions nécessaires d'optimalité de $(\hat{x}, v)$ que $\int_0^T \dot{h}(t)\,\psi(t)\,dt \leq 0$.

Faisant tendre $\varepsilon$ vers zéro, cela donne

$\psi(t^*) \leq \frac{\int_0^T \dot{\theta}(t)\psi(t)dt}{\theta(t_0\ ) -\ \theta(t_{-1})}$ par la continuité de $\psi$. Le résultat demandé est obtenu en faisant tendre $\eta$ vers zéro dans la dernière inégalité et utiliser encore la continuité de $\psi$.

**Lemme**

Soit $T_0 \in [0, T]$ tel que $\theta(t) = c < T_0$ pour tout $t \in [T_0, T]$ . Supposons qu'il existe une suite croissante $(t_n)_n$ qui converge vers $T_0$ telle que $0 < \theta(t_n) < c$.

Alors $\psi(T_0) = 0$.

### 3.6.2 Théorème

Considérons une stratégie admissible $(\hat{x}, \theta) \in \pounds_0$ et soit $b^x$ et $c^x$ les dates associées du régime définies dans la proposition 4.1. Alors, les conditions d'optimalité suivantes sont vérifiées :

$(i)$ $\dot{\psi}(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, b^x]$ ,

$(ii)$ $\psi(b^x) = \psi(c^x)$ et $\psi(t) \leq \psi(b^x)$ pour tout $t \in [b^x, c^x]$ ,

$(iii)$ pour tout $t \in [c^x, T]$ , $\dot{\psi}(t) = 0$ si $\dot{\theta}(t) > 0$. Si $\dot{\theta} = 0$ sur un $(t_1, t_2) \subset [c^x, T]$ alors $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ et $\psi(t) \leq \psi(t_1)$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$ ,

$(iv)$ Soit $T_0 \in [0, T]$ tel que $[T_0, T]$ est un intervalle maximal sur lequel $\theta$ est constante.

Alors $\psi(T_0) = 0$ et $\psi(t) \leq \psi(T_0)$ pour tout $t \in [T_0, T]$ .

$(v)$ Pour tout $t \in [b^x, c^x], \phi(t) = 0$ si $\hat{x}(t) < \omega(t)$ et $\phi(t) \geq 0$ si $\hat{x}(t) = \omega(t)$ .Réciproquement, supposons que $(\hat{x}, \theta) \in \pounds_0$

vérifie les conditions nécessaires $(i) - (v)$. Alors pour toute variation $\left(\delta^{\hat{x}}, \delta^v\right)$ telle que $(\hat{x}, v)$ est un point radial dans direction $\left(\delta^{\hat{x}}, \delta^v\right)$ , on a $\delta J\left(\hat{x}, v, \delta^{\hat{x}}, \delta^v\right) \leq 0$.

Où $\delta J\left(\hat{x}, v, \delta^{\hat{x}}, \delta^v\right)$ est la dérivée à droite de la fonction valeur $J$ définie dans l'équation (4.10) dans la direction $\left(\delta^{\hat{x}}, \delta^v\right)$ .

**preuve** Voir [9]

# Bibliographie


[1] A. Braides, *Approximation of Free-Discontinuity Problems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[2] B. Dacorogna, *Introduction au calcul des variations.*Springer verlag,Berlin, 1998.

[3] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculs of variations.*Springer verlag,Berlin, 1989.

[4] M.E. Drakhlin, E. Litsyn, and E. Stepanov. Variational methods for a class of nonlocal functionals. C*omputers and Math. with Appl.*, 37(4/5) :79-100, 1999.

[5] M.E. Drakhlin, E. Stepanov, On weak lower-semi continuity for a class of functionals with deviating arguments, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 28(12), pp. 2005-2015 (1997).

[6] Dunford and Schwartz, *Linear Operators, Part I, General theory.* Wiley Interscience, 1988.

[7] L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[8] A. Gruzdev and S. Gusarenko. On reduction of variational problems to extremal problems without constraints, *Russians mathematics*, 38(6) :3747, 1994.

[9] E. Jouini, P.-F. Koehl and N. Touzi, Optimal investment with taxes : an optimal control problem with endogeneous delay, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications* 37 : 31-56 (1999).

[10] E. Jouini, P.-F. Koehl and N. Touzi, Optimal investment with taxes : an existence result, *Journal of Mathematical Economics*, 33 : 373-388, 2000.

[11] G. Kamenskii. variational and boundary value problems with deviating argument. *Differential equations*, 6(8) :13491358, 1970.

[12] L. Samassi. Calculus of variation for funtionals with deviating arguments. University Paris-Dauphine, December 2004.

[13] H.Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et applications.

[14] L. Samassi, R. Tahraoui, How to state necessary optimality conditions for control problems with deviating arguments.

[15] L. Samassi and R.Tahraoui, Comment établir des conditions nécessaires d'optimalité dans les problèmes de contrôle dont certains arguments sont déviés ? *C.R Acad. Sci. Paris*, 338(Ser.1) :611,616, 2004.

[16] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* Academic Press, New York, 1972.

[17] J.A. Wheeler and R.P. Feynman, Classical electrodynamics in term of direct interparticle actions. *Revue of Modern physics*, 21(3) :pp 425 433, 1949.