وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UniversitéBadjiMokhtar Annaba
BadjiMokhtarUniversity - Annaba

جامعة باجي مختارعنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctoraten Sciences
Option :MathématiquesAppliquées

Recherche de solutions périodiques et étude de la stabilité pour une classe d'équations différentielles non linéaires à retard

Par:MANSOURIBouzid

ENCADREUR : DjoudiAhcèneProf.Univ.Annaba

Devant le jury

PRESIDENT :	CHORFI Lahcène	Prof.	Univ.Annaba
EXAMINATEURS :	BENTRAD Ali	Prof.	Univ. REIMS-FRANCE
	ELLAGGOUNE Fateh	Prof.	Univ.Guelma
	SALMIAbdelouahab	M.C.A	Univ.Annaba
	KHEMIS Rabah	M.C.A	Univ. Skikda

Année :2018/2019

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Mathématiques

Intitulée

Recherche de solutions périodiques et étude de la stabilité pour une classe d'équations différentielles non linéaires à retard

---

Présenter par : MANSOURI Bouzid

ENCADREUR : DJOUDI Ahcène Prof. U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT :	CHORFI Lahcène	Prof.	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	BENTRAD Ali	Prof.	Univ. Reims-France
EXAMINATEUR :	ELLAGGOUNE Fateh	Prof.	Univ. Guelma
EXAMINATEUR :	SALMI Abdelouahab	M.C.A	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	KHEMIS Rabah	M.C.A	Univ. Skikda

Année : 2018/2019

A la mémoire de mon père

A ma mère, A mes sœurs

A ma petite famille mon épouse et mes enfants

A mes amis et à tous ce qui me sont chers.

Table des matières

Remerciements

Je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à terme ce présent travail.

C'est avec empressement que je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur Ahcene DJOUDI professeur à l'université Badji Mokhtar - Annaba, pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser cette thèse, et pour m'avoir encadré durant ces sept années, je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité, ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches. J'exprime aussi toute ma profonde gratitude, ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur Abdelouaheb ARDJOUNI, Maître de conférence classe A à l'université Souk Ahras pour son aide, ses remarques et ses conseils.

J'exprime également mes remerciements à Monsieur Lahcène CHORFI professeur à l'université Badji Mokhtar - Annaba, d'avoir accepté d'être le président du jury de cette thèse. A Monsieur Ali BENTRAD professeur à l'université Reims - France, Monsieur Fateh ELLAGGOUNE professeur à l'université de Guelma, Monsieur Abdelouahab SALMI Maître de conférence classe A à l'université Badji Mokhtar - Annaba et Monsieur Rabah KHEMIS Maître de conférence classe A à l'université de Skikda, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du membres de jury.

Mes remerciements vont également à toutes les personnes qui de près ou de loin en ont été d'une grande utilité dans l'élaboration de ma thèse.

Résumé en Anglais

This thesis is devoted mainly to the study of quantitative and qualitative properties of certain class of différential equation functional with delay of neutral type. The existence results are proved using theorems of fixed point of schauder, krasnoselskii and the contraction principle with which we conclude uniqueness.

The study of stability and asymptotic stability of solutions of differential equations with delay is of great importance in quantitative analysis. We tried to give new conditions of asymptotic stability to study ours problems by means of fixed point technique. Some examples are proveded to illustrate our claims.

The obtained results extend and improve some works recently published.

Key words and phrases : Fixed points, periodic solutions, stability, nonoscillatory solutions, neutral differential equations, iterative differential equations.

Résumé en Français

Cette thèse est consacrée principalement à l'étude des propriétés quantitative et qualitative de certaines classes d'équations différentielles à retard fonctionnelle de type neutre. Les résultats d'existence sont prouvés en utilisant les théorèmes de point fixe de Schauder et Krasnoselskii et par le principe de contraction on conclure l'unicité.

L'étude de la stabilité et la stabilité asymptotique de solutions d'équations différentielles à retard a un grande importance dans l'analyse quantitative. On a essayé de donner de nouvelles conditions de stabilité asymptotique de nos problèmes étudiés en se basant sur la technique de point fixe. quelques exemples sont fournis pour illustrer nos revendications.

Nos résultats obtenues étendent et améliorent certains travaux récemment publiés.

Mots clés : Point fixe, solutions périodiques, stabilité, solutions non oscillatoires, équations différentielles de type neutre, équations différentielles itératives.

Chapitre 1

Introduction générale

Les équations différentielles ont une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations se traduisent mathématiquement sous forme d'équations différentielles, elles apparaissent souvent dans la modélisation de processus de phénomènes naturels, elles sont présentes dans les différentes sciences.

Parmi les équations différentielles en cite les équations différentielles à retard qui surviennent dans certains modèles dont l'état à un moment donné, est une fonction qui dépend de son passé. On peut rencontrer ces équations dans plusieurs domaines d'applications, notamment en physique, économie, médecine, biologie, écologie,...etc, voir la monographie [22, 63] et les papiers [6], [12], [21], [29]-[31], [34]-[37], [39], [40], [42], [48], [50], [65], [66], [79], [82], [85], [86] et les références qu'il contient.

En effet, dans certains phénomènes, on s'est aperçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrire l'évolution sur un intervalle de temps donné. La signification du retard dans un tel ou tel modèle peut être différente, période d'incubation d'une maladie contagieuse en épidémiologie, temps d'accumulation, temps nécessaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en un autre,...etc. On considère par exemple l'équation de Mackey-Glass suivante

$$y'(t) = \gamma y(t) + \sigma \frac{y(t-\tau)}{1+y^n(t-\tau)},$$

cette équation a été utilisé par Mackey et Glass [52] pour décrire la production des globules blancs. La densité de ces dernières en circulation dans le sang est notée $y(t)$. Ces cellules sont détruites avec un taux γ. Le taux maximal de production est noté σ, et n désigne la sensibilité du taux de production. Enfin, τ décrit le temps nécessaire à la production effective des globules blancs au temps t en réponse à une demande effectuée au temps $t-\tau$.

L'étude de la stabilité des systèmes à fait l'objet au cours des ces derniers siècles d'un très large développement dans la qualité des résultats ainsi que leurs applications. Plusieurs de ces résultats concernent des systèmes décrits mathématiquement par des équations différentielles ordinaires linéaires ou non linéaires. Dans la littérature, plusieurs chercheurs ont étudié la stabilité de systèmes linéaires et non linéaires. En effet, la stabilité au sens de Lyapunov est bien développée pour les systèmes linéaires, par contre, la stabilité des systèmes non linéaires reste encore largement inconnue, bien que des méthodes de linéarisation permettent d'obtenir dans certains cas de bons résultats.

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie du point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non linéaire. L'étude de la stabilité par la méthode de point fixe a été utilisé dans un certain nombre de travaux récents comme [8], [9], [14], [20], [25], [41], [59]. Cette méthode a montré des avantages significatifs sur celle de Lyapunov. En particulier lorsque les coefficients sont non bornés et si le retard est non borné la méthode directe de Lyapunov a montré ses limites contrairement à celle du point fixe. De plus, les conditions de la méthode de point fixe sont en moyenne par contre celle de la deuxième sont toujours ponctuelles.

Le but principal de cette thèse est d'étudier quelques propriétés qualitatives et quantitatives comme l'existence de solutions périodiques, la stabilité et la stabilité asymptotique. Les résultats établis dans ce projet constituent, ce que l'on souhaite, une étape avancée dans ce domaine de recherche car l'étude que nous proposons ici prend en charge des équations différentielles non linéaires de type neutre non traitées jusqu'ici. En outre notre méthode de point fixe améliore nettement les résultats antérieurs particulièrement ceux de Ding et Li [43], Kong [61], Ren, Siegmund et Chen [73], Zhao et Feckan [88] avec beaucoup moins de restrictions et avec plus de rigueurs.

L'objectif de cette thèse est multiple, il s'agit principalement d'étendre et améliorer certains travaux récemment publiés et d'apporter une contribution dans l'étude de l'existence et l'unicité de solutions non oscillatoires d'une classe d'équations différentielles à retard de type neutre et on s'intéresse de donner des conditions suffisantes pour que ces équations aient un point fixe. Ainsi que l'étude de la périodicité et la stabilité de solutions et de solutions positives pour certaines classes d'équations différentielles itératives utilisant le théorème de Banach, Schauder ou de Krasnoselskii.

Cette thèse est présentée à travers six chapitres :

Chapitre 1 : Une introduction générale.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions et résultats utiles pour la suite de cette thèse. On donne les contextes de théorèmes de point fixe de Banach, Schauder et de Krasnoselskii ainsi que des rappels sur les équations différentielles à retards et les équations différentielles de type neutre.

Chapitre 3 : Ce chapitre est un exposé sur l'existence et unicité de solutions non oscillatoires d'une classe d'équations différentielles de premier ordre de type neutre. Il s'agit de l'équation

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[x(t)+P_1(t)h_1(x(t-\tau_1(t)))+P_2(t)h_2(x(t+\tau_2(t)))\right]\\&+g_1(t,x(t-\sigma_1(t)))-g_2(t,x(t+\sigma_2(t))) = 0.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de point fixe de Banach sous quelques nouveaux critères on démontre l'existence et l'unicité des solutions non oscillatoires de cette équation.

Chapitre 4 : On étudie dans ce chapitre l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions périodiques de l'équation différentielle itérative

$$x'(t)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}C_{l,m}(t)\left(x^{[m]}(t)\right)^{l}+\frac{d}{dt}g\left(t,x^{[1]}(t),x^{[2]}(t),\ldots,x^{[N]}(t)\right)+h(t),$$

où, la fonction $g\left(t,x_1,x_2,\ldots,x_N\right)$ est continue globalement Lipschitzienne pour t, x_1, x_2, ..., x_N.

Chapitre 5 : On étudie l'existence de solutions positives ω-périodiques pour les deux types d'équations différentielles neutres de troisième ordre suivantes

$$(x(t)-c(t)x(t-\tau))'''=a(t)x(t)-f(t,x(t-\tau)),$$

et

$$(x(t)-c(t)x(t-\tau))'''=-a(t)x(t)+f(t,x(t-\tau)),$$

où $c \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\tau, \omega > 0$, et c, a sont des fonctions ω-périodiques, f est ω-périodique par rapport à la première variable. Les résultats de ce chapitre constituent deux contributions. En effet, au lieu de c constante, on prend un coefficient variable $c(t)$. Deuxièmement, en plus de $|c(t)| < 1$, on considère les intervalles $|c(t)| > 1$ pour $c(t)$, ce qui est nouveau dans la littérature.

Chapitre 6 : On s'intéresse dans ce chapitre à l'existence et la stabilité asymptotique de solutions périodiques de l'équation différentielle neutre non linéaire suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u(t) - q(t)\frac{d}{dt}g(u(t - r(t))) \\
&= p(t) - a(t)u(t) - a(t)q(t)g(u(t - r(t))) - b(t)f(u(t)) \\
&+ b(t)q(t)f(u(t - r(t))),
\end{aligned}$$

où r est une fonction positive différentiable, et q, p, a, b, f et g sont des fonctions continument différentiable.

On conclut cette thèse par des perspectives et problèmes à résoudre dans le futur, et une bibliographie associée au sujet de notre travail.

Chapitre 2

Préliminaires et rappels

Ce chapitre a pour but d'introduire quelques définitions et résultats et de rappeler certaines théorie de point fixe, qui seront utilisées dans la suite de cette thèse. Pour plus de détails voir [19] et [51].

2.1 Notions préliminaires

2.1.1 Normes et espace de Banach

Définition 2.1.1 *Le couple (E, ρ) est dit un espace métrique si E un ensemble arbitraire non vide et $\rho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application vérifiant pour tout x, y et z de E,*
(d_1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(d_2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *(Symétrie),*
(d_3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 2.1.2 *Un espace métrique (E, ρ) est dit complet si toute suite de Cauchy de points de E est convergente dans E.*

Proposition 2.1.1 *Dans un espace métrique (E, ρ), toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Remarque 2.1.1 *La réciproque est fausse en général.*

Définition 2.1.3 *Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),*

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(Homogénéité),*
(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 2.1.4 *Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ est une norme sur E.*

Remarque 2.1.2 *Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé alors*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

définit une distance sur E.

Définition 2.1.5 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ complet pour la métrique associée à cette norme.*

Exemple 2.1.1 *L'espace $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|f\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$ est un espace de Banach.*

Exemple 2.1.2 *Soit $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue donnée avec $a, b \in \mathbb{R}$. Soit S l'espace de fonctions continues et bornées $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, telles que $f(t) = \psi(t)$ pour $a \leq t \leq b$. Pour $f, g \in S$, on définit*

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [a, \infty)} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty .$$

Alors (S, ρ) est un espace métrique complet.

Dénotons par $C = C(S_1, S_2)$ l'espace de fonctions continues allant de S_1 à S_2. Posons

$$\mathbb{M} = \{\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} / \ \varphi \in C, \ |\varphi(t)| \leq 1, \ \varphi(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow \infty\},$$

et

$$\mathbb{Q} = \{\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R} \ / \ \varphi \in C, \ |\varphi(t)| \leq 1\}.$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme du supremum et soit $|\cdot|_h$ une norme poids définie par la donnée d'une fonction $h : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty), \ h(0) = 1, h(t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$, et pour $\varphi \in M$ ou Q on pose

$$|\varphi|_h = \sup_{t \geq 0} \frac{|\varphi(t)|}{|h(t)|}.$$

Exemple 2.1.3 $(\mathbb{M}, \|\cdot\|)$ *est un espace de Banach.*

Exemple 2.1.4 $(\mathbb{Q}, |\cdot|_h)$ *est un espace de Banach.*

Exemple 2.1.5 $(\mathbb{M}, |\cdot|_h)$ *n'est pas un espace de Banach.*

Preuve. Soit $\{\phi_n\}$ la suite de fonctions continues définie par

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= 1, \quad 0 \leq t \leq n, \\ \phi_n(t) &= 0, \quad n + 1 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

ϕ_n est linéaire et continue sur $[n, n + 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre choisi arbitrairement. On doit trouver un indice N tel que si $n, m \geq N$ et $t \in \mathbb{R}$ implique que

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon h(t). \tag{2.1}$$

On choisit T tel que $\varepsilon h(T) > 2$. De toute évidence, pour tout n, m et pour tout $t \geq T$ on a (2.1). Le choix de $N > T$ implique que pour $n, m \geq N$ et $0 \leq t \leq N$ on aura $\phi_n(t) = \phi_m(t) = 1$ de sorte que (2.1) est valide. Cela démontre que la suite est de Cauchy. Cependant pour un t fixé on a $\phi_n(t) \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, or 1 n'est pas un élément de $\mathbb{M}$. D'ou la conclusion. ■

2.1.2 Compacité et applications compactes

Définition 2.1.6 *Soit* (S, d) *un espace métrique. Un sous ensemble* $\mathbb{M}$ *de* S *est dit compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de* $\mathbb{M}$ *on peut extraire un sous recouvrement fini. D'une manière équivalente, un sous ensemble* $\mathbb{M}$ *de* S *est compact si et seulement si tout suite de* $\mathbb{M}$ *admet une sous suite convergente dans* $\mathbb{M}$.

Définition 2.1.7 *Un sous ensemble* $\mathbb{M}$ *de* S *est dit totalement borné si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble fini de points* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *dans* S *tels que*

$$\mathbb{M} \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i).$$

Remarque 2.1.3 *(1) Tout sous ensemble d'un ensemble totalement borné est totalement borné.*
(2) Tout ensemble totalement borné est borné. Cependant, un sous ensemble borné n'est pas totalement borné en général.

Proposition 2.1.2 *Soit* S *un espace métrique. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes,*

(i) S *est compact,*
(ii) Toute suite de S *admet une sous suite convergente,*
(iii) S *est complet et totalement borné.*

Proposition 2.1.3 *Soit* $\mathbb{M}$ *un sous ensemble d'un espace métrique complet* S. *Alors,*

(i) $\mathbb{M}$ *est compact si et seulement si* $\mathbb{M}$ *est fermé et totalement borné,*
(ii) $\overline{\mathbb{M}}$ *est compact si et seulement si* $\mathbb{M}$ *est totallement borné.*

Définition 2.1.8 *Un sous ensemble* $\mathbb{M}$ *d'un espace métrique est dit relativement compact si son adhérence est compacte, c'est à dire,* $\overline{\mathbb{M}}$ *est compact.*

En particulier, on a la proposition suivante.

Proposition 2.1.4 *Soit* $\mathbb{M}$ *un sous ensemble fermé d'un espace métrique complet. Alors,* $\mathbb{M}$ *est compact si et seulement si il est relativement compact.*

Définition 2.1.9 *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions réelles $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur $[a, b]$ s'il existe un $l > 0$ tel que $|f_n(t)| \leq l$ pour tout n et tout $t \in [a, b]$.*

Définition 2.1.10 *Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble de $E = C([a, b], \mathbb{R})$, $\mathbb{M}$ est dit équicontinu si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta > 0, \forall y \in [a, b],$$
$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathbb{M}, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ci-dessous on rappelle un outil classique et puissant pour montrer qu'une partie de l'espace des fonctions continues sur un compact est relativement compacte.

Théorème 2.1.1 *(d'Ascoli-Arzela) Soit $C([a, b], \mathbb{R})$, $-\infty < a < b < +\infty$, l'espace de fonctions continues définies sur le compact $[a, b]$ et à valeurs réelles muni de la norme*

$$\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|.$$

Une partie F de $C([a, b], \mathbb{R})$ est relativement compacte dans $C([a, b], \mathbb{R})$ si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue.

Remarque 2.1.4 *Le théorème d'Ascoli-Arzela ne permet de caractériser que les ensembles relativement compacts de $C(E_1, K)$, (avec E_1 compact et métrique, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et non les ensembles relativement compacts de n'importe quel espace de Banach.*

Exemple 2.1.6 *Soient k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. Le sous ensemble F des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ qui vérifient*

$$|f(t)| \leq k_1, \text{ et } \sup |f'(t)| \leq k_2,$$

pour tout $t \in [a, b]$, est relativement compact dans $C([a, b], \mathbb{R})$.

En effet, pour tout $f \in F$, le théorème des accroissements finis, prouve que pour tout $t_0, t \in [a, b]$ il existe $c \in]t_0, t[$ tel que

$$|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)| |t - t_0|.$$

Donc $|f(t) - f(t_0)| \leq k_2 |t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\mu = \frac{\varepsilon}{k_2}$, alors

$$\forall t \in [a, b], |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de F en t_0. Comme on peut prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a,b]$, on en déduit que F est équicontinu.
On a $|f(t)| \leq k_1$ pour tout $f \in F$ ce qui implique que $\|f\| \leq k_1$ et partant de

$$\forall f \in F,\ f \in B'(0, k_1),$$

c'est à dire,

$$F \subset B'(0, k_1),$$

d'où la bornitude de F. Finalement, Comme F est borné et équicontinu, alors le théorème d'Ascoli-Arzela assure que F est relativement compact.

Définition 2.1.11 *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés et Ω un sous ensemble de X.*

(i) Une application continue $T : X \to Y$ est dite compacte si lorsque Ω est borné implique $T(\Omega)$ est relativement compact, c'est à dire $\overline{T(\Omega)}$ est compact. C'est à dire si pour toute suite bornée $\{x_n\}$ dans X, la suite $T(x_n)$ possède une sous suite convergeant dans Y,

(ii) T est dite complètement continue si elle est compacte et continue.

2.2 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outils précieux et très intéressants en mathématiques, ils ont un rôle crucial dans le domaine des applications, surtout ils interviennent dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires en particulier, et pour les problèmes d'existance et d'unicité. Dans ce paragraphe on rappelle les théorèmes de point fixe qu'on va utiliser dans ce travail.

Définition 2.2.1 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, $T : E \to E$ une application. On appelle point fixe de T tout point $x \in E$ tel que $T(x) = x$, Ce qui est équivalent à dire que l'équation $T(x) - x = 0$ possède une solution.*

Exemple 2.2.1 *La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ admet $\{0, 1\}$ comme points fixes.*

Exemple 2.2.2 *Si $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ est une fonction continue alors f admet au moins un point fixe.*

Pour résoudre un problème de point fixe on doit identifier trois éléments fondamentaux, à savoir,

1. Un ensemble convenable S apte pour contenir les solutions du problème,
2. Une application $P : S \longrightarrow S$ ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème,
3. Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de P sur S.

On va voir maintenant trois théorèmes de point fixe, le théorème de point fixe de Banach qui donne un critère général dans les espaces métriques complets, celui de Schauder qui est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet au moins un point fixe, et finalement le théorème hybride de Krasnoselskii.

2.2.1 Théorème de point fixe de Banach

En 1922, le mathématicien polonais Stefan Banach a prouvé son célèbre théorème (connu aussi sous le nom de théorème d'application contractante ou théorème de Banach-Picard) qui garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Ce théorème a fait preuve d'une grande utilité en analyse. En outre, il est basé sur un processus itératif assurant que ce point fixe peut être obtenu comme limite d'une suite itérée et qu'il est possible d'estimer la précision avec laquelle cette limite est atteinte.

Théorème 2.2.1 ([75]) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $T : E \rightarrow E$ une application contractante de constante $k \in [0,1[$. Alors il existe un point unique $x \in E$ tel que $T(x) = x$.*

Remarque 2.2.1 *Si A est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées A^P est une contraction, alors A a un seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe de A^P on a

$$A^P(A(x)) = A(A^p(x)) = A(x),$$

ce qui convient à dire que $A(x)$ est aussi un point fixe de A^P et grâce à l'unicité $A(x) = x$. Ce résultat est valable pour tous les types de contractions qui assurent l'unicité du point fixe.

2.2.2 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder élaboré en 1930, assure l'existence d'un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, pour une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité, ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach.

Théorème 2.2.2 ([75]) *Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble convexe fermé borné et non vide d'un espace de Banach E et $T : \mathbb{M} \to E$ une application compacte. Alors T possède un point fixe.*

Remarque 2.2.2 *Si $\mathbb{M}$ est compact et convexe, il suffit que T soit continue pour avoir un point fixe pour T.*

2.2.3 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

En 1955, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires.

Théorème 2.2.3 ([75]) *Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$. On suppose que $A, B : \mathbb{M} \to E$ sont deux applications satisfaisant*

(i) $Ax + By \in \mathbb{M}$, $\forall x, y \in \mathbb{M}$,

(ii) A est complètement continue,

(iii) B est une application contractante.

Alors il existe $z \in \mathbb{M}$ avec $z = Az + Bz$.

Preuve. D'une part, la 3ème condition donne

$$\begin{aligned}
\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\
&\leq \|x-y\| + \|Bx-By\| \\
&\leq \|x-y\| + k\|x-y\| \\
&\leq (1+k)\|x-y\|, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\
&\geq \|I(x-y)\| - \|Bx-By\| \\
&\geq \|x-y\| - k\|x-y\| \\
&\geq (1-k)\|x-y\|, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

de (2.2) et (2.3), il résulte que

$$(1-k)\|x-y\| \leq \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \leq (1+k)\|x-y\|.$$

Cette double inégalité montre que $(I-B) : \mathbb{M} \to (I-B)\mathbb{M}$ est continue et bijective. Donc, $(I-B)^{-1}$ existe et elle est continue. Posons $U = (I-B)^{-1}A$, il est clair que U est une application compacte, puisque U est une composition d'une application continue et une application compacte. En vertu du théorème de Schauder, U admet un point fixe, c'est à dire

$$\exists x \in \mathbb{M} : (I-B)^{-1}Ax = x,$$

ceci équivaut à dire

$$Ax + Bx = x,$$

et la preuve est achevée. ■

2.3 Equations différentielles à retard et équations différentielles de type neutre

Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée par rapport au temps présent de la solution dépend d'une donnée (de cette solution) sur un temps postérieur. Une équation différentielle à retard est un modèle spécifique d'équations différentielles fonctionnelles, dans lesquelles la partie fonctionnelle de l'équation est l'évaluation d'une fonctionnelle sur une étape postérieur (le passé) du processus ([45], [56], [57], [63]).

2.3.1 Equations différentielles à retard

Etant donné un nombre $r > 0$. Soit $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach de fonctions continues définies sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a,b] = [-r,0]$ on pose

$$C_0 = C([-r,0], \mathbb{R}^n),$$

et on désigne la norme d'un élément ψ de C_0 par

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(s)|, \ -r \leq s \leq 0\},$$

où $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $L > 0$ et soit

$$x \in C([t_0 - r, t_0 + L], \mathbb{R}^n) \text{ et } t \in [t_0, t_0 + L].$$

On définit la fonction x_t de C_0 par

$$x_t(s) = x(t+s), \ s \in [-r,0].$$

Remarque 2.3.1 *Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t-r,t]$, translatée sur $[-r,0]$.*

Exemple 2.3.1 *$x(t) = t^2 + 2$, $t_0 = 0$, $L = 2$, $r = 1$ alors $t \in [0,2]$, $s \in [-1,0]$, $x_t(s) = x(t+s) = (t+s)^2 + 2$, pour $t = 1$ on a $x_1(s) = (s+1)^2 + 2$.*

Définition 2.3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard égal r sur U une relation de la forme*

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{2.4}$$

où

$$x_t(s) = x(t+s),\ s \in [-r, 0].$$

On la désigne parfois ***EDR(f)****. Le nombre r est appelé le retard. En clair, le cas $r = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires.*

Définition 2.3.2 *On dit que l'équation (2.4) est autonome si la fonction f ne dépend pas de t. On note dans ce cas $f(u)$ au lieu de $f(t, u)$.*

Il est évident qu'une condition initiale appropriée au temps $t = t_0$ exige la détermination de la fonction x sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$, c'est à dire,

$$x(t) = \psi(t),\ t \in [t_0 - r, t_0],$$

où $\psi : [t_0 - r, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée supposée continue appelée la condition initiale de l'équation à retard (2.4). Ainsi, l'équation (2.4) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x_t),\ t \geq t_0, \\ x(t) &= \psi(t),\ t \in [t_0 - r, t_0], \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec ψ une fonction donnée continue sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$.

L'équation (2.4) est dite linéaire si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi$, où $L(t)$ est linéaire. L'équation (2.4) est dite non homogène si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi + h(t)$, où $h(t) \neq 0$. L'équation (2.4) est dite autonome si $f(t, \varphi) = g(\varphi)$, g indépendante de t. A titre d'exemple, les équations suivantes sont des équations différentielles à retard

$$x'(t) = 3x(t) + 2x(t-1), \tag{2.6}$$

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t - r(t)) + h(t), \tag{2.7}$$

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} x(t+s)ds, \tag{2.8}$$

$a(t), b(t), r(t)$ sont des fonctions continues. L'équation (2.6) représente une équation différentielle linéaire autonome à retard constant $r = 1$, l'équation (2.7) est une équation différentielle linéaire à retard fonctionnelle non homogène non autonome, et l'équation (2.8) représente une équation intégro-différentielle linéaire à retard.

Définition 2.3.3 *Etant donnés $\psi \in C_0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, une solution du problème à valeur initiale*

$$x' = f(t, x_t),\ t \geq t_0,\ x_{t_0} = \psi, \tag{2.9}$$

est une fonction notée $x(t)$ telle que $x(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0 - r, t_0]$ et satisfait (2.4) pour $t \in [t_0, t_0 + L]$, $L > 0$. Une telle fonction $x(\cdot)$ est dite solution de (2.4) à travers (t_0, ψ) et est notée souvent par $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, \psi)$.

Etant données une fonction $\psi \in C_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f(t, \psi)$ une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation (2.4) à travers (t_0, ψ) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale

$$x(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(u, x_u) du,\ t \geq t_0,\ x_{t_0} = \psi.$$

On définit l'application A par l'expression

$$\begin{aligned} Ax(t) &= f(t, x_t),\ t \geq t_0, \\ x_{t_0} &= \psi. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'existence d'une solution de cette équation à travers $(t_0, \psi) \in \mathbb{R} \times C_0$, on considère un nombre $L > 0$, et toutes les fonctions définies sur $[t_0 - r, t_0 + L]$ qui sont continues et qui coïncident avec ψ sur $[t_0 - r, t_0]$, c'est à dire, $x_{t_0} = \psi$. On demande que les valeurs de ces fonctions sur $[t_0, t_0 + L]$ répondent à la condition $|x(t) - \psi(0)| \leq \beta$. La fonction obtenue A correspondant à l'équation intégrale est définie et on démontre que L et β peuvent être choisis de sorte que A envoie cette classe (de fonctions continues) dans elle-même, qu'elle est continue et à image compacte. Dans ce contexte, le théorème du point fixe de Schauder peut s'appliquer pour conclure l'existence d'une solution (pour de amples détails on renvoi aux livres [56] et [63]).

L'équation (2.4) est d'un type qui inclut aussi bien les EDO

$$x' = f_1(t, x),$$

que les équations différentielles à retard

$$x'(t) = f_2(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), ..., x(t - \tau_n(t)))$$

avec $0 \leq r_i(t) \leq r$, $i = 1, ..., n$ puisqu'il suffit de poser

$$f(t, u) = f_2(0, u(0), u(-\tau_1(t)), ..., u(-\tau_n(t))).$$

On rappel, les théorèmes de base sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (2.4).

Théorème 2.3.1 (Existence) *Considérons l'équation (2.4) et supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f(t,\varphi)$ une application continue sur Ω. Si $(t_0,\psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation (2.4) passant par (t_0,ψ).*

Définition 2.3.4 *On dit que la fonction $f(t,\varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times C_0$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $(t,\varphi_i) \in K$, $i = 1,2$ on a*

$$|f(t,\varphi_1) - f(t,\varphi_2)| \leq k\,|\varphi_1 - \varphi_2|\,.$$

Théorème 2.3.2 (Unicité) *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, $f(t,\varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur tout sous ensemble compact de Ω. Si $(t_0,\psi) \in \Omega$, alors il existe une unique solution pour l'équation (2.4) passant par (t_0,ψ).*

2.3.2 Equations différentielles de type neutre

On donne ici la définition d'une équation différentielle de type neutre avec quelques exemples. Pour plus d'informations sur ce type d'équations voir [56] et [63].

Définition 2.3.5 *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$, $D : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions continues données. La relation*

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t) = f(t,x_t), \tag{2.10}$$

est dite une équation différentielle de type neutre EDTN.

Définition 2.3.6 *Une fonction x est dite solution de l'équation (2.10) sur $[t_0 - r, t_0 + L]$, s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ et $L > 0$ tels que*

$$x \in C\left([t_0 - r, t_0 + L], \mathbb{R}^n\right),\ (t,x_t) \in \Omega,\ t \in [t_0, t_0 + L]\,,$$

$D(t, x_t)$ est continument différentiable et satisfait (2.10) sur $[t_0, t_0 + L]$.

Etant donnés $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in C_0$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$, on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (2.10) passant par (t_0, ψ) s'il existe $L > 0$ telle que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (2.10) sur $[t_0 - r, t_0 + L]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$; on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (2.10) sur $[t_0 - r, \infty)$ si pour tout $L > 0$, $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (2.10) sur $[t_0 - r, t_0 + L]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$.

Théorème 2.3.3 (Existence) *Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution pour l'équation (2.10) passant par (t_0, ψ).*

Théorème 2.3.4 (Unicité) *Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne sur tout sous ensemble compact de Ω, alors pour tout $(t_0, \psi) \in \Omega$ il existe une solution unique pour l'équation (2.10) passant par (t_0, ψ).*

2.3.3 Modèles d'équations différentielles à retard

Les problèmes à retard sont innombrables en littérature. On donne dans cette sous section trois modèles intervenant dans des domaines différents du monde réel.

Proies prédateurs de Lokta-Volterra

Le modèle prédateur-proie classique a été proposé par Volterra et Lotka en 1920, dans un ouvrage intitulé *Théorie mathématique de la lutte pour la vie* qui est probablement le premier traité d'écologie mathématique. Le modèle s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_1 x(t) - b_1 x(t) y(t), \\ y'(t) &= a_2 y(t) - b_2 x(t) y(t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \tag{2.12}$$

où $x(t)$ représente la population de proies et $y(t)$ la population de prédateurs à l'instant t et a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes positives. Si on suppose que le fait d'un changement dans la population de proies n'affectera pas immédiatement la population des prédateurs, et inversement, le système (2.11) avec la condition initiale (2.12) devient un système d'équation différentielle à retard de la forme

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_1 x(t) - b_1 x(t) y(t - r_1), \\ y'(t) &= a_2 y(t) - b_2 x(t - r_2) y(t), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0,\ x(s) = \psi(s),\ y(0) = y_0,\ y(s) = \varphi(s),\ -\tau < s < 0,$$

où $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$, sont des retards et les fonctions $\psi(\cdot)$ et $\varphi(\cdot)$ sont les fonctions initiales de l'histoire antérieure, $\tau = max\{r_1, r_2\}$ (pour de amples détails, exemples et informations, on conseille de consulter [45], [53] et [63]).

Modèles démographiques

Le choix d'équations à retards pour modéliser l'évolution d'une population permet de prendre en compte la notion d'espérance de vie. Par exemple, on considère le modèle très simple suivant, avec les notations :

$x(t)$ = nombre d'individus à l'instant t,
τ = temps de gestation,
a = taux de natalité,
σ = espérance de vie d'un individu.

On suppose que τ, a, et σ sont constants, le taux de variation de la population est alors donné par l'équation

$$x'(t) = a[x(t - \tau) - x(t - \tau - \sigma)],$$

puisque $ax(t - \tau)$ représente le nombre d'individus nés, par unité de temps, à l'instant t, et $ax(t - \tau - \sigma)$ le taux d'individus morts à l'instant t.
On peut citer de nombreux autres exemples, comme par exemple le modèle développé par Hutchinson (1948) :

$$x'(t) = [\alpha - \gamma x(t - \sigma)] x(t),$$

ou encore ceux de Wangersky et Cunningham (1956).

Ligne de transmission sans pertes

Maintenant, en vertu de la transformation de *D'Alembert*, on va voir comment peut on réécrire une équation différentielle partielle hyperbolique en tant que système à retard de type neutre.

Cet exemple traite une ligne de transmission sans pertes, à une extrémité ($x = 0$), il y a source de tension constante E et à l'autre extrémité ($x = l$), une capacité est branchée en parallèle avec une diode tunnel. Le courant $i(\cdot,\cdot)$ et la tension $v(\cdot,\cdot)$ sont des fonctions de t et x qui satisfont l'équation de télégraphe, donc on obtient les deux équations aux dérivées partielles du premier ordre de type hyperbolique suivantes :

$$L\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \; et \; C\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0, \; t > 0, \; 0 \leq x \leq l, \tag{2.13}$$

avec les conditions aux limites

$$E = Ri(t,0) + v(t,0), \; et \; i(t,l) = C_l\frac{\partial v}{\partial t}(t,l) + i_d(v(t,l)), \tag{2.14}$$

où l est la longueur de la ligne, L et C sont l'inductance et la capacité du conducteur par unité de longueur, R est la résistance à l'entrée, C_l est la capacité en parallèle avec la diode tunnel, $i_d(v)$ est la courbe caractéristique courant-tension de la diode (une fonction polynômiale non linéaire) donnée. Les points d'équilibre (v_0, i_0) satisfont une équation linéaire donnée par

$$E = v_0 + Ri_0, \; i_0 = i_d(v_0).$$

On suppose que le point de fonctionnement est donné par l'approximation du premier ordre

$$i(v_d) \approx i(v_0) + m(v_d - v_0),$$

où m est une constante positive. La formule de *D'Alembert* et les conditions aux limites (2.14) nous permettent d'obtenir l'équation différentielle linéaire de type neutre suivante :

$$\frac{d\psi}{d\xi}(\xi) - C\frac{d\psi}{d\xi}(\xi - \tau) = A\psi(\xi) + B\psi(\xi - \tau), \tag{2.15}$$

Avec

$$A = \frac{m - \sqrt{\frac{L}{C}}}{C_l}, \; B = -\frac{\left(\sqrt{\frac{L}{C}} - R_0\right)\left(m + \sqrt{\frac{L}{C}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{L}{C}} + R_0\right) C_l}, \; C = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}} - R_0}{\sqrt{\frac{L}{C}} + R_0},$$

$\tau = 2\sqrt{LCl}$ et $\xi = t - bl$.

Ce qui prouve une transformation du système de deux EDP de type hyperbolique (2.13) en une équation à retard de type neutre.

2.4 Stabilité de solutions pour les équations différentielles à retard

La théorie de la stabilité a été crée à la fin du dix-neuvième siècle par Lyapunov. Cette théorie a trouvé une large application dans divers domaines de la physique et des sciences mathématiques. D'un point de vue mathématique, la théorie de la stabilité présente un cas particulier de la théorie qualitative des équations différentielles.

Pour vérifier la convergence d'une trajectoire vers un équilibre donné, il suffit d'étudier l'évolution de la distance séparant le point courant de cet équilibre. C'est sur ce principe que sont basées la première et la seconde méthode de Lyapunov dans lesquelles on considère des distances généralisées appelées fonctions de Lyapunov. Dans le cas des systèmes à retard, la différence revient dans le choix des distances utilisées, c'est à dire la recherche d'une fonction ou d'une fonctionnelle de Lyapunov dont on pourra montrer la croissance vers zéro.

La stabilité d'un point d'équilibre d'un système avec ou sans retard consiste toujours à observer que son évolution reste proche du point d'équilibre lorsqu'on s'en écarte d'un certain voisinage - le domaine de stabilité. La stabilité asymptotique, en plus de garantir la condition précédente, indique que le système reviendra exactement au point d'équilibre, au bout d'un temps éventuellement infini, si on s'en écarte légèrement. Notons que la notion de stabilité asymptotique est la plus exigée en pratique.

On revient sur les définitions liées à la stabilité des systèmes à retards. Pour $r > 0$, On considère le système retardé suivant

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x_t),\ t \geq t_0, \\ x(t) &= \psi(t),\ t_0 - r \leq t \leq t_0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $\psi : [t_0 - r, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, supposée continue et $f : \mathbb{R} \times C_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La fonction $f(t, x)$ est supposée satisfaire les conditions nécessaires qui garantissent l'existence de la solution $x(t, t_0, \psi)$ à travers (t_0, ψ) du problème (2.16) et d'être continue en (t, t_0, ψ) du domaine de définition de f (voir Hale [57]).

Définition 2.4.1 *Supposons que $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La solution triviale $x = 0$ de (2.16) est dite stable en t_0 ($t_0 \in \mathbb{R}$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que si $\|\psi\| < \delta$, la solution de (2.16) existe sur $[t_0 - r, \infty)$ et $|x(t, t_0, \psi)| < \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$. Dans le cas contraire on dira que la solution est instable en t_0. La solution $x = 0$ de (2.16) est dite uniformément stable si le nombre δ est indépendant de t_0.*

Définition 2.4.2 *La solution triviale $x = 0$ de (2.16) est dite asymptotiquement stable en t_0 si elle est stable en t_0 et s'il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ tel que toutes les fois que $\|\psi\| < \delta_1$, la solution du problème (2.16) satisfait*

$$\lim x(t, t_0, \psi) = 0, \text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

La solution triviale $x = 0$ de (2.16) est dite uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et si il existe un $\delta_1 > 0$ (indépendant de t_0) tel que pour tout t_0 et $\|\psi\| < \delta_1$ la solution x du problème (2.16) satisfait la condition $x(t, t_0, \psi) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$ de la manière suivante : pour tout $\eta > 0$ il existe un $T = T(\eta) > 0$ tel que $|x(t, t_0, \psi)| < \eta$ pour $t \geq t_0 + T$.

2.5 Stabilité par la méthode de point fixe

La méthode de Lyapunov a été l'ultime objet permettant d'étudier la stabilité pour les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles. Néanmoins, cette méthode a rencontré de sérieuses difficultés car il existe encore un tas de problèmes qui résistent à cette technique. Récemment, un nombre d'investigateurs dans ce domaine, comme Burton, Furumuchi, Zhang, Djoudi, Ardjouni, Jin et autres, se sont penchés sur le problème dans l'espoir de trouver une autre issue pour contourner ces difficultés. Ils ont constaté, en utilisant des exemples concrets, que la technique de point fixe peut servir comme alternative à la méthode directe. Ils ont remarqué aussi que cette dernière méthode ne résout pas uniquement les problèmes rencontrés dans l'application de la méthode directe de Lyapunov, car la méthode en elle même possède d'autres avantages, en particulier, les conditions de la dernière méthode qui sont souvent exprimés en moyenne, par contre ceux de Lyapunov se présentent sous des formes ponctuelles (voir [2], [4], [5], [7], [10], [11], [13], [18], [23], [24], [26], [44], [58]).

Lorsqu'on veut étudier la stabilité de la solution triviale d'une équation différentielle à retard par la méthode de point fixe il va falloir procéder comme suit

(i) Une équation différentielle à retard exige avant tout une donnée (une fonction) initiale ψ définie sur un intervalle initiale approprié I_{t_0}, c'est à dire $\psi : I_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On doit choisir aussitôt après un espace convenable S de fonctions $\varphi : I_{t_0} \cup [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui coïncident sur I_{t_0} avec ψ. Selon les cas de besoins on peut toujours ajouter d'autres restrictions aux fonctions φ de S comme la bornitude par exemple ou la condition $\varphi(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Cette dernière condition s'impose si on souhaite étudier la stabilité asymptotique.

(ii) Ensuite on doit inverser l'équation différentielle à retard pour définir ce qu'on appelle une application de point fixe, c'est à dire une application $P : S \longrightarrow S$ dont le point fixe est solution de l'équation à retard donnée (l'équation originale). Néanmoins, cette inversion est inévitable pour la méthode de point fixe et elle peut s'avérer une tache délicate dans plusieurs cas. Par exemple si l'équation ne possède pas un EDO terme linéaire dans sa structure on ne pourra pas utiliser la variation des paramètres. Il est donc indispensable d'agir autrement et essayer si une transformation de cette équation est possible.

(iii) A l'image de l'application $P : S \longrightarrow S$ obtenue en (ii), un théorème de point fixe doit être choisi permettant à l'équation $Px = x$ d'avoir une solution. En particulier si P est une contraction on pourra appliquer le théorème de point fixe de Banach, si P est compacte alors on appliquera le théorème de Schauder, et si P se met sous forme de somme de deux applications l'une contraction et l'autre compacte alors le théorème hybride de Krasnoselskii peut donner satisfaction.

Il devient donc clair que la méthode de stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois choses essentielles, la variation des paramètres, un espace complet et un théorème de point fixe. En une étape on peut conclure l'existence et la stabilité.

Chapitre 3

Existence et unicité de solutions non oscillatoires d'une classe d'équations différentielles de premier ordre de type neutre

B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Existence and uniqueness of nonoscillatory solutions of first-order neutral differential equations by using Banach's theorem*, Proc. Of the Institute of Maths. and Mechanics, National Academy of Sci. Of Azerbaijan. V. 45, N0 1 (2019), 15-30.

Mots clés : Point fixe, solutions non oscillatoires, équations différentielles de type neutre.

Dans ce chapitre, on examine l'existence et l'unicité de solutions non oscillatoires de la classe d'équations différentielles de premier ordre suivante

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&\left[x\left(t\right)+P_1\left(t\right)h_1\left(x\left(t-\tau_1\left(t\right)\right)\right)+P_2\left(t\right)h_2\left(x\left(t+\tau_2\left(t\right)\right)\right)\right]\\&+g_1\left(t,x\left(t-\sigma_1\left(t\right)\right)\right)-g_2\left(t,x\left(t+\sigma_2\left(t\right)\right)\right)\;=\;0,\end{aligned}$$

ayant des termes qui sont à la fois à retard et d'avance appelées équations mixtes. On utilise le principe de contraction de Banach et on donne des conditions suffisantes pour conclure l'existence et l'unicité de solutions non oscillatoires.

3.1 Introduction

Ces dernières années, le problème de l'existence de solutions non oscillatoires d'équations différentielles neutres a été étudié par plusieurs auteurs. Pour les résultats en relation, on renvoit le lecteur à [28], [32], [33], [90] et aux références qui y sont citées. On renvoit le lecteur aux livres [1], [17], [47], [55] sur le sujet de la neutralité d'équations différentielles.

Zhang, Feng, Yan et Song [87] ont récemment étudié l'existence de solutions non oscillatoires d'équation différentielle neutre à retard de premier ordre à coefficients variables suivante

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[x(t)+P(t)x(t-\tau)]\\&+Q_1(t)x(t-\sigma_1)-Q_2(t)x(t-\sigma_2) \;=\; 0,\; t\;\geq\; t_0.\end{aligned}$$

Ils ont obtenu des conditions suffisantes pour l'existence de solutions non oscillatoires dépendant des quatre intervalles différents de $P(t)$. Par l'utilisation de théorème du point fixe de Banach Candan [29] a discuté l'existence de solutions non oscillatoires pour l'équation différentielle neutre de premier ordre suivante

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[x(t)+P_1(t)x(t-\tau_1)+P_2(t)x(t+\tau_2)]\\&+Q_1(t)x(t-\sigma_1)-Q_2(t)x(t+\sigma_2) \;=\; 0,\end{aligned}$$

avec $P_i \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$, $Q_i \in C\left([t_0,\infty),[0,\infty)\right)$, $\tau_i > 0$ et $\sigma_i \geq 0$ pour $i = 1, 2$. Dans [61], Kong considère l'équation différentielle neutre de premier ordre

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[x\left(t\right)+P_1\left(t\right)x\left(t-\tau_1\right)+P_2\left(t\right)x\left(t+\tau_2\right)\right]\\&+Q_1(t)g_1\left(x\left(t-\sigma_1\right)\right)-Q_2(t)g_2\left(x\left(t+\sigma_2\right)\right) \;=\; 0,\end{aligned}$$

et pour des cas différents des coefficients P_1 et P_2, il a discuté l'existence de solutions non oscillatoires.

Inspiré et motivé par les travaux mentionnés ci-dessus et en utilisant le théorème de point fixe de Banach, on étudie dans ce chapitre l'équation différentielle neutre de premier ordre suivante

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[x\left(t\right)+P_1\left(t\right)h_1\left(x\left(t-\tau_1\left(t\right)\right)\right)+P_2\left(t\right)h_2\left(x\left(t+\tau_2\left(t\right)\right)\right)\right]\\&+g_1\left(t,x\left(t-\sigma_1\left(t\right)\right)\right)-g_2\left(t,x\left(t+\sigma_2\left(t\right)\right)\right) \;=\; 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Nous fournissons de nouveaux critères pour l'existence et l'unicité des solutions non oscillatoires de (3.1). Tout au long de ce chapitre on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées,

(1) $P_i \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}), i = 1, 2.$

(2) $h_1, h_2 \in C([0, \infty), [0, \infty))$ vérifient les conditions

$$0 \leq h_1(x) \leq K_1 x, \; 0 \leq h_2(x) \leq K_2 x,$$

et supposons que H_1 la fonction inverse de h_1 existe et qu'il existe des constantes positives L_1 et L_2 telles que

$$L_1 x \leq H_1(x) \leq L_2 x.$$

(3) $g_i \in C([t_0, \infty) \times [0, \infty), [0, \infty))$, et $g_i(t, x)$ satisfait

$$0 \leq g_1(t, x) \leq q_1(t)x + f_1(t), \; 0 \leq g_2(t, x) \leq q_2(t)x + f_2(t),$$

où $q_i, f_i \in C([t_0, \infty), [0, \infty)), i = 1, 2.$

(4) τ_1 est différentiable et la fonction inverse φ de $t - \tau_1(t)$ existe, avec $\varphi(t) \geq t$, et $t - \tau_1(t), \; t - \sigma_1(t)$ sont des fonctions croissantes.

(5) $\tau_i(t) > 0$ et $\sigma_i(t) \geq 0$ pour $i = 1, 2$.

3.2 Résultats Principaux

Pour montrer qu'un opérateur S satisfait les conditions du principe de contraction, on considère les différents cas pour les intervalles des coefficients P_1 et P_2.

Théorème 3.2.1 *Supposons que $0 \leq P_1(t) \leq p_1 < 1$, $0 \leq P_2(t) \leq p_2 < 1 - p_1$ et qu'il existe une constante positive M_2 telle que*

$$\int_{t_0}^{\infty} [q_1(s)M_2 + f_1(s)] \, ds < \infty, \; \int_{t_0}^{\infty} [q_2(s)M_2 + f_2(s)] \, ds < \infty. \tag{3.2}$$

Alors (3.1) possède une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. On considère l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \Lambda : M_1 \leq x(t) \leq M_2,\ t \geq t_0\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. Due à la condition (3.2), On peut choisir un $t_1 > t_0$,

$$t_1 \geq t_0 + \max\left\{\sup_{t\geq t_0} \tau_1(t),\ \sup_{t\geq t_0} \sigma_1(t)\right\}, \tag{3.3}$$

suffisamment grand tel que

$$\int_t^{\infty} [q_1(s)M_2 + f_1(s)]\, ds \leq M_2 - \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.4}$$

$$\int_t^{\infty} [q_2(s)M_2 + f_2(s)]\, ds \leq \alpha - (p_1K_1 + p_2K_2)\, M_2 - M_1,\ t \geq t_1, \tag{3.5}$$

et

$$\int_t^{\infty} [q_1(s) + q_2(s)]\, ds \leq 1 - p_1K_1 - p_2K_2 - \frac{M_1}{M_2},\ t \geq t_1, \tag{3.6}$$

où M_1 et M_2 sont des constantes positives vérifiant

$$(p_1K_1 + p_2K_2)M_2 + M_1 < M_2,$$

et

$$\alpha \in ((p_1K_1 + p_2K_2)\, M_2 + M_1, M_2).$$

Définissons l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ donné par

$$\begin{aligned}(Sx)(t) \quad = \quad & \alpha - P_1(t)h_1\left(x(t - \tau_1(t))\right) - P_2(t)h_2\left(x(t + \tau_2(t))\right) \\ & + \textstyle\int_t^{\infty} [g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)]ds, \quad t \geq t_1,\end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \geq t_1$ et $x \in \Omega$, à partir de (3.4) et (3.5), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\leq \alpha + \int_t^{\infty} g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) ds \\ &\leq \alpha + \int_t^{\infty} [q_1(s)x(s - \sigma_1(s)) + f_1(s)]\, ds \\ &\leq \alpha + \int_t^{\infty} [q_1(s)M_2 + f_1(s)]\, ds \leq M_2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\geq \alpha - P_1(t)h_1\left(x(t-\tau_1(t))\right) - P_2(t)h_2\left(x(t+\tau_2(t))\right) \\ &\quad - \int_t^{\infty} g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right) ds \\ &\geq \alpha - p_1K_1x(t-\tau_1(t)) - p_2K_2x(t+\tau_2(t)) \\ &\quad - \int_t^{\infty} \left[q_2(s)x(s+\sigma_2(s)) + f_2(s)\right] ds \\ &\geq \alpha - p_1K_1M_2 - p_2K_2M_2 - \int_t^{\infty} \left[q_2(s)M_2 + f_2(s)\right] ds \geq M_1.\end{aligned}$$

Cela implique que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est une contraction sur Ω. En effet, si $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}\left|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)\right| &\leq P_1(t)\left|h_1\left(x_1(t-\tau_1(t))\right) - h_1\left(x_2(t-\tau_1(t))\right)\right| \\ &\quad + P_2(t)\left|h_2\left(x_1(t+\tau_2(t))\right) - h_2\left(x_2(t+\tau_2(t))\right)\right| \\ &\quad + \int_t^{\infty} \left(\left|g_1\left(s, x_1\left(s-\sigma_1(s)\right)\right) - g_1\left(s, x_2\left(s-\sigma_1(s)\right)\right)\right|\right. \\ &\quad \left. + \left|g_2\left(s, x_1\left(s+\sigma_2(s)\right)\right) - g_2\left(s, x_2\left(s+\sigma_2(s)\right)\right)\right|\right) ds \\ &\leq P_1(t)K_1\left|x_1(t-\tau_1(t)) - x_2(t-\tau_1(t))\right| \\ &\quad + P_2(t)K_2\left|x_1(t+\tau_2(t)) - x_2(t+\tau_2(t))\right| \\ &\quad + \int_t^{\infty} \left(q_1(s)\left|x_1\left(s-\sigma_1(s)\right) - x_2\left(s-\sigma_1(s)\right)\right|\right. \\ &\quad \left. + q_2(s)\left|x_1\left(s+\sigma_2(s)\right) - x_2\left(s+\sigma_2(s)\right)\right|\right) ds,\end{aligned}$$

et par (3.6)

$$\begin{aligned}\left|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)\right| &\leq \left(p_1K_1 + p_2K_2 + \int_t^{\infty} \left[q_1(s) + q_2(s)\right] ds\right) \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \lambda_1 \|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

où $\lambda_1 = \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_1 \|x_1 - x_2\|.$$

Puisque $\lambda_1 < 1$, S est une contraction sur Ω, on en déduit que S a un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ∎

Théorème 3.2.2 *Supposons que* $0 \leq P_1(t) \leq p_1 < 1$, $p_1 - 1 < p_2 \leq P_2(t) \leq 0$ *et qu'il existe une constante positive* N_2 *tel que*

$$\int_{t_0}^{\infty} [q_1(s)N_2 + f_1(s)]\, ds < \infty, \int_{t_0}^{\infty} [q_2(s)N_2 + f_2(s)]\, ds < \infty. \tag{3.7}$$

Alors (3.1) possède une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. Soit l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_1 \leq x(t) \leq N_2,\ t \geq t_0\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. Due à la condition (3.7), on peut choisir un $t_1 > t_0$, suffisamment grand satisfaisant (3.3) tel que

$$\int_{t}^{\infty} [q_1(s)N_2 + f_1(s)]\, ds \leq (1 + p_2K_2)\, N_2 - \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.8}$$

$$\int_{t}^{\infty} [q_2(s)N_2 + f_2(s)]\, ds \leq \alpha - p_1K_1N_2 - N_1,\ t \geq t_1, \tag{3.9}$$

et

$$\int_{t}^{\infty} [q_1(s) + q_2(s)]\, ds \leq 1 - p_1K_1 + p_2K_2 - \frac{N_1}{N_2},\ t \geq t_1, \tag{3.10}$$

où N_1 et N_2 sont des constantes positives telles que

$$p_1K_1N_2 + N_1 < (1 + p_2K_2)\, N_2,$$

et

$$\alpha \in (p_1K_1N_2 + N_1, (1 + p_2K_2)\, N_2).$$

Définissons l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ donné par

$$\begin{aligned}(Sx)(t) \quad = \quad & \alpha - P_1(t)h_1\left(x(t - \tau_1(t))\right) - P_2(t)h_2\left(x(t + \tau_2(t))\right) \\ & + \textstyle\int_t^{\infty} [g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)] ds, \quad t \geq t_1,\end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \geq t_1$ et $x \in \Omega$, à partir de (3.8) et (3.9) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\leq \alpha - P_2(t)h_2\left(x(t + \tau_2(t))\right) + \int_t^{\infty} g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) ds \\ &\leq \alpha - P_2(t)K_2x(t + \tau_2(t)) + \int_t^{\infty} [q_1(s)x(s - \sigma_1(s)) + f_1(s)]\, ds \\ &\leq \alpha - P_2K_2N_2 + \int_t^{\infty} [q_1(s)N_2 + f_1(s)]\, ds \leq N_2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\geq \alpha - P_1(t)h_1\left(x(t-\tau_1(t))\right) - \int_t^\infty g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right) ds \\ &\geq \alpha - p_1 K_1 x(t-\tau_1(t)) - \int_t^\infty \left[q_2(s)x(s+\sigma_2(s)) + f_2(s)\right] ds \\ &\geq \alpha - p_1 K_1 N_2 - \int_t^\infty \left[q_2(s)N_2 + f_2(s)\right] ds \geq N_1.\end{aligned}$$

Cela implique que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est une contraction sur Ω. Pour cela soient $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$, par l'utilisation de (3.10), on peut conclure que

$$\begin{aligned}\left|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)\right| &\leq \left(p_1K_1 - p_2K_2 + \int_t^\infty \left[q_1(s) + q_2(s)\right] ds\right) \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \lambda_2 \|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

où $\lambda_2 = \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_2 \|x_1 - x_2\|.$$

Puisque $\lambda_2 < 1$, S est une contraction sur Ω, on en déduit que S a un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ■

Théorème 3.2.3 *Supposons que* $1 < p_1 \leq P_1(t) \leq p_{1_0} < \infty$, $0 \leq P_2(t) \leq p_2 < p_1 - 1$ *et qu'il existe une constante positive* M_4 *telle que*

$$\int_{t_0}^\infty \left[q_1(s)M_4 + f_1(s)\right] ds < \infty, \int_{t_0}^\infty \left[q_2(s)M_4 + f_2(s)\right] ds < \infty. \tag{3.11}$$

Alors (3.1) possède une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. On considère l'ensemble

$$\Omega = \left\{x \in \Lambda : M_3 \leq x(t) \leq M_4,\ t \geq t_0\right\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. Due à la condition (3.11), on peut choisir un $t_1 > t_0$,

$$\varphi(t_1) - \sigma_1(\varphi(t_1)) \geq t_0, \tag{3.12}$$

suffisamment grand tel que

$$\int_t^{\infty} [q_1(s)M_4 + f_1(s)]\, ds \le \frac{p_1}{L_2} M_4 - \alpha,\ t \ge t_1, \tag{3.13}$$

$$\int_t^{\infty} [q_2(s)M_4 + f_2(s)]\, ds \le \alpha - (1 + p_2K_2)\, M_4 - \frac{p_{1_0}}{L_1} M_3,\ t \ge t_1, \tag{3.14}$$

et

$$\int_t^{\infty} [q_1(s) + q_2(s)]\, ds \le \frac{p_1}{L_2} - (1 + p_2K_2) - \frac{p_{1_0} M_3}{L_1 M_4},\ t \ge t_1, \tag{3.15}$$

où M_3 et M_4 sont des constantes positives vérifiant

$$(1 + p_2K_2)\, M_4 + \frac{p_{1_0}}{L_1} M_3 < \frac{p_1}{L_2} M_4,$$

et

$$\alpha \in \left((1 + p_2K_2)\, M_4 + \frac{p_{1_0}}{L_1} M_3, \frac{p_1}{L_2} M_4 \right).$$

Définissons l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ donné par

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= H_1 \left(\frac{1}{P_1(\varphi(t))} \left[\alpha - x(\varphi(t)) - P_2(\varphi(t)) h_2\left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_{\varphi(t)}^{\infty} [g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)] ds \right] \right), \quad t \ge t_1, \end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \le t \le t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \ge t_1$ et $x \in \Omega$, à partir (3.13) et (3.14) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\le L_2 \left(\frac{1}{P_1(\varphi(t))} \left[\alpha - x(\varphi(t)) - P_2(\varphi(t)) h_2\left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_{\varphi(t)}^{\infty} [g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)] ds \right] \right) \\ &\le \frac{L_2}{P_1} \left(\alpha + \int_{\varphi(t)}^{\infty} g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) ds \right) \\ &\le \frac{L_2}{p_1} \left(\alpha + \int_t^{\infty} [q_1(s) x(s - \sigma_1(s)) + f_1(s)]\, ds \right) \\ &\le \frac{L_2}{p_1} \left(\alpha + \int_t^{\infty} [q_1(s) M_4 + f_1(s)]\, ds \right) \le M_4, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(Sx)(t) \geq L_1 & \left(\frac{1}{P_1(\varphi(t))} \left[\alpha - x(\varphi(t)) - P_2(\varphi(t)) h_2 \left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{\varphi(t)}^{\infty} [g_1 \left(s, x(s - \sigma_1(s)) \right) - g_2 \left(s, x(s + \sigma_2(s)) \right)] ds \right] \right) \\
& \geq \frac{L_1}{p_{1_0}} \left(\alpha - x(\varphi(t)) - P_2(\varphi(t)) h_2 \left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right) \right. \\
& \left. - \int_{\varphi(t)}^{\infty} g_2 \left(s, x(s + \sigma_2(s)) \right) ds \right) \\
& \geq \frac{L_1}{p_{1_0}} \left(\alpha - x(\varphi(t)) - p_2 K_2 x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right. \\
& \left. - \int_{t}^{\infty} \left[q_2(s) x(s - \sigma_1(s)) + f_2(s) \right] ds \right) \\
& \geq \frac{L_1}{p_{1_0}} \left(\alpha - M_4 - p_2 K_2 M_4 - \int_{t}^{\infty} \left[q_2(s) M_4 + f_2(s) \right] ds \right) \geq M_3.
\end{aligned}$$

Cela montre que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est une contraction sur Ω. Vers cette fin, soient $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$, alors

$$\begin{aligned}
|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| \leq & \frac{L_2}{P_1(\varphi(t))} \left(|x_1(\varphi(t)) - x_2(\varphi(t))| \right. \\
& + P_2(t) K_2 \left| x_1(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) - x_2(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right| \\
& + \int_{\varphi(t)}^{\infty} \left(q_1(s) |x_1 \left(s - \sigma_1 \left(s \right) \right) - x_2 \left(s - \sigma_1 \left(s \right) \right) | \right. \\
& \left. \left. + q_2(s) |x_1 \left(s + \sigma_2 \left(s \right) \right) - x_2 \left(s + \sigma_2 \left(s \right) \right) | \right) ds \right),
\end{aligned}$$

et par (3.15)

$$\begin{aligned}
|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| & \leq \frac{L_2}{p_1} \left(1 + p_2 K_2 + \int_{\varphi(t)}^{\infty} \left[q_1(s) + q_2(s) \right] ds \right) \|x_1 - x_2\| \\
& \leq \frac{L_2}{p_1} \left(1 + p_2 K_2 + \int_{t}^{\infty} \left[q_1(s) + q_2(s) \right] ds \right) \|x_1 - x_2\| \\
& \leq \lambda_3 \|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}$$

où $\lambda_3 = \left(1 - \frac{p_{1_0} L_2 M_3}{p_1 L_2 M_4} \right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_3 \|x_1 - x_2\|.$$

Comme $\lambda_3 < 1$, On en déduit que S est une contraction sur Ω. Par conséquent S a un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ∎

Théorème 3.2.4 *Supposons que* $1 < p_1 \leq P_1(t) \leq p_{1_0} < \infty$, $1 - p_1 < p_2 \leq P_2(t) \leq 0$ *et qu'il existe une constante positve* N_4 *telle que*

$$\int_{t_0}^{\infty} [q_1(s)N_4 + f_1(s)]\, ds < \infty, \; \int_{t_0}^{\infty} [q_2(s)N_4 + f_2(s)]\, ds < \infty. \tag{3.16}$$

Alors (3.1) possède une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. Soit l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_3 \leq x(t) \leq N_4,\ t \geq t_0\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. Due à la condition (3.16), on peut choisir un $t_1 > t_0$, suffisamment grand satisfaisant (3.12) tel que

$$\int_{t}^{\infty} [q_1(s)N_4 + f_1(s)]\, ds \leq \left(\frac{p_1}{L_2} + p_2K_2\right) N_4 - \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.17}$$

$$\int_{t}^{\infty} [q_2(s)N_4 + f_2(s)]\, ds \leq \alpha - N_4 - \frac{p_{1_0}}{L_1}N_3,\ t \geq t_1, \tag{3.18}$$

et

$$\int_{t}^{\infty} [q_1(s) + q_2(s)]\, ds \leq \frac{p_1}{L_2} + p_2K_2 - 1 - \frac{p_{1_0}N_3}{L_1N_4},\ t \geq t_1, \tag{3.19}$$

où N_3 et N_4 sont des constantes positives telles que

$$N_4 + \frac{p_{1_0}}{L_1}N_3 < \left(\frac{p_1}{L_2} + p_2K_2\right) N_4,$$

et

$$\alpha \in \left(N_4 + \frac{p_{1_0}}{L_1}N_3, \left(\frac{p_1}{L_2} + p_2K_2\right) N_4\right).$$

Définissons l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ donné par

$$\begin{aligned}(Sx)(t) \;&=\; H_1\Bigg(\frac{1}{P_1(\varphi(t))}\big[\alpha - x(\varphi(t)) - P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t)))\right) \\ &\quad + \textstyle\int_{\varphi(t)}^{\infty} \left[g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)\right] ds\big]\Bigg) \quad t \geq t_1,\end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \geq t_1$ et $x \in \Omega$, compte tenu des conditions (3.17) et (3.18) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
(Sx)(t) &\leq L_2 \left(\frac{1}{P_1(\varphi(t))} \left[\alpha - x(\varphi(t)) - P_2(\varphi(t)) h_2 \left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\varphi(t)}^{\infty} \left[g_1 \left(s, x(s - \sigma_1(s)) \right) - g_2 \left(s, x(s + \sigma_2(s)) \right) \right] ds \right] \right) \\
&\leq \frac{L_2}{p_1} \left(\alpha - P_2(\varphi(t)) h_2 \left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right) + \int_{\varphi(t)}^{\infty} g_1 \left(s, x(s - \sigma_1(s)) \right) ds \right) \\
&\leq \frac{L_2}{p_1} \left(\alpha - p_2 K_2 x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) + \int_t^{\infty} \left[q_1(s) x(s - \sigma_1(s)) + f_1(s) \right] ds \right) \\
&\leq \frac{L_2}{p_1} \left(\alpha - p_2 K_2 N_4 + \int_t^{\infty} \left[q_1(s) N_4 + f_1(s) \right] ds \right) \leq N_4,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(Sx)(t) &\geq L_1 \left(\frac{1}{P_1(\varphi(t))} \left[\alpha - x(\varphi(t)) - P_2(\varphi(t)) h_2 \left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t))) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\varphi(t)}^{\infty} \left[g_1 \left(s, x(s - \sigma_1(s)) \right) - g_2 \left(s, x(s + \sigma_2(s)) \right) \right] ds \right] \right) \\
&\geq \frac{L_1}{p_{1_0}} \left(\alpha - x(\varphi(t)) - \int_{\varphi(t)}^{\infty} g_2 \left(s, x(s + \sigma_2(s)) \right) ds \right) \\
&\geq \frac{L_1}{p_{1_0}} \left(\alpha - x(\varphi(t)) - \int_t^{\infty} \left[q_2(s) x(s - \sigma_1(s)) + f_2(s) \right] ds \right) \\
&\geq \frac{L_1}{p_{1_0}} \left(\alpha - N_4 - \int_t^{\infty} \left[q_2(s) N_4 + f_2(s) \right] ds \right) \geq N_3.
\end{aligned}$$

Cela montre que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est une contraction sur Ω. En effet, si $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$, par l'utilisation (3.19), on peut conclure que

$$\begin{aligned}
\left| (Sx_1)(t) - (Sx_2)(t) \right| &\leq \frac{L_2}{p_1} \left(1 - p_2 K_2 + \int_{\varphi(t)}^{\infty} \left[q_1(s) + q_2(s) \right] ds \right) \|x_1 - x_2\| \\
&\leq \frac{L_2}{p_1} \left(1 - p_2 K_2 + \int_t^{\infty} \left[q_1(s) + q_2(s) \right] ds \right) \|x_1 - x_2\| \\
&\leq \lambda_4 \|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}$$

où $\lambda_4 = \left(1 - \frac{p_{1_0} L_2 N_3}{p_1 L_1 N_4} \right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_4 \|x_1 - x_2\|.$$

Puisque $\lambda_4 < 1$, on en déduit que S est une contraction sur Ω. Ainsi, S a un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ■

Théorème 3.2.5 *Supposons que $-1 < p_1 \leq P_1(t) \leq 0$, $0 \leq P_2(t) \leq p_2 < 1 + p_1$ et qu'il existe une constante positive M_6 telle que*

$$\int_{t_0}^{\infty} [q_1(s)M_6 + f_1(s)]\, ds < \infty, \int_{t_0}^{\infty} [q_2(s)M_6 + f_2(s)]\, ds < \infty. \tag{3.20}$$

Alors (3.1) possède une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. Soit l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \Lambda : M_5 \leq x(t) \leq M_6,\ t \geq t_0\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. A cause de (3.20), on peut choisir un $t_1 > t_0$, suffisamment grand qui satisfait (3.3) tel que

$$\int_{t}^{\infty} [q_1(s)M_6 + f_1(s)]\, ds \leq (1 + p_1 K_1)\, M_6 - \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.21}$$

$$\int_{t}^{\infty} [q_2(s)M_6 + f_2(s)]\, ds \leq \alpha - p_2 K_2 M_6 - M_5,\ t \geq t_1, \tag{3.22}$$

et

$$\int_{t}^{\infty} [q_1(s) + q_2(s)]\, ds \leq 1 + p_1 K_1 - p_2 K_2 - \frac{M_5}{M_6},\ t \geq t_1, \tag{3.23}$$

où M_5 et M_6 sont des constantes positives telles que

$$p_2 K_2 M_6 + M_5 < (1 + p_1 K_1)\, M_6,$$

et

$$\alpha \in (p_2 K_2 M_6 + M_5, (1 + p_1 K_1)\, M_6).$$

On considère l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ définit par

$$\begin{aligned}(Sx)(t) \quad &= \quad \alpha - P_1(t)h_1\,(x(t-\tau_1(t))) - P_2(t)h_2\,(x(t+\tau_2(t))) \\ &\qquad + \textstyle\int_t^{\infty} [g_1\,(s, x(s-\sigma_1(s))) - g_2\,(s, x(s+\sigma_2(s)))]ds, \quad t \geq t_1,\end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \geq t_1$ et $x \in \Omega$, les conditions (3.21) et (3.22) montrent que

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\leq \alpha - P_1(t)h_1\left(x(t-\tau_1(t))\right) + \int_t^\infty g_1\left(s, x(s-\sigma_1(s))\right) ds \\ &\leq \alpha - P_1(t)K_1 x(t-\tau_1(t)) + \int_t^\infty \left[q_1(s)x(s-\sigma_1(s)) + f_1(s)\right] ds \\ &\leq \alpha - p_1 K_1 M_6 + \int_t^\infty \left[q_1(s)M_6 + f_1(s)\right] ds \leq M_6,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\geq \alpha - P_2(t)h_2\left(x(t+\tau_2(t))\right) - \int_t^\infty g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right) ds \\ &\geq \alpha - p_2 K_2 x(t+\tau_2(t)) - \int_t^\infty \left[q_2(s)x(s+\sigma_2(s)) + f_2(s)\right] ds \\ &\geq \alpha - p_2 K_2 M_6 - \int_t^\infty \left[q_2(s)M_6 + f_2(s)\right] ds \geq M_5.\end{aligned}$$

Cela prouve que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est une contraction sur Ω. En effet, si $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$, par l'utilisation (3.23), on peut obtenir

$$\begin{aligned}|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| &\leq \left(-p_1K_1 + p_2K_2 + \int_t^\infty \left[q_1(s) + q_2(s)\right] ds\right) \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \lambda_5 \|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

où $\lambda_5 = \left(1 - \frac{M_5}{M_6}\right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_5 \|x_1 - x_2\|.$$

Puisque $\lambda_5 < 1$, S est un contraction sur Ω. Donc S a un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ∎

Théorème 3.2.6 *Supposons que $-1 < p_1 \leq P_1(t) \leq 0$, $-1 - p_1 < p_2 \leq P_2(t) \leq 0$ et qu'il existe une constante positive N_6 telle que*

$$\int_{t_0}^\infty \left[q_1(s)N_6 + f_1(s)\right] ds < \infty, \quad \int_{t_0}^\infty \left[q_2(s)N_6 + f_2(s)\right] ds < \infty. \tag{3.24}$$

Alors (3.1) possède une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. On considère l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_5 \leq x(t) \leq N_6,\ t \geq t_0\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. Due à la condition (3.24), on peut choisir un $t_1 > t_0$, suffisamment grand satisfaisant (3.3) tel que

$$\int_t^{\infty} [q_1(s)N_6 + f_1(s)]\, ds \leq (1 + p_1K_1 + p_2K_2)\, N_6 - \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.25}$$

$$\int_t^{\infty} [q_2(s)N_6 + f_2(s)]\, ds \leq \alpha - N_5,\ t \geq t_1, \tag{3.26}$$

et

$$\int_t^{\infty} [q_1(s) + q_2(s)]\, ds \leq 1 + p_1K_1 + p_2K_2 - \frac{N_5}{N_6},\ t \geq t_1, \tag{3.27}$$

où N_5 et N_6 sont des constantes positives telles que

$$N_5 < (1 + p_1K_1 + p_2K_2)\, N_6,$$

et

$$\alpha \in (N_5, (1 + p_1K_1 + p_2K_2)\, N_6).$$

Définissons l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ par

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha - P_1(t)h_1\left(x(t - \tau_1(t))\right) - P_2(t)h_2\left(x(t + \tau_2(t))\right)\\ &\quad + \textstyle\int_t^{\infty}[g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)]ds, \quad t \geq t_1,\end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \geq t_1$ et $x \in \Omega$, des conditions (3.25) et (3.26) on obtient

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\leq \alpha - P_1(t)h_1\left(x(t - \tau_1(t))\right) - P_2(t)h_2\left(x(t + \tau_2(t))\right)\\ &\quad + \int_t^{\infty} g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) ds\\ &\leq \alpha - p_1K_1x(t - \tau_1(t)) - p_2K_2x(t + \tau_2(t))\\ &\quad + \int_t^{\infty} [q_1(s)x(s - \sigma_1(s)) + f_1(s)]\, ds\\ &\leq \alpha - p_1K_1N_6 - p_2K_2N_6 + \int_t^{\infty} [q_1(s)N_6 + f_1(s)]\, ds \leq N_6,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\geq \alpha - \int_t^\infty g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right) ds \\ &\geq \alpha - \int_t^\infty \left[q_2(s)x(s+\sigma_2(s)) + f_2(s)\right] ds \\ &\geq \alpha - \int_t^\infty \left[q_2(s)N_6 + f_2(s)\right] ds \geq N_5.\end{aligned}$$

Cela démontre que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est une contraction sur Ω. En effet, si $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$, par l'utilisation (3.27), on peux obtenir

$$\begin{aligned}|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| &\leq \left(-p_1K_1 - p_2K_2 + \int_t^\infty [q_1(s) + q_2(s)]\, ds\right) \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \lambda_6 \|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

où $\lambda_6 = \left(1 - \frac{N_5}{N_6}\right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_6 \|x_1 - x_2\|.$$

Puisque $\lambda_6 < 1$, S est une contraction sur Ω. Donc S possède un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ■

Théorème 3.2.7 *Supposons que* $-\infty < p_{1_0} \leq P_1(t) \leq p_1 < -1$, $0 \leq P_2(t) \leq p_2 < -p_1 - 1$ *et qu'il existe une constante positive* M_8 *telle que*

$$\int_{t_0}^\infty [q_1(s)M_8 + f_1(s)]\, ds < \infty, \int_{t_0}^\infty [q_2(s)M_8 + f_2(s)]\, ds < \infty. \tag{3.28}$$

Alors (3.1) a une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. Soit l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \Lambda : M_7 \leq x(t) \leq M_8,\ t \geq t_0\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. De la condition (3.28), on peut choisir un $t_1 > t_0$, suffisamment grand satisfaisant (3.12) tel que

$$\int_t^\infty [q_1(s)M_8 + f_1(s)]\, ds \leq \frac{p_{1_0}}{L_1} M_7 + \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.29}$$

$$\int_t^\infty [q_2(s)M_8 + f_2(s)]\,ds \leq -\left(1 + p_2K_2 + \frac{p_1}{L_2}\right) M_8 - \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.30}$$

et

$$\int_t^\infty [q_1(s) + q_2(s)]\,ds \leq \frac{p_{1_0}M_7}{L_1M_8} - \left(1 + p_2K_2 + \frac{p_1}{L_2}\right),\ t \geq t_1, \tag{3.31}$$

où M_7 et M_8 sont des constantes positives telles que

$$-\frac{p_{1_0}}{L_1}M_7 < -\left(1 + p_2K_2 + \frac{p_1}{L_2}\right) M_8,$$

et

$$\alpha \in \left(-\frac{p_{1_0}}{L_1}M_7, -\left(1 + p_2K_2 + \frac{p_1}{L_2}\right) M_8\right).$$

On considère l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ définit par

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= H_1\left(\frac{-1}{P_1(\varphi(t))}\left[\alpha + x(\varphi(t)) + P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t)))\right)\right.\right.\\ &\quad \left.\left. -\int_{\varphi(t)}^\infty \left[g_1\left(s, x(s-\sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right)\right] ds\right]\right), \quad t \geq t_1,\end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \geq t_1$ et $x \in \Omega$, des conditions (3.29) et (3.30) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\leq L_2\left(\frac{-1}{P_1(\varphi(t))}\left[\alpha + x(\varphi(t)) + P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t)))\right)\right.\right.\\ &\quad \left.\left. -\int_{\varphi(t)}^\infty \left[g_1\left(s, x(s-\sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right)\right] ds\right]\right)\\ &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(\alpha + x(\varphi(t)) + p_2K_2x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t)))\right.\\ &\quad \left. + \int_{\varphi(t)}^\infty g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right) ds\right)\\ &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(\alpha + x(\varphi(t)) + p_2K_2x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t)))\right.\\ &\quad \left. + \int_t^\infty [q_2(s)x(s+\sigma_2(s)) + f_2(s)]\,ds\right)\\ &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(\alpha + M_8 + p_2K_2M_8 + \int_t^\infty [q_2(s)M_8 + f_2(s)]\,ds\right) \leq M_8,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\geq L_2\left(\frac{-1}{P_1(\varphi(t))}\left[\alpha + x(\varphi(t)) + P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t)+\tau_2(\varphi(t)))\right)\right.\right.\\ &\quad \left.\left. - \int_{\varphi(t)}^{\infty}\left[g_1\left(s, x(s-\sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s+\sigma_2(s))\right)\right] ds\right]\right)\\ &\geq \frac{-L_1}{p_{1_0}}\left(\alpha - \int_{\varphi(t)}^{\infty} g_1\left(s, x(s-\sigma_1(s))\right) ds\right)\\ &\geq \frac{-L_1}{p_{1_0}}\left(\alpha - \int_{t}^{\infty}\left[q_1(s)x(s-\sigma_1(s)) + f_1(s)\right] ds\right)\\ &\geq \frac{-L_1}{p_{1_0}}\left(\alpha - \int_{t}^{\infty}\left[q_1(s)M_8 + f_1(s)\right] ds\right) \geq M_7.\end{aligned}$$

Cela implique que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est un contraction sur Ω. Ainsi, si $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$, par l'utilisation (3.31), on peut obtenir

$$\begin{aligned}|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(1 + p_2K_2 + \int_{\varphi(t)}^{\infty}\left[q_1(s) + q_2(s)\right] ds\right)\|x_1 - x_2\|\\ &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(1 + p_2K_2 + \int_{t}^{\infty}\left[q_1(s) + q_2(s)\right] ds\right)\|x_1 - x_2\|\\ &\leq \lambda_7\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

où $\lambda_7 = \left(1 - \frac{p_{1_0}L_2M_7}{p_1L_1M_8}\right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_7\|x_1 - x_2\|.$$

Puisque $\lambda_7 < 1$, S est un contraction sur Ω, on en déduit que S possède un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ∎

Théorème 3.2.8 *Supposons que $-\infty < p_{1_0} \leq P_1(t) \leq p_1 < -1$, $p_1 + 1 < p_2 \leq P_2(t) \leq 0$ et qu'il existe une constante positive N_8 telle que*

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[q_1(s)N_8 + f_1(s)\right] ds < \infty, \int_{t_0}^{\infty}\left[q_2(s)N_8 + f_2(s)\right] ds < \infty. \tag{3.32}$$

Alors (3.1) a une solution non oscillatoire bornée.

Preuve. Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées sur $[t_0, \infty)$ muni de la norme supremum. Soit l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_7 \leq x(t) \leq N_8,\ t \geq t_0\}.$$

Il est clair que Ω est un sous ensemble borné, fermé et convexe de Λ. Due à la condition (3.32), on peut choisir un $t_1 > t_0$, suffisamment grand satisfaisant (3.12) tel que

$$\int_t^\infty [q_1(s)N_8 + f_1(s)]\, ds \leq \alpha + p_2K_2N_8 + \frac{p_{1_0}}{L_1}N_7,\ t \geq t_1, \tag{3.33}$$

$$\int_t^\infty [q_2(s)N_8 + f_2(s)]\, ds \leq -\left(1 + \frac{p_1}{L_2}\right) N_8 - \alpha,\ t \geq t_1, \tag{3.34}$$

et

$$\int_t^\infty [q_1(s) + q_2(s)]\, ds \leq p_2K_2 + \frac{p_{1_0}}{L_1}\frac{N_7}{N_8} - 1 - \frac{p_1}{L_2},\ t \geq t_1, \tag{3.35}$$

où N_7 et N_8 sont des constantes positives telles que

$$-\left(p_2K_2N_8 + \frac{p_{1_0}}{L_1}N_7\right) < -\left(1 + \frac{p_1}{L_2}\right) N_8,$$

et

$$\alpha \in \left(-\left(p_2K_2N_8 + \frac{p_{1_0}}{L_1}N_7\right), -\left(1 + \frac{p_1}{L_2}\right) N_8\right).$$

Définissons l'opérateur $S : \Omega \to \Lambda$ donné par

$$\begin{aligned}(Sx)(t) \quad &= \quad H_1\left(\frac{-1}{P_1(\varphi(t))}\left[\alpha + x(\varphi(t)) + P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t)))\right)\right.\right.\\ &\left.\left. -\textstyle\int_{\varphi(t)}^\infty [g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)]ds\right]\right), \quad t \geq t_1,\end{aligned}$$

et

$$(Sx)(t) = (Sx)(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Clairement, Sx est continu. Pour $t \geq t_1$ et $x \in \Omega$, les conditions (3.33) et (3.34) impliquent que

$$\begin{aligned}(Sx)(t) \leq L_2 &\left(\frac{-1}{P_1(\varphi(t))}\left[\alpha + x(\varphi(t)) + P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t) + \tau_2(\varphi(t)))\right)\right.\right.\\ &\left.\left. -\int_{\varphi(t)}^\infty [g_1\left(s, x(s - \sigma_1(s))\right) - g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)]ds\right]\right)\\ &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(\alpha + x(\varphi(t)) + \int_{\varphi(t)}^\infty [g_2\left(s, x(s + \sigma_2(s))\right)]ds\right)\\ &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(\alpha + x(\varphi(t)) + \int_t^\infty [q_2(s)x(s - \sigma_1(s)) + f_2(s)]\, ds\right)\\ &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(\alpha + N_8 + \int_t^\infty [q_2(s)N_8 + f_2(s)]\, ds\right) \leq N_8,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &\geq L_1\left(\frac{-1}{P_1(\varphi(t))}\left[\alpha + x(\varphi(t)) + P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t)+\tau_2(\varphi(t)))\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\int_{\varphi(t)}^{\infty}[g_1\left(s,x(s-\sigma_1(s))\right) - g_2\left(s,x(s+\sigma_2(s))\right)]ds\right]\right)\\
&\geq \frac{-L_1}{p_{1_0}}\left(\alpha + P_2(\varphi(t))h_2\left(x(\varphi(t)+\tau_2(\varphi(t)))\right) - \int_{\varphi(t)}^{\infty} g_1\left(s,x(s-\sigma_1(s))\right)ds\right)\\
&\geq \frac{-L_1}{p_{1_0}}\left(\alpha + p_2K_2x(\varphi(t)+\tau_2(\varphi(t))) - \int_t^{\infty}\left[q_1(s)x(s-\sigma_1(s)) + f_1(s)\right]ds\right)\\
&\geq \frac{-L_1}{p_{1_0}}\left(\alpha + p_2K_2N_8 - \int_t^{\infty}\left[q_1(s)N_8 + f_1(s)\right]ds\right) \geq N_7.\end{aligned}$$

Cela montre que $S\Omega \subset \Omega$. Il reste à montrer que S est une contraction sur Ω. En effet, si $x_1, x_2 \in \Omega$ et $t \geq t_1$, par l'utilisation (3.35), on peut obtenir

$$\begin{aligned}|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| &\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(1 - p_2K_2 + \int_{\varphi(t)}^{\infty}\left[q_1(s) + q_2(s)\right]ds\right)\|x_1 - x_2\|\\
&\leq \frac{-L_2}{p_1}\left(1 - p_2K_2 + \int_t^{\infty}\left[q_1(s) + q_2(s)\right]ds\right)\|x_1 - x_2\|\\
&\leq \lambda_8\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

où $\lambda_8 = \left(1 - \frac{p_{1_0}L_2N_7}{p_1L_1N_8}\right)$. Cela implique que

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_8\|x_1 - x_2\|.$$

Puisque $\lambda_8 < 1$, S est une contraction sur Ω. Donc S possède un point fixe unique qui est une solution positive et bornée de (3.1). ■

Chapitre 4

Périodicité et stabilité pour une classe d'équations différentielles itératives

B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Periodicity and continuous dependance in iterative differential equations*, Rend. Cont. Circ. Palermo serie 2 DOI 101007.

Mots clés : Point fixe, solutions périodiques, stabilité, équations différentielles itératives.

Dans ce chapitre, on étudie l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions périodiques de l'équation différentielle itérative suivante

$$x'(t) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} C_{l,m}(t) \left(x^{[m]}(t) \right)^{l} + \frac{d}{dt} g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t) \right) + h(t).$$

En utilisant le théorème de point fixe de Schauder, on obtient l'existence d'une solution périodique et par le principe de contraction on conclu l'unicité. Les résultats obtenus ici prolongent les travaux de Zhao et Feckan [88].

4.1 Introduction

Les équations différentielles fonctionnelles itératives de la forme

$$x'(t) = H\left(x^{[0]}(t), x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[n]}(t)\right),$$

où $x^{[0]}(t) = t$, $x^{[1]}(t) = x(t)$, $x^{[2]}(t) = x(x(t))$, $\ldots$, $x^{[n]}(t) = x\left(x^{[n-1]}(t)\right)$ ont apparu dans plusieurs journaux voir [60], [64], [74], [76], [80], [83].

Eder [46] étudia l'équation

$$x'(t) = x^{[2]}(t),$$

et établi des conditions suffisantes pour l'existence de solutions analytiques. Wang [81], Feckan [49] considèrent l'équation

$$x'(t) = f\left(x^{[2]}(t)\right),$$

et obtiennent un théorème d'existence pour ces solutions. Zhao et Liu [89] ont utilisé le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour étudier l'existence et l'unicité de solutions périodiques d'équation différentielle fonctionnelle itérative

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)x^{[2]}(t) + \ldots + x^{[n]}(t) + F(t).$$

Récemment, Zhao et Feckan [88] ont étudié les solutions analytiques pour l'équation de la forme

$$x'(t) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} C_{l,m}(t) \left(x^{[m]}(t)\right)^{l} + h(t),$$

par l'utilisation de théorèmes de Schauder et de Banach, les auteurs ont validé l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions périodiques. Pour d'autres résultats qualitatifs sur les solutions d'équations différentielles fonctionnelles voir [77], [78].

Dans ce chapitre, on utilise la technique de point fixe pour étudier l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions périodiques de l'équation différentielle itérative

$$x'(t) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} C_{l,m}(t) \left(x^{[m]}(t)\right)^{l} + \frac{d}{dt} g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right) + h(t), \quad (4.1)$$

où, la fonction $g(t, x_1, x_2, \ldots, x_N)$ est continue globalement Lipschitzienne pour t, x_1, x_2, ..., x_N. C'est à dire qu'il existe des constantes positives k_0, k_1, ..., k_N tel que

$$|g(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) - g(s, y_1, y_2, \ldots, y_N)| \leq k_0 |t - s| + \sum_{j=1}^{N} k_j \left\| x_j - y_j \right\|.$$

Les résultats obtenus ici prolongent les travaux de Zhao et Feckan [88].

On utilise $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour désigner l'ensemble des fonctions réelles continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $T > 0$, on défini l'espace

$$\mathcal{P}_T = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t+T) = x(t), \ \forall t \in \mathbb{R}\},$$

alors $\mathcal{P}_T$ est un espace de Banach avec la norme du supremum, c'est à dire

$$\|x\| = \max_{t \in [0,T]} |x(t)| = \max_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Pour $P > 0$, $L \geq 0$, on définit les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T(P, L) &= \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\| \leq P, \ |x(t_2) - x(t_1)| \leq L |t_2 - t_1|, \ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{P}_T(P) &= \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\| \leq P\}, \end{aligned}$$

qui sont des sous ensembles fermés convexes et bornés de $\mathcal{P}_T$. On souhaite de trouver des fonctions T-périodiques $x \in \mathcal{P}_T(P, L)$ satisfaisant (4.1).

4.2 Existence de solutions périodiques

On va étudier dans cette section l'existence de solutions périodiques de (4.1). On suppose que toutes les fonctions sont continues par rapport à leurs arguments et que la condition suivante est satisfaite,

(H) $C_{l,m} \in \mathcal{P}_T(P_{l,m})$ et $h \in \mathcal{P}_T(P_h)$ sont donnés, où $P_{l,m}$ et P_h sont soumis à des contraintes appropriées qui seront précisées ultérieurement, si nécessaire. En plus, on admet que

$$C_{1,1}(t) < 0, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

On observe que, comme la fonction $g(t, x_1, x_2, \ldots, x_N)$ est continue globalement Lipschitzienne pour t, x_1, x_2,..., x_N on a

$$\begin{aligned}|g(t, x_1, x_2, \ldots, x_N)| &= |g(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) - g(0, 0, \ldots, 0) + g(0, 0, \ldots, 0)| \\ &\leq |g(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) - g(0, 0, \ldots, 0)| + |g(0, 0, \ldots, 0)| \\ &\leq k_0 |t| + \beta + \sum_{j=1}^{N} k_j \|x_j\|,\end{aligned}$$

où

$$\beta = |g(0, 0, \ldots, 0)|.$$

Lemme 4.2.1 *[88] Pour toute $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_T(P, L)$, on a*

$$\left\|\varphi^{[n]} - \psi^{[n]}\right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} L^i \|\varphi - \psi\|, \; n = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.3}$$

Preuve. Le résultat découle de la définition de $\mathcal{P}_T(P, L)$. ■

Lemme 4.2.2 ([27]) *On suppose que (4.2) est satisfaite. Alors l'équation différentielle*

$$x'(t) - C_{1,1}(t)x(t) = f(t),$$

a une solution T-périodique unique

$$x(t) = \int_t^{t+T} f(u)G(t, u)du,$$

où

$$G(t, u) = \frac{e^{\int_u^t C_{1,1}(s)ds}}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds} - 1}. \tag{4.4}$$

Corollaire 4.2.1 ([27]) *On suppose que (4.2) est satisfaite. La fonction de Green G satisfait les propriétés suivantes*

$$G(t+T, u+T) = G(t, u), \; \frac{\partial}{\partial u} G(t+T, u+T) = -C_{1,1}(u)G(t, u),$$

et

$$0 < G(t, u) \leq \frac{e^{-\int_t^{t+T} C_{1,1}(s)ds}}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds} - 1} = \frac{1}{1 - e^{\int_0^T C_{1,1}(s)ds}} = M. \tag{4.5}$$

Lemme 4.2.3 *$x \in \mathcal{P}_T$ est une solution de (4.1) si et seulement si*

$$x(t) = g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right) + \sum_{l=2}^{\infty} \int_t^{t+T} C_{l,1}(u)\,(x(u))^l\, G(t,u)du$$
$$+ \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \int_t^{t+T} C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t,u)du + \int_t^{t+T} h(u)G(t,u)du$$
$$+ \int_t^{t+T} C_{1,1}(u) g\left(u, x^{[1]}(u), x^{[2]}(u), \ldots, x^{[N]}(u)\right) G(t,u)du,$$

où G est donnée par (4.4)

Preuve. Il est facile de voir que (4.1) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} & x'(t) - C_{1,1}(t)x(t) \\ & = \sum_{l=2}^{\infty} C_{l,1}(t)\,(x(t))^l + \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty} C_{l,m}(t)\left(x^{[m]}(t)\right)^l \\ & + \frac{d}{dt} g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right) + h(t). \end{aligned}$$

On multiplie les deux côtés de l'équation ci-dessus par $e^{-\int_0^t C_{1,1}(s)ds}$ on obtient

$$\begin{aligned} & x'(t)e^{-\int_0^t C_{1,1}(s)ds} - C_{1,1}(t)x(t)e^{-\int_0^t C_{1,1}(s)ds} \\ & = \left(\sum_{l=2}^{\infty} C_{l,1}(t)\,(x(t))^l + \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty} C_{l,m}(t)\left(x^{[m]}(t)\right)^l \right. \\ & \left. + \frac{d}{dt} g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right) + h(t)\right) e^{-\int_0^t C_{1,1}(s)ds}. \end{aligned}$$

Si $x \in \mathcal{P}_T$ est une solution de (4.1), alors par l'intégration de l'égalité au dessus de t à $t+T$, on obtient

$$\begin{aligned} & x(t+T)e^{-\int_0^{t+T} C_{1,1}(s)ds} - x(t)e^{-\int_0^t C_{1,1}(s)ds} \\ & = \sum_{l=2}^{\infty} \int_t^{t+T} C_{l,1}(u)\,(x(u))^l\, e^{-\int_0^u C_{1,1}(s)ds} du \\ & + \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty} \int_t^{t+T} C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l e^{-\int_0^u C_{1,1}(s)ds} du + \int_t^{t+T} h(u) e^{-\int_0^u C_{1,1}(s)ds} du \\ & + \int_t^{t+T} \frac{d}{du} g\left(u, x^{[1]}(u), x^{[2]}(u), \ldots, x^{[N]}(u)\right) e^{-\int_0^u C_{1,1}(s)ds} du. \end{aligned}$$

En divisant les deux côtés de l'équation ci-dessus par $e^{-\int_0^t C_{1,1}(s)ds}$ et en utilisant le fait que $x(t+T)=x(t)$. La précédente expression peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{l=2}^{\infty}\int_t^{t+T} C_{l,1}(u)\,(x(u))^l\,G(t,u)du \\ &+ \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\int_t^{t+T} C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t,u)du + \int_t^{t+T} h(u)G(t,u)du \\ &+ \int_t^{t+T}\frac{d}{du}g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)G(t,u)du. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+T}\frac{d}{du}g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)G(t,u)du \\ &= \left[g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)G(t,u)\right]_t^{t+T} \\ &- \int_t^{t+T} g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)\frac{d}{du}G(t,u)du \\ &= g\left(t,x^{[1]}(t),x^{[2]}(t),\ldots,x^{[N]}(t)\right) \\ &+ \int_t^{t+T} C_{1,1}(u)g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)G(t,u)du. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En substituant (4.7) dans (4.6) on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= g\left(t,x^{[1]}(t),x^{[2]}(t),\ldots,x^{[N]}(t)\right) + \sum_{l=2}^{\infty}\int_t^{t+T} C_{l,1}(u)\,(x(u))^l\,G(t,u)du \\ &+ \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\int_t^{t+T} C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t,u)du + \int_t^{t+T} h(u)G(t,u)du \\ &+ \int_t^{t+T} C_{1,1}(u)g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)G(t,u)du, \end{aligned}$$

cela termine la preuve. ■

Pour appliquer le théorème 2.2.2, on considère l'opérateur $A : \mathcal{P}_T(P,L) \to \mathcal{P}_T$ défini comme suit

$$
\begin{aligned}
(Ax)(t) &= g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right) + \sum_{l=2}^{\infty} \int_t^{t+T} C_{l,1}(u)\,(x(u))^l\, G(t,u)du \\
&+ \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \int_t^{t+T} C_{l,m}(u) \left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t,u)du + \int_t^{t+T} h(u)G(t,u)du \\
&+ \int_t^{t+T} C_{1,1}(u) g\left(u, x^{[1]}(u), x^{[2]}(u), \ldots, x^{[N]}(u)\right) G(t,u)du. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Lemme 4.2.4 *Supposons que la condition (H) est satisfaite et que*

$$
\begin{aligned}
&(1 + MTP_{1,1}) \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i \\
&+ MT \left(\sum_{l=2}^{\infty} l P_{l,1} P^{l-1} + \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} l L^i P_{l,m} P^{l-1} \right) < \infty, \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

est vérifiée. Alors, l'opérateur A est Lipschitzien.

Preuve. On prend $x, y \in \mathcal{P}_T(P,L)$, $t \in \mathbb{R}$, alors par (4.3) et (4.5), on a

$$
\begin{aligned}
&|(Ax)(t) - (Ay)(t)| \\
&\le \left| g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right) - g\left(t, y^{[1]}(t), y^{[2]}(t), \ldots, y^{[N]}(t)\right) \right| \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty} \left| \int_t^{t+T} C_{l,1}(u) \left((x(u))^l - (y(u))^l\right) G(t,u)du \right| \\
&+ \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \left| \int_t^{t+T} C_{l,m}(u) \left(\left(x^{[m]}(u)\right)^l - \left(y^{[m]}(u)\right)^l \right) G(t,u)du \right| \\
&+ \int_t^{t+T} \left| C_{1,1}(u) \left(g\left(u, x^{[1]}(u), x^{[2]}(u), \ldots, x^{[N]}(u)\right) \right.\right. \\
&\left.\left. - g\left(u, y^{[1]}(u), y^{[2]}(u), \ldots, y^{[N]}(u)\right)\right) G(t,u) \right| du.
\end{aligned}
$$

Puisque la fonction $g\left(t, x^{[1]}, x^{[2]}, \ldots, x^{[N]}\right)$ est continue globalement Lipschitzienne pour t, $x^{[1]}, x^{[2]}, \ldots, x^{[N]}$ et de lemme 4.2.1 on a

$$\begin{aligned}
&\left|g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right) - g\left(t, y^{[1]}(t), y^{[2]}(t), \ldots, y^{[N]}(t)\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} K_j \left\|x^{[j]} - y^{[j]}\right\| \leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i \left\|x - y\right\|.
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
&\left|(Ax)(t) - (Ay)(t)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i \left\|x - y\right\| + M \sum_{l=2}^{\infty} P_{l,1} \int_t^{t+T} \left|(x(u))^l - (y(u))^l\right| du \\
&+ M \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} P_{l,m} \int_t^{t+T} \left|\left(x^{[m]}(u)\right)^l - \left(y^{[m]}(u)\right)^l\right| du \\
&+ MTP_{1,1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i \left\|x - y\right\| \\
&\leq (1 + MTP_{1,1}) \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i \left\|x - y\right\| + MT \sum_{l=2}^{\infty} l P_{l,1} \left|\xi(u)\right|^{l-1} \left\|x - y\right\| \\
&+ MT \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} l L^i P_{l,m} \left|\eta_m(u)\right|^{l-1} \left\|x - y\right\| \\
&\leq \left((1 + MTP_{1,1}) \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i + MT \left(\sum_{l=2}^{\infty} l P_{l,1} P^{l-1}\right.\right. \\
&\left.\left.+ \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} l L^i P_{l,m} P^{l-1}\right)\right) \left\|x - y\right\|,
\end{aligned}$$

où $\xi(u)$ est compris entre $x(u)$ et $y(u)$, $\eta_m(u)$ sont compris entre $x^{[m]}(u)$ et $y^{[m]}(u)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\left\|Ax - Ay\right\| \leq &\left((1 + MTP_{1,1}) \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i + MT \left(\sum_{l=2}^{\infty} l P_{l,1} P^{l-1}\right.\right. \\
&\left.\left.+ \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} l L^i P_{l,m} P^{l-1}\right)\right) \left\|x - y\right\|. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

De (4.9), on a prouvé que A est Lipschitzien. ∎

Lemme 4.2.5 *[88] Il retient que*

$$\mathcal{P}_T(P,L) = \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\| \leq P,\ |x(t_2) - x(t_1)| \leq L\,|t_2 - t_1|\,,\ \forall t_1, t_2 \in [0,T]\}\,.$$

Maintenant, on est prêts à prouver le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.2.1 *Supposons que* (H)*, (4.9) et les inégalités suivantes sont satisfaites*

$$\begin{aligned}&(1 + MTP_{1,1})\left(k_0T + \beta + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} K_jL^iP\right)\\&+ MT\left(\sum_{l=2}^{\infty} P_{l,1}P^l + \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=2}^{\infty} P_{l,m}P^l + P_h\right)\\&\leq \left(1 - MT\sum_{m=2}^{N} P_{1,m}\right)P,\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}&k_0 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} K_jL^{i+1} + \left(1 + \frac{TP_{1,1}e^{TP_{1,1}}}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds} - 1}\right)\\&\times\left(\sum_{l=2}^{\infty} P_{l,1}P^l + \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty} P_{l,m}P^l + P_h\right.\\&\left.+P_{1,1}\left(k_0T + \beta + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} K_jL^iP\right)\right)\ \leq\ L.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Alors (4.1) admet une solution périodique dans $\mathcal{P}_T(P,L)$*.*

Preuve. Tout d'abord, pour tout $x, y \in \mathcal{P}_T(P,L)$, on a

$$\begin{aligned}&|(Ax)(t)|\\&\leq \left|g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right)\right| + \sum_{l=2}^{\infty}\int_t^{t+T} |C_{l,1}(u)|\,|x(u)|^l\,|G(t,u)|\,du\\&+ \sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\int_t^{t+T} |C_{l,m}(u)|\left|x^{[m]}(u)\right|^l|G(t,u)|\,du + \int_t^{t+T} |h(u)|\,|G(t,u)|\,du\\&+ \int_t^{t+T} |C_{1,1}(u)|\left|g\left(u, x^{[1]}(u), x^{[2]}(u), \ldots, x^{[N]}(u)\right)\right|\,|G(t,u)|\,du\end{aligned}$$

$$\leq k_0 |t| + \beta + \sum_{j=1}^{N} K_j \left\| x^{[j]} \right\| + MT \sum_{l=2}^{\infty} P_{l,1} P^l + MT \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} P_{l,m} P^l$$
$$+ MTP_h + MTP_{1,1} \left(k_0 |t| + \beta + \sum_{j=1}^{N} K_j \left\| x^{[j]} \right\| \right)$$
$$\leq (1 + MTP_{1,1}) \left(k_0 T + \beta + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i P \right)$$
$$+ MT \left(\sum_{l=2}^{\infty} P_{l,1} P^l + \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} P_{l,m} P^l + P_h \right) \leq P.$$

Ensuite, en assumant que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, on a

$$\left| g\left(t_2, x^{[1]}(t_2), x^{[2]}(t_2), \ldots, x^{[N]}(t_2)\right) - g\left(t_1, x^{[1]}(t_1), x^{[2]}(t_1), \ldots, x^{[N]}(t_1)\right) \right|$$
$$\leq k_0 (t_2 - t_1) + \sum_{j=1}^{N} k_j \left| x^{[j]}(t_2) - x^{[j]}(t_1) \right|$$
$$\leq k_0 (t_2 - t_1) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i \left| x(t_2) - x(t_1) \right|$$
$$\leq k_0 (t_2 - t_1) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^{i+1} (t_2 - t_1)$$
$$\leq \left(k_0 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^{i+1} \right) (t_2 - t_1), \tag{4.13}$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} \left| \int_{t_2}^{t_2+T} C_{l,1}(u) (x(u))^l G(t_2, u) du - \int_{t_1}^{t_1+T} C_{l,1}(u) (x(u))^l G(t_1, u) du \right|$$
$$\leq \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s) ds} - 1} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\left| \int_{t_2}^{t_1} C_{l,1}(u) (x(u))^l e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s) ds} du \right.\right.$$
$$\left. + \int_{t_1+T}^{t_2+T} C_{l,1}(u) (x(u))^l e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s) ds} du \right|$$
$$\left. + \int_{t_1}^{t_1+T} |C_{l,1}(u)| \, |x(u)|^l \left| e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s) ds} - e^{\int_u^{t_1} C_{1,1}(s) ds} \right| du \right)$$

$$\le \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\int_{t_1}^{t_2}|C_{l,1}(u)|\,|x(u)|^l e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}\left(e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)du\right.$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_1+T}|C_{l,1}(u)|\,|x(u)|^l e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} C_{1,1}(s)ds}-1\right)du\right)$$
$$\le \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\sum_{l=2}^{\infty}P_{l,1}P^l\left(\left(e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)+TP_{1,1}e^{TP_{1,1}}\right)(t_2-t_1), \quad (4.14)$$

$$\left|\int_{t_2}^{t_2+T}h(u)G(t_2,u)du-\int_{t_1}^{t_1+T}h(u)G(t_1,u)du\right|$$
$$\le \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\left(\left|\int_{t_2}^{t_1}h(u)e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}du+\int_{t_1+T}^{t_2+T}h(u)e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}du\right|\right.$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_1+T}|h(u)|\left|e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}-e^{\int_u^{t_1} C_{1,1}(s)ds}\right|du\right)$$
$$\le \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\left(\int_{t_1}^{t_2}|h(u)|\,e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}\left(e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)du\right.$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_1+T}|h(u)|\,e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} C_{1,1}(s)ds}-1\right)du\right)$$
$$\le \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}P_h\left(\left(e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)+TP_{1,1}e^{TP_{1,1}}\right)(t_2-t_1), \quad (4.15)$$

$$\sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\left|\int_{t_2}^{t_2+T}C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t_2,u)du\right.$$
$$\left.-\int_{t_1}^{t_1+T}C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t_1,u)du\right|$$
$$\le \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|\int_{t_2}^{t_1}C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}du\right.\right.$$
$$\left.+\int_{t_1+T}^{t_2+T}C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}du\right|$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_1+T}|C_{l,m}(u)|\left|x^{[m]}(u)\right|^l\left|e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}-e^{\int_u^{t_1} C_{1,1}(s)ds}\right|du\right)$$

$$\leq \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_{t_1}^{t_2}|C_{l,m}(u)|\left|x^{[m]}(u)\right|^{l} e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}\left(e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)du\right.$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_1+T}|C_{l,m}(u)|\left|x^{[m]}(u)\right|^{l} e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} C_{1,1}(s)ds}-1\right)du\right)$$
$$\leq \frac{1}{e^{-\int\limits_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}P_{l,m}P^{l}\left(\left(e^{-\int\limits_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)+TP_{1,1}e^{TP_{1,1}}\right)(t_2-t_1), \tag{4.16}$$

et

$$\left|\int_{t_2}^{t_2+T} C_{1,1}(u)g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)G(t_2,u)du\right.$$
$$\left.-\int_{t_1}^{t_1+T} C_{1,1}(u)g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)G(t_1,u)du\right|$$
$$\leq \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\left(\left|\int_{t_2}^{t_1} C_{1,1}(u)g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}du\right.\right.$$
$$\left.+\int_{t_1+T}^{t_2+T} C_{1,1}(u)g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}du\right|$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_1+T}|C_{1,1}(u)|\left|g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)\right|\left|e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}-e^{\int_u^{t_1} C_{1,1}(s)ds}\right|du\right)$$
$$\leq \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\left(\int_{t_1}^{t_2}|C_{1,1}(u)|\left|g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)\right|e^{\int_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}\right.$$
$$\times\left(e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)du$$
$$+\int_{t_1}^{t_1+T}|C_{1,1}(u)|\left|g\left(u,x^{[1]}(u),x^{[2]}(u),\ldots,x^{[N]}(u)\right)\right|e^{\int\limits_u^{t_2} C_{1,1}(s)ds}$$
$$\left.\times\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} C_{1,1}(s)ds}-1\right)du\right)$$
$$\leq \frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}P_{1,1}\left(k_0T+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^iP\right)$$
$$\times\left(\left(e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1\right)+TP_{1,1}e^{TP_{1,1}}\right)(t_2-t_1). \tag{4.17}$$

De (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) et (4.17), on a

$$
\begin{aligned}
&\left|(Ax)(t_2)-(Ax)(t_1)\right| \\
&\leq \left|g\left(t_2, x^{[1]}(t_2), x^{[2]}(t_2), \ldots, x^{[N]}(t_2)\right)-g\left(t_1, x^{[1]}(t_1), x^{[2]}(t_1), \ldots, x^{[N]}(t_1)\right)\right| \\
&+\sum_{l=2}^{\infty}\left|\int_{t_2}^{t_2+T} C_{l,1}(u)\,(x(u))^l\, G(t_2,u)du-\int_{t_1}^{t_1+T} C_{l,1}(u)\,(x(u))^l\, G(t_1,u)du\right| \\
&+\sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\left|\int_{t_2}^{t_2+T} C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t_2,u)du\right. \\
&\left.-\int_{t_1}^{t_1+T} C_{l,m}(u)\left(x^{[m]}(u)\right)^l G(t_1,u)du\right| \\
&+\left|\int_{t_2}^{t_2+T} h(u)G(t_2,u)du-\int_{t_1}^{t_1+T} h(u)G(t_1,u)du\right| \\
&+\left|\int_{t_2}^{t_2+T} C_{1,1}(u)g\left(u, x^{[1]}(u), x^{[2]}(u), \ldots, x^{[N]}(u)\right)G(t_2,u)du\right. \\
&\left.-\int_{t_1}^{t_1+T} C_{1,1}(u)g\left(u, x^{[1]}(u), x^{[2]}(u), \ldots, x^{[N]}(u)\right)G(t_1,u)du\right| \\
&\leq\left(k_0+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}K_j L^{i+1}\right)(t_2-t_1) \\
&+\left(1+\frac{TP_{1,1}e^{TP_{1,1}}}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\right)\left(\sum_{l=2}^{\infty}P_{l,1}P^l+\sum_{m=2}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}P_{l,m}P^l+P_h\right. \\
&\left.+P_{1,1}\left(k_0T+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^iP\right)\right)(t_2-t_1) \\
&\leq L\left|t_2-t_1\right|.
\end{aligned}
$$

Anisi, On obtient $Ax\in\mathcal{P}_T(P,L)$. Donc, par le lemme 4.2.4, on voit que toutes les conditions du théorème de Schauder sont satisfaits sur $\mathcal{P}_T(P,L)$. Ainsi, il existe un point fixe x dans $\mathcal{P}_T(P,L)$ tel que $x=Ax$, du lemme 4.2.3, x est une solution T-périodique de (4.1). ■

4.3 Unicité et stabilité

Dans cette section, on étudié l'unicité et la stabilité de la solution de (4.1).

Théorème 4.3.1 *En plus des hypothèses du théorème 4.2.1, on suppose*

$$\Gamma = (1 + MTP_{1,1}) \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} K_j L^i + MT \left(\sum_{l=2}^{\infty} l P_{l,1} P^{l-1} + \sum_{m=2}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} l L^i P_{l,m} P^{l-1} \right) < 1. \tag{4.18}$$

Alors (4.1) admet une solution unique dans $\mathcal{P}_T(P, L)$.

Preuve. D'après la preuve du théorème 4.2.1, on sais que $A : \mathcal{P}_T(P, L) \to \mathcal{P}_T(P, L)$. De plus, par (4.10), on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leq \Gamma \|x - y\|, \; x, y \in \mathcal{P}_T(P, L).$$

Puisque $\Gamma < 1$, donc le point fixe doit être unique selon le théorème de Banach. ■

Théorème 4.3.2 *La solution unique obtenue dans le théorème 4.3.1 dépend continument des fonctions données $C_{l,m}(t)$, $g\left(t, x^{[1]}(t), x^{[2]}(t), \ldots, x^{[N]}(t)\right)$ et $h(t)$, pour $l = 1, \ldots, \infty$, $m = 1, \ldots, N$.*

Preuve. Soient les fonctions $C_{l,m}(t), \widetilde{C}_{l,m}(t) \in \mathcal{P}_T(P_{l,m})$, $l = 1, \ldots, \infty$, $m = 1, \ldots, N$, $h, \widetilde{h} \in \mathcal{P}_T(P_h)$ et que $g, \widetilde{g}$ sont des fonctions continues globalement Lipschitziennes données. Ensuite, on considère les constantes correspondantes M, $\widetilde{M}$ et les opérateurs A, $\widetilde{A}$ définis par (4.5) et (4.8), respectivement. En supposant que les conditions correspondantes (4.2), (4.11), (4.12) et (4.18) sont vérifiées, il existe deux fonctions uniques correspondantes $x(t)$ et $\widetilde{x}(t)$ dans $\mathcal{P}_T(P, L)$ tels que

$$x = Ax, \; \widetilde{x} = \widetilde{A}\widetilde{x}.$$

En conséquence on a

$$\|x - \widetilde{x}\| \leq \|Ax - A\widetilde{x}\| + \left\|A\widetilde{x} - \widetilde{A}\widetilde{x}\right\| \leq \Gamma \|x - \widetilde{x}\| + \left\|A\widetilde{x} - \widetilde{A}\widetilde{x}\right\|,$$

qui implique

$$\|x-\widetilde{x}\| \leq \frac{\left\|A\widetilde{x}-\widetilde{A}\widetilde{x}\right\|}{1-\Gamma}. \tag{4.19}$$

Ensuite, pour $u \in [t, t+T]$, on remarque que

$$\begin{aligned}
&\left|G(t,u)-\widetilde{G}(t,u)\right| \\
&\leq \frac{\left|e^{\int_u^t C_{1,1}(s)ds}-e^{\int_u^t \widetilde{C}_{1,1}(s)ds}\right|}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1} + e^{\int_u^t \widetilde{C}_{1,1}(s)ds}\left|\frac{1}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}-\frac{1}{e^{-\int_0^T \widetilde{C}_{1,1}(s)ds}-1}\right| \\
&= \frac{e^{\int_u^t C_{1,1}(s)ds}}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\left|1-e^{\int_u^t\left(\widetilde{C}_{1,1}(s)-C_{1,1}(s)\right)ds}\right| \\
&+ \frac{e^{\int_u^t \widetilde{C}_{1,1}(s)ds}}{e^{-\int_0^T \widetilde{C}_{1,1}(s)ds}-1}\frac{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds}-1}\left|1-e^{-\int_0^T\left(\widetilde{C}_{1,1}(s)-C_{1,1}(s)\right)ds}\right| \\
&\leq \left(1+\widetilde{M}\right)MTe^{2TP_{1,1}}\left\|C_{1,1}-\widetilde{C}_{1,1}\right\|.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

En utilisant (4.20), pour $u \in [t, t+T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|C_{l,m}(u)\left(\widetilde{x}^{[m]}(u)\right)^l G(t,u)-\widetilde{C}_{l,m}(u)\left(\widetilde{x}^{[m]}(u)\right)^l \widetilde{G}(t,u)\right| \\
&\leq \left|C_{l,m}(u)-\widetilde{C}_{l,m}(u)\right|\left|\widetilde{x}^{[m]}(u)\right|^l |G(t,u)| + \left|\widetilde{C}_{l,m}(u)\right|\left|\widetilde{x}^{[m]}(u)\right|^l\left|G(t,u)-\widetilde{G}(t,u)\right| \\
&\leq MP^l\left\|C_{l,m}-\widetilde{C}_{l,m}\right\| + P_{l,m}\left(1+\widetilde{M}\right)MTe^{2TP_{1,1}}P^l\left\|C_{1,1}-\widetilde{C}_{1,1}\right\|,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{h}(u)\widetilde{G}(t,u)-h(u)G(t,u)\right| \\
&\leq \left|\widetilde{h}(u)-h(u)\right|\left|\widetilde{G}(t,u)\right| + |h(u)|\left|\widetilde{G}(t,u)-G(t,u)\right| \\
&\leq \widetilde{M}\left\|\widetilde{h}-h\right\| + P_h\left(1+\widetilde{M}\right)MTe^{2TP_{1,1}}\left\|C_{1,1}-\widetilde{C}_{1,1}\right\|,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Big|C_{1,1}(u)g\left(u,\widetilde{x}^{[1]}(u),\widetilde{x}^{[2]}(u),\ldots,\widetilde{x}^{[N]}(u)\right)G(t_1,u)\\
&-\widetilde{C}_{1,1}(u)\widetilde{g}\left(u,\widetilde{x}^{[1]}(u),\widetilde{x}^{[2]}(u),\ldots,\widetilde{x}^{[N]}(u)\right)\widetilde{G}(t_1,u)\Big|\\
&\leq\left|C_{1,1}(u)-\widetilde{C}_{1,1}(u)\right|\left|g\left(u,\widetilde{x}^{[1]}(u),\widetilde{x}^{[2]}(u),\ldots,\widetilde{x}^{[N]}(u)\right)\right||G(t,u)|\\
&+\left|\widetilde{C}_{1,1}(u)\right|\left|\widetilde{G}(t,u)\right|\Big|g\left(u,\widetilde{x}^{[1]}(u),\widetilde{x}^{[2]}(u),\ldots,\widetilde{x}^{[N]}(u)\right)\\
&-\widetilde{g}\left(u,\widetilde{x}^{[1]}(u),\widetilde{x}^{[2]}(u),\ldots,\widetilde{x}^{[N]}(u)\right)\Big|\\
&+\left|\widetilde{C}_{1,1}(u)\right|\left|g\left(u,\widetilde{x}^{[1]}(u),\widetilde{x}^{[2]}(u),\ldots,\widetilde{x}^{[N]}(u)\right)\right|\left|G(t,u)-\widetilde{G}(t,u)\right|\\
&\leq M\left(k_0T+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^i\left\|\widetilde{x}\right\|\right)\left\|C_{1,1}-\widetilde{C}_{1,1}\right\|+P_{1,1}\widetilde{M}\left\|g-\widetilde{g}\right\|\\
&+P_{1,1}\left(k_0T+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^i\left\|\widetilde{x}\right\|\right)\left(1+\widetilde{M}\right)MTe^{2TP_{1,1}}\left\|C_{1,1}-\widetilde{C}_{1,1}\right\|\\
&\leq P_{1,1}\widetilde{M}\left\|g-\widetilde{g}\right\|+\left(M+\left(1+\widetilde{M}\right)MTP_{1,1}e^{2TP_{1,1}}\right)\\
&\times\left(k_0T+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^iP\right)\left\|C_{1,1}-\widetilde{C}_{1,1}\right\|.
\end{aligned}\tag{4.23}$$

De (4.21), (4.22) et (4.23), on a

$$\begin{aligned}
&\left|(A\widetilde{x})(t)-\left(\widetilde{A}\widetilde{x}\right)(t)\right|\\
&\leq\Lambda\max\left\{\sup_{(m,l)\in\{1,\ldots,N\}\times\{1,2,\ldots\}}\left\|C_{l,m}-\widetilde{C}_{l,m}\right\|,\left\|\widetilde{h}-h\right\|,\left\|\widetilde{g}-g\right\|\right\},
\end{aligned}$$

pour

$$\begin{aligned}
\Lambda=1+T\Bigg[&M\sum_{(m,l)\in\{1,\ldots,N\}\times\{1,2,\ldots\}\backslash\{(1,1)\}}\left(1+P_{l,m}\left(1+\widetilde{M}\right)Te^{2TP_{1,1}}\right)P^l\\
&+\left(1+P_{1,1}\right)\widetilde{M}+P_h\left(1+\widetilde{M}\right)MTe^{2TP_{1,1}}\\
&+M\left(1+\left(1+\widetilde{M}\right)TP_{1,1}e^{2TP_{1,1}}\right)\left(k_0T+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^iP\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Par conséquent, de (4.19), on aboutit à

$$\|x-\widetilde{x}\| \leq \frac{\Lambda}{1-\Gamma} \max \left\{ \sup_{(m,l)\in\{1,\dots,N\}\times\{1,2,\dots\}} \left\| C_{l,m} - \widetilde{C}_{l,m} \right\|, \left\| \widetilde{h} - h \right\|, \|\widetilde{g} - g\| \right\},$$

cela termine la preuve. ■

4.4 Exemple

On donne un exemple pour illustrer l'application du lemme 4.2.4 et du théorème 4.2.1.

Exemple 4.4.1 *On considère l'équation différentielle itérative suivante*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(12t) - 2}{100^l} (x(t))^l + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(12t)}{100^l} \left(x^{[2]}(t)\right)^l \\ &+ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{200}\cos(12t)\sin(12t) + \frac{1}{100}\sin(x(t)) + \frac{1}{1000}\sin\left(x^{[2]}(t)\right)\right) \\ &+ \frac{1}{100}\cos(12t), \end{aligned} \tag{4.24}$$

où $C_{l,m}(t) = 0$ *pour* $m \neq \{1,2\}$, $C_{l,1}(t) = \frac{\cos(12t)-2}{100^l}$, $C_{l,2}(t) = \frac{\cos(12t)}{100^l}$, *en particulier,* $C_{1,1}(t) = \frac{\cos(12t)-2}{100}$, $g\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right) = \frac{1}{200}\cos(12t)\sin(12t) + \frac{1}{100}\sin(x(t)) + \frac{1}{1000}\sin\left(x^{[2]}(t)\right)$, $h(t) = \frac{1}{100}\cos(12t)$. *On prend* $T = \frac{\pi}{6}$, $P = 5$, $L = 1$, $P_{l,m} = 0$ *pour* $m \geq 3$, $P_{l,1} = \frac{3}{100^l}$, $P_{l,2} = \frac{1}{100^l}$, $P_h = \frac{1}{100}$. *Un calcul simple donne*

$$\begin{aligned} &95.99 < M = \frac{1}{1 - e^{\int_0^T C_{1,1}(s)ds}} < 96, \\ &50.26 < MT < 50.27, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left|g\left(t,x(t),x^{[2]}(t)\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{200}\cos(12t)\sin(12t) + \frac{1}{100}\sin(x(t)) + \frac{1}{1000}\sin\left(x^{[2]}(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{200}\left|\cos(12t)\sin(12t)\right| + \frac{1}{100}\left|\sin(x(t))\right| + \frac{1}{1000}\left|\sin\left(x^{[2]}(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{200}\left|\sin(12t)\right| + \frac{1}{100}\left|\sin(x(t))\right| + \frac{1}{1000}\left|\sin\left(x^{[2]}(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{3}{50}|t| + \frac{1}{100}|x(t)| + \frac{1}{1000}\left|x^{[2]}(t)\right|,
\end{aligned}
$$

où

$$k_0 = \frac{3}{50},\ k_1 = \frac{1}{100},\ k_2 = \frac{1}{1000},\ \beta = 0.$$

Selon le critère de D'Alembert, on connaisse que

$$
\begin{aligned}
&(1+MTP_{1,1})\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^i + MT\left(\sum_{l=2}^{\infty} lP_{l,1}P^{l-1} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{1} lL^iP_{l,2}P^{l-1}\right) \\
&= \left(1+MT\frac{3}{100}\right)\frac{3}{250} + MT\left(\frac{1}{50} + \sum_{l=2}^{\infty}\frac{l}{20^l}\right) \ < \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+MTP_{1,1})\left(\frac{\pi}{100} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^iP\right) + MT\left(\sum_{l=2}^{\infty}P_{l,1}P^l + \sum_{l=2}^{\infty}P_{l,2}P^l + P_h\right) \\
&< 1.262 < 2.486 < (1-MTP_{1,2})P,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{50} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^{i+1} + \left(1 + \frac{TP_{1,1}e^{TP_{1,1}}}{e^{-\int_0^T C_{1,1}(s)ds} - 1}\right)\left(\sum_{l=2}^{\infty}P_{l,1}P^l + \sum_{l=1}^{\infty}P_{l,2}P^l + P_h\right. \\
&\left.+P_{1,1}\left(\frac{\pi}{100} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{j-1}K_jL^iP\right)\right) \ < 0.257 \ \ < 1 \ \ = L.
\end{aligned}
$$

Alors les hypothèses (H), (4.9), (4.11) et (4.12) sont satisfaites. Par le théorème 4.2.1, l'équation (4.24) a une solution $\frac{\pi}{6}$-périodique x telle que $\|x\| \leq 5$, et $|x(t_2) - x(t_1)| \leq |t_2 - t_1|$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Chapitre 5

Existence de solutions périodiques positives pour deux types d'équations différentielles neutres du troisième ordre non linéaires à coefficients variables

B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Existence of positive periodic solutions for two type of third order nonlinear neutral differential equations with variable coefficients*, Diff. Eq. and control process, N0 03 (2018), 46-63.

Mots clés : Point fixe, solutions périodiques positives, équations différentielles neutre de troisième ordre.

Dans ce chapitre, on étudie l'existence de solutions périodiques positives pour deux types d'équations différentielles non linéaires neutres de troisième ordre avec des coefficients variables. Les résultats sont établis en utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii. Les résultats obtenus ici prolongent les travaux de Ren, Siegmund et Chen [73].

5.1 Introduction

Les équations différentielles du troisième ordre sont étudiés par plusieurs auteurs voir [3], [38], [54], [71]. Ren, Siegmund et Chen [73] ont discuté l'existence de solutions positives ω-périodiques pour l'équation différentielle fonctionnelle neutre suivante

$$(x(t) - cx(t - \tau(t)))''' = -a(t)x(t) + f(t, x(t - \tau(t))),$$

où $|c| < 1$. En utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii, ces auteurs ont obtenu des résultats d'existence pour des solutions positives ω-périodiques.

Dans le présent travail, on étudie l'existence de solutions positives ω-périodiques pour les deux types d'équations différentielles neutres de troisième ordre suivantes

$$(x(t) - c(t)x(t - \tau))''' = a(t)x(t) - f(t, x(t - \tau)), \tag{5.1}$$

et

$$(x(t) - c(t)x(t - \tau))''' = -a(t)x(t) + f(t, x(t - \tau)), \tag{5.2}$$

où $c \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\tau, \omega > 0$, et c, a sont des fonctions ω-périodiques, f est ω-périodique par rapport à la première variable. Pour montrer l'existence de solutions positives ω-périodiques, on transforme (5.1) et (5.2) en équations intégrales et ensuite on utilise le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Les équations intégrales obtenues s'expriment sous forme d'une somme de deux opérateurs, l'un est une contraction et l'autre est compacte.

Les résultats du présent chapitre constituent deux contributions. Premièrement, au lieu de c constante, on prend un coefficient variable $c(t)$. Deuxièmement, en plus de $|c(t)| < 1$, on considère les intervalles $|c(t)| > 1$ pour $c(t)$, ce qui est nouveau dans la littérature. De plus, les résultats obtenus ici prolongent et améliorent nettement les travaux de Ren, Siegmund et Chen [73].

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans la section 5.2, on introduit des notations et lemmes, et on énonce quelques résultats préliminaires nécessaires dans les sections suivantes. Ensuite, on donne la fonction de Green de (5.1) et (5.2) qui jouent un rôle important dans ce travail. Aussi, on présente les inversions de (5.1) et (5.2). Pour plus de détails sur le théorème de Krasnoselskii, on renvoi le lecteur à [15], [16], [62], [72], [75], [84]. Dans les sections 5.3 et 5.4, on présente nos résultats principaux sur l'existence de Solutions positives ω-périodiques de (5.1) et (5.2) respectivement. Deux exemples sont également donnés pour illustrer ce travail.

5.2 Préliminaires

Pour $\omega > 0$, soit C_ω l'ensemble de toutes les fonctions continues $x(t)$, périodique en t de période ω. Alors $(C_\omega, \|.\|)$ est un espace de Banach muni de la norme supremum

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t\in[0,\omega]} |x(t)| \,.$$

On définit C_ω^+ et C_ω^- respectivement par

$$C_\omega^+ = \{u \in C_\omega : u > 0\}\,,\ C_\omega^- = \{u \in C_\omega : u < 0\}\,.$$

On note

$$M = \sup\{a(t) : t \in [0,\omega]\},\ m = \inf\{a(t) : t \in [0,\omega]\},\ \rho = \sqrt[3]{M}.$$

Lemme 5.2.1 ([73]) *L'équation*

$$u'''(t) - Mu(t) = h(t), \quad h \in C_\omega^-,$$
$$u(0) = u(\omega), \quad u'(0) = u'(\omega), \quad u''(0) = u''(\omega),$$

a une solution ω-périodique unique

$$u(t) = \int_0^\omega G_1(t,s)(-h(s))ds,$$

où

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{2\exp(\frac{1}{2}\rho(s-t))[\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t-s)+\frac{\pi}{6})-\exp(-\frac{1}{2}\rho\omega)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t-s-\omega)+\frac{\pi}{6})]}{3\rho^2(1+\exp(-\rho\omega)-2\exp(-\frac{\rho\omega}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\omega))} \\ +\frac{\exp(\rho(t-s))}{3\rho^2(\exp(\rho\omega)-1)}, \quad si \quad 0 \le s \le t \le \omega, \\ \frac{2\exp(\frac{1}{2}\rho(s-t-\omega))[\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t-s+\omega)+\frac{\pi}{6})-\exp(-\frac{1}{2}\rho\omega)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t-s)+\frac{\pi}{6})]}{3\rho^2(1+\exp(-\rho\omega)-2\exp(-\frac{\rho\omega}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\omega))} \\ +\frac{\exp(\rho(t+\omega-s))}{3\rho^2(\exp(\rho\omega)-1)}, \quad si \quad 0 \le t \le s \le \omega. \end{cases}$$

Corollaire 5.2.1 ([73]) *La fonction de Green G_1 satisfait les propriétés suivantes*

$$\int_0^{\omega} G_1(t,s)ds = \frac{1}{M},$$

et si $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$ est satisfaite, alors

$$0 < A < G_1(t,s) \leq B, \quad 0 < A < G_1(t+\tau,s) \leq B,$$

où

$$A = \frac{1}{3\rho^2(\exp(\rho\omega)-1)}, \quad B = \frac{3+2\exp(-\frac{\rho\omega}{2})}{3\rho^2(1-\exp(-\frac{\rho\omega}{2}))^2}.$$

Lemme 5.2.2 ([73]) *L'équation*

$$\begin{gathered} u'''(t) + Mu(t) = h(t), \quad h \in C_{\omega}^{+}, \\ u(0) = u(\omega), \quad u'(0) = u'(\omega), \quad u''(0) = u''(\omega), \end{gathered}$$

a une solution ω-périodique unique

$$u(t) = \int_0^{\omega} G_2(t,s)h(s)ds,$$

où

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \frac{2\exp(\frac{1}{2}\rho(t-s))[\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t-s)-\frac{\pi}{6})-\exp(\frac{1}{2}\rho\omega)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t-s-\omega)-\frac{\pi}{6})]}{3\rho^2(1+\exp(\rho\omega)-2\exp(\frac{1}{2}\rho\omega)\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\omega))} \\ +\frac{\exp(\rho(s-t))}{3\rho^2(1-\exp(-\rho\omega))}, \quad si \quad 0 \leq s \leq t \leq \omega, \\ \frac{2\exp(\frac{1}{2}\rho(t+\omega-s))[\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t+\omega-s)-\frac{\pi}{6})-\exp(\frac{1}{2}\rho\omega)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(t-s)-\frac{\pi}{6})]}{3\rho^2(1+\exp(\rho\omega)-2\exp(\frac{1}{2}\rho\omega)\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\omega))} \\ +\frac{\exp(\rho(s-t-\omega))}{3\rho^2(1-\exp(-\rho\omega))}, \quad si \quad 0 \leq t \leq s \leq \omega. \end{cases}$$

Corollaire 5.2.2 ([73]) *La fonction de Green G_2 satisfait les propriétés suivantes*

$$\int_0^{\omega} G_2(t,s)ds = \frac{1}{M},$$

et si $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$ est satisfaite, alors

$$0 < A < G_2(t,s) \leq B, \quad 0 < A < G_2(t+\tau,s) \leq B.$$

Lemme 5.2.3 ([73]) *L'équation*

$$u'''(t) - a(t)u(t) = h(t), \quad h \in C_\omega^-,$$

a une solution positive ω-périodique unique

$$(P_1h)(t) = (I - T_1B_1)^{-1}(T_1h)(t),$$

où

$$(T_1h)(t) = \int_0^\omega G_1(t,s)(-h(s))ds, \quad (B_1u)(t) = (-M + a(t))u(t).$$

Lemme 5.2.4 ([73]) *Si $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$ est satisfaite, alors P_1 est complètement continue et*

$$0 < (T_1h)(t) \leq (P_1h)(t) \leq \frac{M}{m}\|(T_1h)(t)\|, \quad \forall h \in C_\omega^-.$$

Le théorème suivant est essentiel pour nos résultats sur l'existence d'une solution positive et périodique de (5.1).

Théorème 5.2.1 *Si $x \in C_\omega$ alors x est une solution de (5.1) si et seulement si*

$$x(t) = c(t)x(t-\tau) + P_1(-f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau)). \tag{5.3}$$

Preuve. Soit $x \in C_\omega$ une solution de (5.1). On réécrit (5.1) comme suit

$$\begin{aligned}
&(x(t) - c(t)x(t-\tau))''' - M(x(t) - c(t)x(t-\tau)) \\
&= (-M + a(t))(x(t) - c(t)x(t-\tau)) - f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau) \\
&= B_1(x(t) - c(t)x(t-\tau)) - f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau).
\end{aligned}$$

Du lemme 5.2.1 et lemme 5.2.3, on a

$$\begin{aligned}
&x(t) - c(t)x(t-\tau) \\
&= T_1B_1(x(t) - c(t)x(t-\tau)) + T_1(-f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau)).
\end{aligned}$$

Cela donne

$$(I - T_1B_1)(x(t) - c(t)x(t-\tau)) = T_1(-f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau)).$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) - c(t)x(t-\tau) &= (I - T_1B_1)^{-1}T_1(-f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau)) \\ &= P_1(-f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau)). \end{aligned}$$

Évidemment

$$x(t) = c(t)x(t-\tau) + P_1(-f(t, x(t-\tau)) + c(t)a(t)x(t-\tau)),$$

cela termine la preuve. ■

Corollaire 5.2.3 *Si $x \in C_\omega$ alors x est une solution de (5.1) si et seulement si*

$$x(t) = \frac{1}{c(t+\tau)}\left[x(t+\tau) + P_1(-(t+\tau)a(t+\tau)x(t) + f(t+\tau, x(t)))\right]. \tag{5.4}$$

Lemme 5.2.5 ([73]) *L'équation*

$$u'''(t) + a(t)u(t) = h(t), \quad h \in C_\omega^+,$$

a une solution positive ω-périodique unique

$$(P_2h)(t) = (I - T_2B_2)^{-1}(T_2h)(t),$$

où

$$(T_2h)(t) = \int_0^\omega G_2(t,s)h(s)ds, \quad (B_2u)(t) = (M - a(t))u(t).$$

Lemme 5.2.6 ([73]) *Si $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$ est satisfaite, alors l'application P_2 est complètement continue et*

$$0 < (T_2h)(t) \le (P_2h)(t) \le \frac{M}{m}\|(T_2h)(t)\|, \quad \forall h \in C_\omega^+.$$

Le théorème suivant est essentiel pour nos résultats sur l'existence d'une solution positive périodique de (5.2).

Théorème 5.2.2 *Si $x \in C_\omega$ alors x est une solution de (5.2) si et seulement si*

$$x(t) = c(t)x(t-\tau) + P_2(f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau)). \tag{5.5}$$

Preuve. Soit $x \in C_\omega$ une solution de (5.2). Réécrire (5.2) comme suit

$$\begin{aligned}
&(x(t) - c(t)x(t-\tau))''' + M(x(t) - c(t)x(t-\tau)) \\
&= (M - a(t))(x(t) - c(t)x(t-\tau)) + f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau) \\
&= B_2(x(t) - c(t)x(t-\tau)) + f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau).
\end{aligned}$$

Du lemme 5.2.2 et lemme 5.2.5, on a

$$\begin{aligned}
&x(t) - c(t)x(t-\tau) \\
&= T_2B_2(x(t) - c(t)x(t-\tau)) + T_2(f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau)).
\end{aligned}$$

Cela donne

$$(I - T_2B_2)(x(t) - c(t)x(t-\tau)) = T_2(f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau)).$$

Donc

$$\begin{aligned}
x(t) - c(t)x(t-\tau) &= (I - T_2B_2)^{-1}T_2(f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau)) \\
&= P_2(f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau)).
\end{aligned}$$

Évidemment

$$x(t) = c(t)x(t-\tau) + P_2(f(t, x(t-\tau)) - c(t)a(t)x(t-\tau)),$$

cela termine la preuve. ■

Corollaire 5.2.4 *Si $x \in C_\omega$ alors x est une solution de (5.2) si et seulement si*

$$x(t) = \frac{1}{c(t+\tau)}\left[x(t+\tau) + P_2(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau, x(t)))\right]. \tag{5.6}$$

5.3 Solutions positives périodiques pour (5.1)

Pour appliquer le lemme 2.2.3, il faut définir un espace de Banach $\mathcal{B}$, un sous ensemble convexe fermé $\mathbb{D}$ de $\mathcal{B}$ et construire deux opérateurs, l'un est contraction et l'autre est complètement continu. Vers cette fin, soient $(\mathcal{B}, \|\cdot\|) = (C_\omega, \|\cdot\|)$ et $\mathbb{D} = \{\varphi \in C_\omega : M_1 \leq \varphi \leq M_2\}$, où M_1 est une constante strictement positive et M_2 est une constante positive.

5.3.1 Solutions positives périodiques pour (5.1) dans le cas $|c(t)| > 1$

Dans cette section, on obtient l'existence de solutions positives ω-périodiques pour (5.1) pour les deux cas : $1 < c(t) < \infty$ et $-\infty < c(t) < -1$ pour tout $t \in [0, \omega]$.

Théorème 5.3.1 *Supposons que $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $1 < c_1 \leq c(t) \leq c_2 < \infty$ et*

$$m \leq c(t)a(t)x - f(t,x) \leq c_1 M, \ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times \left[\frac{m}{(c_2-1)M}, \frac{c_1 M}{(c_1-1)m}\right]. \quad (5.7)$$

Alors (5.1) a au moins une solution positive ω-périodique x dans le sous ensemble $\mathbb{D}_1$ de $\mathcal{B}$ où $\mathbb{D}_1 = \left\{\varphi \in C_\omega : \frac{m}{(c_2-1)M} \leq \varphi \leq \frac{c_1 M}{(c_1-1)m}\right\}$.

Preuve. Pour commencer, on exprime (5.4) comme

$$\varphi(t) = (B_1\varphi)(t) + (A_1\varphi)(t) := (H_1\varphi)(t),$$

où $A_1, B_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathcal{B}$ sont définis par

$$(A_1\varphi)(t) = \frac{1}{c(t+\tau)} P_1(-c(t+\tau)a(t+\tau)\varphi(t) + f(t+\tau,\varphi(t))),$$

et

$$(B_1\varphi)(t) = \frac{\varphi(t+\tau)}{c(t+\tau)}.$$

Il est évident que $A_1\varphi$ et $B_1\varphi$ sont continues et ω-périodiques. Maintenant, on prouve que $A_1x + B_1y \in \mathbb{D}_1$, $\forall x, y \in \mathbb{D}_1$. Par le corollaire 5.2.1, le lemme 5.2.4 et la condition (5.7) on obtient

$$\begin{aligned}
&(A_1x)(t) + (B_1y)(t) \\
&= \frac{1}{c(t+\tau)}\left[P_1(-c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) + f(t+\tau,x(t))) + y(t+\tau)\right] \\
&\leq \frac{1}{c_1}\left[\frac{M}{m}T_1(-c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) + f(t+\tau,x(t))) + \frac{c_1 M}{(c_1-1)m}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{mc_1} \max_{t\in[0,\omega]} \left| \int_0^{\omega} G_1(t,s)(c(s+\tau)a(s+\tau)x(s) - f(s+\tau, x(s)))ds \right| + \frac{M}{(c_1-1)m}$$
$$\leq \frac{M}{mc_1} \int_0^{\omega} G_1(t,s)c_1 M ds + \frac{M}{(c_1-1)m}$$
$$\leq \frac{M}{mc_1} c_1 M \frac{1}{M} + \frac{M}{(c_1-1)m} = \frac{c_1 M}{(c_1-1)m}. \tag{5.8}$$

D'autre part

$$(A_1x)(t) + (B_1y)(t)$$
$$= \frac{1}{c(t+\tau)} \left[P_1(-c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) + f(t+\tau, x(t))) + y(t+\tau)\right]$$
$$\geq \frac{1}{c_2}\left[T_1(-c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) + f(t+\tau, x(t))) + \frac{m}{(c_2-1)M}\right]$$
$$\geq \frac{1}{c_2}\int_0^{\omega} G_1(t,s)(c(s+\tau)a(s+\tau)x(s) - f(s+\tau, x(s)))ds + \frac{1}{c_2}\frac{m}{(c_2-1)M}$$
$$\geq \frac{1}{c_2}\int_0^{\omega} G_1(t,s) m ds + \frac{1}{c_2}\frac{m}{(c_2-1)M}$$
$$\geq \frac{1}{c_2} m \frac{1}{M} + \frac{1}{c_2}\frac{m}{(c_2-1)M} = \frac{m}{(c_2-1)M}. \tag{5.9}$$

En combinant (5.8) et (5.9), on obtient $A_1x + B_1y \in \mathbb{D}_1, \forall x, y \in \mathbb{D}_1$. Pour $\varphi, \psi \in \mathbb{D}_1$, on a

$$\begin{aligned} |(B_1\varphi)(t) - (B_1\psi)(t)| &= \left| \frac{\varphi(t+\tau)}{c(t+\tau)} - \frac{\psi(t+\tau)}{c(t+\tau)} \right| \\ &\leq \frac{1}{c_1} |\varphi(t+\tau) - \psi(t+\tau)| \\ &\leq \frac{1}{c_1} \|\varphi - \psi\|, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\|B_1\varphi - B_1\psi\| \leq \frac{1}{c_1}\|\varphi - \psi\|$. Puisque $0 < \frac{1}{c_1} < 1$, B_1 est une contraction sur $\mathbb{D}_1$. Du lemme 5.2.4, on sait que P_1 est complètement continue, ainsi que A_1. Par le lemme 2.2.3, on en déduit que $A_1 + B_1$ a un point fixe $x \in \mathbb{D}_1$, c'est à dire (5.1) a une solution positive ω-périodique $x \in \mathbb{D}_1$. ∎

Théorème 5.3.2 *Supposons que* $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $-\infty < c_3 \leq c(t) \leq c_4 < -1$ *et*

$$\frac{c_3}{c_4}M < f(t,x) - c(t)a(t)x \leq -c_4 m,\ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times [0,1]. \tag{5.10}$$

Alors (5.1) a au moins une solution positive ω*-périodique* x *dans le sous ensemble* $\widetilde{\mathbb{D}}_2$ *de* $\mathcal{B}$*, où* $\widetilde{\mathbb{D}}_2 = \{\varphi \in C_\omega : 0 < \varphi \leq 1\}$.

Preuve. Soit $\mathbb{D}_2 = \{\varphi \in C_\omega : 0 \leq \varphi \leq 1\}$. On définit $A_1, B_1 : \mathbb{D}_2 \to \mathcal{B}$ comme suit

$$(A_1\varphi)(t) = \frac{-1}{c(t+\tau)} P_1(c(t+\tau)a(t+\tau)\varphi(t) - f(t+\tau, \varphi(t))),$$

et

$$(B_1\varphi)(t) = \frac{\varphi(t+\tau)}{c(t+\tau)}.$$

Maintenant, on prouve que $A_1x + B_1y \in \mathbb{D}_2$, $\forall x, y \in \mathbb{D}_2$. Par le corollaire 5.2.1, le lemme 5.2.4 et la condition (5.10) on obtient

$$\begin{aligned}
&(A_1x)(t) + (B_1y)(t) \\
&= \frac{-1}{c(t+\tau)} P_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau, x(t))) + \frac{y(t+\tau)}{c(t+\tau)} \\
&\leq \frac{-1}{c_4}\frac{M}{m} T_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau, x(t))) \\
&\leq \frac{-M}{mc_4} \max_{t\in[0,\omega]} \left| \int_0^\omega G_1(t,s)(f(s+\tau, x(s)) - c(s+\tau)a(s+\tau)x(s))ds \right| \\
&\leq \frac{-M}{mc_4} \int_0^\omega G_1(t,s)(-c_4 m)ds \\
&\leq \frac{-M}{mc_4}(-c_4 m)\frac{1}{M} = 1.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&(A_1x)(t) + (B_1y)(t)\\
&= \frac{-1}{c(t+\tau)}P_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau, x(t))) + \frac{y(t+\tau)}{c(t+\tau)}\\
&\geq \frac{-1}{c_3}T_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau, x(t))) + \frac{1}{c_4}\\
&\geq \frac{-1}{c_3}\int_0^{\omega} G_1(t,s)(f(s+\tau, x(s)) - c(s+\tau)a(s+\tau)x(s))ds + \frac{1}{c_4}\\
&\geq \frac{-1}{c_3}\int_0^{\omega} G_1(t,s)(\frac{c_3}{c_4}M)ds + \frac{1}{c_4}\\
&\geq \frac{-1}{c_3}(\frac{c_3}{c_4}M)\frac{1}{M} + \frac{1}{c_4} = 0. \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

En combinant (5.11) et (5.12), on obtient $A_1x + B_1y \in \mathbb{D}_2$, $\forall x, y \in \mathbb{D}_2$. D'autre part, pour $\varphi, \psi \in \mathbb{D}_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
|(B_1\varphi)(t) - (B_1\psi)(t)| &= \left|\frac{\varphi(t+\tau)}{c(t+\tau)} - \frac{\psi(t+\tau)}{c(t+\tau)}\right|\\
&\leq \frac{-1}{c_4}|\varphi(t+\tau) - \psi(t+\tau)|\\
&\leq \frac{-1}{c_4}\|\varphi - \psi\|.
\end{aligned}$$

Cela implique que $\|B_1\varphi - B_1\psi\| \leq \frac{-1}{c_4}\|\varphi - \psi\|$. Puisque $0 < \frac{-1}{c_4} < 1$, B_1 est une contraction sur $\mathbb{D}_2$. Du lemme 5.2.4, on sait que P_1 est complètement continue, ainsi que A_1. Par le lemme 2.2.3, on en déduit que $A_1 + B_1$ a un point fixe $x \in \mathbb{D}_2$, c'est à dire (5.1) a une solution ω-périodique strictement positive x avec $0 \leq x(t) \leq 1$. Puisque $f(t,x) - c(t)a(t)x > \frac{c_3}{c_4}M$, il est facile de voir $x(t) > 0$, c'est à dire que (5.1) a une solution positive ω-périodique $x \in \widetilde{\mathbb{D}}_2$. ■

5.3.2 Solutions positives périodiques pour (5.1) dans le cas $|c(t)| < 1$

Dans cette section, on obtient l'existence de solutions positives périodiques pour (5.1) en considérant les trois cas : $0 < c(t) < 1$, $-1 < c(t) < 0$ et $c(t) = 0$ pour tout $t \in [0, \omega]$.

Théorème 5.3.3 *Supposons que $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $0 < c_5 \leq c(t) \leq c_6 < 1$, et*

$$c_5 m \leq f(t,x) - c(t)a(t)x \leq M,\ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times \left[\frac{c_5 m}{(1-c_5)M}, \frac{M}{(1-c_6)m}\right]. \quad (5.13)$$

Alors (5.1) possède au moins une solution positive ω-périodique $x(t)$ dans le sous ensemble $\mathbb{D}_3$ de $\mathcal{B}$, où $\mathbb{D}_3 = \left\{\varphi \in C_\omega : \frac{c_5 m}{(1-c_5)M} \leq \varphi \leq \frac{M}{(1-c_6)m}\right\}$.

Preuve. Exprimons (5.3) comme

$$\varphi(t) = (B_2\varphi)(t) + (A_2\varphi)(t) := (H_2\varphi)(t),$$

où $A_2, B_2 : \mathbb{D}_3 \to \mathcal{B}$ sont définis respectivement par

$$(A_2\varphi)(t) = P_1(c(t)a(t)\varphi(t-\tau) - f(t,\varphi(t-\tau))),$$

et

$$(B_2\varphi)(t) = c(t)\varphi(t-\tau).$$

Il est évident que $A_2\varphi$ et $B_2\varphi$ sont continues et ω-périodiques. Maintenant, on prouve que $A_2x + B_2y \in \mathbb{D}_3$, $\forall x, y \in \mathbb{D}_3$. Par le corollaire 5.2.1, le lemme 5.2.4 et la condition (5.13) on obtient

$$\begin{aligned}
&(A_2x)(t) + (B_2y)(t) \\
&= P_1(c(t)a(t)x(t-\tau) - f(t,x(t-\tau))) + c(t)y(t-\tau) \\
&\leq \frac{M}{m} T_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau,x(t))) + c_6\frac{M}{(1-c_6)m} \\
&\leq \frac{M}{m}\max_{t\in[0,\omega]}\left|\int_0^\omega G_1(t,s)(f(s+\tau,x(s)) - c(s+\tau)a(s+\tau)x(s))ds\right| + c_6\frac{M}{(1-c_6)m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{m}\int_0^{\omega} G_1(t,s)Mds + c_6\frac{M}{(1-c_6)m} \\ &\leq \frac{M}{m}M\frac{1}{M} + c_6\frac{M}{(1-c_6)m} = \frac{M}{(1-c_6)m}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} &(A_2x)(t) + (B_2y)(t) \\ &= P_1(c(t)a(t)x(t-\tau) - f(t,x(t-\tau))) + c(t)y(t-\tau) \\ &\geq T_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau,x(t))) + c_5\frac{c_5m}{(1-c_5)M} \\ &\geq \int_0^{\omega} G_1(t,s)(f(s+\tau,x(s)) - c(s+\tau)a(s+\tau)x(s))ds + c_5\frac{c_5m}{(1-c_5)M} \\ &\geq \int_0^{\omega} G_1(t,s)c_5mds + c_5\frac{c_5m}{(1-c_5)M} \\ &\geq c_5m\frac{1}{M} + c_5\frac{c_5m}{(1-c_5)M} = \frac{c_5m}{(1-c_5)M}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

En combinant (5.14) et (5.15), on obtient $A_2x + B_2y \in \mathbb{D}_3, \forall x, y \in \mathbb{D}_3$. Pour $\varphi, \psi \in \mathbb{D}_3$, on a

$$\begin{aligned} |(B_2\varphi)(t) - (B_2\psi)(t)| &= |c(t)\varphi(t-\tau) - c(t)\psi(t-\tau)| \\ &\leq c_6\,|\varphi(t-\tau) - \psi(t-\tau)| \\ &\leq c_6\,\|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Ainsi $\|B_2\varphi - B_2\psi\| \leq c_6\,\|\varphi - \psi\|$. Puisque $0 < c_6 < 1$, B_2 est une contraction sur $\mathbb{D}_3$. Du lemme 5.2.4, on sait que P_1 est complètement continue, de même que A_2. Par le lemme 2.2.3 on conclu que $A_2 + B_2$ a un point fixe $x \in \mathbb{D}_3$, c'est à dire (5.1) a une solution positive ω-périodique $x \in \mathbb{D}_3$. ■

Théorème 5.3.4 *Supposons que* $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $-1 < c_7 \leq c(t) \leq c_8 < 0$ *et*

$$-c_7M < f(t,x) - c(t)a(t)x \leq m, \ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times [0,1]. \tag{5.16}$$

Alors (5.1) a au moins une solution positive ω-périodique x dans le sous ensemble $\widetilde{\mathbb{D}}_4$ de $\mathcal{B}$, où $\widetilde{\mathbb{D}}_4 = \{\varphi \in C_\omega : 0 < \varphi \leq 1\}$.

Preuve. On définit $\mathbb{D}_4 = \{\varphi \in C_\omega : 0 \leq \varphi \leq 1\}$. Maintenant, on prouve que $A_2 x + B_2 y \in \mathbb{D}_4$, $\forall x, y \in \mathbb{D}_4$. Par le corollaire 5.2.1, le lemme 5.2.4 et la condition (5.16) on obtient

$$\begin{aligned}
&(A_2 x)(t) + (B_2 y)(t) \\
&= P_1(c(t)a(t)x(t-\tau) - f(t, x(t-\tau))) + c(t)y(t-\tau) \\
&\leq \frac{M}{m} T_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau, x(t))) \\
&\leq \frac{M}{m} \max_{t\in[0,\omega]} \left| \int_0^\omega G_1(t,s)(f(s+\tau, x(s)) - c(s+\tau)a(s+\tau)x(s))ds \right| \\
&\leq \frac{M}{m} \int_0^\omega G_1(t,s) m ds \leq \frac{M}{m} m \frac{1}{M} = 1.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&(A_2 x)(t) + (B_2 y)(t) \\
&= P_1(c(t)a(t)x(t-\tau) - f(t, x(t-\tau))) + c(t)y(t-\tau) \\
&\geq T_1(c(t+\tau)a(t+\tau)x(t) - f(t+\tau, x(t))) + c_7 \\
&\geq \int_0^\omega G_1(t,s)(f(s+\tau, x(s)) - c(s+\tau)a(s+\tau)x(s))ds + c_7 \\
&\geq \int_0^\omega G_1(t,s)(-c_7 M)ds + c_7 \\
&\geq (-c_7 M)\frac{1}{M} + c_7 = 0.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

En combinant (5.17) et (5.18), on s'aperçoit que $A_2 x + B_2 y \in \mathbb{D}_4$, $\forall x, y \in \mathbb{D}_4$. Évidemment, $B_2\varphi$ est continue et il est facile de montrer que $(B_2\varphi)(t+\omega) = (B_2\varphi)(t)$. Donc, pour $\varphi, \psi \in \mathbb{D}_4$, on a

$$\begin{aligned}
|(B_2\varphi)(t) - (B_2\psi)(t)| &= |c(t)\varphi(t-\tau) - c(t)\psi(t-\tau)| \\
&\leq -c_7 |\varphi(t-\tau) - \psi(t-\tau)| \\
&\leq -c_7 \|\varphi - \psi\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\|B_2\varphi - B_2\psi\| \leq -c_7 \|\varphi - \psi\|$. Puisque $0 < -c_7 < 1$, B_2 est une contraction sur $\mathbb{D}_4$. Du lemme 5.2.4, on sait que P_1 est complètement continu, de même que A_2. Par le lemme 2.2.3, on obtient que $A_2 + B_2$ a un point fixe $x \in \mathbb{D}_4$, c'est à dire (5.1) a une solution positive ω-périodique x avec $0 \leq x(t) \leq 1$. Puisque $f(t,x) - c(t)a(t)x > -c_7 M$, il est facile de voir que $x(t) > 0$, c'est à dire que (5.1) possède une solution positive ω-périodique $x \in \widetilde{\mathbb{D}}_4$. ■

Théorème 5.3.5 ([73]) *Si $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$ est satisfaite, $c(t) = 0$ et*

$$0 < f(t,x) \leq M, \ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times \left[0, \frac{M}{m}\right].$$

Alors, (5.1) a au moins une solution positive ω-périodique x avec $0 < x(t) \leq \frac{M}{m}$.

Exemple 5.3.1 *On considère l'équation différentielle non linéaire neutre de troisième ordre*

$$\left(x(t) - \left(2 + \sin^2 t + \frac{1}{0.9 + 8\sin^2 t}\right) x(t - 6\pi)\right)'''$$
$$= \frac{1}{10^3}(1 - \frac{1}{10^2}\sin^2 t)x(t) - \frac{1}{10^4}(6 + \sin t) - \frac{1}{10^3}\exp(\cos(x(t-6\pi))). \quad (5.19)$$

On note que (5.19) est de la forme (5.1) avec $\omega = 2\pi$, $c(t) = 2 + \sin^2 t + \frac{1}{0.9+8\sin^2 t}$, $a(t) = \frac{1}{10^3}(1 - \frac{1}{10^2}\sin^2 t)$, $f(t, x(t-6\pi)) = \frac{1}{10^4}(6 + \sin t) + \frac{1}{10^3}\exp(\cos(x(t-6\pi)))$, et $\tau = 6\pi$. Il est facile de vérifier que les conditions du théorème 5.3.1 sont satisfaites avec $m = \frac{99}{10^5}$ et $M = \frac{1}{10^3}$. Ainsi (5.19) a au moins un solution positive 2π-périodique.

5.4 Solutions positives périodiques pour (5.2)

5.4.1 Solutions positives périodiques pour (5.2) dans le cas $|c(t)| > 1$

Théorème 5.4.1 *Supposons que $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $1 < c_1 \leq c(t) \leq c_2 < \infty$ et*

$$m \leq c(t)a(t)x - f(t,x) \leq c_1 M, \ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times \left[\frac{m}{(c_2-1)M}, \frac{c_1 M}{(c_1-1)m}\right].$$

Alors (5.2) a au moins une solution positive ω-périodique x dans le sous ensemble $\mathbb{D}_1$ de $\mathcal{B}$, où $\mathbb{D}_1 = \left\{\varphi \in C_\omega : \frac{m}{(c_2-1)M} \leq \varphi \leq \frac{c_1 M}{(c_1-1)m}\right\}$.

Preuve. On définit $A_3, B_3 : \mathbb{D}_1 \to \mathcal{B}$ comme suit

$$(A_3\varphi)(t) = \frac{1}{c(t+\tau)} P_2(c(t+\tau)a(t+\tau)\varphi(t) - f(t+\tau, \varphi(t))),$$

et

$$(B_3\varphi)(t) = \frac{\varphi(t+\tau)}{c(t+\tau)}.$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du théorème 5.3.1. ■

Théorème 5.4.2 *Supposons que* $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $-\infty < c_3 \leq c(t) \leq c_4 < -1$ *et*

$$\frac{c_3}{c_4} M \leq f(t,x) - c(t)a(t)x \leq -c_4 m, \ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times [0,1].$$

Alors (5.2) a au moins une solution positive ω*-périodique* x *dans le sous ensemble* $\widetilde{\mathbb{D}}_2$ *de* $\mathcal{B}$*, où* $\widetilde{\mathbb{D}}_2 = \{\varphi \in C_\omega : 0 < \varphi \leq 1\}$.

Preuve. On définit $A_3, B_3 : \mathbb{D}_2 \to \mathcal{B}$ comme suit

$$(A_3\varphi)(t) = \frac{-1}{c(t+\tau)} P_2(f(t+\tau, \varphi(t)) - c(t+\tau)a(t+\tau)\varphi(t)),$$

et

$$(B_3\varphi)(t) = \frac{\varphi(t+\tau)}{c(t+\tau)}.$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du théorème 5.3.2. ■

5.4.2 Solutions positives périodiques pour (5.2) dans le cas $|c(t)| < 1$

Théorème 5.4.3 *Supposons que* $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $0 < c_5 \leq c(t) \leq c_6 < 1$ *et*

$$c_5 m \leq f(t,x) - c(t)a(t)x \leq M, \ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times \left[\frac{c_5 m}{(1-c_5)M}, \frac{M}{(1-c_6)m}\right].$$

Alors (5.2) a au moins une solution positive ω*-périodique* x *dans le sous ensemble* $\mathbb{D}_3$ *de* $\mathcal{B}$*, où* $\mathbb{D}_3 = \left\{\varphi \in C_\omega : \frac{c_5 m}{(1-c_5)M} \leq \varphi \leq \frac{M}{(1-c_6)m}\right\}$.

Preuve. On définit $A_4, B_4 : \mathbb{D}_3 \to \mathcal{B}$ comme suit

$$(A_4\varphi)(t) = P_2(f(t,\varphi(t-\tau)) - c(t)a(t)\varphi(t-\tau)),$$

et

$$(B_4\varphi)(t) = c(t)\varphi(t-\tau).$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du théorème 5.3.3. ■

Théorème 5.4.4 *Supposons que $\sqrt{3}\rho\omega < 4\pi/3$, $-1 < c_7 \leq c(t) \leq c_8 < 0$ et*

$$-c_7 M \leq f(t,x) - c(t)a(t)x \leq m, \ \forall (t,x) \in [0,\omega] \times [0,1].$$

Alors (5.2) a au moins une solution positive ω-périodique x dans le sous ensemble $\widetilde{\mathbb{D}}_4$ de $\mathcal{B}$, où $\widetilde{\mathbb{D}}_4 = \{\varphi \in C_\omega : 0 < \varphi \leq 1\}$.

Preuve. On définit $A_4, B_4 : \mathbb{D}_4 \to \mathcal{B}$ comme suit

$$(A_4\varphi)(t) = P_2(f(t,\varphi(t-\tau)) - c(t)a(t)\varphi(t-\tau)),$$

et

$$(B_4\varphi)(t) = c(t)\varphi(t-\tau).$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du théorème 5.3.4. ■

Remarque 5.4.1 *De la même manière que le théorème 5.3.5, on peut prouver que l'équation (5.2) a au moins une solution positive ω-périodique x lorsque $c(t) = 0$.*

Exemple 5.4.1 *On considère l'équation différentielle non linéaire neutre de troisième ordre*

$$\begin{aligned}&\left(x(t) + (3 + \frac{\sin t}{10})x(t-4\pi)\right)''' \\ &= -\frac{1}{10^3}(1 - \frac{1}{2}\sin^2 t)x(t) + \frac{1}{10^4}(2 + \sin t) + \frac{1}{10^3}\sin(x(t-4\pi)).\end{aligned} \tag{5.20}$$

On note que (5.20) est de la forme (5.2) avec $\omega = 2\pi$, $c(t) = -(3 + \frac{\sin t}{10})$, $a(t) = \frac{1}{10^3}(1 - \frac{1}{2}\sin^2 t)$, $f(t,x(t-4\pi)) = \frac{1}{10^4}(2 + \sin t) + \frac{1}{10^3}\sin(x(t-4\pi))$ et $\tau = 4\pi$. Il est facile de vérifier que les conditions de théorème 5.4.2 sont satisfaites avec $m = \frac{1}{2\times 10^3}$ et $M = \frac{1}{10^3}$. Ainsi (5.20) a au moins une solution positive 2π-périodique.

Chapitre 6

Périodicité et stabilité pour une classe d'équations différentielles non linéaires neutres

B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Periodicity and stability in neutral differential equations by Krasnoselskii fixed point theorem*, Cubo a Mathematecal Journal, V. 19, No 03 (2017), 15-29.

Mots clés : Point fixe, solutions périodiques, stabilité, équations différentielles de type neutre.

DANS ce travail on utilise le théorème de point fixe de Krasnoselskii pour étudier l'existence et la stabilité asymptotique de solutions périodiques de l'équation différentielle fonctionnelle neutre à retard variable suivante

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}u(t) - q(t)\frac{d}{dt}g(u(t-r(t)))\\&= p(t) - a(t)u(t) - a(t)q(t)g(u(t-r(t))) - b(t)f(u(t))\\&+ b(t)q(t)f(u(t-r(t))).\end{aligned}$$

Des conditions Suffisantes sont fournies pour l'existence et la stabilité de cette équation. Nos résultats étendent et améliorent certains résultats obtenus dans l'article [43].

6.1 Introduction

Ding et Li [43] ont discuté l'existence et la stabilité de solutions périodiques pour l'équation différentielle fonctionnelle neutre suivante

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}u(t) - q\frac{d}{dt}u(t-r)\\&= p(t) - au(t) - aqu(t-r) - bf(u(t)) + bqf(u(t-r)).\end{aligned} \tag{6.1}$$

En utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii, les auteurs ont obtenus des résultats d'existence et de stabilité asymptotique pour les solutions périodiques de cette equation.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et la stabilité asymptotique de solutions périodiques de l'équation différentielle neutre non linéaire suivante

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}u(t) - q(t)\frac{d}{dt}g(u(t-r(t)))\\&= p(t) - a(t)u(t) - a(t)q(t)g(u(t-r(t))) - b(t)f(u(t))\\&+ b(t)q(t)f(u(t-r(t))),\end{aligned} \tag{6.2}$$

où r est une fonction positive différentiable, et q, p, a, b, f et g sont des fonctions continument différentiables.

Pour montrer l'existence et la stabilité asymptotique des solutions périodiques, on transforme (6.2) en une équation intégrale et ensuite on utilise le théorème du point fixe de Krasnoselskii. L'équation intégrale obtenue divisée en somme de deux opérateurs, l'un est une contraction et l'autre est compacte.

Il est facile de voir que (6.2) se réduit à (6.1) où, $q(t) = q$, $a(t) = a$, $b(t) = b$, $r(t) = r$ sont des constantes et $g(u(t-r(t))) = u(t-r)$ avec $|q| < 1$. Il est devient donc clair que les résultats obtenus ici étendent les résultats des travaux de Ding et Li [43].

6.2 Existence de solutions périodiques

Dans cette section, $C^1(\mathbb{R})$ ou $C(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions continument différentiables ou toutes les fonctions continues $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respectivement. $C_\omega = \{\phi \in C(\mathbb{R}),\ \phi(t+\omega) = \phi(t)\}$ avec la norme supremum $\|.\|_0$ et $C^1_\omega = C^1(\mathbb{R}) \cap C_\omega$ avec la norme $\|\phi\|_1 = \|\phi\|_0 + \|\phi'\|_0$ dans un intervalle périodique. Puisque on cherche l'existence de solutions périodiques pour (6.2), il est naturel d'assumer que

$$q(t+T) = q(t),\ p(t+T) = p(t),\ a(t+T) = a(t),\ b(t+T) = b(t),\ r(t+T) = r(t).$$

La fonction $g(x)$ est continue globalement Lipschitzienne, c'est à dire, il existe une constante positive k telle que

$$|g(x) - g(y)| \leq k\|x-y\|_0,$$

on suppose également que g est différentiable et que $\|g'\|_0 = l_1$.

Le prochain lemme sera utilisé dans la suite.

Lemme 6.2.1 *Si $a(t) \neq 0$, $f \in C_\omega$, alors l'équation $x'(t) + a(t)x(t) = f(t)$ a une solution unique ω-périodique*

$$x(t) = \left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} a(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^s a(u)du} f(s)ds.$$

Preuve. La preuve est facile à vérifier et on peut la trouver dans de nombreux manuels d'EDO. ∎

En appliquant les lemmes 6.2.1 et 2.2.3, on établi dans cette section l'existence de solutions périodiques de (6.2). Pour une valeur de l positive suffisamment petite, (6.2) peut être transformée comme suit

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}v(t) - lq_1(t)\frac{d}{dt}g(v(t-\tau(t))) \\
&= lp_1(t) - la_1(t)v(t) - la_1(t)q_1(t)g(v(t-\tau(t))) - lb_1(t)f(v(t)) \\
&+ lb_1(t)q_1(t)f(v(t-\tau(t))),
\end{aligned} \tag{6.3}$$

où $v(t) = u(lt)$, $\tau(t) = \frac{r(lt)}{l}$, $q_1(t) = q(lt)$,$p_1(t) = p(lt)$, $a_1(t) = a(lt)$, $b_1(t) = b(lt)$ et $\omega = \frac{T}{l}$.

Théorème 6.2.1 *Supposons que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $q_1, p_1, a_1, b_1 \in C^1_\omega$. Supposons aussi que $\|q_1'\| = \beta$, et $\|1-\tau'(t)\| = l_2$, et il existe deux constantes $\rho \in (0,1)$ et $H > 0$ telle que*

$$lk(\|q_1\|_0(1+l_2H)+\beta) \leq \rho,$$

$$\sup_{|u|\leq H} |f(u)| < \frac{\theta_1 H - \theta_3}{\|b_1\|_0}, \ \|q_1\|_0 < \frac{\theta_1 - \frac{\theta_3 + \|b_1\|_0 \sup_{|u|\leq H}|f(u)|}{H}}{\theta_2 + \frac{\|b_1\|_0 \sup_{|u|\leq H}|f(u)|}{H}}, \tag{6.4}$$

et

$$\|p_1\|_0 < (\theta_1 - \theta_2\|q_1\|_0)H - \|b_1\|_0(1+\|q_1\|_0)\sup_{|u|\leq H}|f(u)| - \theta_3, \tag{6.5}$$

où

$$\begin{aligned}
&\theta_1 = \frac{\frac{1}{l} - k\beta}{1+\alpha\omega M(1+l\|a_1\|_0)}, \ \theta_2 = \frac{k + l_1 l_2}{1+\alpha\omega M(1+l\|a_1\|_0)} + 2k\|a_2\|_0, \\
&\theta_3 = \frac{(\|q_1\|_0 + \beta)|g(0)|}{1+\alpha\omega M(1+l\|a_1\|_0)} + 2\|a_2\|_0\|q_1\|_0|g(0)|, \\
&\quad 2a_2(s)q_1(s) = (l+1)a_1(s)q_1(s) + q_1'(s),
\end{aligned}$$

et

$$M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^s la_1(u)du} ds \right|, \ \alpha = \left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1}.$$

Alors (6.2) a une solution T-périodique.

Preuve. Selon les conditions (6.4) et (6.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&(1+\alpha\omega M(1+l\|a_1\|_0))[l\|p_1\|_0 + l\|b_1\|_0(1+\|q_1\|_0)\sup_{|u|\leq H}|f(u)| \\
&+ 2l\|a_2\|_0\|q_1\|_0(kH+|g(0)|)] + l((k+l_1l_2)\|q_1\|_0 + k\beta)H \\
&+ l(\|q_1\|_0+\beta)|g(0)| \ \leq \ H.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

On démontre que (6.3) a une solution ω-périodique. Soit

$$S = \left\{\phi \in C^1(\mathbb{R}), \ \|\phi\|_1 = \|\phi\|_0 + \|\phi'\|_0 < +\infty\right\},$$

et

$$\mathcal{M} = \{\phi \in C^1_\omega, \ \|\phi\|_1 \leq H\},$$

alors $\mathcal{M}$ est un ensemble convexe fermé borné de l'espace de Banach S.
Pour tout $\phi \in \mathcal{M}$, on considère l'équation non homogène

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}v(t) + la_1(t)v(t) \\
&= lp_1(t) - la_1(t)q_1(t)g(v(t-\tau(t))) - lb_1(t)f(v(t)) \\
&+ lb_1(t)q_1(t)f(v(t-\tau(t))) + lq_1(t)\frac{d}{dt}g(v(t-\tau(t))). \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Selon le lemme 6.2.1, cette équation a une solution ω-périodique unique

$$\begin{aligned}
v(t) = &\left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
&- la_1(s)q_1(s)g(v(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(v(s)) \\
&+ lb_1(s)q_1(s)f(v(s-\tau(s))) + lq_1(s)\frac{d}{ds}g(v(s-\tau(s)))]ds,
\end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
v(t) = &\left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
&- l\left((l+1)a_1(s)q_1(s) + q_1'(s)\right)g(v(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(v(s)) \\
&+ lb_1(s)q_1(s)f(v(s-\tau(s)))]ds + lq_1(t)g(v(t-\tau(t))),
\end{aligned}$$

où $2a_2(s)q_1(s) = (l+1)a_1(s)q_1(s) + q_1'(s)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
v(t) = &\left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
&- 2la_2(s)q_1(s)g(v(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(v(s)) \\
&+ lb_1(s)q_1(s)f(v(s-\tau(s)))]ds + lq_1(t)g(v(t-\tau(t))).
\end{aligned}$$

On définit les opérateurs A et B par

$$\begin{aligned}
(A\phi)(t) = &\left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
&- 2la_2(s)q_1(s)g(\phi(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(\phi(s)) \\
&+ lb_1(s)q_1(s)f(\phi(s-\tau(s)))]ds,
\end{aligned}$$

et

$$(B\phi)(t) = lq_1(t)g(\phi(t-\tau(t))).$$

Pour prouver que (6.3) a une solution périodique, il faut que les opérateurs A et B répondent aux conditions du lemme 2.2.3. Pour tous $x, y \in \mathcal{M}$, on a $x(t+\omega) = x(t)$, $y(t+\omega) = y(t)$ et $\|x\|_1 \leq H$, $\|y\|_1 \leq H$. On étudie maintenant $Ax + By$.

$$\begin{aligned}
(Ax)(t+\omega) &= \left(1 - e^{-\int_{t+\omega}^{t+2\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_{t+\omega}^{t+2\omega} e^{\int_{t+2\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
&\quad - 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
&\quad + lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \\
&= \left(1 - e^{-\int_{t}^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_{t}^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
&\quad - 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s) \\
&\quad + lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \\
&= (Ax)(t),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(By)(t+\omega) &= lq_1(t+\omega)g(y(t+\omega-\tau(t+\omega))) \\
&= lq_1(t)g(y(t-\tau(t)) = (By)(t),
\end{aligned}$$

donc $(Ax + By)(t+\omega) = (Ax + By)(t)$. En plus, on s'aperçoit que

$$\begin{aligned}
(Ax)'(t) &= \left(1 - e^{-\int_{t}^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \left\{ \int_{t}^{t+\omega} (-la_1(t)) e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \right. \\
&\quad - 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
&\quad + lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \\
&\quad + \left(1 - e^{-\int_{t}^{t+\omega} la_1(u)du}\right) [lp_1(t) - 2la_2(t)q_1(t)g(x(t-\tau(t))) \\
&\quad \left. - lb_1(t)f(x(t)) + lb_1(t)q_1(t)f(x(t-\tau(t)))] \right\} \\
&= -la_1(t) \left(1 - e^{-\int_{t}^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_{t}^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
&\quad - 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
&\quad + lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \\
&\quad + [lp_1(t) - 2la_2(t)q_1(t)g(x(t-\tau(t))) - lb_1(t)f(x(t)) \\
&\quad + lb_1(t)q_1(t)f(x(t-\tau(t)))],
\end{aligned}$$

et

$$(By)'(t) = lq_1'(t)g(y(t-\tau(t))) + lq_1(t)(1-\tau'(t))y'(t-\tau(t))g'(y(t-\tau(t))).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \|Ax\|_0 + \|(Ax)'\|_0 \\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^s la_1(u)du} [lp_1(s) \right. \\
&- 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
&+ lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds| \\
&+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| -la_1(t) \left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^s la_1(u)du} [lp_1(s) \right. \\
&- 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
&+ lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds + [lp_1(t) - 2la_2(t)q_1(t)g(x(t-\tau(t))) \\
&- lb_1(t)f(x(t)) + lb_1(t)q_1(t)f(x(t-\tau(t)))]| \\
&\leq (1 + \alpha\omega M(1 + l\|a_1\|_0))[l\|p_1\|_0 + l\|b_1\|_0(1 + \|q_1\|_0) \sup_{|u|\leq H} |f(u)| \\
&+ 2l\|a_2\|_0\|q_1\|_0(kH + |g(0)|)],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|By\|_1 &= \|By\|_0 + \|(By)'\|_0 \\
&= \|lq_1(t)g(y(t-\tau(t)))\|_0 \\
&+ \|lq_1'(t)g(y(t-\tau(t))) + lq_1(t)(1-\tau'(t))y'(t-\tau(t))g'(y(t-\tau(t)))\|_0 \\
&\leq l\|q_1\|_0(kH + |g(0)|) + l\beta(kH + |g(0)|) + l\|q_1\|_0 l_1 l_2 H \\
&= l((k + l_1 l_2)\|q_1\|_0 + k\beta)H + l(\|q_1\|_0 + \beta)|g(0)|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Ax + By\|_1 &\leq \|Ax\|_1 + \|By\|_1 \\
&\leq (1 + \alpha\omega M(1 + l\|a_1\|_0))[l\|p_1\|_0 + l\|b_1\|_0(1 + \|q_1\|_0) \sup_{|u|\leq H} |f(u)| \\
&+ 2l\|a_2\|_0\|q_1\|_0(kH + |g(0)|)] + l((k + l_1 l_2)\|q_1\|_0 + k\beta)H \\
&+ l(\|q_1\|_0 + \beta)|g(0)|,
\end{aligned}$$

par (6.6), $\|Ax + By\|_1 \leq H$. En conséquence, $Ax + By \in \mathcal{M}$.

Pour tout $x \in \mathcal{M}$, $\|Ax\|_0 \leq H$, $\|(Ax)'\|_0 \leq H$. Selon le lemme d'Ascoli-Arzela , le sous ensemble $A\mathcal{M}$ de $\mathbf{C}_\omega$ est précompact, donc pour toute suite $\{x_n\}$ de $\mathcal{M}$, il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $Ax_{n_k} \to x_0 \in \mathbf{C}_\omega$ quand $k \to +\infty$. En outre,

$$
\begin{aligned}
(Ax)''(t) = {}& (la_1(t))^2 \left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
& - 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
& + lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \\
& - la_1(t)[lp_1(t) - 2la_2(t)q_1(t)g(x(t-\tau(t))) \\
& - lb_1(t)f(x(t)) + lb_1(t)q_1(t)f(x(t-\tau(t)))] \\
& - la_1'(t)\left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
& - 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
& + lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \\
& + [lp_1'(t) - 2la_2'(t)q_1(t)g(x(t-\tau(t))) - 2la_2(t)q_1'(t)g(x(t-\tau(t))) \\
& - 2la_2(t)q_1(t)(1-\tau'(t))x'(t-\tau(t))g'(x(t-\tau(t))) - lb_1'(t)f(x(t)) \\
& - lb_1(t)x'(t)f'(x(t)) + lb_1'(t)q_1(t)f(x(t-\tau(t))) \\
& + lb_1(t)q_1'(t)f(x(t-\tau(t))) \\
& + lb_1(t)q_1(t)(1-\tau'(t))x'(t-\tau(t))f'(x(t-\tau(t)))],
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
(Ax)''(t) = {}& (l^2a_1^2(t) - la_1^{'}(t))\left(1 - e^{-\int_t^{t+w} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+w} e^{\int_{t+w}^{s} la_1(u)du}[lp_1(s) \\
& - 2la_2(s)q_1(s)g(x(s-\tau(s))) - lb_1(s)f(x(s)) \\
& + lb_1(s)q_1(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \\
& - la_1(t)[lp_1(t) - 2la_2(t)q_1(t)g(x(t-\tau(t))) - lb_1(t)f(x(t)) \\
& + lb_1(t)q_1(t)f(x(t-\tau(t)))] \\
& + [lp_1'(t) - 2la_2'(t)q_1(t)g(x(t-\tau(t))) - 2la_2(t)q_1'(t)g(x(t-\tau(t))) \\
& - 2la_2(t)q_1(t)(1-\tau'(t))x'(t-\tau(t))g'(x(t-\tau(t))) \\
& - lb_1'(t)f(x(t)) - lb_1(t)x'(t)f'(x(t)) + lb_1'(t)q_1(t)f(x(t-\tau(t))) \\
& + lb_1(t)q_1'(t)f(x(t-\tau(t))) \\
& + lb_1(t)q_1(t)(1-\tau'(t))x'(t-\tau(t))f'(x(t-\tau(t)))].
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in\mathbb{R}} |(Ax)^{''}(t)| \\
&\leq \left[(l^2\|a_1^2\|_0 + l\|a_1^{'}\|_0)\alpha\omega M + l\|a_1\|_0\right][l\|p_1\|_0 \\
&+ l\|b_1\|_0(1+\|q_1\|_0) \sup_{|u|\leq H}|f(u)| + 2l\|a_2\|_0\|q_1\|_0(kH+|g(0)|)] \\
&+ l\|p_1'\|_0 + l(\|b_1'\|_0(1+\|q_1\|_0) + \beta\|b_1\|_0) \sup_{|u|\leq H}|f(u)| \\
&+ l(\|b_1\|\|f'\|_0(1+l_2\|q_1\|_0) + 2l_1l_2\|a_2\|_0\|q_1\|_0)H \\
&+ 2l(\|a_2'\|_0\|q_1\|_0 + \beta\|a_2\|_0)(kH+|g(0)|).
\end{aligned}$$

Donc il existe une constante $H_1 > 0$ telle que $\sup_{t\in\mathbb{R}}|(Ax)''(t)| \leq H_1$ et $\{(Ax)' : x \in \mathcal{M}\} \subset C_\omega$. Selon le lemme d'Ascoli-Arzela, pour toute suite $\{x_n\}$ de $\mathcal{M}$, il existe la sous suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$, telle que $(Ax_{n_k})' \to z_0 \in C_\omega$. Puisque $\frac{d}{dt}$ est un opérateur fermé, $z_0 = (x_0)'$. Par conséquent, $x_0 \in C_\omega^1$ et $\{Ax_n\}$ est contenue dans un ensemble compact. En conclusion, A est un opérateur compact.

On suppose que $\{x_n\} \subset \mathcal{M}$, $x \in S$, $x_n \to x$, alors $\|x_n - x\|_0 \to 0$ et $\|x_n' - x'\|_0 \to 0$ quand $n \to \infty$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - Ax\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Bigg| &\left(1 - e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^s la_1(u)du} \\
&\times [-2la_2(s)q_1(s)(g(x_n(s-\tau(s))) - g(x(s-\tau(s)))) \\
&- lb_1(s)(f(x_n(s)) - f(x(s))) \\
&+ lb_1(s)q_1(s)(f(x_n(s-\tau(s))) - f(x(s-\tau(s))))]ds| \\
&\leq \alpha\omega M[2l\|a_2\|_0\|q_1\|_0 k\,\|x_n(t) - x(t)\|_0 \\
&+ l\|b_1\|_0(1+\|q_1\|_0) \sup_{t\in[0,\omega]} |f(x_n(t)) - f(x(t))|],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|(Ax_n)' - (Ax)'\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| &-la_1(t)\left(1-e^{-\int_t^{t+\omega} la_1(u)du}\right)^{-1}\int_t^{t+\omega} e^{\int_{t+\omega}^{s} la_1(u)du} \\ &\times[-2la_2(s)q_1(s)(g(x_n(s-\tau(s)))-g(x(s-\tau(s)))) \\ &- lb_1(s)(f(x_n(s))-f(x(s))) \\ &+ lb_1(s)q_1(s)(f(x_n(s-\tau(s)))-f(x(s-\tau(s))))]ds \\ &+ [-2la_2(t)q_1(t)(g(x_n(t-\tau(t)))-g(x(t-\tau(t)))) \\ &- lb_1(t)(f(x_n(t))-f(x(t))) \\ &+ lb_1(t)q_1(t)(f(x_n(t-\tau(t)))-f(x(t-\tau(t))))]| \\ &\le (l\alpha\omega M\|a_1\|_0+1)[2l\|a_2\|_0\|q_1\|_0 k\,\|x_n(t)-x(t)\|_0 \\ &+ l\|b_1\|_0(1+\|q_1\|_0)\sup_{t\in[0,\omega]}|f(x_n(t))-f(x(t))|],\end{aligned}$$

où $\|x_n - x\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ et $\|x_n(t) - x(t)\|_0 \to 0$ pour $t \in [0,\omega]$ uniformément. Comme f est continue, $\|Ax_n - Ax\|_0 \to 0$, $\|(Ax_n)' - (Ax)'\|_0 \to 0$. Par conséquent, A est continu.

Pour tous $x, y \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}&\|Bx - By\|_1 \\ &= \|Bx - By\|_0 + \|(Bx)' - (By)'\|_0 \\ &= \|lq_1(t)(g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t))))\|_0 \\ &+ \|lq_1'(t)(g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t)))) \\ &+ lq_1(t)(1-\tau'(t))(x'(t-\tau(t))g(x(t-\tau(t))) - y'(t-\tau(t))g(y(t-\tau(t))))\|_0 \\ &\le l\|q_1\|_0\|g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t)))\|_0 \\ &+ l\|q_1'\|_0\|g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t)))\|_0 + l\|q_1\|_0\|1-\tau'(t)\|_0 \\ &\times \|x'(t-\tau(t))g(x(t-\tau(t))) - y'(t-\tau(t))g(y(t-\tau(t)))\|_0 \\ &\le l\|q_1\|_0\|g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t)))\|_0 \\ &+ l\|q_1'\|_0\|g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t)))\|_0 \\ &+ l\|q_1\|_0\|1-\tau'(t)\|_0\|x'(t-\tau(t))\|_0\|g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t)))\|_0 \\ &= (l\|q_1\|_0 + l\|q_1'\|_0 + l\|q_1\|_0\|1-\tau'(t)\|_0\|x'(t-\tau(t))\|_0) \\ &\times \|g(x(t-\tau(t))) - g(y(t-\tau(t)))\|_0 \\ &\le lk(\|q_1\|_0(1+l_2H)+\beta)\|x-y\|_0 \le \rho\|x-y\|_0.\end{aligned}$$

Donc B est un opérateur contractant.

Ainsi, les conditions de lemme 2.2.3 sont satisfaites et il existe un $\phi \in \mathcal{M}$, tel que $\phi = A\phi + B\phi$. ϕ est une solution ω-périodique pour (6.3). Puisque $v(t) = u(lt)$, $p_1(t) = p(lt)$, $q_1(t) = q(lt)$, $b_1(t) = b(lt)$ et $a_1(t) = a(lt)$, (6.2) a une solution T-périodique. ■

6.3 Stabilité asymptotique de solutions périodiques

Dans cette section en étudie la stabilité asymptotique de solutions périodiques. Soit u^* est l'équilibre de (6.2). Soit $v = u - u^*$, alors (6.2) est transformé comme suit

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}v(t) - q(t)\frac{d}{dt}(g(v(t-r(t)) + u^*(t-r(t))) - g(u^*(t-r(t))))\\
&= -a(t)v(t) - a(t)q(t)(g(v(t-r(t)) + u^*(t-r(t))) - g(u^*(t-r(t))))\\
&- b(t)(f(v(t) + u^*(t)) - f(u^*(t)))\\
&+ b(t)q(t)(f(v(t-r(t)) + u^*(t-r(t))) - f(u^*(t-r(t)))).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Evidemment zéro est une solution pour (6.8). Maintenant, on utilise le théorème de point fixe de Krasnoselskii pour prouver que la solution zéro de (6.8) est asymptotiquement stable. On définit S comme l'espace de Banach de fonctions continues bornées $\phi : [m(0), \infty) \to \mathbb{R}$ avec la norme supremum $\|\cdot\|$ et $m(0) = \inf\{t - r(t),\ t \geq 0\}$. De plus, étant donné une fonction initiale ψ, on dénote la norme de ψ par $\|\psi\| = \sup_{t\in[m(0),0]} |\psi(t)|$, qui ne devrait pas causer de confusion avec le même symbole pour la norme dans S.

Théorème 6.3.1 *Supposons que toutes les conditions du théorème 6.2.1 sont satisfaites, et que f est une fonction localement Lipschitzienne. Supposons que*

$$\int_0^t a(u)du > 0,\ e^{-\int_0^t a(u)du} \to 0,\ t - r(t) \to \infty \text{ quand } t \to \infty,$$

et

$$k\|q\| < 1,$$

et il existe $R > H$ tel que

$$\|b\| \sup_{|u|\leq H+R} |f(u)| < \left(\frac{1}{\delta} - k\beta\right) R - (2k\beta + \theta_1) H - \theta_3, \tag{6.9}$$

et que

$$\|q\| < \frac{(1-k\delta\beta)\,R - 2k\delta\beta H - \delta\,\|b\|\sup_{|u|\leq H+R}|f(u)| - \delta(\theta_1 H + \theta_3)}{(2\delta\,\|a\|+1)\,kR + 4k\delta\,\|a\|\,H + \delta\,\|b\|\sup_{|u|\leq H+R}|f(u)| + \delta(\theta_1 H + \theta_3)}, \tag{6.10}$$

et

$$\begin{aligned}\|\psi\| \leq \{&R - (k\delta(2\,\|a\|\,\|q\| + \beta) + k\,\|q\|)R \\ &- 2k\delta(2\,\|a\|\,\|q\| + \beta)H - \delta\,\|b\|\,(1+\|q\|)\sup_{|u|\leq H+R}|f(u)| \\ &- \delta(1+\|q\|)(\theta_1 H + \theta_3)\}/(1+k\,\|q\|),\end{aligned} \tag{6.11}$$

où

$$\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t e^{\int_{-s}^{t} a(u)du}ds\right| \leq \delta.$$

Alors la solution de (6.8) $v(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Preuve. Selon les conditions (6.9), (6.10) et (6.11), on a

$$\begin{aligned}&2k\delta(2\|a\|\|q\| + \beta)H + [k\delta(2\|a\|\|q\| + \beta) + k\|q\|]R \\ &+ \delta\|b\|(1+\|q\|)\sup_{|u|\leq H+R}|f(u)| + \delta(1+\|q\|)(\theta_1 H + \theta_3) \\ &+ (1+k\|q\|)\|\psi\| \leq R.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Étant donné une fonction initiale ψ, il existe une solution unique v pour (6.8). Soit

$$\mathcal{M}_\psi = \{\phi \in S,\ \|\phi\| \leq R,\ \phi\,(t) = \psi\,(t) \text{ si } t \in [m(0), 0],\ |\phi(t)| \to 0 \text{ quand } t \to \infty\},$$

alors $\mathcal{M}_\psi$ est un ensemble fermé convexe borné de S. On écrit (6.8) comme suit

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}v(t) + a(t)v(t) \\ &= -a(t)q(t)(g(v(t-r(t)) + u^*(t-r(t))) - g(u^*(t-r(t)))) \\ &+ q(t)\frac{d}{dt}(g(v(t-r(t)) + u^*(t-r(t))) - g(u^*(t-r(t)))) \\ &- b(t)(f(v(t) + u^*(t)) - f(u^*(t))) \\ &+ b(t)q(t)(f(v(t-r(t)) + u^*(t-r(t))) - f(u^*(t-r(t)))).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Selon le lemme 6.2.1, cette équation a une solution unique écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(0)e^{-\int_0^t a(u)du} \\
&\quad + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}[-a(s)q(s)(g(v(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-g(u^*(s-r(s)))) \\
&\quad + q(t)\frac{d}{ds}(g(v(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-g(u^*(s-r(s)))) \\
&\quad - b(s)(f(v(s)+u^*(s))-f(u^*(s))) \\
&\quad + b(s)q(s)(f(v(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-f(u^*(s-r(s))))]ds.
\end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
v(t) &= (v(0)-q(0)(g(v(-r(0))+u^*(-r(0)))-g(u^*(-r(0))))e^{-\int_0^t a(u)du} \\
&\quad + q(t)(g(v(t-r(t))+u^*(t-r(t)))-g(u^*(t-r(t)))) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}[-(2a(s)q(s)+q'(s)) \\
&\quad \times (g(v(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-g(u^*(s-r(s)))) \\
&\quad - b(s)(f(v(s)+u^*(s))-f(u^*(s))) \\
&\quad + b(s)q(s)(f(v(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-f(u^*(s-r(s))))]ds.
\end{aligned}$$

Soit $v(t) = \psi(t)$, $t \in [m(0), 0]$, et

$$\begin{aligned}
(L\phi)(t) &= (\psi(0)-q(0)(g(\psi(-r(0))+u^*(-r(0)))-g(u^*(-r(0))))e^{-\int_0^t a(u)du} \\
&\quad + q(t)(g(\phi(t-r(t))+u^*(t-r(t)))-g(u^*(t-r(t)))) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}[-(2a(s)q(s)+q'(s)) \\
&\quad \times (g(\phi(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-g(u^*(s-r(s)))) \\
&\quad - b(s)(f(\phi(s)+u^*(s))-f(u^*(s))) \\
&\quad + b(s)q(s)(f(\phi(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-f(u^*(s-r(s))))]ds.
\end{aligned}$$

Pour tous $\phi \in \mathcal{M}_\psi$, on définit les opérateurs A et B par

$$(A\phi)(t) = \begin{cases} 0, \ t \in [m(0), 0], \\ \\ \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}[-(2a(s)q(s)+q'(s)) \\ \times(g(\phi(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-g(u^*(s-r(s)))) \\ -b(s)(f(\phi(s)+u^*(s))-f(u^*(s))) \\ +b(s)q(s)(f(\phi(s-r(s))+u^*(s-r(s)))]ds, \ t \geq 0, \end{cases}$$

$$(B\phi)(t) = \begin{cases} \psi(t),\ t \in [m(0), 0], \\ \\ (\psi(0) - q(0)(g(\psi(-r(0)) + u^*(-r(0))) - g(u^*(-r(0))))e^{-\int_0^t a(u)du} \\ +q(t)(g(\phi(t - r(t)) + u^*(t - r(t))) - g(u^*(t - r(t)))),\ t \geq 0. \end{cases}$$

(i) Pour tous $x, y \in \mathcal{M}_\psi$, $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ alors

$$\begin{aligned}(By)(t) &= (\psi(0) - q(0)(g(\psi(-r(0)) + u^*(-r(0))) - g(u^*(-r(0))))e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &\quad + q(t)(g(y(t - r(t)) + u^*(t - r(t)) - g(u^*(t - r(t)))) \to 0 \text{ quand } t \to \infty,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}(Ax)(t) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left\{\int_0^t e^{\int_0^s a(u)du}[-(2a(s)q(s) + q'(s)) \right. \\ &\times (g(x(s - r(s)) + u^*(s - r(s))) - g(u^*(s - r(s)))) \\ &- b(s)(f(x(s) + u^*(s)) - f(u^*(s))) \\ &+b(s)q(s)(f(x(s - r(s)) + u^*(s - r(s))) - f(u^*(s - r(s))))]ds\} / e^{\int_0^t a(u)du} \\ &= 0,\end{aligned}$$

donc $\lim_{t\to\infty}(Ax + By)(t) = 0$, et

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}[-(2a(s)q(s) + q'(s)) \right. \\ &\quad \times (g(x(s - r(s)) + u^*(s - r(s))) - g(u^*(s - r(s)))) \\ &\quad - b(s)(f(x(s) + u^*(s)) - f(u^*(s))) \\ &\quad +b(s)q(s)(f(x(s - r(s)) + u^*(s - r(s))) - f(u^*(s - r(s))))]ds| \\ &\quad \leq \left\{(2\|a\|\|q\| + \|q'\|)[\sup_{|x|\leq H+R}|g(x)| + \sup_{|x|\leq H}|g(x)|] \right. \\ &\quad \left. + \|b\|(1 + \|q\|)[\sup_{|x|\leq H+R}|f(x)| + \sup_{|x|\leq H}|f(x)|]\right\}\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}ds\right|,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\leq \delta[(2\|a\|\|q\|+\beta)(k(H+R)+kH)\\ &+\|b\|(1+\|q\|)\sup_{|x|\leq H+R}|f(x)|+\|b\|\frac{\theta_1 H+\theta_3}{\|b\|}(1+\|q\|)]\\ &\leq 2k\delta(2\|a\|\|q\|+\beta)H+k\delta(2\|a\|\|q\|+\beta)R\\ &+\delta\|b\|(1+\|q\|)\sup_{|x|\leq H+R}|f(x)|+\delta(1+\|q\|)(\theta_1 H+\theta_3),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|By\| &= \sup_{t\geq m(0)}|(By)(t)|\\ &= max\{\|\psi\|,\sup_{t\geq 0}|(\psi(0)-q(0)(g(\psi(-r(0))+u^*(-r(0)))-g(u^*(-r(0))))\\ &\times e^{-\int_0^t a(u)du}+q(t)(g(y(t-r(t))+u^*(t-r(t))-g(u^*(t-r(t))))|\}\\ &\leq (1+k\|q\|)\|\psi\|+k\|q\|R.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|Ax+By\| &\leq \|Ax\|+\|By\|\\ &\leq 2k\delta(2\|a\|\|q\|+\beta)H+[k\delta(2\|a\|\|q\|+\beta)+k\|q\|]R\\ &+\delta\|b\|(1+\|q\|)\sup_{|x|\leq H+R}|f(x)|+\delta(1+\|q\|)(\theta_1 H+\theta_3)\\ &+(1+k\|q\|)\|\psi\|.\end{aligned}$$

Selon la condition (6.12), $\|Ax+By\|\leq R$. Ainsi, $Ax+By\in\mathcal{M}_\psi$.

(ii) Pour tous $x\in\mathcal{M}_\psi$, $\|x\|\leq R$, $|(Ax)'(t)|=0$, $t\in[m(0),0]$,

$$\begin{aligned}&\|(Ax)'(t)\|\\ &=\Big\|-a(t)\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}\\ &\times[-(2a(s)q(s)+q'(s))(g(x(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-g(u^*(s-r(s))))\\ &-b(s)(f(x(s)+u^*(s))-f(u^*(s)))\\ &+b(s)q(s)(f(x(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-f(u^*(s-r(s))))]ds\\ &+[-(2a(t)q(t)+q'(t))(g(x(t-r(t))+u^*(t-r(t)))-g(u^*(t-r(t))))\\ &-b(t)(f(x(t)+u^*(t))-f(u^*(t)))\\ &+b(t)q(t)(f(x(t-r(t))+u^*(t-r(t)))-f(u^*(t-r(t))))]\Big\|,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|(Ax)'(t)\| \leq (1+\|a\|\delta)[k(2\|a\|\|q\|+\beta)(2H+R)\\ +\|b\|(1+\|q\|)\sup_{|x|\leq H+R}|f(x)|+(1+\|q\|)(\theta_1 H+\theta_3)],\end{aligned}$$

ici, la dérivée de $(Ax)'(t)$ en zéro signifie la dérivé à gauche lorsque $t \in [m(0),0]$ et la dérivé à droite lorsque $t \geq 0$. On peut voir que $|(Ax)'(t)|$ est borné pour tous $\psi \in \mathcal{M}_\psi$ et $A\mathcal{M}_\psi$ est un ensemble précompact de S. Donc A est compact.

Soit $(x_n) \subset \mathcal{M}_\psi$, $x \in S$, $x_n \to x$ quand $n \to \infty$, alors $|x_n(t)-x(t)| \to 0$ uniformément pour $t \geq m(0)$ quand $n \to \infty$. Puisque

$$\begin{aligned}&\|Ax_n - Ax\|\\ &= \sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}[-(2a(s)q(s)+q'(s))\right.\\ &\times (g(x_n(s-r(s))+u^*(s-r(s))-g(x(s-r(s))+u^*(s-r(s))))\\ &- b(s)(f(x_n(s)+u^*(s))-f(x(s)+u^*(s)))\\ &+b(s)q(s)(f(x_n(s-r(s))+u^*(s-r(s)))-f(x(s-r(s))+u^*(s-r(s))))]ds|\\ &\leq \delta[k(2\|a\|\|q\|+\beta)\|x_n-x\|+k_1\|b\|(1+\|q\|)\|x_n-x\|],\end{aligned}$$

et f est continue, donc $\|Ax_n - Ax\| \to 0$ quand $n \to \infty$ et A est continu.

(iii) Pour tous $x, y \in \mathcal{M}_\psi$,

$$\begin{aligned}&\|Bx-By\|\\ &= \sup_{t\geq 0}|q(t)[g(x(t-r(t))+u^*(t-r(t)))-g(y(t-r(t))+u^*(t-r(t)))]|\\ &\leq k\|q\|\|x-y\|,\end{aligned}$$

donc B est un opérateur de contraction.

Selon le théorème de point fixes de Krasnoselskii, il existe un $\phi \in \mathcal{M}_\psi$ tel que $(A+B)\phi = \phi$ et ϕ est une solution pour (6.8). Parce que la solution ψ pour l'équation est unique, la solution $v(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. ∎

Quand f et g sont localement Lipschitziennes, H dans le théorème 6.2.1 et R dans le théorème 6.3.1 existent, il existe des constantes $P, k > 0$ telles que $|f(v(t)+u^*(t))-f(u^*(t))| < P|v(t)|$ et $|g(v(t)+u^*(t))-g(u^*(t))| < k|v(t)|$. Puisque ϕ

satisfait

$$\begin{aligned}\phi(t) &= (\psi(0) - q(0)(g(\psi(-r(0)) + u^*(-r(0))) - g(u^*(-r(0))))e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &+ q(t)(g(\phi(t-r(t)) + u^*(t-r(t))) - g(u^*(t-r(t)))) \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}[-(2a(s)q(s) + q'(s)) \\ &\times (g(\phi(s-r(s)) + u^*(s-r(s))) - g(u^*(s-r(s)))) \\ &- b(s)(f(\phi(s) + u^*(s)) - f(u^*(s))) \\ &+ b(s)q(s)(f(\phi(s-r(s)) + u^*(s-r(s))) - f(u^*(s-r(s))))]ds,\end{aligned}$$

alors

$$\|\phi\| \leq (1 + k\|q\|)\|\psi\| + k\|q\|\|\phi\| + \delta[k(2\|a\|\|q\| + \beta)\|\phi\| + \|b\|(1 + \|q\|)P\|\phi\|],$$

donc

$$[1 - k\|q\| - \delta k(2\|a\|\|q\| + \beta) - \delta\|b\|(1 + \|q\|)P]\|\phi\| \leq (1 + k\|q\|)\|\psi\|.$$

Alors il est clairement existe un $\sigma > 0$ pour chaque $\epsilon > 0$ tel que $|\phi(t)| < \epsilon$ pour tout $t \geq m(0)$ si $\|\psi\| < \sigma$. Ainsi, on a le théorème suivant.

Théorème 6.3.2 *Si P et k sont tels que*

$$1 - k\|q\| - \delta k(2\|a\|\|q\| + \beta) - \delta\|b\|(1 + \|q\|)P > 0.$$

Alors la solution zéro pour (6.8) est stable.

Conclusion

Dans ce travail, on a abordé des questions sur l'existence, l'unicité, périodicité, positivité, stabilité et stabilité asymptotique pour quelques classes d'équations différentielles non linéaires neutres à retard. On a essayé de donner de nouvelles conditions pour assurer ces propriétés quantitatives et qualitatives.

La technique principale utilisée pour ce type d'équations est la technique de point fixe qui montre dans cette thèse sont efficacité. Ces classes d'équations donc font partie au nombre de problèmes qui ont résisté à la méthode directe de Lyapunov.

Dans le perspective du futur on va essayer de trouve des résultats sur la fonction de Green d'une équation différentielle de quatrième degré, et en général la plupart des systèmes d'équations différentielles à retards restes encore des problèmes ouvertes. C'est dans ces directions ainsi que dans l'étude des équations fractionnaires à retards, qu'on a envisagé de poursuivre nos travaux.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, S. R. Grace, D. O'Regan, *Oscillation theory for difference and functional differential equations*, Kluwer Academic, (2000).

[2] A. Ardjouni, *A Contribution to the existence, boundedness and stability by fixed point theory in delay functional differential equations*, A doctoral thesis presented at the Badji- Mokhtar university of Annaba (2013).

[3] A. Ardjouni, A. Djoudi, A. Rezaiguia, *Existence of positive periodic solutions for two types of third-order nonlinear neutral differential equations with variable delay*, Applied Mathematics E-Notes, 14 (2014), 86-96.

[4] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Existence of periodic solutions for a second-order nonlinear neutral differential equation with variable delay*, Palestine Journal of Mathematics, Vol. 3(2) (2014), 191-197.

[5] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Existence of periodic solutions for a second order nonlinear neutral differential equation with functional delay*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 31 (2012), 1-9.

[6] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Existence of positive periodic solutions for a nonlinear neutral differential equations with variable delay*, Applied Mathematics E-Notes, 12 (2012), 94-101.

[7] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Fixed point and stability in neutral nonlinear differential equations with variable delays*, Opuscula Mathematica, VoL. 32, No. 1 (2012), 5-19.

[8] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays*, Nonlinear Analysis, 74 (2011), 2062-2070.

[9] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Fixed point and stability in nonlinear neutral volterra integro-differental equations with variable delays*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 28 (2013), 1-13.

[10] A. Ardjouni, A. Djoudi, I. Soualhia, *Stability for linear neutral integro-differential equations with variable delays*, Electron. J. Differ. Equ. Vol. 2012, No. 172 (2012), 1-14.

[11] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Periodic solutions for a second-order nonlinear neutral differential equation with variable delay*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2011, No. 128 (2011), 1-7.

[12] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Periodic solutions in totally nonlinear dynamic equations with functional delay on a time scale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino Vol. 68, 4 (2010), 349-359.

[13] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Stability in nonlinear neutral differential with variable delays using fixed point theory*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 43 (2011), 1-11.

[14] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Stability in totally nonlinear neutral differential equations with variable delays*, Acta. Math. Univ. Comenianae. Vol. LXXXIII, 1 (2014), 119-134.

[15] C. Avramescu, C. Vladimirescu, *Some remarks on Krasnoselskii's fixed point theorem*, Fixed Point Theory, Volume 4, No. 1 (2003), 3-13.

[16] C. Avramescu, *On a fixed point theorem*, Studii si Cercetari Matematice, 9, Tome 22, 2 (1970), 215-220.

[17] D. D. Bainov, D. P. Mishev, *Oscillation theory for neutral differential equations with delay*, Adam Hilger, (1991).

[18] L. C. Becker, T. A. Burton, *Stability, fixed points and inverse of delays*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 136 A (2006), 245-275.

[19] A. Bouakkaz, *Technique de points fixes et applications aux équations différentielles fonctionnelles non linéaires à retard*, A doctoral thesis presented at the Badji-Mokhtar university of Annaba (2018).

[20] T. A. Burton, *Fixed points and stability of a nonconvolution equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 3679-3687.

[21] T. A. Burton, *Liapunov functionals, fixed points and stability by Krasnoselskii's theorem*, Nonlinear Stud. 9, No. 2 (2002), 181-190.

[22] T. A. Burton, *Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations*, Dover Publications, New York, (2006).

[23] T. A. Burton, T. Furumochi, *A note on stability by Schauder's theorem*, Funkcialaj Ekvacioj 44 (2001), 73–82.

[24] T. A. Burton, T. Furumochi, *Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems*, Dynamic Systems and Applications 11 (2002), 499–519.

[25] T. A. Burton, T. Furumochi, *Fixed points and problems in stability theory for ordinary and functional differential equations*, Dynamic Systems and Appl. 10 (2001), 89-116.

[26] T. A. Burton, T. Furumochi, *Krasnoselskii's fixed point theorem and stability*, Nonlinear Analysis 49 (2002), 445–454.

[27] A. Cabada, *Green's functions in the theory of ordinary differential equations*, Springer, New York (2014).

[28] T. Candan, *Existence of nonoscillatory solutions of first-order nonlinear neutral differential equations*, Appl. Math. Lett., 26 (2013), 1182-1186.

[29] T. Candan, *Existence of nonoscillatory solutions to first-order neutral differential equations*, Electron. J. Diff. Equ. 39 (2016), 1-11.

[30] T. Candan, *Existence of positive periodic solutions of first-order neutral differential equations*, Math. Methods Appl. Sci. 40 (2017), 205-209.

[31] T. Candan, *Existence of positive periodic solutions of first-order neutral differential equations with variable coefficients*, Applied Mathematics Letters 52 (2016), 142-148.

[32] T. Candan, R. S. Dahiya, *Existence of nonoscillatory solutions of first and second order neutral differential equations with distributed deviating arguments*, J. Franklin Inst., 347 (2010), 1309-1316.

[33] M. P. Chen, J. S. Yu, Z. C. Wang, *Nonoscillatory solutions of neutral delay differential equations*, Bull. Austral. Math. Soc., 48 (3) (1993), 475-483.

[34] F. D. Chen, J. L. Shi, *Periodicity in a nonlinear predator-prey system with state dependent delays*, Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 21, no. 1 (2005), 49-60.

[35] F. D. Chen, *Positive periodic solutions of neutral Lotka-Volterra system with feedback control*, Appl. Math. Comput. 162, No. 3 (2005), 1279-1302.

[36] S. Cheng, G. Zhang, *Existence of positive periodic solutions for non-autonomous functional differential equations*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2001, No. 59 (2001), 1-8.

[37] Z. Cheng, J. Ren, *Existence of positive periodic solution for variable coefficient third-order differential equation with singularity*, Math. Meth. Appl. Sci., 37 (2014), 2281-2289.

[38] Z. Cheng, Y. Xin, *Multiplicity results for variable coefficient singular third-order differential equation with a parameter*, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2014, Article ID 527162, 1-10.

[39] H. Deham, A. Djoudi, *Existence of periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with variable delay*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010, No. 127 (2010), 1-8.

[40] H. Deham, A. Djoudi, *Periodic solutions for nonlinear differential equation with functional delay*, Georgian Mathematical Journal 15, No. 4 (2008), 635-642.

[41] I. Derrardjia, A. Ardjouni, A. Djoudi, *Stability by Krasnoselskii's theorem in totally nonlinear neutral differential equations*, Opuscula Mathematica, VoL. 33, No. 2 (2013), 255-272.

[42] Y. M. Dib, M. R. Maroun, Y. N. Rafoul, *Periodicity and stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2005, No. 142 (2005), 1-11.

[43] L. Ding, Z. Li, *Periodicity and stability in neutral equations by krasnoselskii's fixed point theorem*, Nonlinear Analysis : Real World Applications 11 (2010), 1220-1228.

[44] A. Djoudi, R. Khemis, *Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays*, Georgian Math. J. Vol 13 No. 1 (2006), 25-34.

[45] R. D. Driver, , *Ordinary and delay differential equations*, Vol. 20. Spring-Verlag New York, (1977).

[46] E. Eder, *The functional differential equation $x'(t) = x(x(t))$*, Journal of Differential Equations 54 (1984), 390-400.

[47] L. H. Erbe, Q. K. Kong, B. G. Zhang, *Oscillation theory for functional differential equations*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1995).

[48] M. Fan, K. Wang, P. J. Y. Wong, R. P. Agarwal, *Periodicity and stability in periodic n-species Lotka-Volterra competition system with feedback controls and deviating arguments*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. 19, no. 4 (2003), 801-822.

[49] M. Feckan, *On certain type of functional differential equations*, Mathematica Slovaca 43 (1993), 39-43.

[50] H. I. Freedman, J. Wu, *Periodic solutions of single-species models with periodic delay*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 689-701.

[51] H. Gabsi, *Etude de l'existence de solutions et de la stabilité pour certaines equations différentielles fonctionnelles intégro-différentielles à retard par la technique de point fixe*, A doctoral thesis presented at the Badji- Mokhtar university of Annaba (2018).

[52] L. Glass, M. C. Mackey, *Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems*, Ann. New York Acad. Sci., 316 (1979), 214-235.

[53] K. Gopalsamy, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer, Derdrecht, (1992).

[54] M. Gregus, *Third order linear differential equations*, Reidel, Dordrecht, (1987).

[55] I. Györi, G. Ladas, *Oscillation theory of delay differential equations with applications*, Clarendon Press, Oxford, (1991).

[56] J. K. Hale, *Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional differential equations*, Journal of Differential Equations 1.4 (1965), 452-482.

[57] J. K. Hale, *Theory of functional differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol 3 Spring-Verleg New York Inc, (1977).

[58] C. H. Jin, J. W. Luo, *Fixed points and stability in neutral differential equations with variable delays*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 136, Nu. 3 (2008), 909-918.

[59] C. H. Jin, J. W. Luo, *Stability in functional differential equations established using fixed point theory*, Nonlinear Anal. 68 (2008), 3307-3315.

[60] S. D. Kendre, V. V. Kharat, R. Narute, *On existence of solution for iterative integro-differential equations*, Nonlinear Analysis and Differential Equations 3 (2015), 123-131.

[61] F. Kong, *Existence of nonoscillatory solutions of a kind of first-order neutral differential equation*, Math. Commun. 22 (2017), 151-164.

[62] M. A. Krasnoselskii, *Some problems of nonlinear analysis*, American Mathematical Society Translations, Ser. 2, 10 (1958), 345-409.

[63] Y. Kuang, *Delay differential equations with application in population dynamics*, Academic Press, New York, (1993).

[64] B. Liua, C. Tunc, *Pseudo almost periodic solutions for a class of first order differential iterative equations*, Appl. Math. Lett. 40 (2015), 29–34.

[65] Y. Liu, W. Ge, *Positive periodic solutions of nonlinear Duffing equations with delay and variable coefficients*, Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 20 (2004), 235-255.

[66] W. G. Li, Z. H. Shen, *An constructive proof of the existence theorem for periodic solutions of duffing equations*, Chinese Sci. Bull. 42 (1997), 1591-1595.

[67] B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Existence of positive periodic solutions for two type of third order nonlinear neutral differential equations with variable coefficients*, Diff. Eq. and control process, N0 03 (2018), 46-63.

[68] B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Existence and uniqueness of nonoscillatory solutions of first-order neutral differential equations by using Banach's theorem*, Proc. Of the Institute of Maths. and Mechanics, National Academy of Sci. Of Azerbaijan. V. 45, N0 1 (2019), 15-30.

[69] B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Periodicity and continuous dependance in iterative differential equations*, Rend. Cont. Circ. Palermo serie 2 DOI 101007.

[70] B. Mansouri, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Periodicity and stability in neutral differential equations by Krasnoselskii fixed point theorem*, Cubo a Mathematecal Journal, V. 19, No 03 (2017), 15-29.

[71] F. Nouioua, A. Ardjouni, A. Djoudi, *Periodic solutions for a third-order delay differential equation*, Applied Mathematics E-Notes, 16 (2016), 210-221.

[72] D. O'Regan, *Fixed point theory for the sum of two operators*, Appl. Math. Lett. 9 (1) (1996), 1-8.

[73] J. Ren, S. Siegmund, Y. Chen, *Positive periodic solutions for third-order nonlinear differential equations*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2011, No. 66 (2011), 1-19.

[74] J. G. Si, X. P. Wang, *Analytic solutions of a second-order iterative functional differential equation*, Computers and Mathematics with Applications 43 (2002), 81-90.

[75] D. R. Smart, *Fixed points theorems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1980).

[76] S. Stanek, *Global properties of solutions of the functional differential equations* $x(t)x'(t) = Kx(x(t)), 0 < |K| < 1$, Functional Differential Equations 9 (2002), 527-550.

[77] C. Tunc, *On the existence of periodic solutions of functional differential equations of the third order*, Appl. Comput. Math. 15(2) (2016), 189–199.

[78] C. Tunc, S. Erdur, *New qualitative results for solutions of functional differential equations of second order*, Discrete Dyn. Nat. Soc. 2018 (2018), 1–13.

[79] Y. Wang, H. Lian, W. Ge, *Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation*, Applied Mathematics Letters 20 (2007), 110-115.

[80] X. P. Wang, J. G. Si, *Analytic solutions of an iterative functional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 262 (2001), 490-498.

[81] K. Wang, *On the equation* $x'(t) = f(x(x(t)))$, Funkcialaj Ekvacioj 33 (1990), 405-425.

[82] Q. Wang, *Positive periodic solutions of neutral delay equations* (in Chinese), Acta Math. Sinica (N.S.) 6 (1996), 789-795.

[83] D. Yang, W. Zhang, *Solutions of equivariance for iterative differential equations*, Applied Mathematics Letters 17 (2004), 759-765.

[84] E. Zeidler, *Nonlinear analysis and its applications I : Fixed point theorems*, Springer-Verlag, (1985).

[85] W. Zeng, *Almost periodic solutions for nonlinear duffing equations*, Acta Math. Sinica (N.S.) 13 (1997), 373-380.

[86] G. Zhang, S. Cheng, *Positive periodic solutions of non autonomous functional differential equations depending on a parameter*, Abstr. Appl. Anal. 7 (2002), 279-286.

[87] W. Zhang, W. Feng, J. Yan, J. Song, *Existence of nonoscillatory solutions of first-order linear neutral delay differential equations*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 1021-1027.

[88] H. Y. Zhao, M. Feckan, *Periodic solutions for a class of differential equations with delays depending on state*, Math. Commun. 23 (2018), 29-42.

[89] H. Y. Zhao, J. Liu, *Periodic solutions of an iterative functional differential equation with variable coefficients*, Math. Meth. Appl. Sci 40 (2017), 286-292.

[90] Y. Zhou, B. G. Zhang, *Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral differential equations with positive and negative Coefficients*, Appl. Math. Lett., 15 (2002), 867-874.