

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR -ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA**

**جامعة باجي مختار  
- عنابة -**

**Faculté des Sciences**

**Année : 2017/2018**

**Département de Mathématiques**

# **THÈSE**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
Doctorat en Mathématiques

## **TITRE**

**ANALYSE STOCHASTIQUE DES VALEURS PROPRES DES  
MATRICES ALEATOIRES A VALEURS G-BROWNIENNES**

**Option**

Modélisation Mathématiques-Probabilités et Statistique

**Par**

**MERADJI Selma**

**DIRECTEUR DE THÈSE : BOUTABIA Hacène Prof U.B.M. Annaba**  
Devant le jury

**PRESIDENT : DJELLAB Natalia Prof U.B.M. Annaba**

**EXAMINATEUR : BOUZEBDA Salim Prof U.T.Compiègne**

**EXAMINATEUR : FELLAG Hocine Prof U.M.M.Tizi Ouzou**

**EXAMINATEUR : ZEGHDOUDI Halim M.C.A U.B.M. Annaba**

# Table des matières

Résumé(en arabe)	iv
Résumé	v
Abstract	vi
Remerciements	vii
Dédicaces	ix
Introduction	xi
<b>1 Notions de base sur le <math>G</math>-calcul stochastique</b>	<b>1</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	1
1.1.1 Espérance sous linéaire . . . . .	1
1.1.2 Distributions et indépendance . . . . .	3
1.1.3 Distribution $G$ -normale et $G$ -mouvement Brownien	5
<b>2 <math>G</math>-calcul stochastique matriciel</b>	<b>9</b>
2.1 $G$ -Espérance conditionnelle . . . . .	9
2.2 $G$ -Intégrales stochastiques . . . . .	12
2.3 $G$ -Formule d'Itô . . . . .	15
<b>3 <math>G</math>-équations différentielles stochastiques matricielles d'un <math>G</math>-processus de Wishart</b>	<b>20</b>
3.1 Description du modèle ( $G$ -Wishart avec dérive) . . . . .	20
3.2 $G$ -équations différentielles stochastiques des valeurs propres	22
3.3 $G$ -équations différentielles stochastiques des vecteurs propres	29
3.4 Cas du $G$ -processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	32
3.5 Temps de collision . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Appendice A</b>	<b>38</b>
4.1	Algèbre matricielle . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Appendice B</b>	<b>41</b>
5.1	Processus et analyse stochastique de base . . . . .	41
5.1.1	L'Argument de McKean . . . . .	42

---

# UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR DE ANNABA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

## Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **Doctorat 3<sup>ième</sup> cycle**

Par

**MERADJI Selma**

Intitulé :

**Analyse stochastique des valeurs propres des matrices aléatoires  
à valeurs  $G$ -browniennes**

## Option

Probabilités et Statistique

Année : 2018

Directeur de thèse : BOUTABIA *Hacène* Prof. U.B.M. Annaba

Membres du Jury

Président : DJELLAB Natalia	Prof. U.B.M.A.
Rapporteur : BOUTABIA <i>Hacène</i>	Prof. U.B.M.A.
Examineur : BOUZEBDA Salim	Prof. U.T.Compiègne
Examineur : FELLAG Hocine	Prof. U.M.M.Tizi Ouzou
Examineur : ZEGHDOUDI Halim	M.C.A U.B.M.A.

# Résumé(en arabe)

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو إعطاء نظام لحي-معادلات التفاضلية الستوكاستيكية للقيم الذاتية والأشعة الذاتية لنمط جي-وشارت مع الانحراف, معرف عن طريق مصفوفة جي-الحركة البراونية كما في الحالة الكلاسيكية

بما أننا لانملك بالضرورة الاستقلالية بين عناصر مصفوفة جي-الحركة البراونية, نفترض في هذا النموذج أن تبايناتها التربيعية معدومة. كما تم الحصول على نتيجة تشير إلى أن القيم الذاتية لا تلتقي أبدا

هذه النتائج هي تمديد للنتائج المحصل عليها من طرف برو (1989) والتي تهتم بدراسة نمط وشارت الكلاسيكي

الكلمات المفتاحية: جي-مصفوفة الحركة البراونية، نمط جي-وشارت ، المصفوفات العشوائية، القيم الذاتية، الأشعة

# Résumé

L'objectif principal de cette thèse est de donner le système de  $G$ -EDS pour les valeurs propres et les vecteurs propres d'un  $G$ -processus de Wishart avec dérive, défini à partir d'un  $G$ -mouvement Brownien matriciel comme dans le cas classique. Puisque on n'a pas nécessairement l'indépendance entre les entrées du  $G$ -mouvement Brownien matriciel, on suppose dans notre modèle que leurs covariances quadratiques sont nulles. Un résultat intermédiaire qui indique que les valeurs propres ne se rencontrent jamais a été également obtenu. Ceci étend les résultats de Bru obtenus pour un processus de Wishart classique (1989).

**Mots-clés :**  $G$ -mouvement Brownien matriciel,  $G$ -processus de Wishart, matrices aléatoires, valeurs propres, vecteurs propres.

# Abstract

The main objective of this thesis is to give the system of  $G$ -SDEs for the eigenvalues and the eigenvectors of the  $G$ -Wishart process with drift, defined from a  $G$ -Brownian motion matrix as in the classical case. Since we haven't necessarily the independence between the entries of the  $G$ -Brownian motion matrix, we assume in our model that their quadratic co-variations are zero. An intermediate result which states that the eigenvalues never collide was also obtained. This extends Bru's results obtained for the classical Wishart process (1989).

**Key words :**  $G$ -Brownian motion matrix,  $G$ -Wishart process, random matrices, eigenvalues, eigenvectors.

# Remerciements

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce modeste travail que j'ai tant attendu et espéré.

Je tiens tout d'abord à adresser ma gratitude la plus profonde et mes remerciements les plus chaleureux à mon directeur de thèse, Prof. Boutabia Hacène, qui a supervisé mon travail et m'a aiguillé vers un sujet de thèse original et exigeant, pour son aide précieuse, ses conseils, ses encouragements qui m'ont permis de mener à bien cette thèse et pour toutes les belles mathématiques qu'il m'a inlassablement fait découvrir. Je lui suis aussi reconnaissante pour son enthousiasme en tant que chercheur et pour sa disponibilité sans faille. Qu'il soit remercié pour avoir guidé mes pas de jeune chercheur.

Je suis très honorée de la présence du Prof. Djellab Nathalia. Je tiens à la remercier chaleureusement et à lui assurer ma profonde reconnaissance pour avoir accepté d'évaluer cette thèse et d'en présider le jury.

J'exprime aussi mes très sincères remerciements au Prof. Bouzebda Salim et au Prof. Fellag Hocine, d'avoir accepté la lourde tâche d'examiner ma thèse, pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce manuscrit. Je les remercie pour le déplacement qu'ils ont fait pour faire partie de mon jury.

Je remercie vivement Zeghdoudi Halim Maître de Conférences A, pour avoir accepté d'assister à la soutenance et pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse.

Au cours de ces cinq années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire LaPS de l'université Badji Mokhtar Annaba pour mener à bien ce projet. Un grand merci à tous les membres du Laboratoire LaPS.

A titre plus amical, Je ne saurai comment remercier mon amie Stihi Sara, qui m'a toujours aidé à aller de l'avant. Je tiens à la remercier surtout pour son soutien moral indéfectible dans les moments difficiles et ses

---

nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Qu'il me soit enfin permis d'exprimer toute ma gratitude à mes parents, qui m'ont tant encouragé et soutenu dans mon travail, c'est grâce à eux que j'ai pu entreprendre des études longues, dont cette thèse est l'aboutissement. Je veux aussi remercier ma famille, qui a toujours été un soutien à mes côtés, ainsi que mes camarades et amis qui m'ont entouré pendant la préparation de la thèse.

Et pour finir, merci à toutes les personnes que j'ai oubliées de citer et qui m'ont permis de mener à bien cette thèse.

# Dédicaces

## **A ma très chère mère**

Autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour toi.

Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, tu as toujours été présente à mes côtés pour me consoler quand il fallait. En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçois ce travail en signe de ma vive reconnaissance et mon profond estime.

Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

## **A mon très cher père**

Autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes soit-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance.

Tu as su m'inculquer le sens de la responsabilité, de l'optimisme et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie. Tes conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite. Ta patience sans fin, ta compréhension et ton encouragement sont pour moi le soutien indispensable que tu as toujours su m'apporter. Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain

et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir. que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur, quiétude de l'esprit et te protège de tout mal.

## **A mon très cher mari Seif el Islem**

Ton encouragement et ton soutien étaient la bouffée d'oxygène qui me ressourçait dans les moments pénibles, de solitude et de souffrance. Merci d'être toujours à mes côtés, par ta présence, par ton amour dévoué et ta

---

tendresse, pour donner du goût et du sens à notre relation. En témoignage de mon amour, de mon admiration et de ma grande affection , je te prie de trouver dans ce travail l'expression de mon estime et mon sincère attachement. Je prie Dieu le tout puissant pour qu'il te donne bonheur et prospérité.

### **A ma soeur et ma très chère amie Sara**

je te remercie pour ton amitié chère à mon cœur. Je suis chanceuse de t'avoir à mes côtés, et je te souhaite tout le bonheur du monde ma soeur.

### **A mes très chères soeurs Asma et Imen et le mari de ma soeur**

Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité. je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

### **A mes très chers frères Bilel et Amine**

Pour toute l'ambiance dont vous m'avez entouré, pour toute la spontanéité et vos élans chaleureux, Je vous dédie ce travail .

Puisse Dieu le tout puissant exhausser tous vos vœux.

### **A la petite fille de ma soeur ma belle serine**

Aucun mot ne pourrait exprimer l'attachement, l'amour et la tendresse que j'éprouve pour toi.

Je prie le bon Dieu de me donner la force et les moyens pour prendre soin de toi ma belle serine.

### **A mes grands parents**

Veillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection.

### **A mes beaux parents**

Je ne pourrais jamais exprimer le respect que j'ai pour vous. Vos prières, vos encouragements et votre soutien m'ont toujours été d'un grand secours. Puisse Dieu, le tout puissant vous préserver du mal, vous combler de santé, de bonheur et vous procurer. une longue vie.

# Introduction

Les matrices aléatoires ont été largement développées ces dernières années comme une branche des mathématiques, mais aussi comme applications dans de nombreux domaines de sciences comme la physique, la biologie, la génétique des populations, les finances, la météorologie et l'océanographie, etc...[2]. Le premier ensemble de matrices aléatoires étudié est l'ensemble de Wishart, introduit par celui-ci [25] en 1928 dans le contexte de l'analyse de données multivariées. Bien avant Wigner, a introduit les ensembles gaussiens standards de matrices aléatoires dans la littérature physique. En physique, les matrices de Wishart sont apparues dans de multiples domaines notamment en physique nucléaire, en gravité quantique et aussi dans plusieurs problèmes de physique statistique. D'autre part, de nombreuses études sur le comportement asymptotique des valeurs propres de matrices aléatoires ont été réalisées, en particulier par L. Pastur, M. Shcherbina [34]. Dans un autre contexte, Girko [14] a utilisé la technique des perturbations pour donner les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres pour un processus matriciel avec des incréments indépendants.

Parallèlement à cela, La notion de  $G$ -espérance s'est développée très récemment et a ouvert la voie à l'introduction de variables aléatoires  $G$ -normales, du  $G$ -mouvement Brownien et plus généralement des  $G$ -intégrales stochastiques de type Itô, en vertu de laquelle Peng [38, 39, 41] a introduit également la  $G$ -normale distribution et le concept du  $G$ -mouvement Brownien correspondant. Peng dans [40] et [35] a systématiquement développé le calcul stochastique sous la  $G$ -espérance.

Le  $G$ -mouvement Brownien est un processus stochastique avec des incréments stationnaires et indépendants et son processus de variation quadratique est, contrairement au cas classique, un processus non déterministe. De plus, un calcul d'Itô pour le  $G$ -mouvement Brownien a été développé récemment dans [48], [50] et [54].

Dans cette thèse, le but principal est de dériver à partir de l'équa-

tion différentielle stochastique (EDS) satisfaite par un processus matriciel  $G$ -Wishart avec dérive, un système des EDS pour ses valeurs propres et ses vecteurs propres et de prouver que les valeurs propres ne se rencontrent jamais. Comme dans le cas classique, le processus matriciel  $G$ -Wishart avec dérive est défini par  $X_t = (B_t + \eta t)^T (B_t + \eta t)$ , où  $\eta$  est une matrice déterministe et  $(B_t)$  est un  $G$ -mouvement Brownien matriciel de dimension  $n \times n$ , le processus stochastique matriciel  $X_t$  prend ses valeurs dans l'espace des matrices symétriques d'ordre  $n$ . En fait, nos résultats sont une généralisation des travaux réalisés par Bru [5] et par E. Mayerhofer et al [26] dans le sens que le mouvement Brownien classique est remplacé par un  $G$ -mouvement Brownien. Les principales difficultés résident dans les faits que la  $G$ -espérance n'est pas linéaire et que la variation quadratique  $\langle B \rangle$  n'est pas un processus déterministe. La notion d'indépendance des variables aléatoires par rapport à une espérance non linéaire étant délicate, on suppose dans notre modèle que  $\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle = 0$  si  $(i, j) \neq (k, l)$  et  $\langle B^{ij} \rangle$  ne dépend que de  $j$ .

Notre thèse est composée de trois chapitres, de deux appendices A et B et d'une conclusion générale.

le premier chapitre est un rappel de quelques notations de bases et préliminaires de l'espérance non linéaire et des espaces d'espérance non linéaire associés et de certaines définitions qu'on utilisera par la suite à savoir les notions de distribution et d'indépendance par rapport à une espérance sous linéaire. On introduit aussi le concept du  $G$ -mouvement Brownien et les  $G$ -intégrales stochastiques de type Itô en passant par les définitions et les propriétés nécessaires, ainsi que le processus à variation quadratique associé.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'étude du  $G$ -calcul stochastique matriciel, où on a adapté ces définitions citées dans le chapitre 1 au cas matriciel. On a également formulé la  $G$ -formule d'Itô dans le cas matriciel.

Le troisième chapitre contient l'essentiel de la thèse, où on trouve les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres d'un processus solution d'une équation différentielle stochastique gouvernée par un  $G$ -mouvement Brownien. A cet effet, une étude particulière a été réalisée concernant le  $G$ -processus de Wishart associé à un  $G$ -mouvement Brownien avec dérive ainsi que celui associé à un  $G$ -processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Un résultat intermédiaire sur le temps de collision des valeurs propres a été également prouvé.

Dans l'appendice A on présente quelques notations d'algèbre matricielle qui seront utilisées tout au long de ce travail.

---

Dans l'appendice B on donne quelques notions de base sur le calcul matriciel et les processus matrices en général.

Enfin, on termine par une conclusion et quelques perspectives.

Ce travail a été couronné par la production scientifique suivante :

**•Publications internationales :**

1—Stochastic differential equations for eigenvalues and eigenvectors of a  $G$ –Wishart process with drift by Selma Meradji, Hacène Boutabia and Sara Stihi, to appear in "Ukrainian Mathematical Journal".

2—Stochastic differential equations for random matrices processes in the nonlinear framework, Sara Stihi, Hacène Boutabia, Selma Meradji, to appear in "Opuscula Mathematica" **38**,2 (2018).

**•Communications internationales :**

1—Les notations de base et les préliminaires de  $G$ –calcul stochastique, Selma Meradji, Hacène Boutabia and Sara Stihi, 6th Operational Research Practice in Africa Conference (ORPA'2015, 20 – 22 Avril 2015, à Algiers, Algeria).

2—L'intégrale stochastique dans le cadre non linéaire, Selma Meradji and Hacène Boutabia, 20ème Colloque de la SMT (16 – 19 Mars 2015, à Sousse, Tunisie).

3—Convergence de densité spectrale dans l'ensemble de Wishart, Stihi Sara, Hacène Boutabia and Selma Meradji, 6th Operational Research Practice in Africa Conference (ORPA' 2015, 20 – 22 Avril 2015, à Algiers, Algeria).

4—The local time under sublinear expectations and applications, Selma Meradji, Hacène Boutabia and Sara stihi, Conference-School on Discrete Mathematics and Computer Science (DIMACOS'15, 15 – 19 Novembre 2015, à Sidi Bel Abbès).

5—Stochastic calculus for matrix fractional Brownian motion and applications, Sara Stihi, Hacène Boutabia and Selma Meradji, Conference-School on Discrete Mathematics and Computer Science (DIMACOS'15, 15 – 19 Novembre 2015, à Sidi Bel Abbès).

**•Communications nationales :**

1—Le  $G$ –calcul stochastique matriciel, Selma Meradji, Hacène Boutabia and Sara Stihi, Journées Jeunes Chercheurs (JJC'2014, 30 Septembre–01 Octobre 2014, à Annaba).

2—Le calcul stochastique dans le cadre non linéaire, Selma Meradji and Hacène Boutabia, Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées (JNMA'2014, 26 – 27 Novembre 2014, à Skikda).

3—The application of the  $G$ -Itô's formula in the set of matrices, Selma Meradji and Hacène Boutabia, 2<sup>ème</sup> Journées Ouvertes sur les Mathématiques et l'Informatique (JOMI'2015 , 25 – 26 Mai 2015, à Tebessa).

# Chapitre 1

## Notions de base sur le $G$ -calcul stochastique

Dans ce chapitre, on introduit quelques notations et préliminaires notamment sur la théorie d'espérance sous linéaire, le  $G$ -mouvement Brownien lié à la distribution  $G$ -normale, qui seront utilisées tout au long de ce travail. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [21, 22, 24, 36, 40, 41, 50, 52].

### 1.1 Préliminaires

#### 1.1.1 Espérance sous linéaire

Soit  $\Omega$  un ensemble donné et soit  $\mathcal{H}$  un espace linéaire de fonctions à valeurs réelles définies sur  $\Omega$ , tel que  $c \in \mathcal{H}$  pour chaque constante  $c$  et  $|X| \in \mathcal{H}$  si  $X \in \mathcal{H}$ .  $\mathcal{H}$  est considéré comme l'espace des variables aléatoires.

**Définition 1.1.1** Une espérance sous linéaire sur  $\mathcal{H}$  est une fonction  $\hat{E} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant les propriétés suivantes :

Pour tout  $X, Y \in \mathcal{H}$ , on a

- 1 Monotonie :  $\hat{E}[X] \geq \hat{E}[Y]$  si  $X \geq Y$ .
- 2 Préservation des constantes :  $\hat{E}[c] = c$ , pour tout  $c \in \mathbb{R}$ .
- 3 Sous-additivité :  $\hat{E}[X] - \hat{E}[Y] \leq \hat{E}[X - Y]$ .
- 4 Homogénéité positive :  $\hat{E}[\lambda X] = \lambda \hat{E}[X]$ , pour tout  $\lambda \geq 0$ .

le triplet  $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E})$  est appelé espace d'espérance sous linéaire.

Si seulement (1) et (2) sont satisfaites,  $\hat{E}$  est appelée espérance non linéaire.

Si l'inégalité (3) est une égalité, alors  $\hat{E}$  est une espérance linéaire classique, i.e.,  $\hat{E}$  est une fonction linéaire satisfaisant (1) et (2).

**Remarque 1.1.1** En fait (3) et (4) impliquent la propriété de convexité suivante :

$$\hat{E}[\alpha X + (1 - \alpha) Y] \leq \alpha \hat{E}[X] + (1 - \alpha) \hat{E}[Y] \quad \text{pour } \alpha \in [0, 1].$$

Notons que la propriété (4) est équivalente à la propriété suivante :

$$\hat{E}[\lambda X] = \lambda^+ \hat{E}[X] + \lambda^- \hat{E}[-X] \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R},$$

où  $\lambda^+ = \max(\lambda, 0)$  et  $\lambda^- = \max(-\lambda, 0)$ .

Dans toute la suite on désigne par  $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}^n$  telles que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C \left(1 + |x|^k + |y|^k\right) |x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $C > 0$  dépendant uniquement de  $\varphi$ .

**Théorème 1.1.1** (c.f. [4, 37]) Soit  $\hat{E}$  une espérance sous linéaire définie sur un espace linéaire  $\mathcal{H}$ , alors il existe une famille de mesures de probabilités  $\mathcal{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  telle que

$$\hat{E}[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[X] \quad \text{pour } X \in \mathcal{H},$$

où  $\mathcal{B}(\Omega)$  désigne la tribu borélienne sur  $\Omega$ .

Naturellement, on peut définir une capacité de Choquet sur  $\mathcal{H}$  par

$$c(A) := \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [8, 17, 18, 24, 55].

**Définition 1.1.2** On dira qu'un ensemble  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  est polaire si et seulement si  $c(A) = 0$  et qu'une propriété a lieu quasi-sûrement (q.s. en abrégé) si elle a lieu en dehors d'un ensemble polaire.

**Remarque 1.1.2** Une propriété est vraie q.s. si elle est vraie presque sûrement pour chaque  $P \in \mathcal{P}$ .

Grâce à la représentation de la  $G$ -espérance et à la notion « quasi-sûre » introduite, la théorie des processus stochastiques en temps continu dans le cadre de la  $G$ -espérance s'est développée, en particulier la formule d'Itô, certaines inégalités stochastiques et les équations différentielles stochastiques gouvernées par un  $G$ -mouvement Brownien ( $G$ -EDS en abrégé) peuvent être établies dans le sens « quasi-sûre ».

## 1.1.2 Distributions et indépendance

Parallèlement aux concepts du cadre classique, Peng [36] a établi les notions de distributions et d'indépendance pour les variables aléatoires dans ce nouveau contexte. Néanmoins, ces notions sont moins probabilistes mais plutôt fonctionnelles, et elles s'expriment à l'aide des familles de fonctions tests de l'espace  $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 1$ .

**Définition 1.1.3** Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire, où  $X_i \in \mathcal{H}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La distribution de  $X$  est donnée par la fonctionnelle  $\mathbb{F}_X[\cdot]$  suivante : pour chaque  $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\mathbb{F}_X[\varphi] := \hat{E}[\varphi(X)].$$

Le triplet  $(\mathbb{R}^n, C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n), \mathbb{F}_X)$  forme un espace d'espérance non linéaire.

De plus, si  $X'$  est un autre vecteur aléatoire  $n$ -dimensionnel et pour chaque  $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbb{F}_X[\varphi] = \mathbb{F}_{X'}[\varphi]$ ,  $X$  et  $X'$  sont dits identiquement distribués.

**Remarque 1.1.3** – On peut prouver (voir [4, 21]) qu'il existe une famille de mesures de probabilité  $\{F_X^P(\cdot)\}_{P \in \mathcal{P}}$  définie sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  telle que

$$\mathbb{F}_X[\varphi] = \sup_{P \in \mathcal{P}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) F_X^P(dx), \text{ pour chaque } \varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n).$$

– Ainsi  $\mathbb{F}_X[\varphi]$  caractérise l'incertitude de la distribution de  $X$ .

Notons que si la distribution  $\mathbb{F}_X$  de  $X \in \mathcal{H}$  n'est pas une espérance linéaire, alors  $X$  a une distribution incertaine. La distribution de  $X$  a les quatres paramètres typiques suivants :

$$\bar{\mu} = \hat{E}[X], \quad \underline{\mu} = -\hat{E}[-X], \quad \bar{\sigma}^2 = \hat{E}[X^2] \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}^2 = -\hat{E}[-X^2].$$

Les intervalles  $[\bar{\mu}, \underline{\mu}]$  et  $[\bar{\sigma}^2, \underline{\sigma}^2]$  caractérisent la **moyenne incertaine** et la **variance incertaine** de  $X$  respectivement.

**Proposition 1.1.1** Soient  $X, Y \in \mathcal{H}$  telles que  $\hat{E}[Y] = -\hat{E}[-Y]$  (i.e.,  $Y$  n'a pas une moyenne incertaine). Alors, on a :

$$\hat{E}[X + \alpha Y] = \hat{E}[X] + \alpha \hat{E}[Y].$$

En particulier, si  $\hat{E}[Y] = -\hat{E}[-Y] = 0$ , alors  $\hat{E}[X + \alpha Y] = \hat{E}[X]$ .

**Preuve.** On a  $\hat{E}[\alpha Y] = \alpha^+ \hat{E}[Y] + \alpha^- \hat{E}[-Y] = \alpha^+ \hat{E}[Y] - \alpha^- \hat{E}[Y] = \alpha \hat{E}[Y]$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Ainsi

$$\hat{E}[X + \alpha Y] \leq \hat{E}[X] + \hat{E}[\alpha Y] = \hat{E}[X] + \alpha \hat{E}[Y] = \hat{E}[X] - \hat{E}[-\alpha Y] \leq \hat{E}[X + \alpha Y]. \blacksquare$$

**Proposition 1.1.2** [15] *Soit  $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^{m+n})$ ,  $X \in \mathcal{H}^m$  et  $Y \in \mathcal{H}^n$  un couple de vecteurs aléatoires définis sur un espace d'espérance sous linéaire  $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E})$ . Alors on a :*

- 1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$ , l'application  $\varphi(x, \cdot) \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ .
- 2) L'application  $\hat{E}[\varphi(\cdot, Y)] \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^m)$ .

**Preuve.** 1) En effet, pour chaque  $(x, y), (u, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , on a

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(u, z)| &\leq C |(x, y) - (u, z)| \left(1 + |(x, y)|^k + |(u, z)|^k\right), \\ C &> 0, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(x, z)| &\leq C |y - z| \left(1 + |(x, y)|^k + |(x, z)|^k\right) \\ &\leq C |y - z| \left(1 + (|x|^2 + |y|^2)^{\frac{k}{2}} + (|x|^2 + |z|^2)^{\frac{k}{2}}\right) \\ &\leq C |y - z| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + |y|^k) + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + |z|^k)\right) \\ &\leq C' |y - z| \left(1 + (|y|^k + |z|^k)\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité  $(a + b)^p \leq 2^p (a^p + b^p)$  pour  $a, b \geq 0$  et  $C' = C \max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1} |x|^k\right)$ . Par conséquent,  $\varphi(x, \cdot) \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ .

2) De même, on a

$$|\varphi(x, Y) - \varphi(u, Y)| \leq C |x - u| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + |Y|^k) + 2^{\frac{k}{2}} (|u|^k + |Y|^k)\right),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \left| \hat{E}[\varphi(x, Y)] - \hat{E}[\varphi(u, Y)] \right| &\leq \hat{E} |\varphi(x, Y) - \varphi(u, Y)| \\ &\leq C |x - u| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + \hat{E}(|Y|^k)) + 2^{\frac{k}{2}} (|u|^k + \hat{E}(|Y|^k))\right) \\ &\leq C'' |x - u| \left(1 + |x|^k + |u|^k\right), \end{aligned}$$

où  $C''' = C \max \left( 2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1} \hat{E} \left( |Y|^k \right) \right)$ , ce qui signifie que  $\hat{E} [\varphi (\cdot, Y)]$  appartient à  $C_{l,lip}(\mathbb{R}^m)$ . ■

**Définition 1.1.4** Dans un espace d'espérance sous linéaire  $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E})$ , un vecteur aléatoire  $Y \in \mathcal{H}^n$  est dit indépendant d'un autre vecteur aléatoire  $X \in \mathcal{H}^m$  sous  $\hat{E}$  si

$$\hat{E} [\varphi (X, Y)] = \hat{E} \left[ \hat{E} [\varphi (x, Y)] |_{x=X} \right], \quad \forall \varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^{m+n}).$$

**Définition 1.1.5** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux vecteurs aléatoires à  $n$ -dimension définis respectivement sur deux espaces d'espérance sous linéaire  $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \hat{E}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \hat{E}_2)$ . On dira que  $X_1$  et  $X_2$  sont identiquement distribués et on notera  $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$ , si

$$\hat{E}_1 [\varphi (X_1)] = \hat{E}_2 [\varphi (X_2)] \quad \text{pour tout } \varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n).$$

Si  $\bar{X}$  est indépendant de  $X$  et  $\bar{X} \stackrel{d}{=} X$ , alors on dira que  $\bar{X}$  est une copie de  $X$ .

**Remarque 1.1.4** Dans un espace d'espérance sous linéaire la condition "Y est indépendant de X" ne signifie pas automatiquement que "X est indépendant de Y" (voir [15, 53]).

### 1.1.3 Distribution $G$ -normale et $G$ -mouvement Brownien

Après la définition de base ci-dessus on introduit maintenant la notion de la distribution  $G$ -normale.

**Définition 1.1.6** Un vecteur aléatoire à  $d$ -dimension  $X = (X_1, \dots, X_d)$  dans un espace d'espérance sous linéaire  $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E})$  est dit  $G$ -normalement distribué si pour tout  $a, b \geq 0$  :

$$aX + b\bar{X} \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2} X,$$

où  $\bar{X}$  est une copie indépendante de  $X$ , et

$$G(A) := \frac{1}{2} \hat{E} [\langle AX, X \rangle] : \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{R},$$

ici  $\mathbb{S}_d$  désigne l'ensemble des matrices symétriques d'ordre  $d$ .

Dans [4, 42, 22], l'auteur montre que  $X = (X_1, \dots, X_d)$  est  $G$ -normalement distribué si et seulement si  $u(t, x) := \hat{E}[\varphi(x + \sqrt{t}X)]$ ,  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ ,  $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^d)$  est l'unique solution de viscosité de l'équation parabolique aux dérivées partielles, appelée  $G$ -équation de la chaleur, suivante

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = G(Du(t, x)), & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}, \quad (1.1)$$

où  $Du(t, x)$  est la matrice hessienne de  $u(t, x)$ .

$G(\cdot) : \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction monotone et sous linéaire sur  $\mathbb{S}_d$ , à partir de laquelle on peut déduire qu'il existe un sous ensemble  $\Sigma \in \mathbb{S}_d^+$  fermé, borné et convexe tel que

$$G(A) = \frac{1}{2} \sup_{B \in \Sigma} \text{tr}(AB).$$

On écrit  $X \sim \mathcal{N}(0; \Sigma)$ .

**Remarque 1.1.5** *Le cas réel ( $d = 1$ ) correspond à  $\Sigma = [\underline{\sigma}^2; \bar{\sigma}^2]$  et  $G = G_{\bar{\sigma}, \underline{\sigma}}$  étant la fonction sous linéaire paramétrée par  $\underline{\sigma}$  et  $\bar{\sigma}$  :*

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}^2 \alpha^-), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

où  $\bar{\sigma}^2 = \hat{E}[X^2]$  et  $\underline{\sigma}^2 = -\hat{E}[-X^2]$ .

Dans ce cas on écrit  $X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2; \bar{\sigma}^2])$ .

**Corollaire 1.1.1** *Dans le cas où  $\underline{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2 > 0$ ,  $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2; \bar{\sigma}^2])$  est juste la distribution normale classique  $\mathcal{N}(0; \bar{\sigma}^2)$ .*

**Preuve.** *En fait, la solution de l'équation parabolique aux dérivées partielles  $\partial_t u = G(\partial_{xx}^2 u)$ ,  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$  avec la condition de Cauchy  $u(0, x) = \varphi(x)$  devient l'équation de la chaleur classique*

$$\partial_t u = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \partial_{xx}^2 u, \quad u|_{t=0} = \varphi,$$

où la solution est

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\bar{\sigma}^2 t}\right) dy.$$

Ainsi, pour chaque  $\varphi$ ,

$$\hat{E}[\varphi(X)] = u(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) dy.$$

■

Dans les deux situations suivantes le calcul de  $\hat{E}[\varphi(X)]$  est facile :

- (i) Pour tout  $\varphi$  convexe, on a

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) dy.$$

En effet, pour tout  $t \geq 0$  fixé, remarquons que la fonction  $u(t, x) = \hat{E}[\varphi(x + \sqrt{t}X)]$  est convexe, puisque

$$\begin{aligned} u(t, \alpha x + (1 - \alpha)y) &= \hat{E}\left[\varphi\left(\alpha x + (1 - \alpha)y + \sqrt{t}X\right)\right] \\ &\leq \alpha \hat{E}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right] + (1 - \alpha) \hat{E}\left[\varphi\left(y + \sqrt{t}X\right)\right] \\ &= \alpha u(t, x) + (1 - \alpha) u(t, y). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $(\partial_{xx}^2 u)^- = 0$  et par conséquent la  $G$ -équation de la chaleur (1.1) devient

$$\partial_t u = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \partial_{xx}^2 u, \quad u|_{t=0} = \varphi.$$

- (ii) Pour tout  $\varphi$  concave, on a

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\underline{\sigma}^2}\right) dy,$$

en particulier

$$\hat{E}[X] = \hat{E}[-X] = 0, \quad \hat{E}[X^2] = \bar{\sigma}^2, \quad -\hat{E}[-X^2] = \underline{\sigma}^2,$$

et

$$\hat{E}[X^4] = 6\bar{\sigma}^4, \quad -\hat{E}[-X^4] = 6\underline{\sigma}^4.$$

On donne maintenant la définition du  $G$ -mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel.

**Définition 1.1.7** *Un processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  à  $d$ -dimension défini sur  $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E})$  est dit  $G$ -mouvement Brownien de dimension  $d$  (réel dans le cas où  $d = 1$ ) si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i)  $B_0 = 0$ ;

(ii) pour chaque  $t, s \geq 0$ , l'accroissement  $B_{t+s} - B_t$  est  $\mathcal{N}(0; s\Sigma)$ -distribué et est indépendant de  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$ .

On notera

$$B_t^a := \langle a, B_t \rangle \text{ pour tout } a = (a_1, \dots, a_d)^T \in \mathbb{R}^d$$

Selon la définition ci-dessus, on a la proposition suivante qui est importante dans les développements ultérieurs.

**Proposition 1.1.3** (voir [13, 42]) Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un  $G$ -mouvement Brownien à  $d$ -dimension défini sur un espace d'espérance sous linéaire  $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E})$ . Alors  $(B_t^a)_{t \geq 0}$  est un  $G_a$ -mouvement Brownien réel de fonction génératrice  $G_a(\alpha) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{aa^T}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}_{aa^T}^2 \alpha^-)$  où  $\bar{\sigma}_{aa^T}^2 = \hat{E}[\langle a, B_1 \rangle^2]$  et  $\underline{\sigma}_{aa^T}^2 = -\hat{E}[-\langle a, B_1 \rangle^2]$ .

En particulier, pour tout  $t, s \geq 0$ ,  $B_{t+s}^a - B_t^a \sim \mathcal{N}(0; [s\underline{\sigma}_{aa^T}^2; s\bar{\sigma}_{aa^T}^2])$ .

Notons que d'après le cas unidimensionnel, on a pour toute fonction convexe  $\varphi$

$$\hat{E}[\varphi(B_{t+s}^a - B_t^a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \bar{\sigma}_{aa^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2s\bar{\sigma}_{aa^T}^2}\right) dy,$$

et pour toute fonction concave  $\varphi$  et  $\underline{\sigma}_{aa^T}^2 > 0$ , on a

$$\hat{E}[\varphi(B_{t+s}^a - B_t^a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \underline{\sigma}_{aa^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2s\underline{\sigma}_{aa^T}^2}\right) dy.$$

En particulier d'après Peng [37, 41, 42], on a

$$\hat{E}[(B_t^a - B_s^a)^2] = \bar{\sigma}_{aa^T}^2 (t - s), \hat{E}[(B_t^a - B_s^a)^4] = 3\bar{\sigma}_{aa^T}^4 (t - s)^2,$$

$$\hat{E}[-(B_t^a - B_s^a)^2] = -\underline{\sigma}_{aa^T}^2 (t - s), \hat{E}[-(B_t^a - B_s^a)^4] = -3\underline{\sigma}_{aa^T}^4 (t - s)^2.$$

# Chapitre 2

## $G$ –calcul stochastique matriciel

L’objectif de ce chapitre est d’adapter les notions de  $G$ –calcul stochastique d’Itô stratonovich au cas matriciel.

### 2.1 $G$ –Espérance conditionnelle

Dans ce qui suit on identifie chaque matrice carrée d’ordre  $n$  à un vecteur de dimension  $n^2$ . On considère  $\Omega = C_0(\mathcal{M}_n)$  l’espace des fonctions continues  $(\omega_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_n$  satisfaisant  $\omega_0 = \mathbf{0}$ , muni de la distance suivante :

$$\rho(\omega^1, \omega^2) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left[ \left( \max_{t \in [0, i]} |\omega_t^1 - \omega_t^2| \right) \wedge 1 \right], \quad \omega^1, \omega^2 \in \Omega.$$

Pour tout  $t \in [0; \infty)$ , on pose  $\Omega_t := \{\omega_{\cdot \wedge t} : \omega \in \Omega\}$ . Les espaces des fonctions Lipschitziennes sur  $\Omega$  sont notés par :

$$Lip(\Omega_t) = \{\varphi(B_{t_1 \wedge t}, \dots, B_{t_m \wedge t}) : t_1, \dots, t_m \in [0; \infty), \varphi \in C_{l, Lip}((\mathcal{M}_n)^m)\},$$

$$Lip(\Omega) = \bigcup_{m=1}^{\infty} Lip(\Omega_m).$$

Ici, on utilise  $C_{l, Lip}(\mathcal{M}_n)$  seulement pour la commodité des techniques. En général,  $C_{l, Lip}(\mathcal{M}_n)$  peut être remplacé par l’un des espaces de fonctions définies sur  $\mathcal{M}_n$  suivants.

- $L^\infty(\mathcal{M}_n)$  : Espace de fonctions bornées Borel-mesurables,
- $C_{unif}(\mathcal{M}_n)$  : Espace de fonctions bornées et uniformément continues,
- $C_{b,Lip}(\mathcal{M}_n)$  : Espace de fonctions continues, Lipschitziennes et bornées,
- $Lip(\mathcal{M}_n)$  : Espace des fonctions Lipschitziennes sur  $\mathcal{M}_n$ .

Soit  $T > 0$  un temps fixé. On désigne par  $L_G^p(\Omega_T)$ ,  $p \geq 1$ , l'adhérence de  $Lip(\Omega_T)$  par rapport à la norme  $\|X\|_{p,G} := \left(\hat{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}$ .

Comme dans Peng [37, 42, 43] et Fan [10], on construit une espérance sous linéaire sur  $(\Omega, Lip(\Omega))$  de telle sorte que le processus canonique  $(B_t)_{t \geq 0}$  soit un  $G$ -mouvement Brownien de la manière suivante : soit  $(\xi_i)_{i=1}^\infty$  une suite de vecteurs aléatoires à  $d$ -dimension sur un espace d'espérance sous linéaire  $(\Omega, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{E})$  telle que  $\xi_i$  soit  $G$ -normalement distribuée et  $\xi_{i+1}$  indépendante de  $(\xi_1, \dots, \xi_i)$  pour tout  $i = 1, 2, \dots$

On introduit une espérance sous linéaire  $\hat{E}$  définie sur  $Lip(\Omega)$ , via la procédure suivante : Pour tout  $X \in Lip(\Omega)$  avec

$$X = \varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}),$$

pour  $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathcal{M}_n)^m$  et pour  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \infty$ , on pose :

$$\begin{aligned} & \hat{E}[\varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})] \\ &= \tilde{E}\left[\varphi\left(\sqrt{t_1 - t_0}\xi_1, \dots, \sqrt{t_m - t_{m-1}}\xi_m\right)\right]. \end{aligned}$$

D'après Peng [35, 36, 41],  $\hat{E}$  ainsi définie est une espérance sous linéaire sur  $Lip(\Omega)$  et  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un  $G$ -mouvement Brownien. Comme  $Lip(\Omega_T) \subseteq Lip(\Omega)$ ,  $\hat{E}$  est également une espérance sous linéaire sur  $Lip(\Omega_T)$ .

**Définition 2.1.1** *L'espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\Omega_{t_j}$  est définie par*

$$\hat{E}[X | \Omega_{t_j}] = \psi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \quad (2.1)$$

où

$$\psi(x_1, \dots, x_j) = \tilde{E}\left[\varphi\left(x_1, \dots, x_j, \sqrt{t_{j+1} - t_j}\xi_{j+1}, \dots, \sqrt{t_m - t_{m-1}}\xi_m\right)\right].$$

Dans toute la suite, on considère le processus canonique  $(B_t)_{t \geq 0}$  défini sur  $(\Omega, Lip(\Omega), \hat{E})$  dans le cas où  $\Omega = C_0(\mathcal{M}_n)$ .

Voici les principales propriétés de  $\hat{E}[\cdot | \Omega_t]$  :

**Proposition 2.1.1** (c.f. [37]) Pour tout  $X, Y \in Lip(\Omega)$ , on a :

- (i) Si  $X \geq Y$ , alors  $\hat{E}[X|\Omega_t] \geq \hat{E}[Y|\Omega_t]$ .
- (ii)  $\hat{E}[\eta|\Omega_t] = \eta$ , pour tout  $t \in [0, +\infty)$  et  $\eta \in Lip(\Omega_t)$ .
- (iii)  $\hat{E}[X|\Omega_t] - \hat{E}[Y|\Omega_t] \leq \hat{E}[X - Y|\Omega_t]$ .
- (iv)  $\hat{E}[\eta X|\Omega_t] = \eta^+ \hat{E}[X|\Omega_t] + \eta^- \hat{E}[-X|\Omega_t]$  pour tout  $\eta \in Lip(\Omega_t)$ .
- (v)  $\hat{E}\left[\hat{E}[X|\Omega_t]|\Omega_s\right] = \hat{E}[X|\Omega_{t \wedge s}]$ , en particulier  $\hat{E}\left[\hat{E}[X|\Omega_t]\right] = \hat{E}[X]$ .

Pour tout  $X \in Lip(\Omega^t)$ ,  $\hat{E}[X|\Omega_t] = \hat{E}[X]$ , où  $Lip(\Omega^t)$  est l'espace linéaire des variables aléatoires de la forme

$$\varphi(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_{m+1}} - B_{t_m}),$$

$$m = 1, 2, \dots, \varphi \in C_{l.Lip}(\mathcal{M}_n)^m, t_1, \dots, t_m, t_{m+1} \in [t, \infty).$$

**Remarque 2.1.1** (ii) et (iii) impliquent que

$$\hat{E}[X + \eta|\Omega_t] = \hat{E}[X|\Omega_t] + \eta \text{ pour } \eta \in Lip(\Omega_t).$$

En outre, si  $Y \in Lip(\Omega)$  satisfait  $\hat{E}[Y|\Omega_t] = -\hat{E}[-Y|\Omega_t]$  alors

$$\hat{E}[X + Y|\Omega_t] = \hat{E}[X|\Omega_t] + \hat{E}[Y|\Omega_t].$$

On donne la définition suivante, qui est similaire à celle du cas classique :

**Définition 2.1.2** Un vecteur aléatoire à  $n$ -dimension  $Y \in (L_G^1(\Omega))^m$  est dit indépendant de  $\Omega_t$  ( $t \geq 0$ ), si pour tout  $\varphi \in C_{b,Lip}(\mathcal{M}_n)^m$  on a

$$\hat{E}[\varphi(Y)|\Omega_t] = \hat{E}[\varphi(Y)].$$

**Proposition 2.1.2** Soient  $X, Y \in L_G^1(\Omega)$  telles que

$$\hat{E}[Y|\Omega_t] = -\hat{E}[-Y|\Omega_t]$$

pour  $t \in [0, T]$ . Alors on a

$$\hat{E}[X + Y|\Omega_t] = \hat{E}[X|\Omega_t] + \hat{E}[Y|\Omega_t].$$

En particulier, si  $\hat{E}[Y|\Omega_t] = \hat{E}[-Y|\Omega_t] = 0$ , alors  $\hat{E}[X + Y|\Omega_t] = \hat{E}[X|\Omega_t]$ .

**Preuve.** Cela découle des deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{E}[X + Y|\Omega_t] &\leq \hat{E}[X|\Omega_t] + \hat{E}[Y|\Omega_t], \\ \hat{E}[X + Y|\Omega_t] &\geq \hat{E}[X|\Omega_t] - \hat{E}[-Y|\Omega_t] = \hat{E}[X|\Omega_t] + \hat{E}[Y|\Omega_t]. \end{aligned}$$

■

**Définition 2.1.3** Un processus  $(M_t)_{t \geq 0}$  est appelé  $G$ -martingale si pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $M_t \in L_G^1(\Omega_t)$  et pour tout  $s \in [0, t]$  on a  $\hat{E}[M_t|\Omega_s] = M_s$  q.s..

## 2.2 $G$ -Intégrales stochastiques

Pour chaque partition  $\{t_0, \dots, t_N\} = \pi_T$  de  $[0, T]$ , telle que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , on pose

$$\mu(\pi_T) = \max \{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, \dots, N-1\}.$$

**Définition 2.2.1** Soit  $M_G^{p,0}(0, T; \mathbb{R})$  la collection de processus sous la forme suivante :

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

où  $\xi_j \in Lip(\Omega_{t_j})$ ;  $j = 0, \dots, N-1$  et  $(\pi_T^N)$  est une suite de partitions de  $[0, T]$  telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\pi_T^N) = 0$ .

On note par  $M_G^p(0, T; \mathbb{R})$  l'adhérence de  $M_G^{p,0}(0, T; \mathbb{R})$  sous la norme

$$\|\eta\|_{M_G^p} = \left( \hat{E} \left[ \int_0^T |\eta_s|^p ds \right] \right)^{1/p} \quad \text{pour } p \geq 1.$$

**Définition 2.2.2** Pour tout  $\eta \in M_G^{2,0}(0, T; \mathbb{R})$ , on définit la  $G$ -intégrale d'Itô par

$$I(\eta) = \int_0^T \eta_t dB_t^{ij} := \sum_{l=0}^{N-1} \xi_l (B_{t_{l+1}}^{ij} - B_{t_l}^{ij}) \quad (2.2)$$

L'application  $I : M_G^{2,0}(0, T; \mathbb{R}) \rightarrow L_G^2(\Omega_T)$  est continue et peut donc se prolonger par continuité à  $M_G^2(0, T; \mathbb{R})$ .

On énumère quelques propriétés principales de l'intégrale d'Itô par rapport au  $G$ -mouvement Brownien  $(B_t^{ij})$ .

**Proposition 2.2.1** Soient  $\eta, \theta \in M_G^2(0, T; \mathbb{R})$  et  $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$ . Alors on a

- (i)  $\int_s^t \eta_u dB_u^{ij} = \int_s^r \eta_u dB_u^{ij} + \int_r^t \eta_u dB_u^{ij}$ ,
- (ii)  $\int_s^t (\alpha \eta_u + \theta_u) dB_u^{ij} = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u^{ij} + \int_s^t \theta_u dB_u^{ij}$ , si  $\alpha$  est bornée dans  $L_G^1(\Omega_s)$ ,
- (iii)  $\hat{E} \left[ X + \int_r^T \eta_u dB_u^{ij} \mid \Omega_s \right] = \hat{E} [X \mid \Omega_s]$  pour  $X \in L_G^1(\Omega_s)$ .

**Définition 2.2.3** La variation quadratique de  $(B_t^{ij})_{t \geq 0}$  est définie par la limite  $L_G^2(\Omega_T)$  suivante

$$\langle B^{ij} \rangle_t := \lim_{\mu(\pi_T^N) \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{N-1} (B_{t_{l+1}}^{ij} - B_{t_l}^{ij})^2 = (B_t^{ij})^2 - 2 \int_0^t B_s^{ij} dB_s^{ij}.$$

**Lemme 2.2.1** Pour tout  $0 \leq s \leq t \leq \infty$ , on a

$$\hat{E} [\langle B^{ij} \rangle_t - \langle B^{ij} \rangle_s | \Omega_s] = \overline{\sigma_{ij}^2} (t - s) \quad (2.3)$$

$$\hat{E} [- (\langle B^{ij} \rangle_t - \langle B^{ij} \rangle_s) | \Omega_s] = -\underline{\sigma_{ij}^2} (t - s) \quad (2.4)$$

*Preuve.* D'après la définition de  $\langle B^{ij} \rangle$  et la proposition (2.2.1) (iii), on a

$$\begin{aligned} \hat{E} [\langle B^{ij} \rangle_t - \langle B^{ij} \rangle_s | \Omega_s] &= \hat{E} \left[ (B_t^{ij})^2 - (B_s^{ij})^2 - 2 \int_s^t B_u^{ij} dB_u^{ij} | \Omega_s \right] \\ &= \hat{E} \left[ (B_t^{ij})^2 - (B_s^{ij})^2 | \Omega_s \right] = \overline{\sigma_{ij}^2} (t - s). \end{aligned}$$

l'égalité (2.4) peut être prouvée de manière analogue en utilisant le fait que  $\hat{E} \left[ - \left( (B_t^{ij})^2 - (B_s^{ij})^2 \right) | \Omega_s \right] = -\underline{\sigma_{ij}^2} (t - s)$ . ■

**Définition 2.2.4** L'intégrale d'un processus  $\eta \in M_G^{1,0}(0, T; \mathbb{R})$  par rapport à  $\langle B^{ij} \rangle_t$  est définie par

$$Q(\eta) = \int_0^T \eta_t d\langle B^{ij} \rangle_t := \sum_{l=0}^{N-1} \xi_l \left( \langle B^{ij} \rangle_{t_{l+1}} - \langle B^{ij} \rangle_{t_l} \right) \quad (2.5)$$

L'application  $Q : M_G^{1,0}(0, T; \mathbb{R}) \rightarrow L_G^1(\Omega_T)$  est continue et peut donc se prolonger par continuité à  $M_G^1(0, T; \mathbb{R})$ .

**Corollaire 2.2.1** ( voir [42, 52] ) Pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$ , on a

$$\underline{\sigma_{ij}^2} t \leq \left( \langle B^{ij} \rangle_{t+s} - \langle B^{ij} \rangle_s \right) \leq \overline{\sigma_{ij}^2} t.$$

**Proposition 2.2.2** Pour tout  $\eta \in M_G^2(0, T; \mathbb{R})$  fixé, on a

1.

$$\underline{\sigma_{ij}}^2 \hat{E} \left[ \int_0^T \eta_t^2 dt \right] \leq \hat{E} \left[ \left( \int_0^T \eta_t dB_t^{ij} \right)^2 \right] \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 \hat{E} \left[ \int_0^T \eta_t^2 dt \right] \quad (2.6)$$

2.

$$\hat{E} \left[ \left( \int_0^t \eta_s dB_s^{ij} \right)^2 \right] = \hat{E} \left[ \int_0^t \eta_s^2 d \langle B^{ij} \rangle_s \right].$$

**Preuve.** Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \hat{E} \left[ \left( \int_0^T \eta_t dB_t^{ij} \right)^2 \right] &= \hat{E} \left[ \left( \int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^{ij} + \xi_{N-1} (B_{t_N}^{ij} - B_{t_{N-1}}^{ij}) \right)^2 \right] \\ &= \hat{E} \left[ \left( \int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^{ij} \right)^2 + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N}^{ij} - B_{t_{N-1}}^{ij})^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left( \int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^{ij} \right) \xi_{N-1} (B_{t_N}^{ij} - B_{t_{N-1}}^{ij}) \right] \\ &= \hat{E} \left[ \left( \left( \int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^{ij} \right)^2 + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N}^{ij} - B_{t_{N-1}}^{ij})^2 \right) \right] \\ &\quad \vdots \\ &= \hat{E} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}}^{ij} - B_{t_i}^{ij})^2 \right] \\ &= \hat{E} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 \left( \langle B^{ij} \rangle_{t_{i+1}} - \langle B^{ij} \rangle_{t_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

D'après le corollaire (2.2.1), on a

$$\underline{\sigma_{ij}}^2 (t_{i+1} - t_i) \leq \left( \langle B^{ij} \rangle_{t_{i+1}} - \langle B^{ij} \rangle_{t_i} \right) \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 (t_{i+1} - t_i)$$

et en multipliant membre à membre par  $(\eta_i^2)$ , on obtient

$$\underline{\sigma_{ij}}^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \leq \eta_i^2 \left( \langle B^{ij} \rangle_{t_{i+1}} - \langle B^{ij} \rangle_{t_i} \right) \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i),$$

d'où

$$\begin{aligned} \hat{E} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \underline{\sigma_{ij}}^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] &\leq \hat{E} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 \left( \langle B^{ij} \rangle_{t_{i+1}} - \langle B^{ij} \rangle_{t_i} \right) \right] \\ &\leq \hat{E} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \overline{\sigma_{ij}}^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right], \end{aligned}$$

par suite

$$\underline{\sigma_{ij}}^2 \hat{E} \left[ \int_0^T \eta_t^2 dt \right] \leq \hat{E} \left[ \left( \int_0^T \eta_t dB_t^{ij} \right)^2 \right] \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 \hat{E} \left[ \int_0^T \eta_t^2 dt \right].$$

■

**Remarque 2.2.1** *Contrairement au cas classique, le processus de co-variation quadratique de  $B$  n'est pas toujours un processus déterministe et il peut être formulé en  $L_G^2(\Omega_T)$  par*

$$\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t := B_t^{ij} B_t^{kl} - \int_0^t B_s^{ij} dB_s^{kl} - \int_0^t B_s^{kl} dB_s^{ij}.$$

## 2.3 $G$ -Formule d'Itô

On donne maintenant la  $G$ -formule d'Itô dans un cadre général. (voir [23, 43] pour le cas vectoriel). Dans la suite, nous adoptons souvent la convention de notation d'Einstein [23].

**Théorème 2.3.1** [29] *Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathcal{M}_n$  de telle sorte que  $\partial_{x^{pq}} \varphi, \partial_{x^{p'q'}}^2 \varphi \in C_{b,Lip}(\mathcal{M}_n)$ . Soit  $X = (X^{ij})$  un processus d'Itô matriciel sur  $[0, T]$  avec*

$$X_t^{pq} = X_0^{pq} + \int_0^t \alpha^{pq}(s) ds + \int_0^t \theta_{ijkl}^{pq}(s) d \langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_s + \int_0^t \beta_{kl}^{pq}(s) dB_s^{kl} \quad (2.7)$$

où  $\alpha^{pq}, \theta_{ijkl}^{pq} \in M_G^1(0, T)$  et  $\beta_{kl}^{pq} \in M_G^2(0, T)$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$ , on a, q.s.,

$$\begin{aligned} \varphi(X_t) - \varphi(X_0) &= \int_0^t \partial_{x^{pq}} \varphi(X_u) \beta_{kl}^{pq}(u) dB_u^{kl} \\ &+ \int_0^t \partial_{x^{pq}} \varphi(X_u) \alpha^{pq}(u) du \\ &+ \int_0^t \left[ \partial_{x^{pq}} \varphi(X_u) \theta_{ijkl}^{pq}(u) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \partial_{x^{p'q'} x^{pq}}^2 \varphi(X_u) \beta_{ij}^{pq}(u) \beta_{kl}^{p'q'}(u) \right] d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_u. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Remarque 2.3.1** Notons que cette formule reste valide si  $X$  n'est pas une matrice carrée.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème (2.3.1). Dans toute la suite, on pose :

$$dX_t^{pq} dX_t^{mn} = \sum_{i,j,k,l} \beta_t^{pqij} \beta_t^{mnkl} d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t.$$

**Corollaire 2.3.1** 1. La formule d'intégration par parties suivante a lieu :

$$d(X_t^{pq} X_t^{mn}) = dX_t^{pq} X_t^{mn} + X_t^{pq} dX_t^{mn} + dX_t^{pq} dX_t^{mn} \quad (2.9)$$

2. On a  $d\langle X_t^{pq}, X_t^{mn} \rangle = dX_t^{pq} dX_t^{mn}$ .

**Preuve.**

1. La  $G$ -formule d'Itô appliquée avec  $\varphi(x, y) = xy$ , donne

$$\begin{aligned}
 d(X_t^{pq} X_t^{mn}) &= \left( \frac{\partial \varphi(X_t^{pq}, X_t^{mn})}{\partial x} \alpha^{pq}(t) + \frac{\partial \varphi(X_t^{pq}, X_t^{mn})}{\partial y} \alpha^{mn}(t) \right) dt \\
 &+ \left( \frac{\partial \varphi(X_t^{pq}, X_t^{mn})}{\partial x} \beta_{kl}^{pq}(t) + \frac{\partial \varphi(X_t^{pq}, X_t^{mn})}{\partial y} \beta_{kl}^{mn}(t) \right) dB_t^{kl} \\
 &+ \left( \frac{\partial \varphi(X_t^{pq}, X_t^{mn})}{\partial x} \theta_{ijkl}^{pq}(t) + \frac{\partial \varphi(X_t^{pq}, X_t^{mn})}{\partial y} \theta_{ijkl}^{mn}(t) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^2 \varphi(X_t^{pq}, X_t^{mn})}{\partial x \partial y} \beta_{kl}^{pq}(t) \beta_{kl}^{mn}(t) \right) d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t \\
 &= X_t^{mn} \alpha^{pq}(t) dt + X_t^{mn} \beta_{kl}^{pq}(t) dB_t^{kl} \\
 &\quad + X_t^{mn} \theta_{ijkl}^{pq}(t) d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t \\
 &\quad + X_t^{pq} \alpha^{mn}(t) dt + X_t^{pq} \beta_{kl}^{mn}(t) dB_t^{kl} \\
 &\quad + X_t^{pq} \theta_{ijkl}^{mn}(t) d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t \\
 &\quad + \beta_{kl}^{pq}(t) \beta_{kl}^{mn}(t) d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t \\
 &= X_t^{mn} dX_t^{pq} + X_t^{pq} dX_t^{mn} + \beta_{kl}^{pq}(t) \beta_{kl}^{mn}(t) d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t.
 \end{aligned}$$

2. Provient des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 dB_t^{ij} dB_t^{kl} &= d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t, \\
 dt dB_t^{ij} &= dt d\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t = 0.
 \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.3.2** Dans ce qui suit, on écrit  $\langle B^{ij} \rangle_t$  au lieu de  $\langle B^{ij}, B^{ij} \rangle_t$ .

**Définition 2.3.1** Comme dans le cas classique, on définit l'intégrale de Stratonovich  $\circ$  pour deux processus d'Itô matrices  $X$  et  $Y$  :

$$X \circ dY = X dY + \frac{1}{2} dX dY \text{ et } dX \circ Y = dXY + \frac{1}{2} dX dY,$$

où  $dX dY$  est le produit matriciel.

La proposition suivante a lieu.

**Proposition 2.3.1** [16] Soient  $X$  et  $Y$  deux processus matriciels d'Itô. Alors on a

(i) La formule d'intégration par parties :

$$d(XY) = XdY + dXY + dXdY \quad (2.10)$$

(ii)

$$d(XY) = dX \circ Y + X \circ dY \quad (2.11)$$

$$dX \circ (YZ) = (dX \circ Y) \circ Z \quad (2.12)$$

$$ZY \circ dX = Z \circ (Y \circ dX)$$

et

$$(X \circ dY)^T = dY^T \circ X^T \quad (2.13)$$

$Y^T$  désigne la transposée de la matrice  $Y$

**Preuve.** Soient  $X, Y, Z$  des processus matrices d'Itô.

(i) Pour tout  $i, j \in \overline{1, n}$ , on a

$$\begin{aligned} d(XY)^{ij} &= d\left(\sum_k X^{ik}Y^{kj}\right) = \sum_k d(X^{ik}Y^{kj}) \\ &= \sum_k (dX^{ik}Y^{kj} + X^{ik}dY^{kj} + dX^{ik}dY^{kj}) \\ &= (dXY)^{ij} + (XdY)^{ij} + (dXdY)^{ij}, \end{aligned}$$

d'où

$$d(XY) = XdY + dXY + dXdY.$$

(ii) Par un calcul simple, on trouve

$$\begin{aligned} dX \circ Y + X \circ dY &= dXY + \frac{1}{2}dXdY + XdY + \frac{1}{2}dXdY \\ &= dXY + XdY + dXdY = d(XY). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} dX \circ (YZ) &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dXd(YZ) \\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dX(dYZ + YdZ). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 (dX \circ Y) \circ Z &= \left( dXY + \frac{1}{2}dXdY \right) \circ Z \\
 &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dXdYZ + \frac{1}{2} \left( dXYdZ + \frac{1}{2}dXdYdZ \right) \\
 &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dX(dYZ + YdZ),
 \end{aligned}$$

d'où (2.12). L'égalité  $ZY \circ dX = Z \circ (Y \circ dX)$  se démontre de la même manière.

La formule (2.13) provient de la définition de l'intégrale de Stratonovich et du fait que

$$(dXdY)^T = dY^T dX^T.$$

■

# Chapitre 3

## $G$ –équations différentielles stochastiques matricielles d’un $G$ –processus de Wishart

Les matrices de Wishart constituent un autre ensemble de matrices aléatoires voisin des ensembles gaussiens. Ces matrices se rencontrent dans de nombreux problèmes d’analyse de données statistiques mais aussi dans des contextes plus inattendus comme les modèles de marcheurs aléatoires vicieux ou dans des problèmes d’interaction quantique pour des états aléatoires. Les matrices de Wishart ont été introduites initialement en statistique mécanique, elles représentent des matrices de covariance de données statistiques. Elles jouent en particulier un rôle très important dans la technique dite d’analyse de composantes principales [31]. Pour plus de détails sur les matrices de Wishart et leurs propriétés, le lecteur pourra se référer à [1, 7, 9, 12, 26, 27]. Dans ce chapitre, on considère un processus de Wishart avec dérive défini comme dans le cas classique à l’aide d’un  $G$ –mouvement Brownien matriciel et on s’intéresse aux EDS des valeurs propres et des vecteurs propres.

### 3.1 Description du modèle ( $G$ –Wishart avec dérive)

Dans le reste de cette thèse, on suppose que  $B$  satisfait l’hypothèse suivante :

(A) Il existe un processus réel et croissant  $b^j$  tel que  $\langle B^{ij}, B^{kl} \rangle_t = \delta_{ik} \delta_{jl} b_t^j$

### 3.1. DESCRIPTION DU MODÈLE ( $G$ -WISHART AVEC DÉRIVE)

*q.s.* pour chaque  $i, j, k, l \in \overline{1, n}$ , où  $\delta_{uv}$  est le symbole de Kronecker.

On a alors  $\underline{\sigma}^2 t \leq b_t^j \leq \bar{\sigma}^2 t$  où  $\bar{\sigma} := \max_{i,j} \bar{\sigma}_{ij}$  et  $\underline{\sigma} := \min_{i,j} \underline{\sigma}_{ij}$ . Notons que dans le cas classique, l'hypothèse (A) est satisfaite avec  $b_t^j = t$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Définition 3.1.1** [29] *Un  $G$ -processus de Wishart avec dérive est défini par  $X_t = (B_t + \eta t)^T (B_t + \eta t)$ , où  $\eta$  est une matrice déterministe.*

**Remarque 3.1.1** *Notons que si  $B$  est le mouvement Brownien classique, alors  $X$  n'est autre que le processus de Wishart classique avec dérive, qui apparaissait dans de nombreuses applications telles que la technologie des communications, la physique nucléaire, la chromodynamique quantique etc....*

On voudrait trouver les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres d'un  $G$ -processus de Wishart avec dérive. Notre approche est similaire à celle utilisée dans [5, 16]. L'idée est simplement de poser

$$M_t = B_t + \eta t.$$

On a alors

$$X_t = M_t^T M_t,$$

et

$$\begin{aligned} dX_t &= dM_t^T M_t + M_t^T dM_t + dM_t^T dM_t & (3.1) \\ &= (dB_t^T + \eta^T dt) M_t + M_t^T (dB_t + \eta dt) + dB_t^T dB_t \\ &= dB_t^T M_t + M_t^T dB_t + (\eta^T M_t + M_t^T \eta) dt + dB_t^T dB_t \end{aligned}$$

Notons que grâce à l'hypothèse (A) on a  $(dB_t^T dB_t)^{ij} = \sum_k dB^{ki} dB^{kj} = \sum_k \delta_{kk} \delta_{ij} db^i = n \delta_{ij} db^i$ .

**Proposition 3.1.1** [29] *On a*

$$dX^{ii} = 2\sqrt{X^{ii}} d\kappa^i + 2(\eta^T M)^{ii} dt + n db^i; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

où les  $\kappa^i$  sont des  $G$ -mouvements Browniens, tels que  $\langle \kappa^i, \kappa^j \rangle = \delta_{ij} b^j$  pour tout  $i, j$ .

**Preuve.** Remarquons que

$$dX^{ii} = \sum_k (dB^{ki} M^{ki} + M^{ki} dB^{ki}) + \sum_k (\eta^{ki} M^{ki} + M^{ki} \eta^{ki}) dt + \sum_k dB^{ki} dB^{ki},$$

par suite

$$\begin{aligned} dX^{ii} dX^{ii} &= \sum_k (dB^{ki} M^{ki} + M^{ki} dB^{ki}) \sum_l (dB^{li} M^{li} + M^{li} dB^{li}) \\ &= 4 \sum_{k,l} M^{ki} M^{li} \delta_{kl} \delta_{ii} db^i = 4 \sum_k M^{ki} M^{ki} db^i \\ &= 4X^{ii} db^i, \end{aligned}$$

d'où

$$dX^{ii} = 2\sqrt{X^{ii}} d\kappa^i + 2(\eta^T M)^{ii} dt + n db^i; \quad i = 1, \dots, n,$$

où les  $\kappa^i$  sont des  $G$ -mouvements Browniens, tels que  $\langle \kappa^i, \kappa^j \rangle = \delta_{ij} b^j$  pour tout  $i, j$ . ■

## 3.2 $G$ -équations différentielles stochastiques des valeurs propres

Dans ce qui suit, soit  $H_t^T X_t H_t = \Lambda_t := \text{diag}(\lambda_i(t))$  la forme de diagonalisation de  $X_t$ , où  $H_t$  est une matrice orthonormale. Le résultat suivant est l'équivalent du théorème 18.5.1.[14], prouvé dans le contexte linéaire pour un processus matriciel avec des incréments indépendants. Soit  $\tau = \inf \{t \geq 0 : \lambda_j(t) - \lambda_i(t) = 0, i, j \in \overline{1, n}\}$  le premier temps de collision des valeurs propres.

**Théorème 3.2.1** [29] *Supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , toutes les valeurs propres sont distinctes. Alors le processus des valeurs propres vérifie l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{aligned} d\lambda_i &= 2\sqrt{\lambda_i} \sum_l H^{li} dv^l + 2(\eta H)^{ii} \sqrt{\lambda_i} dt \tag{3.3} \\ &\quad + \sum_l (H^{li})^2 db^l \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] \\ &\quad + \lambda_i \sum_{p \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_p} \sum_l (H^{lp})^2 db^l \end{aligned}$$

où  $v^1, \dots, v^n$  sont des  $G$ -mouvements Browniens, satisfaisant  $\langle v^i, v^j \rangle = \delta_{ij} b^j$  pour tout  $i, j \in \overline{1, n}$ .

### 3.2. $G$ -ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DES VALEURS PROPRES

---

**Preuve.** Comme

$$\begin{aligned} (dM^T dM)^{ij} &= (dB^T dB)^{ij} = \sum_k dB^{ki} dB^{kj} \\ &= n\delta_{ij} db^i, \end{aligned}$$

alors

$$dX^{ij} = \sum_p (M^{pj} dB^{pi} + M^{pi} dB^{pj}) + \sum_p (\eta^{pi} M^{pj} + M^{pi} \eta^{pj}) dt + n\delta_{ij} db^i.$$

Il résulte que

$$\begin{aligned} dX^{ij} dX^{km} &= \sum_p (M^{pj} dB^{pi} + M^{pi} dB^{pj}) \sum_q (M^{qm} dB^{qk} + M^{qk} dB^{qm}) \\ &= \sum_{p,q} M^{pj} M^{qm} dB^{pi} dB^{qk} + \sum_{p,q} M^{pj} M^{qk} dB^{pi} dB^{qm} \\ &\quad + \sum_{p,q} M^{pi} M^{qm} dB^{pj} dB^{qk} + \sum_{p,q} M^{pi} M^{qk} dB^{pj} dB^{qm} \\ &= \sum_{p,q} M^{pj} M^{qm} \delta_{pq} \delta_{ik} db^i + \sum_{p,q} M^{pj} M^{qk} \delta_{pq} \delta_{im} db^i \\ &\quad + \sum_{p,q} M^{pi} M^{qm} \delta_{pq} \delta_{jk} db^j + \sum_{p,q} M^{pi} M^{qk} \delta_{pq} \delta_{jm} db^j \\ &= (X^{jm} \delta_{ik} + X^{jk} \delta_{im}) db^i + (X^{im} \delta_{jk} + X^{ik} \delta_{jm}) db^j. \end{aligned}$$

Comme dans [5, 16, 49], on a  $d\Lambda = dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA$ , et

$$\Lambda = H^T X H,$$

d'où

$$d\Lambda = d(H^T X H) \tag{3.4}$$

D'après la formule (3.4) et les propriétés de l'intégrale d'Itô Stratonovich, on peut écrire

$$\begin{aligned} d\Lambda &= dH^T \circ (XH) + H^T \circ d(XH) \\ &= (dH^T \circ X) \circ H + H^T \circ (dX \circ H + X \circ dH) \\ &= (dH^T \circ X) \circ H + H^T \circ dX \circ H + H^T \circ X \circ dH, \end{aligned}$$

d'où en posant  $dN = H^T \circ dX \circ H$ ,

$$d\Lambda = (dH^T \circ H \Lambda H^T) \circ H + dN + H^T \circ H \Lambda H^T \circ dH,$$

et d'après la formule (2.12) et le fait que  $ZY \circ dX = Z \circ (Y \circ dX)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} d\Lambda &= dN + dH^T \circ H\Lambda + H^T H\Lambda H^T \circ dH \\ &= dN + dH^T \circ H\Lambda + \Lambda H^T \circ dH \\ &= dN + dH^T \circ H \circ \Lambda + \Lambda \circ H^T \circ dH \\ &= dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA, \end{aligned}$$

où  $A$  est la matrice logarithme stochastique de  $H$  définie par

$$dA = H^T \circ dH.$$

Comme les éléments diagonaux de la matrice  $\Lambda \circ dA - dA \circ \Lambda$  sont nuls, alors on a  $d\lambda_i = dN^{ii}$  et  $0 = dN^{ij} + (\lambda_i - \lambda_j) dA^{ij}$ , si  $i \neq j$ . Ainsi, sur  $\{t < \tau\}$  [16, 29],

$$dA^{ij} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} dN^{ij} \quad (3.5)$$

Comme  $dN = H^T dXH + \frac{1}{2} (H^T dXdH + dH^T dXH)$ , il résulte alors que la partie  $G$ -martingale de  $dN$  est égale à la partie  $G$ -martingale de  $H^T dXH$  donnée par :

$$\begin{aligned} dN^{ij} dN^{km} &= (H^T dXH)^{ij} (H^T dXH)^{km} \\ &= \sum_{p,q} H^{pi} dX^{pq} H^{qj} \sum_{p',q'} H^{p'k} dX^{p'q'} H^{q'm} \\ &= \sum_{p,q,p',q'} H^{pi} H^{qj} H^{p'k} H^{q'm} \left[ (X^{qq'} \delta_{pp'} + X^{qp'} \delta_{pq'}) db^p \right. \\ &\quad \left. + (X^{pp'} \delta_{qq'} + X^{p'q} \delta_{q'q'}) db^q \right] \\ &= \sum_{q,q'} H^{qj} X^{qq'} H^{q'm} \sum_p H^{pi} H^{pk} db^p \\ &\quad + \sum_{q,p'} H^{qj} X^{qp'} H^{p'k} \sum_p H^{pi} H^{pm} db^p \\ &\quad + \sum_{p,q'} H^{pi} X^{pq'} H^{q'm} \sum_q H^{qj} H^{qk} db^q \\ &\quad + \sum_{p,p'} H^{pi} X^{pp'} H^{p'k} \sum_q H^{qj} H^{qm} db^q \end{aligned}$$

### 3.2. $G$ -ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DES VALEURS PROPRES

---

d'où

$$\begin{aligned} dN^{ij}dN^{km} &= \Lambda^{jm} \sum_p H^{pi} H^{pk} db^p + \Lambda^{jk} \sum_p H^{pi} H^{pm} db^p \\ &\quad + \Lambda^{im} \sum_q H^{qj} H^{qk} db^q + \Lambda^{ik} \sum_q H^{qj} H^{qm} db^q \end{aligned} \quad (3.6)$$

D'après la formule (3.6), il s'ensuit que

$$dN^{ii}dN^{jj} = 4\Lambda^{ij} \sum_p H^{pi} H^{pj} db^p \quad (3.7)$$

La partie à variation finie  $dF$  de  $dN$  est

$$dF = H^T (\eta^T M + M^T \eta) H dt,$$

Comme  $M = \Lambda^{\frac{1}{2}} H^T$ , alors

$$\begin{aligned} dF &= \left( H^T \eta^T \Lambda^{\frac{1}{2}} H^T H + H^T H \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta \right) dt \\ &= \left( H^T \eta^T \Lambda^{\frac{1}{2}} + \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta H \right) dt \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \left( \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta H \right)^{ii} &= \sum_{pq} (\Lambda^{ip})^{\frac{1}{2}} \eta^{pq} H^{qi} = \sum_{pq} \sqrt{\lambda_i} \delta_{ip} \eta^{pq} H^{qi} \\ &= \sqrt{\lambda_i} (\eta H)^{ii}, \end{aligned}$$

alors

$$dF^{ii} = 2\sqrt{\lambda_i} (\eta H)^{ii} dt \quad (3.8)$$

Maintenant, on calcule la partie intégrale  $dQ$  par rapport à  $db^i$  de  $dN$  :

$$\begin{aligned} dQ &= H^T dB^T dBH + \frac{1}{2} H^T dX dH + \frac{1}{2} dH^T dX H \\ &= H^T dB^T dBH + \frac{1}{2} ((dH^T H) (H^T dX H) + (H^T dX H) (H^T dH)) \\ &= H^T dB^T dBH + \frac{1}{2} \left( dN dA + (dN dA)^T \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$(H^T dB^T dBH)^{ij} = \sum_{p,q} H^{pi} (dB^T dB)^{pq} H^{qj},$$

et que

$$(dB^T dB)^{pq} = \sum_l dB^{lp} dB^{lq} = \sum_l \delta_{pq} db^p = n \delta_{pq} db^p,$$

on en déduit que

$$(H^T dB^T dB H)^{ij} = n \sum_p H^{pi} H^{pj} db^p \quad (3.9)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (dN dA)^{ij} &= \sum_p dN^{ip} dA^{pj} = \sum_{p \neq j} dN^{ip} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} dN^{pj} \quad (3.10) \\ &= \sum_{p \neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} \left[ \sum_l H^{li} H^{lp} db^l \Lambda^{pj} + \sum_l H^{li} H^{lj} db^l \Lambda^{pp} \right. \\ &\quad \left. + \sum_l H^{lp} H^{lp} db^l \Lambda^{ij} + \sum_l H^{lp} H^{lj} db^l \Lambda^{ip} \right] \\ &= \sum_{p \neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} \left[ \sum_l H^{li} H^{lj} db^l \Lambda^{pp} + \sum_l (H^{lp})^2 db^l \Lambda^{ij} \right. \\ &\quad \left. + \sum_l H^{lp} H^{lj} db^l \Lambda^{ip} \right] \\ &= \sum_{p \neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} \left[ \lambda_p \sum_l H^{li} H^{lj} db^l + \lambda_i \delta_{ij} \sum_l (H^{lp})^2 db^l \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i \delta_{ip} \sum_l H^{lp} H^{lj} db^l \right] \end{aligned}$$

Il résulte des formules (3.9) et (3.10) que

$$dQ^{ii} = \sum_l (H^{li})^2 db^l \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] + \lambda_i \sum_{p \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_p} \sum_l (H^{lp})^2 db^l.$$

Par suite

$$d\lambda_i = 2\sqrt{\lambda_i} \sum_l H^{li} dv^l + dF^{ii} + dQ^{ii},$$

d'où le résultat désiré. ■

### 3.2. $G$ -ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DES VALEURS PROPRES

---

**Corollaire 3.2.1** [29] *Supposons que  $b^i = b$  pour chaque  $i = 1, \dots, n$ . Alors, on a les équations différentielles stochastiques suivantes : Pour  $t < T_0 := \inf \{t : \det(X_t) = 0\}$*

1. 
$$d(\operatorname{tr}(X_t)) = 2\sqrt{\operatorname{tr}(X_t)}d\gamma_t + 2\operatorname{tr}\left(\eta^T\sqrt{X_t}\right)dt + n^2db_t \quad (3.11)$$

2. 
$$\begin{aligned} d(\det(X_t)) &= 2\det X_t\sqrt{\operatorname{tr}(X_t^{-1})}d\beta_t + 2\det X_t\operatorname{tr}\left(\eta H X_t^{-\frac{1}{2}}H\right)dt \\ &\quad + \det X_t\operatorname{tr}(X_t^{-1})db_t \end{aligned} \quad (3.12)$$

3. 
$$d(\log(\det(X_t))) = 2\sqrt{\operatorname{tr}(X_t^{-1})}d\beta_t + 2\operatorname{tr}\left(\eta H X_t^{-\frac{1}{2}}H\right)dt - \operatorname{tr}(X_t^{-1})db_t \quad (3.13)$$

4. pour  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} d(\det(X_t)^r) &= 2r(\det X_t)^r\sqrt{\operatorname{tr}(X_t^{-1})}d\beta_t \\ &\quad + 2r(\det X_t)^r\operatorname{tr}\left(\eta H X_t^{-\frac{1}{2}}H\right)dt \\ &\quad + r(2r-1)(\det X_t)^r\operatorname{tr}(X_t^{-1})db_t \end{aligned} \quad (3.14)$$

où  $\gamma$  (resp.  $\beta$ ) est un  $G$ -mouvement Brownien réel, tel que  $\langle\gamma\rangle = b$  (resp.  $\langle\beta\rangle = b$ ).

**Remarque 3.2.1** *Il est aisé de déduire de ce corollaire, l'analogie de ces EDS dans le cas classique qui ont été obtenues par Demni [6].*

**Preuve.**

(1) En utilisant la formule (3.2), on obtient

$$d(\operatorname{tr}(X_t)) = d\left(\sum_i X_t^{ii}\right),$$

d'où d'après la  $G$ -formule d'Itô,

$$\begin{aligned} d(\operatorname{tr}(X_t)) &= \sum_i dX_t^{ii} \\ &= \sum_i \left(2\sqrt{X^{ii}}d\kappa^i + 2(\eta^T M)^{ii}dt + ndb\right). \end{aligned}$$

D'autre part, comme la variation quadratique de  $\text{tr}(X)$  est

$$4 \sum_i X^{ii} db = 4 \text{tr}(X) db,$$

alors

$$d(\text{tr}(X_t)) = 2\sqrt{\text{tr}(X_t)} d\gamma_t + 2\text{tr}\left(\eta^T \sqrt{X_t}\right) dt + n^2 db_t.$$

(2) Remarquons qu'en utilisant la formule (3.3),

$$d\lambda_i = 2\sqrt{\lambda_i} dv^i + 2(\eta H)^{ii} \sqrt{\lambda_i} dt + \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p + \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] db.$$

En utilisant la  $G$ -formule d'Itô, on obtient

$$d(\det X) = \sum_i \frac{\det X}{\lambda_i} d\lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\det X}{\lambda_i \lambda_j} d\lambda_i d\lambda_j.$$

Rappelons que  $d\lambda_i d\lambda_j = 4\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \delta_{ij} db$ , il en résulte que

$$\begin{aligned} d(\det X) &= \det X \sum_i \frac{d\lambda_i}{\lambda_i} \\ &= \det X \sum_i 2 \frac{dv^i}{\sqrt{\lambda_i}} + 2 \det X \sum_i \frac{(\eta H)^{ii}}{\sqrt{\lambda_i}} dt \\ &\quad + \det X \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p + \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] db. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{(\eta H)^{ii}}{\sqrt{\lambda_i}} &= \sum_i (\eta H)^{ii} \left( \Lambda^{-\frac{1}{2}} \right)^{ii} = \sum_i \left( \eta H \Lambda^{-\frac{1}{2}} \right)^{ii} \\ &= \text{Tr} \left( \eta H \Lambda^{-\frac{1}{2}} \right) = \text{Tr} \left( \eta H X^{-\frac{1}{2}} H \right), \end{aligned}$$

### 3.3. $G$ –ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DES VECTEURS PROPRES

---

alors

$$\begin{aligned}
 \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p + \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] &= \sum_i \frac{n}{\lambda_i} + \sum_i \sum_{p \neq i} \frac{1}{\lambda_i} \left( \frac{\lambda_p + \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_p} \right) \\
 &= n \text{Tr} (X^{-1}) \\
 &\quad + \sum_i \sum_{p \neq i} \left( \frac{-1}{\lambda_i} + \frac{2}{\lambda_i - \lambda_p} \right) \\
 &= n \text{Tr} (X^{-1}) - (n-1) \text{Tr} (X^{-1}) \\
 &\quad + 2 \sum_i \sum_{p \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_p} \\
 &= \text{Tr} (X^{-1}).
 \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier par récurrence que  $\sum_i \sum_{p \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_p} = 0$ . La variation quadratique de  $\det X$  est alors égale à

$$4 (\det X)^2 \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \delta_{ij} db = 4 \det X^2 \text{Tr} (X^{-1}) db,$$

d'où le résultat souhaité (3.12).

Pour obtenir les équations (3.13) et (3.14), il suffit d'appliquer la  $G$ –formule d'Itô et utiliser le fait que la variation quadratique de  $\det X$  est égale  $4 (\det X)^2 \text{Tr} (X^{-1}) db$ .

■

Notons que dans [32], les auteurs traitent le cas des mouvements Browniens d'ellipsoïdes de Dynkin avec des méthodes analogues. Ils dérivent les équations différentielles stochastiques correspondantes et obtiennent un théorème de non collision des valeurs propres (voir aussi [47, IV.361]).

### 3.3 $G$ –équations différentielles stochastiques des vecteurs propres

L'objectif de ce paragraphe est d'étendre les résultats obtenus par Bru [5], concernant les équations différentielles stochastiques des vecteurs propres de  $X_t$ .

**Proposition 3.3.1** [5, 49] *La matrice  $H_t$  satisfait :*

$$dH = H \circ dA = HdA + \frac{1}{2}HdAdA.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} dA &= H^T \circ dH \\ &= H^T dH + \frac{1}{2}dH^T dH. \end{aligned}$$

En multipliant cette égalité à gauche par  $H$  et en ajoutant  $\frac{1}{2}dHdA$  aux deux membres, on trouve

$$HdA + \frac{1}{2}dHdA = dH + \frac{1}{2}HdH^T dH + \frac{1}{2}dHdA.$$

D'une part on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(HdH^T dH + dHdA) &= \frac{1}{2} \left( HdH^T dH + dH \left( H^T dH + \frac{1}{2}dH^T dH \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}(HdH^T + dHH^T) dH, \end{aligned}$$

d'autre part

$$0 = dI = d(HH^T) = HdH^T + dHH^T + dHdH^T,$$

d'où

$$HdH^T + dHH^T = -dHdH^T,$$

et

$$\frac{1}{2}(HdH^T dH + dHdA) = -\frac{1}{2}dHdH^T dH = 0,$$

qui entraîne que

$$dH = H \circ dA = HdA + \frac{1}{2}HdAdA.$$

■

**Théorème 3.3.1** [29] *Les vecteurs propres de  $X_t$  satisfont les équations suivantes*

$$dH^{ij} = \sum_{k \neq j} H^{ik} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \left( \sqrt{\lambda_k} \sum_l H^{lj} d\beta^{jl} + \sqrt{\lambda_j} \sum_l H^{lk} d\beta^{kl} \right) + \frac{1}{2} \sum_k H^{ik} dV^{kj} \quad (3.15)$$

### 3.3. $G$ -ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DES VECTEURS PROPRES

---

où

$$dV^{kj} = \sum_{p \neq j, p \neq k} \frac{1}{(\lambda_p - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_p)} \left[ \lambda_p \sum_l H^{lk} H^{lj} db^l + \delta_{kj} \lambda_k \sum_l H^{lp} H^{lp} db^l \right] \quad (3.16)$$

et  $(\beta^{ij})$  est un  $G$ -mouvement Brownien matriciel satisfaisant l'hypothèse (A).

**Preuve.** Pour trouver les EDS pour  $H_t$  sur  $\{t < \tau\}$ , on déduit de la définition de  $dA$  que

$$dH = H \circ dA = HdA + \frac{1}{2}HdAdA,$$

d'où

$$dH^{ij} = \sum_k H^{ik} dA^{kj} + \frac{1}{2} \sum_k H^{ik} (dAdA)^{kj}.$$

On a pour  $i \neq j$ , d'après la formule (3.6),

$$dN^{ij} dN^{ij} = \lambda_i \sum_l (H^{lj})^2 db^l + \lambda_j \sum_l (H^{li})^2 db^l,$$

ce qui implique que

$$dN^{ij} = \sqrt{\lambda_i} \sum_l H^{lj} d\beta^{jl} + \sqrt{\lambda_j} \sum_l H^{li} d\beta^{il},$$

où  $(\beta^{il})$  est un  $G$ -mouvement Brownien matriciel satisfaisant l'hypothèse (A). Il s'ensuit que

$$dA^{ij} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \left( \sqrt{\lambda_i} \sum_l H^{lj} d\beta^{jl} + \sqrt{\lambda_j} \sum_l H^{li} d\beta^{il} \right).$$

Calculons maintenant  $(dAdA)^{ij}$ . On a

$$\begin{aligned}
 (dAdA)^{ij} &= \sum_p dA^{ip} dA^{pj} \\
 &= \sum_{p \neq j, p \neq i} \frac{1}{(\lambda_p - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_p)} dN^{ip} dN^{pj} \\
 &= \sum_{p \neq j, p \neq i} \frac{1}{(\lambda_p - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_p)} \left[ \sum_l H^{li} H^{lp} db^l \Lambda^{pj} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_l H^{li} H^{lj} db^l \Lambda^{pp} + \sum_l H^{lp} H^{lp} db^l \Lambda^{ij} + \sum_l H^{lp} H^{lj} db^l \Lambda^{ip} \right] \\
 &= \sum_{p \neq j, p \neq i} \frac{1}{(\lambda_p - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_p)} \left[ \lambda_p \sum_l H^{li} H^{lj} db^l \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{ij} \lambda_i \sum_l H^{lp} H^{lp} db^l \right],
 \end{aligned}$$

d'où le résultat désiré. ■

**Exemple 3.3.1** On considère le cas du processus de Wishart classique, qui correspond à  $\eta = 0$  et  $X_t = B_t^T B_t$  où  $(B_t)$  est le mouvement Brownien matricielle classique. Il a été démontré dans [5] que

$$d\lambda_i = 2\sqrt{\lambda_i} dv^i + \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p + \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] dt,$$

où  $v^i$  sont des mouvements Browniens classiques. On peut obtenir cette formule à partir de la formule (3.3) avec  $b_t^i = t$  et le fait que  $\sum_l (H^{li})^2 = 1$ . Il en est de même pour les EDS satisfaites par les vecteurs propres.

### 3.4 Cas du $G$ -processus d'Ornstein-Uhlenbeck

[19, 33] Si on considère le  $G$ -processus de Wishart  $X_t = Y_t^T Y_t$  où  $Y$  est le  $G$ -processus matricielle d'Ornstein-Uhlenbeck, qui est la solution de la  $G$ -équation différentielle stochastique

$$dY_t = -\frac{1}{2} Y_t dt + a dB_t, \quad a > 0,$$

### 3.4. CAS DU $G$ -PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK

---

où  $B$  est le  $G$ -mouvement Brownien satisfaisant l'hypothèse (A). On a alors le théorème suivant :

**Théorème 3.4.1** *Supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , toutes les valeurs propres sont distinctes. Alors le processus des valeurs propres vérifie l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{aligned} d\lambda_i &= 2a\sqrt{\lambda_i} \sum_l H^{li} dv^l - \lambda_i dt & (3.17) \\ &+ a^2 \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] \sum_l (H^{li})^2 db^l \\ &+ a^2 \lambda_i \sum_{p \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_p} \sum_l (H^{lp})^2 db^l \end{aligned}$$

où  $v^1, \dots, v^n$  sont des  $G$ -mouvements Browniens, satisfaisant  $\langle v^i, v^j \rangle = \delta_{ij} b^j$  pour chaque  $i, j \in \overline{1, n}$ .

**Preuve.** De la même manière que celle adoptée pour le cas du  $G$ -processus de Wishart avec dérive, on a

$$\begin{aligned} dX_t &= dY_t^T Y_t + Y_t^T dY_t + dY_t^T dY_t \\ &= \left( -\frac{1}{2} Y_t^T dt + a dB_t^T \right) Y_t + Y_t^T \left( -\frac{1}{2} Y_t dt + a dB_t \right) + a^2 dB_t^T dB_t \\ &= -\frac{1}{2} X_t dt + a dB_t^T Y_t + -\frac{1}{2} X_t dt + a Y_t^T dB_t + a^2 dB_t^T dB_t \\ &= -X_t dt + a (dB_t^T Y_t + Y_t^T dB_t) + a^2 dB_t^T dB_t, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} dX^{ij} dX^{km} &= a^2 \left[ \sum_p (dB^{pi} Y^{pj} + Y^{pi} dB^{pj}) \sum_q (dB^{qk} Y^{qm} + Y^{qk} dB^{qm}) \right] \\ &= a^2 \left[ \left( \sum_{p,q} Y^{pj} Y^{qm} \delta_{pq} \delta_{ik} + \sum_{p,q} Y^{pj} Y^{qk} \delta_{pq} \delta_{im} \right) db^i \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{p,q} Y^{pi} Y^{qm} \delta_{pq} \delta_{jk} + \sum_{p,q} Y^{pi} Y^{qk} \delta_{pq} \delta_{jm} \right) db^j \right] \\ &= a^2 \left[ (X^{jm} \delta_{ik} + X^{jk} \delta_{im}) db^i + (X^{im} \delta_{jk} + X^{ik} \delta_{jm}) db^j \right] \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
 dN^{ij} dN^{km} &= \sum_{p,q} H^{pi} dX^{pq} H^{qj} \sum_{p',q'} H^{p'k} dX^{p'q'} H^{q'm} \\
 &= \sum_{p,q,p',q'} H^{pi} H^{qj} H^{p'k} H^{q'm} a^2 \left[ \left( X^{qq'} \delta_{pp'} + X^{qp'} \delta_{pq'} \right) db^p \right. \\
 &\quad \left. + \left( X^{pp'} \delta_{qq'} + X^{p'p} \delta_{q'q} \right) db^{q'} \right] \\
 &= a^2 \left[ \Lambda^{jm} \sum_p H^{pi} H^{pk} db^p + \Lambda^{jk} \sum_p H^{pi} H^{pm} db^p \right. \\
 &\quad \left. + \Lambda^{im} \sum_q H^{qj} H^{qk} db^q + \Lambda^{ik} \sum_q H^{qj} H^{qm} db^q \right].
 \end{aligned}$$

Il résulte alors que

$$dN^{ii} dN^{jj} = 4a^2 \Lambda^{ij} \sum_p H^{pi} H^{pj} db^p \quad (3.18)$$

La partie à variation finie  $dF$

$$dF = -H^T X_t H dt = -\Lambda dt,$$

d'où

$$dF^{ii} = -\lambda_i dt \quad (3.19)$$

et la partie intégrale  $dQ$  par rapport à  $db^p$  :

$$dQ = a^2 H^T dB^T dBH + \frac{1}{2} \left( dN dA + (dN dA)^T \right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
 dQ^{ij} &= a^2 \sum_{p,q} H^{pi} (dB^T dB)^{pq} H^{qj} + \frac{1}{2} \left( dN dA + (dN dA)^T \right)^{ij} \\
 &= na^2 \sum_p H^{pi} H^{pj} db^p + \frac{1}{2} \left( dN dA + (dN dA)^T \right)^{ij}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 (dNdA)^{ij} &= \sum_p dN^{ip} dA^{pj} = \sum_{p \neq j} dN^{ip} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} dN^{pj} \\
 &= \sum_{p \neq j} \frac{a^2}{\lambda_j - \lambda_p} \left[ \lambda_p \sum_l H^{li} H^{lj} db^l + \lambda_i \delta_{ij} \sum_l (H^{lp})^2 db^l \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_i \delta_{ip} \sum_l H^{lp} H^{lj} db^l \right],
 \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
 dQ^{ii} &= a^2 \left\{ \sum_l (H^{li})^2 db^l \left[ \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_p}{\lambda_i - \lambda_p} + n \right] \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_i \sum_{p \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_p} \sum_l (H^{lp})^2 db^l \right\}.
 \end{aligned}$$

Il résulte que

$$d\lambda_i = 2a\sqrt{\lambda_i} \sum_l H^{li} dv^l - \lambda_i dt + dQ^{ii}.$$

■

**Théorème 3.4.2** *Les vecteurs propres de  $X_t$  satisfont les équations suivantes*

$$dH^{ij} = a \sum_{k \neq j} H^{ik} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \left( \sqrt{\lambda_k} \sum_l H^{lj} d\beta^{jl} + \sqrt{\lambda_j} \sum_l H^{lk} d\beta^{kl} \right) + \frac{a^2}{2} \sum_k H^{ik} dV^{kj},$$

où  $dV^{kj}$  est défini par (3.16), et  $(\beta^{ij})$  est un  $G$ -mouvement Brownien matriciel satisfaisant l'hypothèse (A).

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du cas d'un processus  $G$ -Wishart avec dérive à ceci près que

$$\begin{aligned}
 (dAdA)^{kj} &= \sum_{p \neq j, p \neq k} \frac{a^2}{(\lambda_p - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_p)} \\
 &\quad \left[ \lambda_p \sum_l H^{lk} H^{lj} db^l + \delta_{kj} \lambda_k \sum_l (H^{lp})^2 db^l \right],
 \end{aligned}$$

$$dN^{kj}dN^{kj} = a^2 \left[ \lambda_k \sum_p (H^{pj})^2 db^p + \lambda_j \sum_p (H^{pk})^2 db^p \right],$$

d'où

$$dN^{kj} = a \left[ \sqrt{\lambda_k} \sum_p H^{pj} d\beta^{jp} + \sqrt{\lambda_j} \sum_l H^{pk} d\beta^{kp} \right].$$

d'où le résultat souhaité.

■

### 3.5 Temps de collision

Considérons le premier temps de collision  $\tau$ . L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les solutions des EDS des valeurs propres et des vecteurs propres d'un  $G$ -processus de Wishart avec dérive n'explorent pas.

**Corollaire 3.5.1** *Si, à l'instant  $t = 0$ , les valeurs propres de  $X$  sont distinctes  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ , alors le premier temps de collision  $\tau = +\infty$  q.s..*

**Preuve.** Soit  $(\lambda_j(t) - \lambda_i(t))_{t < \tau}$  le processus stochastique à valeurs réels positifs et non nulles. Comme dans [5, 20], en appliquant la  $G$ -formule d'Itô à  $U = -\sum_{i < j} \log(\lambda_j - \lambda_i)$  et en utilisant le fait que la co-variation quadratique de  $\lambda_i, \lambda_j$  est égale à  $4\delta_{ij}\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}db^i$ , on obtient

$$dU = \sum_{i < j} \frac{d\lambda_i - d\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} + 2 \sum_{i < j} \frac{\lambda_i db^i + \lambda_j db^j}{(\lambda_j - \lambda_i)^2}.$$

Il résulte de l'équation différentielle stochastique satisfaite par  $\lambda_i$ , que

$$\langle U \rangle_t = 4 \sum_{i < j} \int_0^t \frac{\lambda_i(s) \sum_l (H_s^{li})^2 db_s^l + \lambda_j(s) \sum_l (H_s^{lj})^2 db_s^l}{(\lambda_j(s) - \lambda_i(s))^2}.$$

Il est clair que  $U_t$  est une martingale locale classique par rapport à sa filtration naturelle sous chaque mesure de probabilité  $P \in \mathcal{P}$ . Si deux valeurs propres entrent en collision, alors il existe  $P^0 \in \mathcal{P}$  telle que  $P^0(\tau = +\infty) < 1$ ,  $\lim_{t \uparrow \tau} U_t = -\infty$  et  $U$  est continu sur  $[0, \tau[$ . Soit  $\xi_t = \inf \{s \geq 0 : \langle U \rangle_s > t\}$

l'inverse de  $\langle U \rangle_t$ . Par l'argument de Mc. Kean [28, p.47], Bru [5] et Williams [51], Le processus  $\tilde{B}_t = U_{\xi_t}$  est un mouvement Brownien classique sur  $[0, \langle U \rangle_\tau[$   $P^0$  p.s. sur  $\{\tau < +\infty\}$  [19, p.92]. Ainsi

$$\lim_{t \uparrow \langle U \rangle_\tau} \tilde{B}_t = \lim_{\xi_t \uparrow \tau} U_{\xi_t} = \lim_{t \uparrow \tau} U_t = -\infty,$$

ce qui est impossible pour un mouvement Brownien. Par conséquent  $\tau = +\infty$  q.s.. ■

# Chapitre 4

## Appendice A

### 4.1 Algèbre matricielle

Dans cette thèse nous adoptons les notations suivantes :

**Définition 4.1.1** (i)  $\mathbb{S}_n$  = le sous espace linéaire de toutes les matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(ii)  $\mathbb{S}_n^+$  (resp.  $\mathbb{S}_n^-$ ) = l'ensemble de toutes les matrices symétriques définies positives (négatives) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(iii)  $\overline{\mathbb{S}_n^+}$  = la fermeture de  $\mathbb{S}_n^+$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire l'ensemble de toutes les matrices symétriques semi-définies positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Le théorème suivant décrit les matrices définies positives.

**Théorème 4.1.1** (Matrices définies positives)

(i)  $A \in \mathbb{S}_n^+$  si et seulement si  $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0$ .

(ii)  $A \in \mathbb{S}_n^+$  si et seulement si  $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1$ .

(iii)  $A \in \mathbb{S}_n^+$  si et seulement si  $A$  est diagonalisable par une matrice orthogonale avec des valeurs propres positives, i.e. il existe une matrice orthogonale  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $UU^T = I_n$ , telle que  $A = UDU^T$  avec une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , où  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont les valeurs propres positives de  $A$ .

(iv) Si  $A \in \mathbb{S}_n^+$  alors  $A^{-1} \in \mathbb{S}_n^+$ .

(v)  $A^T A \in \mathbb{S}_n^+$  pour toute matrice  $A$  inversible.

(vi)  $A \in \overline{\mathbb{S}_n^+}$  si et seulement si  $A$  est diagonalisable par une matrice orthogonale avec des valeurs propres non négatives.

(vii)  $M^T M \in \overline{\mathbb{S}}_n^+$  pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Preuve.** Voir Muirhead [30] ou Fischer [11]. ■

**Définition 4.1.2** (*Racine carrée des matrices semi-définies positives*)

Soit  $A \in \overline{\mathbb{S}}_n^+$ . Selon le théorème précédent, il existe une matrice orthogonale  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $UU^T = I_n$ , telle que  $A = UDU^T$  avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , où  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Alors, on définit la racine carrée de  $A$  par  $\sqrt{A} = U \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) U^T$ , qui est également une matrice semi-définie positive.

**Remarque 4.1.1** Si  $A \in \mathbb{S}_n^+$  alors  $\sqrt{A} \in \mathbb{S}_n^+$ .

**Définition 4.1.3** Soit  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On définit l'opérateur différentiel  $D_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial S_{ij}} \right)_{i,j}$  pour toutes les fonctions différentiables  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , la matrice de toutes les dérivées partielles  $D_{ij}f(S)$  de  $f(S)$ .

### Règles de calcul pour les déterminants

Pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $S \in GL(n)$  l'ensemble des matrices inversibles et  $H_t : \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$  différentiable, alors

#### Lemme 4.1.1

- (i)  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$  et  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Si  $A \in GL(n)$  ou  $B \in GL(n)$  alors  $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$ .
- (iii)  $\frac{d}{dt} \det(H_t) = \det(H_t) \text{tr} \left( H_t^{-1} \frac{d}{dt} H_t \right)$ .
- (iv)  $D(\det(S)) = \det(S) (S^{-1})^T$ .
- (v)  $\det(A)$  est le produit des valeurs propres de  $A$ .

En outre, si  $S$  est symétrique, alors

- (vi)  $D(\det(S)) = \det(S) S^{-1}$ .
- (vii)  $\frac{\partial^2}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} (\det(S)) = \det(S) \left[ (S^{-1})_{kl} (S^{-1})_{ij} - (S^{-1})_{ik} (S^{-1})_{lj} \right]$   
Où  $(S^{-1})_{ij}$  désigne la  $i, j$ -ième entrée de  $S^{-1}$ .

**Preuve.** Voir Fisher [11], [44]. ■

**Lemme 4.1.2** (*Règles de calcul pour la trace*). Pour tout  $A, B, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

- (i)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  et  $\text{tr}(\alpha A + B) = \alpha \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\text{tr}(A)$  est la somme des valeurs propres de  $A$ .

**Preuve.** voir Fisher [11]. ■

La définition suivante nous donne une relation entre les vecteurs et les matrices. L'idée est la suivante : supposons que nous voulons transférer un théorème qui tient pour des processus stochastiques multivariés à un qui tient pour des processus stochastiques matriciels  $S$ . Ensuite, on peut appliquer le théorème à  $\text{vec}(S)$  et, si nécessaire, appliquer  $\text{vec}^{-1}$  aux processus multivariés résultants pour obtenir le théorème dans une version matricielle.

**Définition 4.1.4** Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  avec les colonnes  $a_i \in \mathbb{R}^m; i = 1, \dots, n$ . on définit la fonction  $\text{vec} : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$  par

$$\text{vec}(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Parfois, nous considérons aussi  $\text{vec}(A)$  comme un élément de  $\mathcal{M}_{mn,1}(\mathbb{R})$ .

**Remarque 4.1.2**

$$\text{vec}(A^T) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{pmatrix}$$

où  $\tilde{a}_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, m$  désigne le vecteur colonne de  $A$ .

# Chapitre 5

## Appendice B

### 5.1 Processus et analyse stochastique de base

On donne dans cette partie quelques notions de base sur le calcul matriciel et les processus matrices en général.

**Définition 5.1.1** (*Processus stochastique matriciel*)

Une fonction mesurable  $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$  est appelée un processus stochastique (variable matricielle) si  $X(t, \omega)$  est une matrice aléatoire pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . De plus,  $X$  est appelé un processus stochastique dans  $\overline{\mathbb{S}}_n^+$  si  $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{S}}_n^+$ .

**Définition 5.1.2** (*Martingale locale*).

Un processus stochastique matriciel  $X$  est appelé martingale locale, si chaque entrée de  $X$  est une martingale locale, i.e. s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt strictement monotones  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $T_n \xrightarrow{p.s.} \infty$ , tel que  $(X_{t \wedge T_n})_{i,j}$  est une martingale pour tout  $i, j$ .

**Définition 5.1.3** (*Mouvement Brownien matriciel*)

Un mouvement Brownien matriciel  $B$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est une matrice composée de mouvements Browniens réels indépendants, i.e.  $B = (B_{ij})_{i,j}$  où  $B_{ij}$  sont des mouvements Browniens indépendants et unidimensionnels,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$ .

**Définition 5.1.4** (*Semimartingale*)

Un processus stochastique matriciel  $X$  est appelé semimartingale si  $X$  peut être décomposé en  $X = X_0 + M + A$  où  $M$  est une martingale locale et  $A$  un processus adapté à variation finie.

**Théorème 5.1.1** (La formule d'Itô matricielle sur un sous-ensemble ouvert.)

Soit  $U \subseteq \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  un ouvert, et soit  $X$  une semimartingale continue à valeurs dans  $U$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  continue et deux fois différentiable. Alors  $f(X)$  est une semimartingale continue et

$$f(X_t) = f(X_0) + \operatorname{tr} \left( \int_0^t Df(X_s)^T dX_s \right) + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j,l=1}^n \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial X_{ij} \partial X_{kl}} f(X_s) d\langle X_{ij}, X_{kl} \rangle_s,$$

$$\text{où } D = \left( \frac{\partial}{\partial X_{ij}} \right)_{i,j} \text{ et } d\langle X_{ij}, X_{kl} \rangle = dX_{ij}dX_{kl}.$$

**Preuve.** Voir Revuz et Yor [46, Théorème 3.3 et Remarque 2, Chapitre IV] et [44, Lemme 2.11]. ■

### 5.1.1 L'Argument de McKean

Le théorème de Lévy nous donne un moyen facile de décider si une martingale locale continue est un mouvement Brownien.

**Théorème 5.1.2** (Théorème de Lévy)

Soit  $W$  une martingale locale continue de dimension  $n \times n$ , telle que

$$\langle W^{ij}, W^{kl} \rangle_t = \begin{cases} t, & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

Pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  et  $W_0 = 0$ . Alors  $W$  est un mouvement Brownien  $n$ -dimensionnel.

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $X := \operatorname{vec}(W)$  est un mouvement Brownien  $n^2$ -dimensionnel. Soient  $a, b \in \{1, \dots, n^2\}$ . Alors, il existe  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $a = n(j-1) + i$  et  $b = n(l-1) + k$ . Clairement,  $i = k$  et  $j = l$  impliquent  $a = b$ , et inversement. Ainsi,

$$\langle X^a, X^b \rangle = \langle W^{ij}, W^{kl} \rangle = t \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} = t \mathbf{1}_{\{a=b\}}.$$

On conclut d'après le théorème 40, chapitre 2 Protter [45], [3] que  $X$  est un mouvement Brownien  $n^2$ -dimensionnel. ■

Pour chaque temps d'arrêt fini  $\tau_0$  on dira que  $M$  est une martingale locale sur l'intervalle stochastique  $[0, \tau_0]$  si le processus arrêté  $(M_{t \wedge \tau_0})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une martingale locale. Le prochain théorème nous montre que toute martingale locale continue et arrêtée est l'arrêté d'un mouvement Brownien après changement de temps.

**Théorème 5.1.3** *Soit  $0 < \tau_0 < \infty$  un temps d'arrêt relativement par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  et soit  $M$  est une martingale locale continue non identiquement nulle sur l'intervalle  $[0, \tau_0]$ . Soit*

$$T_t := \inf \{s : \langle M, M \rangle_s > t\} \quad (\text{Avec la convention } \inf \{\emptyset\} = +\infty).$$

*Alors  $W_t := M_{T_t}$  est un  $\mathcal{F}_{T_t}$ -mouvement Brownien arrêté sur l'intervalle stochastique  $[0, \langle M, M \rangle_{\tau_0})$ ,  $\langle M, M \rangle_{\tau_0} > 0$  p.s., i.e  $W$  est un mouvement Brownien arrêté à  $\langle M, M \rangle_{\tau_0}$  par rapport à la filtration définie par*

$$\mathcal{F}_{T_t} = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T_t \leq t\} \in \mathcal{F}_t; t \in \mathbb{R}_+\}.$$

*De plus, on a  $M_t = W_{\langle M, M \rangle_t}$ .*

**Preuve.** Observons que  $T_t$  est l'inverse continu à droite de  $\langle M, M \rangle_s$ . Comme  $M$  est continue, alors  $\langle M, M \rangle$  l'est aussi, on en déduit que  $\langle M, M \rangle_{T_t} = t$  sur  $\{T_{\langle M, M \rangle_t} \geq t\}$  (Voir Revuz et Yor [46, p.7 – 8] pour plus de détails).

Supposons  $\langle M, M \rangle_{\tau_0} = 0$ . Comme  $\langle M, M \rangle$  est un processus croissant et  $\langle M, M \rangle_t = 0$  pour tout  $t \in [0, \tau_0]$ , alors  $E(\langle M, M \rangle_t) = 0$  pour tout  $t \in [0, \tau_0]$ . D'après le Corollaire 3 du chapitre II Protter [45], il résulte que  $E(M_t^2) = 0$ , d'où  $M_t = 0$  pour tout  $t \in [0, \tau_0]$ , ce qui est une contradiction.

L'ensemble  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une famille de temps d'arrêt, car  $M$  est adaptée. Observons que

$$\langle M, M \rangle_{\tau_0} > t \Rightarrow T_t \leq \tau_0.$$

Par conséquent,  $T_t < \infty$  sur  $\{\tau_0 < \infty\}$ . D'après les propositions 4.8 et 4.9, chapitre I de Revuz et Yor [46] on conclut que le processus arrêté  $(M_{T_t})$  est  $(\mathcal{F}_{T_t})$ -adapté. En outre,

$$\langle W, W \rangle_t = \langle M, M \rangle_{T_t} = t,$$

comme mentionné ci-dessus et d'après le théorème (5.1.2) on en déduit que  $W$  est un  $(\mathcal{F}_{T_t})$ -mouvement Brownien arrêté sur  $[0, \langle M, M \rangle_{\tau_0})$ .

Pour prouver que  $M$  est un mouvement Brownien après changement de temps, il suffit d'observer que  $T_{\langle M, M \rangle_t} > t$  si et seulement si  $\langle M, M \rangle$  est constant sur  $[t, T_{\langle M, M \rangle_t}]$ . Comme  $M$  et  $\langle M, M \rangle$  sont constantes sur les mêmes intervalles, alors on a  $M_{T_{\langle M, M \rangle_t}} = M_t$  d'où  $W_{\langle M, M \rangle_t} = M_t$ . ■

### Conclusion et perspectives

Dans notre travail, on a donné le système des EDS des valeurs propres et des vecteurs propres pour un  $G$ -processus de Wishart avec dérive défini à l'aide d'un  $G$ -mouvement Brownien matriciel. Ce système a été difficile à obtenir à cause du fait que la variation quadratique du  $G$ -mouvement Brownien n'est pas déterministe. Ajouté à cela, notre principale difficulté réside dans le fait que les entrées d'une matrice  $G$ -Brownienne ne sont pas indépendantes en général. Pour contourner ces difficultés, on a supposé dans notre modèle que les covariations quadratiques des entrées sont nulles. La  $G$ -formule d'intégration par parties matricielle a été la clé de ce travail.

Comme perspectives, nous envisageons de :

- Traiter le cas d'autres processus liés à un  $G$ -mouvement Brownien et éventuellement considérer d'autres modèles.

- Etudier le comportement asymptotique des valeurs propres des processus matrices définis à l'aide du  $G$ -mouvement Brownien.

# Bibliographie

- [1] T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 2003.
- [2] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge University Press, 2009.
- [3] A. Blanchet, J. Dolbeault, R. Monneau, *Formulation de monotonie appliquées à des problèmes à frontière libre et de modélisation en biologie*. Thèse de Doctorat de l'université Paris Dauphine, France (2005).
- [4] H. Boutabia, I. Grabsia, *Chaotic expansion in the  $G$ -expectation space*, Opuscula Math. **33** (2013), 647 – 666.
- [5] M. F. Bru, *Diffusions of perturbed principal component analysis*, J. Multivariate Anal. **29**(1989), 127 – 136.
- [6] N. Demni, *The Laguerre process and generalized Hartman-Watson law*, Bernoulli **13**(2007), 556 – 580.
- [7] N. Demni, *Processus stochastiques matriciels, système de racines et probabilités non commutatives*, thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie curie Paris, France (2007).
- [8] L. Denis, M. Hu, S. Peng, *Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : application to  $G$ -Brownian motion paths*, Potential Anal. **34**(2011), 139 – 161.
- [9] C. Donati-Martin, Y. Doumerc, H. Matsumoto, M. Yor, *Some properties of the Wishart processes and a matrix extension of the Hartman-Watson laws*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), 1385 – 1412.
- [10] Y. Fan, *Conditional  $G$ -expectation in  $L^p$  and related Itô's calculus*, arXiv : 1302.6001v1 [math.PR] (2013).
- [11] G. Fischer, *Linear Algebra*, Vieweg, 2005.
- [12] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs Series, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010.

- 
- [13] F. Gao, *Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equation driven by  $G$ -Brownian motion*, Stochastic Process. Appl. **119** (2009), 3356 – 3382.
- [14] V. L. Girko, *Theory of Random Determinants*, VSP, chapter 18, The distribution of eigenvalues and eigenvectors of additive random matrix-valued processes, 1990, pp.442 – 467.
- [15] I. Grabsia, *Chaos de Wiener par rapport au  $G$ -mouvement Brownien*. Thèse de Doctorat de l'université Badji Mokhtar Annaba, Algérie (2014).
- [16] P. Graczyk, J. Malecki, *Multidimensional Yamada-Watanabe theorem and its applications to particle systems*, J. Math. Phys. **54** (2013), 021503.
- [17] M. Hu, S. Ji, S. Yang, *A stochastic recursive optimal control problem under the  $G$ -expectation framework*, Appl. Math. Optim. **70** (2014), 253 – 278.
- [18] P. Huber, V. Strassen, *Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacity*, Ann. Stat. **1** (1973), 252 – 263.
- [19] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential Equation and Diffusion Processes*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [20] M. Katori, H. Tanemura, *Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems*, J. Math. Phys. **45** (2004), 3058 – 3085.
- [21] M. Katori, H. Tanemura, *Complex Brownian motion representation of the Dyson model*, Electron. Commun. Probab. **18**(2013), 1 – 16.
- [22] X. Li, S. Peng, *Stopping times and related Itô's calculus with  $G$ -Brownian motion*, Stochastic Process. Appl. **121** (2011), 1492 – 1508.
- [23] Q. Lin, *Local time and Tanaka formula for the  $G$ -Brownian motion*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2012), 315 – 334.
- [24] Y. Lin, *Équations différentielles stochastiques sous les espérances mathématiques non-linéaires et applications*. Thèse de Doctorat de l'université de Rennes 1, France (2013).
- [25] S. N. Majumdar, *Handbook of Random Matrix Theory*, Oxford University Press, 2011.
- [26] E. Mayerhofer, O. Pfaffel, R. Stelzer, *On strong solutions for positive definite jump diffusions*, Stoch. Proc. Appl. **121**(2011), 2072 – 2086.

- 
- [27] E. Mayerhofer, *Wishart processes and Wishart distributions : an affine processes point of view*, arXiv : 1201.6634v1 [*math.PR*] (2012).
- [28] H. P. McKean, *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York, 1969.
- [29] S. Meradji, H. Boutabia, S. Stihl, *Stochastic differential equations for eigenvalues and eigenvectors of a  $G$ -Wishart process with drift*, à paraître dans *Ukrainian Math. J.*
- [30] R. J. Muirhead. *A Spectra of Multivariate Statistical Theory*, Wiley, 2005.
- [31] C. Nadal, *Matrices aléatoires et leurs applications à la physique statistique et physique quantique*. Thèse de Doctorat de l'université Paris-Sud XI, France (2011).
- [32] J. K. Norris, L. C. G. Rogers, D. Williams, *Brownian motions of ellipsoids*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **294** (1986), 757 – 765.
- [33] D. Nualart, V. Pérez-Abreu, *On the eigenvalue process of a matrix fractional Brownian motion*, *Stochastic Process. Appl.* **124** (2014), 4266 – 4282.
- [34] L. Pastur, M. Shcherbina, *Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices*, American Mathematical Society, 2011.
- [35] S. Peng, *Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains*, *Chin. Ann. Math.* **26** (2005), 159 – 184.
- [36] S. Peng,  *$G$ -Brownian Motion and Dynamic Risk Measure under Volatility Uncertainty*, arXiv : 0711.2834v1 [*math.PR*] (2007).
- [37] S. Peng,  *$G$ -expectation,  $G$ -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type*. *Stoch. Anal. Appl.*, Abel Symp., Springer Berlin (2007) **2**, 541 – 567.
- [38] S. Peng, *Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations*, arXiv : 0702358v1 [*math.PR*] (2007).
- [39] S. Peng, *A new central limit theorem under sublinear expectations*, arXiv : 0803.2656v1 [*math.PR*] (2008).
- [40] S. Peng, *Multi-dimensional  $G$ -Brownian motion and related stochastic calculus under  $G$ -expectation*, *Stochastic Process. Appl.* **118** (2008), 2223 – 2253.
- [41] S. Peng, *Survey on normal distributions, Central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations*, *Sci. China Math.* **52** (2009), 1391 – 1411.

- 
- [42] S. Peng, *Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty with Robust Central Limit Theorem and  $G$ -Brownian Motion*, arXiv : 1002.4546v1 [math.PR] (2010).
- [43] L. Peng, W. Falei, *On the comparison theorem for multi-dimensional  $G$ -SDEs*, Stat. Probabil. Lett. **96**(2015), 38 – 44.
- [44] O. Pfaffel, *Wishart Processes*, arXiv : 1201.3256v1 [math.PR] (2012) .
- [45] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [46] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, 2001.
- [47] L. C. G. Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Ito Calculus. Wiley-New York, 1987.
- [48] H. M. Soner, N. Touzi, J. Zhang, *Martingale Representation Theorem for the  $G$ -expectation*, Stoch. Proc. Appl. **121**(2011), 265 – 287.
- [49] S. Stihl, H. Boutabia, S. Meradji, *Stochastic differential equations for Random matrices processes in the nonlinear framework*, Opuscula Math..
- [50] Z. Sun, X. Zhang, J. Guo, *A stochastic maximum principle for processes driven by  $G$ -Brownian motion and applications to finance*, Optimal Control Appl. Methods (2017) DOI : 10.1002/oca.2299.
- [51] D. Williams, *A Note on Brownian Motions and Symmetric Matrices*, University of Cambridge, 1985.
- [52] P. Wu, Z. Chen, *Invariance principles for the law of the iterated logarithm under  $G$ -framework*, Sci. China Math. **58** (2011) , 1251 – 1264.
- [53] D. Zhang, Z. Chen, *Stability theorem for stochastic differential equations driven by  $G$ -Brownian motion*, An. St. Ovidius Constanta **19** (2011) , 205 – 221.
- [54] H. Zhang, *A complex version of  $G$ -expectation and its application to conformal martingale*, arxiv : 1502.02787v1 [math.PR] (2015).
- [55] Z. Zheng, X. Bi, S. Zhang, *Stochastic optimization theory of backward stochastic differential equations driven by  $G$ -Brownian motion*, Abstr. Appl. Anal. **2013** (2013) , 1 – 11.