وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار عنابة

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER en Mathématiques

Option

E D P et applications

Thème

RESOLUTION DE L'EQUATION DE HELMHOLTZ DANS UN DEMI-PLAN LOCALEMENT PERTURBE

Présenté par: Sameh Tamrabet

Dirigé par:

- *L. Chorfi* *Professeur* *U.B.M. Annaba*

Devant le jury composé par:

- *Président.* *L. Nisse* *M..C* *U.B.M Annaba*
- *Examinateur* *A. Khaldi* *M..C.* *U.B.M Annaba*
- *Examinateur* *L. Alem* *D. R* *U.B.M Annaba*

Année 2007.

Table des matières

Résumé……………………………………………………………….………iii

Abstract …………………………………………………………..……...…..…iv

Remerciements ……………………………...……..…………………………...v

Introduction …………………………………………………………………….vi

1 **Notions Préliminaires**……………………….....…….............……1

1.1 Espaces fonctionnels……………………………….……..………...……..1

1.2 Opérateurs bornés et compacts…………………………..……………….…..…3

1.3 Théorie de Riesz – Fredholm………………………………………………….4

1.4 Théorie du Potentiel…………………………………………………………..5

2 Position du problème. Théorème d'unicité……….……9

2.1 Position du problème………………………………………………..….….9

2.2 Théorème d'unicité………………………………………………….......11

2.2.1 Ca dissipatif, Imk>0…………………………………………….…11

2.2.2 Ca non dissipatif: k réel……………………………….….….…..13

3 Existence de la solution. Equation intégrale……...……..……19

3.1 Solution du problème non perturbé (Po)………………………………...….…19

3.2 Résolution du problème perturbé (P) par équation intégral………………...….22

3.3 Etude de l'équation intégrale homogène……………………………….………25

4 Approximation numérique……………………………….……28

4.1 Méthode de quadrature…………………………………………………....…28

4.2 Méthode de Nyström…………………………………………………………28

4.3 Cas d'un noyau faiblement singulier…………………..…………………....…30

Annexe: Rappel sur les fonctions de Bessel………..……………………32

Bibliographie………………………………………………………….……..34

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو معالجة مسالة هلمولتز (Helmholtz) في نصف مستوى مضطرب محليا مرفقة بشرط حدي لنيومن

(Neumann) هذه الأخيرة تتجزأ إلى مسالتين:

بالنسبة للأولى تطرح في نصف مستوى مع معطيات كيفية، هدفنا هو البحث عن الحل التحليلي.

أما الثاني عولج في نصف مستوى مضطرب (هندسيا) بشرط حدي ذو حامل محدود باستعمال الطريقة التكاملية.

الكلمات المفتاحية:

دالة قرين, معادلة التكامل, معادلة هلمولتز, الانتشار

Résumé

On considère dans ce mémoire un problème de Neumann pour l'équation de Helmholtz dans un demi-plan localement perturbé. Ce problème est découplé en deux problèmes, l'un posé sur le demi-plan avec une donnée quelconque, l'autre posé sur le demi-plan perturbé (géométriquement) mais avec une donné au bord à support borné. Pour le premier on cherche une solution analytique. Pour le deuxième on utilise une méthode intégrale.

Mots clés : Fonction de Grenn, Equation intégrale, Equation de Helmholtz, Diffraction.

Abstract

The aim of this work is to study the Helmholtz equation with Neumann condition in locally perturbed half-plane. The previous problem is decoupled in two problems. In the first one, we will investigate the analytic solution in half-plane with arbitrary boundary value. The second one is obtained in a locally perturbed (geometrically) half-plane with a data with bounded support, we investigate the solution by integral equation method.

Key Words : Grenn function, integral equation, Helmholtz equation, scattering.

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur ***L. Chorfi,*** professeur *à l'université d'Annaba, pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail***.**

Mes remerciements vont également aù Monsieur ***L. Nisse****, Maître de conférence à l'université d'Annaba, qui a bien voulu de présider le jury.*

De même je remercie vivement Madame ***A. Khaldi*** et Madame ***L. Alem*** *, Maîtres de conférences à l'université d'Annaba, qui ont accepté d'examiner le mémoire et bénéficier de leurs remarques.*

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connue au département de mathématiques qui ont rendu mon séjour au département agréable.

Introduction

On considère dans ce mémoire un problème de diffraction en acoustique ou électromagnétique. Le phénomène est modélisé par l'équation de Helmholtz dans un domaine Ω non borné de $\mathbb{R}^2$. Ω est un demi-plan localement perturbé (perturbation géométrique). Plus précisément, on étudie le problème aux limites suivant :

$$(\tilde{\mathrm{P}}) \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \quad (1) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma} = f(x) & \quad (2) \end{cases}$$

avec $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 > F(x_1)\}$ où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1-par morceaux et qui s'annule en dehors de l'intervalle $[-a, a]$, $a > 0$. $\Gamma = \partial\Omega$. f est une fonction continue et bornée sur Γ.

Dans le chapitre 2, on étudie le problème de référence (P_0) dans un demi-plan $\Omega = \mathbb{R}^2_+$ $(F = 0)$. On donne une représentation analytique de la solution sous des hypothèses restrictives sur f (f tend vers zéro à l'infini assez rapidement). Puis on étudie la question d'unicité de $(\tilde{\mathrm{P}})$ en ajoutant une condition de radiation du type Sommerfeld.

Au chapitre 3, on résout le problème $(\tilde{\mathrm{P}})$ en découplant la solution en deux parties $u = u_0 + u^D$, u_0 solution de (P_0) et u^D solution de (P) avec f à support borné. Le problème ainsi obtenu est résolu par la méthode des équations intégrales, qui consiste à chercher la solution sous forme d'un potentiel simple-couche avec une densité inconnue $\varphi \in C(\gamma)$, γ est la courbe d'équation, $x_2 = F(x_1,), x_1 \in [-a, a]$. La densité φ doit satisfaire une équation intégrale de deuxième espèce. On montre que celle-ci est résoluble dans l'espace de Banach $E = C(\gamma)$.

On surmonte, tout au long de ce travail, des difficultés liées au caractère non borné de la frontière Γ. De plus, comme F change de signe, on ne peut pas se ramener à un problème extérieur, qui est bien étudié dans [4, 5].

Remarquons enfin, que ce problème a été considéré auparavant sous différents aspects ([4, 6, 7, 9, 13, 14, 19, 20]).

Dans ce travail, on a apporté quelques contributions en appliquant des techniques connues.

On termine ce mémoire par la présentation de la méthode de Nyström qui est une méthode d'approximation numérique pour résoudre une équation intégrale à noyau faiblement singulier.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Espaces fonctionnels

- Soit $x = (x_1, x_2)$ un point du plan $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2, x_2 > 0\}$.
- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note :

$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$, si f est bornée on pose

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

$C^m(\Omega), m \in \mathbb{N}$: l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur Ω.

$C^\infty(\Omega) = \cap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$.

$C_c(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \text{ telle que } f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \diagdown K \text{ où } K \text{ est un compact}\}$.

$C_B(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions continues et bornées.

$D(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support compact dans $\mathbb{R}$(espace des fonctions tests).

$D'(\mathbb{R})$: Le dual topologique de $D(\mathbb{R})$ ou espace des distributions.

$S(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

$S'(\mathbb{R})$: Le dual topologique de $S(\mathbb{R})$ ou espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ (espace de Schwartz).

Pour $0 < \alpha \leq 1$ $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$: L'espace des fonctions hölderiennes i. e.

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C(\Omega) ; \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty, \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\alpha,\overline{\Omega}} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

Définition 1.1.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose*

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f:\Omega\to\mathbb{R},\ \textit{mesurable} \\ \textit{telle que} \int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty \end{array} \right\}$$

et muni de la norme $\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Si $p = \infty$

$$\mathbb{L}^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} f:\Omega\to\mathbb{R},\ \text{mesurable} \\ \textit{et } \exists C\geq 0 \textit{ tel que } |f(x)| \leq C \textit{ p. p. sur } \Omega \end{array} \right\}$$

Théorème 1.1.1 [3] *Soient $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors pour presque tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to \psi(s-t)\varphi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et le produit de convolution $\psi * \varphi$ est donné par*

$$(\psi * \varphi)(s) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(s-t)\varphi(t)\,dt, \qquad s\in\mathbb{R}.$$

Définition 1.1.2 *On dit qu'une fonction f, est C^1-par morceaux sur $[a.b]$ $a < b$ si f est continue sur $[a.b]$ et il existe une subdivision $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ telle que*

$$f \in C^1[x_k, x_{k+1}] \ \textit{ et } \ (f'(x_k - 0) \neq f'(x_k+0)).$$

Définition 1.1.3 *Si $\Psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier, par*

$$\mathcal{F}(\psi)(\xi) = \widehat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(s)\,e^{-is\xi}ds, \xi\in\mathbb{R},$$

et la transformée de Fourier inverse sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}\right)(s) = \psi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(s)\,e^{is\xi}d\xi, s\in\mathbb{R}.$$

• $\mathcal{F} : S \to S$ est un isomorphisme et [16]

$$\left\|\hat{\psi}\right\|_{\mathbb{L}^2} = \|\psi\|_{\mathbb{L}^2} ;$$

• $\mathcal{F} : S \to S$ est prolongeable en un opérateur unitaire de $\mathbb{L}^2$, et par dualité de S' vers S' ; c'est un isomorphisme [18].

Proposition 1.1.1 [18] *Si $\varphi \in S(\mathbb{R})$ et $\psi \in S'(\mathbb{R})$, alors $\varphi * \psi$ est dans $S'(\mathbb{R})$ et*

$$\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}.\widehat{\psi},$$
$$\widehat{D^\alpha \psi} = (i\xi)^\alpha \widehat{\psi}(\xi).$$

Définition 1.1.4 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ nous définissions l'espace de Sobolev*

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}), \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

La norme qui lui associée est donnée par

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\widehat{f}\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Opérateurs bornés et compacts

Soit X, Y des espaces normés.

Définition 1.2.1 *Un opérateur linéaire $A : X \to Y$ est dit borné s'il existe une constante positive $C \geq 0$ telle que*

$$\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X ,$$

pour tout $x \in X$.

On note par $L(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans Y muni de la norme

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_Y},$$

et $A^{-1} : Y \to X$ sont **inverse** si A est *bijectif.*

Définition 1.2.2 *Soient μ une mesure de Jordan et G un compact $\subset \mathbb{R}^2, k : G \times G \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors*

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad C(G) \to C(G) \\ \varphi(x) \quad &\to \quad A\varphi(x) = \int_G k(x,y)\,\varphi(y)\,d\mu(y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

est l'opérateur intégral associe au noyau k.

Théorème 1.2.1 [11] *L'opérateur A est borné et on a*

$$\|A\| = \max_{x\in G} \int_G |k(x,y)|\,d\mu(y)$$

Théorème 1.2.2 [3] *(de Banach) Soit $B : X \to X$ opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X et $\|B\| < 1$, $I : X \to X$ l'opérateur identité, alors $(I-B)^{-1}$ existe, borné sur X, donné par la série de Neumann*

$$(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$$

de plus on a $\left\|(I-B)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{1-\|B\|}, \left(B^0 = I, B^k = BB^{k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}\right).$

Définition 1.2.3 *$A \in L(X,Y)$ est dit compact, si pour chaque suite borné (x_n) dans X, la suite (Ax_n) contient une sous-suite convergente dans Y.*

Théorème 1.2.3 [12] *L'opérateur intégral défini par (1.1) est compact sur $C(G)$.*

Remarque 1.2.1 *Dans le cas où $G = \Gamma$ est une courbe de Jordan rectifiable alors $d\mu = ds$ est l'élément de longueur.*

1.3 Théorie de Riesz - Fredholm

Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire compact sur un espace normé X, posons $L = I - A$.

Théorème 1.3.1 [3] *Le sous espace* $N(L) = \{f \in X, Lf = 0\}$ *est de dimension finie.*

Théorème 1.3.2 [3] *Le sous espace* $R(X) = \{Lf; f \in X\}$ *est fermé.*

Théorème 1.3.3 [3] *Si* L *est injectif, alors* L *est bijectif et l'opérateur inverse* L^{-1} *est borné.*

Ce théorème signifie que :
Si l'équation homogène

$$\phi - A\phi = 0$$

n'admet que la solution triviale $\phi = 0$, alors pour tout $f \in X$, l'équation non homogène

$$\phi - A\phi = f$$

admet une solution unique $\phi \in X$ qui dépend continûment de f.

Remarque 1.3.1 *Si on remplace* $I - A$ *par* $S - B$*, où* $S : X \to Y$ *opérateur linéaire borné et d'inverse borné* $S^{-1} : Y \to X$*, et* $B : X \to Y$ *compact, les théorèmes (1.3.1) (1.3.2) (1.3.3) sont satisfaits.*

Ces résultats sont démontrés, par exemple, dans les livres [3] où [4].

1.4 Théorie du Potentiel

Soit D un ouvert dans $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ (C^1 par morceaux).
$\eta(x)$ désigne la normale (dirigée vers l'extérieur) au point $x \in \Gamma$.

Définition 1.4.1 *La solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans* $\mathbb{R}^2$*,* $G_0(x, y)$ *est définie par :*

$$G_0(x, y) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x - y|) \ , x \neq y, \ x, y \in \mathbb{R}^2,$$

où $H_0^{(1)}$ *est la fonction de* ***Hankel*** *de première espèce et d'ordre 0.*
$G_0(x, y)$ *vérifie au sens des distributions*

$$\Delta_y G_0(x, y) + k^2 G_0(x, y) = \delta_x \ dans \ \mathbb{R}^2,$$

Définition 1.4.2 *La fonction de Green de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}_+^2$, avec la condition de Neumann est la fonction $G(x,y)$ définie par :*

$$G(x,y) = \frac{1}{4i}\left(H_0^{(1)}(k|x-y|) + H_0^{(1)}\left(k\left|x^{'}-y\right|\right)\right) \ , x \neq y, \ x,y \in \mathbb{R}_+^2,$$

où $x^{'}$ est le symétrique de x par rapport à l'axe $x_2 = 0$ (i. e. : $x' = (x_1, -x_2)$).
$G(x,y)$ vérifie au sens des distributions

$$\begin{cases} \Delta_y G(x,y) + k^2 G(x,y) = \delta_x \ \text{dans } \mathbb{R}_+^2, \\ \dfrac{\partial G}{\partial y_2}(x,y) = 0 \qquad \text{si } y_2 = 0. \end{cases}$$

Proposition 1.4.1 *1- $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta)$, Δ : la diagonale $\{x = y\}$.*

2- $G(x,y) \in \mathbb{L}_{Loc}^1\left(\mathbb{R}_y^2\right)$, $G(r) = 0\left(\log\dfrac{1}{r}\right)$, $r \to 0$.

3- Condition de radiation

$$\frac{\partial G}{\partial r} + ikG = \circ\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \ \text{lorsque } r = |x| \to +\infty.$$

Définition 1.4.3 *Soit $\varphi \in C(\Gamma)$ une fonction donnée, et G une fonction de Green. La fonction*

$$u(x) = \int_\Gamma G(x,y)\varphi(y)\,ds(y), \quad x \in D \setminus \Gamma$$

est appelée potentiel de simple-couche de densité φ.

Définition 1.4.4 *Soit $\varphi \in C(\Gamma)$ une fonction donnée, et G une fonction de Green. La fonction*

$$v(x) = \int_\Gamma \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)}\varphi(y)\,ds(y), \quad x \in D \setminus \Gamma$$

est appelée potentiel de double-couche de densité φ.

Théorème 1.4.1 [11] *Soit Γ C^1-par morceaux et x_i $\left(i = \overline{1.p}\right)$ sont des coins, $\Gamma = \cup_{i=1}^p \Gamma_i$, et $\Gamma_i \in C^2$, on a*

$$\int_\Gamma \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} ds(y) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & \text{si } x \neq x_i, \ \left(i = \overline{1.p}\right) \\ \frac{-\delta_i^{\pm}}{2} & \text{si } x = x_i, \ \left(i = \overline{1.p}\right) \end{cases}$$

où G et fonction de Green et $\delta_i^- = \dfrac{\theta_i}{\pi}$, $\delta_i^+ = 2 - \dfrac{\theta_i}{\pi}$, $\left(i = \overline{1.p}\right)$.

Théorème 1.4.2 [11] *Sous les mêmes hypothèses du Théorème (1.4.1), le potentiel double-couche v avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$ satisfait :*

$$v_{\pm}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} \varphi(x)\, ds(y) \pm k(x)\varphi(x), & si\ x \neq x_i,\ \ \left(i = \overline{1.p}\right) \\ \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} \varphi(x)\, ds(y) \pm k(x)\varphi(x), & si\ x = x_i,\ \ \left(i = \overline{1.p}\right), \end{cases}$$

avec

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2}\ \ si\ x \neq x_i,\ \ \left(i = \overline{1.p}\right) \\ \dfrac{\delta_i^{\mp}}{2}\ \ si\ x = x_i,\ \ \left(i = \overline{1.p}\right) \end{cases}$$

où

$$v_{\pm}(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} v(x \pm h\eta(x)),$$

uniformément en $x \in \Gamma$, et l'intégrale impropre converge.

Théorème 1.4.3 *([11]) Sous les mêmes hypothèses du Théorème (1.4.1), le potentiel simple couche u avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$ satisfait :*

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial \eta(x)} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(x)} \varphi(x)\, ds(y) \mp k(x)\varphi(x), & si\ x \neq x_i,\ \ \left(i = \overline{1.p}\right) \\ \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(x)} \varphi(x)\, ds(y) \mp k(x)\varphi(x), & si\ x = x_i,\ \ \left(i = \overline{1.p}\right) \end{cases}$$

où

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial \eta(x)} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \eta(x)\nabla u(x \pm h\eta(x)),$$

uniformément en $x \in \Gamma$, et l'intégrale impropre converge.

Lemme 1.4.1 [4] *(de Rellich) Soit $k > 0$, D un domaine borné dans $\mathbb{R}^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \diagdown \overline{D}$ et $u \in C^2(\Omega)$ une solution de l'équation*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad dans\ \Omega,$$

vérifiant

$$\lim_{R \to \infty} \int_{|x|=R} |u|^2\, ds = 0,$$

alors $u = 0$ sur Ω.

Donnons une version simplifiée du Théorème d'unicité (de Holmgren).
Soit

$$Pu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$$

un opérateur elliptique à coefficients constants, c'est à dire qui vérifié la condition

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \neq 0, \forall \xi \neq 0.$$

Soit $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2, \varphi(x) = 0\}$ une surface régulière (φ analytique) et
$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, \varphi(x) > 0\}$.

Proposition 1.4.2 *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Pu = 0 & \textit{dans } \Omega \\ u\,|_{\Sigma} = 0 \;\; \textit{et} \;\; \frac{\partial u}{\partial \eta}\,|_{\Sigma} = 0. \end{cases}$$

Alors $u = 0$ dans Ω.

Pour plus de détails voir la référence [8].

Chapitre 2

Position du problème. Théorème d'unicité

2.1 Position du problème

Soit F une fonction C^1-par morceaux sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en dehors de l'intervalle $[-a, a]$, $a > 0$, et Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 > F(x_1) \right\}.$$

Avec le bord

$$\Gamma = \{(x_1, F(x_1)), x_1 \in \mathbb{R}\}$$

et $k \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k \geq 0$. On décompose Γ comme suit :

$$\Gamma = \gamma \cup \Gamma^*, \qquad \Gamma^* = \{(x_1, 0), |x_1| \geq a\}$$

$$\gamma = \{(x_1, F(x_1)), |x_1| \leq a\}$$

Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ qui est une donnée du problème.

Dans ce travail on s'intéresse au problème aux limites suivant

$$(\tilde{\mathrm{P}}) \begin{cases} \text{Trouve } u \in C^2(\Omega) \cup C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tel que :} & \\ \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = f(x) & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

u doit vérifier en plus une condition de radiation qui sera précisée ultérieurement. La trace de $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ sur Γ est par définition :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \left(\eta(x), \operatorname{grad} u\left(x + h\eta(x)\right)\right), \qquad x \in \Gamma$$

uniformément sur Γ.

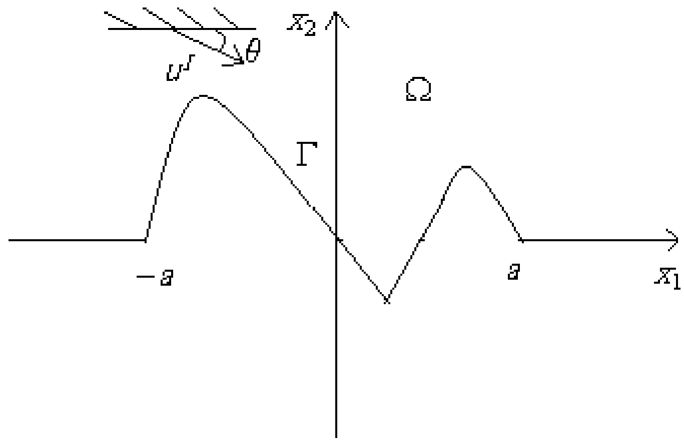

Fig 1 géométrie du problème

Soit u_0 une solution du problème non perturbé, i. e. avec le frontière rectiligne $(F = 0)$

$$(\mathrm{P}_0) \begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) = f(x_1), \ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On cherche u solution de $(\tilde{\mathrm{P}})$ sous la forme $u = u_0 + u^D$, on est donc amené à résoudre le problème suivant

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \exists u^D \in C^2(\Omega) \cup C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tel que :} & \\ \Delta u^D + k^2 u^D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u^D}{\partial \eta} = \widetilde{f}(x) & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial u^D}{\partial r} - iku^D = \circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ lorsque } r = |x| \to +\infty. (R) & \end{cases}$$

Où

$$\widetilde{f}(x) = f(x) - \frac{\partial u_0}{\partial \eta}(x) = 0 \text{ pour } |x| \geq a \ \left(\text{donc supp}\widetilde{f} \subset [-a, a]\right).$$

Ce problème décrit la diffraction d'onde (acoustique ou électromagnétique) dans un demi-plan localement perturbé (une perturbation géométrique). u^D est l'onde diffractée. Par exemple, si on envoi une onde incidente plane $u^I = \exp i\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right)$ où $\alpha = k\cos\theta, \beta = k\sin\theta$, alors u_0 est une onde réfléchie par la surface plane donné par la loi de Snell (en optique).

$$u_0 = u^I + \exp i\left(\alpha x_1 - \beta x_2\right).$$

donc

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta}\left(x_1, 0\right) = -\beta e^{i\alpha x_1}.$$

u^D est la contribution de la perturbation. Comme cette perturbation est à support compacte, alors on impose la condition de radiation du type Sommerfeld.

2.2 Théorème d'unicité

On va distinguer deux cas. Commençons par le cas le plus facile $\operatorname{Im} k > 0$.

2.2.1 Cas dissipatif, $\operatorname{Im} k > 0$

Théorème 2.2.1 *Si* $\operatorname{Im} k > 0$, *et* $\operatorname{Re} k > 0$, *alors le problème (P) admet au plus une solution.*

Preuve. Soit u_1, u_2 deux solutions du problème (P) sur Ω. On pose

$$w\left(x_1, x_2\right) = u_1\left(x_1, x_2\right) - u_2\left(x_1, x_2\right) \text{ sur } \Omega.$$

Alors w vérifie le problème homogène suivant

$$(\mathrm{p_h})\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} - ikw = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & \text{lorsque } |x| = r \to +\infty. \end{cases}$$

On applique la $2^{\text{éme}}$ formule de Green pour $w, \overline{w}$ sur $S_{R_0} = \Omega \cap B_{R_0}$, B_{R_0} le disque centré à l'origine et de rayon $R_0 > a$, le bord se décompose comme suit :

$$\partial S_{R_0} = \Gamma' \cup \Sigma_{R_0}^+$$

où

$$\Gamma' = \{(x_1, F(x_1))\, x_1 \in [-R_0, R_0]\}\ \text{, et } \Sigma^+_{R_0} \text{ le demi-cercle,}$$

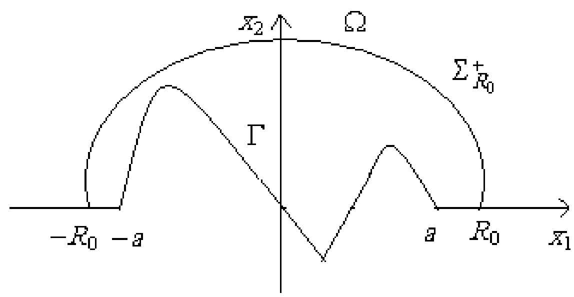

Fig 2 Domaine S_{R_0}

On obtient

$$\iint\limits_{S_{R_0}} (w\Delta\overline{w} - \overline{w}\Delta w)\, dx = \int\limits_{\partial S_{R_0}} \left(w\frac{\partial\overline{w}}{\partial\eta} - \frac{\partial w}{\partial\eta}\overline{w}\right) ds,$$

comme $\partial S_{R_0} = \Gamma' \cup \Sigma^+_{R_0}$ alors on a :

$$\iint\limits_{S_{R_0}} \left(k^2 - \overline{k}^2\right) |w|^2\, dx = \int\limits_{\Gamma'} w\frac{\partial\overline{w}}{\partial\eta} ds - \int\limits_{\Gamma'} \overline{w}\frac{\partial w}{\partial\eta} ds + \int\limits_{\Sigma^+_{R_0}} \left(w\frac{\partial\overline{w}}{\partial\eta} - \frac{\partial w}{\partial\eta}\overline{w}\right) ds.$$

En tenant compte de la condition de Neumann.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_{R_0}} \left(k^2 - \overline{k}^2\right) |w|^2\, dx &= \int\limits_{\Sigma^+_{R_0}} w\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial\eta} + i\overline{k}\overline{w}\right) ds - \int\limits_{\Sigma^+_{R_0}} \overline{w}\left(\frac{\partial w}{\partial\eta} - ikw\right) ds \\ &\quad - \int\limits_{\Sigma^+_{R_0}} i\overline{k}\,|w|^2 - ik^2\,|w|^2\, ds,\end{aligned}$$

on pose

$$\alpha = \operatorname{Re} k, \beta = \operatorname{Im} k,$$

lorsque $R_0 \to +\infty$, la condition de Radiation entraîne

$$\lim_{R_0\to+\infty} \iint\limits_{S_{R_0}} 2\beta\,|w|^2\, ds + \alpha \int\limits_{\Sigma^+_{R_0}} |w|^2\, ds = 0,$$

comme $\beta > 0$ les deux termes tendent vers 0 lorsque $R_0 \to +\infty$, donc

$$\forall R_0 \geq a, \qquad \iint\limits_{S_{R_0}} |w|^2 \, dx = 0,$$

ce qui entraîne

$$w = 0, \text{ et } u_1 = u_2 \text{ dans } \Omega,$$

d'où l'unicité. ■

2.2.2 Cas non dissipatif : k réel

Si $k \in \mathbb{R}^+$, la méthode précédente ne s'applique pas.
On va s'inspirer de l'article de G. Kristensson [9], où on étudie l'équation de Helmholtz pour deux demi-plans en contacte rigide avec des obstacles.

Les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ rapportées à un repère cartésien (O, x_1, x_2) sont :

$$\begin{cases} x_1 = r \sin\theta, \\ x_2 = r \cos\theta. \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Dans ces coordonnées, l'opérateur Δ s'écrit :

$$\Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

En posant :

$$\begin{aligned} \varphi(r,\theta) &= r^{\frac{1}{2}} w \\ \varphi'(r,\theta) &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \end{aligned}$$

L'équation de Helmholtz peut être écrite

$$\varphi'' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \left(k^2 + \frac{1}{4r^2}\right)\varphi = 0.$$

Nous définissons, pour $r \geq R_0$, les fonctionnelles d'énergie suivantes qui dépendent de la variable radial r

$$E(r) = \int_0^\pi |\varphi'|^2 + k^2 |\varphi| \, d\theta$$

$$G(r) = E(r) - \frac{1}{r^2}\int_0^\pi \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|^2 d\theta.$$

Rappelons que ($\mathrm{P_h}$) est le problème homogène associé à (P).

Lemme 2.2.1 *On suppose que w satisfait le problème (P_h).*

Nous avons alors, pour $r \geq R_0$,

$$G'(r) = \frac{2}{r^3}\int_0^\pi \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|^2 d\theta - \frac{1}{4r^2}\frac{d}{dr}\int_0^\pi |\varphi|^2 \, d\theta$$

Preuve. Pour $r \geq R_0$,

$$E'(r) = \frac{-1}{r^2}\int_0^\pi \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\overline{\varphi'} + \frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\theta^2}\varphi'\right) d\theta - \frac{1}{4r^2}\frac{d}{dr}\int_0^\pi |\varphi|^2 \, d\theta,$$

donc

$$G'(r) = E'(r) + \frac{2}{r^3}\int_0^\pi \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|^2 d\theta - \frac{1}{r^2}\int_0^\pi \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}} + \frac{\partial\overline{\varphi'}}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) d\theta,$$

comme $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$, on a

$$G'(r) = \frac{2}{r^3}\int_0^\pi \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|^2 d\theta - \frac{1}{4r^2}\frac{d}{dr}\int_0^\pi |\varphi|^2 \, d\theta.$$

■

Lemme 2.2.2 *On suppose, en plus des hypothèses du lemme 2.2.1, que*

$$\int_0^\pi |\varphi(r,\theta)|^2 \, d\theta = o(1). \qquad (r \to \infty)$$

Si $\varphi \neq 0$, alors il existe une suite infinie de nombres réels $\{r_\mu\}_{\mu=1}^\infty$ telle que $r_\mu \to \infty, \mu \to \infty$ et $G(r_\mu) > 0$.

Preuve. Similaire à [9]. ■

Lemme 2.2.3 *On suppose que w est solution du problème (P_h). Alors*

$$\int_{\Sigma_R^+} |w|^2 \, ds = o(1) \qquad R \to \infty,$$

et

$$\int_{\Sigma_R^+} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 ds = o(1), \qquad R \to \infty.$$

Preuve. Pour $r \geq R_0$, la condition de radiation peut être écrite explicitement comme suit :

$$\begin{aligned} o(1) &= \int_{\Sigma_R^+} \left| \frac{\partial w}{\partial r} - ikw \right|^2 ds \\ &= \int_{\Sigma_R^+} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 + k^2 |w|^2 + 2k \operatorname{Im} \left(\overline{\frac{\partial w}{\partial r}} w \right) ds, \quad R \to \infty, \end{aligned}$$

par suite

$$o(1) = \frac{1}{k} \int_{\Sigma_R^+} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 + k^2 |w|^2 + 2 \operatorname{Im} \left(\overline{\frac{\partial w}{\partial r}} w \right) ds, \quad R \to \infty,$$

Nous appliquons maintenant la première formule de Green dans $\mathbb{R}^2$ sur w et son conjugué complexe $\overline{w}$ dans S_R. Nous obtenons

$$\int_{S_R} w \overline{\Delta w} dx = \int_{\partial S_R} w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds + \int_{S_R} |\nabla w|^2 \, dx$$

$$\int_{S_R} |\nabla w|^2 - k^2 |w|^2 \, dx = \int_{\Gamma} w \overline{\frac{\partial w}{\partial \eta}} ds + \int_{\Sigma_R^+} w \overline{\frac{\partial w}{\partial \eta}} ds,$$

d'après les conditions au bord, on trouve

$$\int_{S_R} |\nabla w|^2 - k^2 |w|^2 \, dx = \int_{\Sigma_R^+} w \overline{\frac{\partial w}{\partial \eta}} ds$$

$$\operatorname{Im}\int\limits_{\Sigma_R^+}\left(w\overline{\frac{\partial w}{\partial \eta}}\right)ds = o\left(1\right) \qquad R\to\infty$$

alors

$$o\left(1\right) = \frac{1}{k}\int\limits_{\Sigma_R^+}\left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|^2 + k^2\left|w\right|^2 ds \qquad R\to\infty.$$

Puisque chaque terme est positif la formulation du lemme est prouvée. ■

Théorème 2.2.2 *La seule solution du problème (P_h) est la solution nulle.*

Preuve. Pour $r \geq R_{0,}$ le lemme (2.2.1) donne

$$G'\left(r\right) = \frac{2}{r^3}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right|^2 d\theta - \frac{1}{2r^2}\operatorname{Re}\int\limits_0^{\pi}\varphi\overline{\varphi'}d\theta$$

en outre nous avons

$$0 \leq \int\limits_0^{\pi}\left|\varphi' + k^2\varphi\right|^2 d\theta = \int\limits_0^{\pi}\left|\varphi'\right| + k^2\left|\varphi\right| - 2k\operatorname{Re}\varphi\overline{\varphi'}d\theta.$$

Et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} G'\left(r\right) &\geq \frac{2}{r^3}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right|^2 d\theta - \frac{1}{4r^2k}\int\limits_0^{\pi}\left|\varphi'\right| + k^2\left|\varphi\right| d\theta, \\ &\geq -\frac{1}{4kr^2}G\left(r\right) + \int\limits_0^{\pi}\left(\frac{2}{r^3} - \frac{1}{4r^4k}\right)\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right|^2 d\theta \quad \text{pour tout } r \geq r_1 \geq R_0. \end{aligned}$$

où r_1 satisfait

$$\frac{2}{r_1^3} \geq \frac{1}{4r_1^4k}.$$

Donc nous avons l'inéquation différentielle suivante :

$$G'\left(r\right) + g\left(r\right)G\left(r\right) \geq 0, \tag{2.1}$$

où $g(r) = \dfrac{1}{4kr^2}$. La solution de (2.1) est

$$\begin{aligned} G(r) &\geq G(r_0)\exp\left(-\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{4kr^2}dr\right) \\ &= G(r_0)\exp\left(\frac{1}{4k}\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)dr\right) \qquad \text{pour } r \geq r_0 \end{aligned}$$

Le lemme (2.2.3) donne

$$\int\limits_0^{\pi}|\varphi|\,d\theta = o(1)$$

Supposons (par l'absurde) que $\varphi \neq 0$.

D'après le lemme (2.2.2), il existe r_0 assez grand tel que $G(r_0) \geq 0$, à condition que $\varphi \neq 0$; nous avons ainsi $\lim\limits_{r\to\infty} G(r) > 0$. D'autre part

$$\lim_{r\to\infty} G(r) \leq \lim_{r\to\infty} E(r) = \lim_{r\to\infty}\int\limits_0^{\pi}|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2\,d\theta.$$

En outre le lemme (2.2.3) donne

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\pi}|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2\,d\theta &= \lim_{r\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R^+}\left|\frac{1}{2r}w+\frac{\partial w}{\partial r}\right|^2 + k^2|w|^2\,ds \\ &= o(1) \qquad R\to\infty \end{aligned}$$

cette dernière étape peut être justifiée par l'inégalité de Hölder. Nous avons ainsi $\lim\limits_{r\to\infty} G(r) \leq 0$. Ceci contredit $\lim\limits_{r\to\infty} G(r) > 0$, et nous avons donc $\varphi = 0$ pour $r \geq R_0$, et par conséquent $w = 0$ pour $r \geq R_0$.Comme l'opérateur $\Delta + k^2 I$ est analytique ([4] théorème 3.5), alors w est analytique dans Ω d'où $w = 0$ dans Ω, alors $u_1 = u_2$ dans Ω. ■

Remarque 2.2.1 *Si $F(x) > 0$ où $|x| < a$,et $k^2 \in \mathbb{R}$, par prolongement symétrique on s'amène à un problème extérieur puis on applique le Lemme de Rellich (voir chapitre 1 Lemme1.4.1). En effet soit*

$$D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, -F(x_1) < x_2 < F(x_1)\right\}$$

et

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \begin{cases} u(x_1, x_2) & x_2 > 0 \\ u(x_1, -x_2) & x_2 < 0 \end{cases}$$

alors $\tilde{u}$ *satisfait le problème extérieur*

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u} = 0 \ \ dans\ \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \diagdown D \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 \qquad\qquad si\ \partial D \end{cases}$$

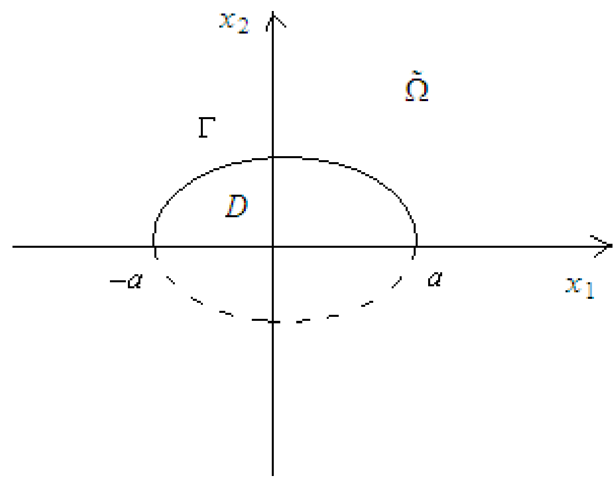

Fig 3. Domaine extérieur $\tilde{\Omega}$.

Chapitre 3

Existence de la solution. Equation intégrale

3.1 Solution du problème non perturbé ($\mathbf{P_0}$)

Dans ce paragraphe on construit la solution u de (P_0) sous différentes hypothèses sur f et on suppose $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Théorème 3.1.1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R}), \left(s > \frac{1}{2}\right)$ alors (P_0) possède une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, qui admet la représentation :*

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \exp i \left(\sqrt{k^2 - \xi^2} x_2 + \xi x_1 \right) d\xi$$

Preuve.

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) + k^2 u(x_1, x_2) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1) & x_2 = 0, \end{cases}$$

On note $\hat{u}$ la transformation de Fourier partielle de $u(x_1, x_2)$,

$$\mathcal{F}_{x_1 \to \xi} u(\xi, x_2) = \widehat{u}(\xi, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) e^{-ix_1\xi} dx_1,$$

alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial^2 x_2}(\xi, x_2) + \left(k^2 - \xi^2\right) \hat{u}(\xi, x_2) = 0 \quad \text{dane } \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial x_2}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \end{cases}$$

la solution sera

$$\hat{u}(\xi, x_2) = \gamma(\xi) \exp\left(i\sqrt{k^2 - \xi^2} x_2\right) + \delta(\xi) \exp\left(-i\sqrt{k^2 - \xi^2} x_2\right)$$

On choisit $\delta(\xi) = 0$, pour avoir une onde "sortante". Alors

$$\hat{u}(\xi, x_2) = \gamma(\xi) \exp\left(i\sqrt{k^2 - \xi^2} x_2\right),$$

d'après la condition au bord on trouve

$$\gamma(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{i\sqrt{k^2 - \xi^2}}.$$

Donc

$$\hat{u}(\xi, x_2) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{i\sqrt{k^2 - \xi^2}} \exp\left(i\sqrt{k^2 - \xi^2} x_2\right).$$

Par suite u s'écrit formellement :

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \exp i\left(\sqrt{k^2 - \xi^2} x_2 + \xi x_1\right) d\xi \tag{3.1}$$

avec la détermination $\sqrt{k^2 - \xi^2} = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ si $|\xi| > k$. On peut justifier que la formule (3.1) définit une solution classique. Pour cela on montre qu'on peut dériver sous le signe intégral $\left(\text{car } \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\right)$. Pour plus de détail voir le mémoire [17]. ■

Remarque 3.1.1 1− *Donnons une autre écriture à la formule (3.1), notons par*

$$a(\xi, x_2) = \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} x_2}}{i\sqrt{k^2 - \xi^2}}, \text{ élément de } S'(\mathbb{R})$$

alors (3.1) s'écrit

$$u(x_1,x_2) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x_1}\left(a(\xi,x_2)\,\hat{f}(\xi)\right)$$

donc

$$u(x_1,x_2) = f(x_1) * \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x_1}(a(\xi,x_2)).$$

D'après la formule |1]

$$\mathcal{F}_{x_1\to\xi}\left[H_0^1\left(k\sqrt{x_1^2-x_2^2}\right)\right] = \frac{2\exp i\sqrt{k^2-\xi^2}x_2}{i\sqrt{k^2-\xi^2}}$$

*où $H_0^{(1)}$ est la fonction de **Hankel** de première espèce d'ordre* 0*, c'est à dire ;*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x_1}(a(\xi,x_2)) = \frac{1}{2}H_0^1\left(k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right).$$

D'où

$$u(x_1,x_2) = (f * G(.,x_2))(x_1)$$

avec

$$G(x_1,x_2) = H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x_1^2-x_2^2}\right)$$

ou encore

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(k|x-y|)\,f(t)\,dt \tag{3.2}$$

telle que $x=(x_1,x_2)\,,x_2>0, y=(t,0)$ et $|x-y| = \sqrt{(x_1-t)^2+x_2^2}$. l'intégrale impropre converge dans S', c'est à dire si $u_N = \frac{1}{4\pi i}\int_{-N}^{N} H_0^{(1)}(k|x-y|)\,f(t)\,dt$, alors $u_N \to u$ dans S' lorsque $N\to\infty$, puisque la singularité de $\left(H_0^{(1)} \simeq cLog(r)\,,\quad (r\to 0)\right)$

$2-$ *.Pour donner un sens classique à l'intégrale (3.2), on suppose que $f\in C_c(\mathbb{R})\cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, avec supp$(f)\subseteq[-a,a]\,,a>0$.*

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi i}\int_{-a}^{+a} H_0^{(1)}(k|x-y|)\,f(t)\,dt,\qquad x_2>0 \tag{3.3}$$

u vérifie l'équation de Helmholtz dan $\mathbb{R}_+^2$ mais ne satisfait pas la condition au bord. Pour cela, on remplace f par une densité inconnue ϕ, c. a. d on cherche u sous forme (3.4) d'un potentiel simple-couche

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-a}^{+a} H_0^{(1)}(k|x-y|)\,\phi(t)\,dt, \qquad x_2 > 0 \tag{3.4}$$

Théorème 3.1.2 *Le potentiel simple-couche (3.4) définit une solution du problème (P_0) si et seulement si f est une solution de l'équation intégrale suivante :*

$$\varphi(x_1) - 2\int_{-a}^{+a} \frac{\partial K(x_1, x_2)}{\partial x_2}\varphi(t)\,dt = -2f(x_1) \tag{3.5}$$

Preuve. Découle de propriété de trace du potentiel double-couche Théorème 1.4.3. L'équation (3.5) est résoluble dans l'espace de Banach

$$E = \left\{\varphi \in C^{0,\alpha}[-a, a] : \varphi(a) = \varphi(-a) = 0\right\}.$$

■

3.2 Résolution du problème perturbé (P) par équation intégrale

On considère la fonction de Green de (P_0)

$$G(x, y) = \frac{1}{4i}\left(H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(1)}(kr^*)\right),$$

où $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $r^* = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}$
On pose

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{4i}H_0^{(1)}(kr) \\ \phi^*(x, y) &= \frac{1}{4i}H_0^{(1)}(kr^*), \end{aligned}$$

soit le potentiel simple-couche

$$u(x) = \int_\Gamma G(x,y)\,\varphi(y)\,ds(y), \qquad x \in \Omega \tag{3.6}$$

alors u satisfait $\Delta u + k^2 u = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,0) = 0$ si $|x_1| \geq a$.
On pose $\Gamma = \cup_{n=1}^{p} \Gamma_n$, où $\Gamma_n \in C^2$ et $x_n \left(n = \overline{1,p}\right)$ sont des coins dans Γ.

Théorème 3.2.1 *u défini par (3.6) est une solution de problème (P) si et seulement si φ est solution de l'équation intégrale*

$$\varphi - 2\widetilde{K}\varphi = -2\widetilde{f}. \tag{3.7}$$

où

$$\widetilde{K}\varphi(x) = \begin{cases} A\varphi(x) & x \neq x_n \quad \left(n = \overline{1.p}\right) \\ A\varphi(x) + \left(1 - \frac{\theta_n}{\pi}\right)\varphi(x) & x = x_n \quad \left(n = \overline{1.p}\right) \end{cases}$$

et

$$A\varphi(x) = \int_\Gamma \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(x)} \varphi(y)\,ds(y).$$

Preuve. Découle des formules de traces dans le Théorème 1.4.3. ■

Théorème 3.2.2 *l'opérateur $A : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est compact.*

Preuve. On a

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(x)} = \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial \eta(x)} + \frac{\partial \phi^*(x,y)}{\partial \eta(x)},$$

On pose

$$\begin{cases} A_1\varphi(x) = \int_\Gamma \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta(x)}(x,y)\,\varphi(x)\,ds(y) \\ A_2\varphi(x) = \int_\Gamma \dfrac{\partial \phi^*}{\partial \eta(x)}(x,y)\,\varphi(x)\,ds(y) \end{cases}$$

le noyau de l'opérateur A_2 appartient à $C^\infty(\Gamma \times \Gamma)$, alors A_2 est compact dans $C(\Gamma)$. Examinons le noyau de A_1 :

on pose $x_1 = t_0, x_2 = F(t_0)$, $y_1 = t$, $y_2 = F(t)$, alors

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (-F'(t), 1) \Big/ \sqrt{1 + F'^2(t)} \\ ds(y) &= \sqrt{1 + F'^2(t)} dt \end{aligned}$$

donc

$$A_1\varphi(x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x, y) (-F'(t)) + \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x, y) \right] \varphi(t) \, dt$$

on pose

$$K(t, t_0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x, y) (-F'(t)) + \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x, y)$$

on a

$$\frac{d}{dx_j} H_0^{(1)}(kr) = k \frac{-H_1^{(1)}(kr)}{r} (x_j - y_j), \qquad j = 1, 2$$

d'où

$$K(t, t_0) = \frac{k}{4i} \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} \left[(t - t_0) F'(t) - (F(t) - F(t_0)) \right]$$

Le développement de Taylor de F à l'ordre 2 entraine

$$K(t, t_0) = \frac{k}{4i} \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} \left(0 (t - t_0)^2 \right) \text{ et } r = 0 (|t - t_0|) .$$

Comme

$$H_1^{(1)}(kr) = 0 \left(r^{-1} \right) \qquad r \to 0$$

alors

$$K(t, t_0) = 0(1),$$

Le noyau $K(t, t_0)$ est borné sur $\Gamma \times \Gamma$, alors $A : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est compact.
■

Théorème 3.2.3 *L'équation (3.7) admet une solution unique $\varphi \in C(\Gamma)$ (qui dépend continûment de $\tilde{f}$) si l'équation homogène n'admet que la solution triviale.*

Preuve. On a

$$(I-K)=(I-(K-A))-A$$

l'opérateur A est compact d'après Théorème (3.2.2), et

$$|(K-A)\varphi(x)|\leq\left|\left(1-\frac{\theta_i}{\pi}\right)\varphi(x)\right|\leq q\left\|\varphi(x)\right\|_{\infty}.$$

Où

$$q=\max_{i=\overline{1.p}}\left|\left(1-\frac{\theta_i}{\pi}\right)\right|<1.$$

Alors l'opérateur $(I-(K-A))$ inversible, d'après la remarque (1.3.1). Se qui prouve le Théorème. ■

3.3 Etude de l'équation intégrale homogène

On considère l'équation homogène

$$(I-A)\varphi=0 \tag{3.8}$$

où

$$A\varphi(x)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial G(x,y)}{\partial\eta(x)}\varphi(y)\,dy.$$

On suppose que $F\in C^2(-a,a)$, $F(\pm a)=F'(\pm a)=F"(\pm a)=0$, on définit

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{sur }\Gamma\\ 0 & \text{sur }\Sigma\end{cases}$$

on considéra le domaine borné S limité par $\partial S=\Gamma\cup\Sigma$ (voir figure 4). On choisit Σ de manière à avoir ∂S de classe C^2 et Σ composé d'arc de cercle (analytique par morceaux).

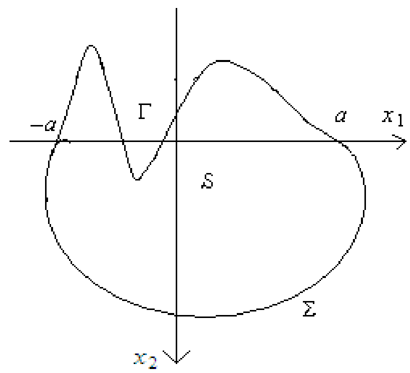

Fig 4 Domaine S

Concidérer l'opérateur intégral sur le bord fermé

$$\tilde{A}\psi(x) = \int_{\partial S} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(x)} \psi(y)\, dy, \qquad \psi \in C(\partial S).$$

On a un résultat de Kress ([4], Théorème 3.22) qui stipule que :

$$N\left(I - \tilde{A}\right) = V.$$

Où

$$V = \left\{ \left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\partial S} \diagup v \in C^2(S) \cap C^1\left(\bar{S}\right), \Delta v + k^2 v = 0 \text{ dans } S, v = 0 \text{ sur } \partial S \right\}$$

Théorème 3.3.1 *L'équation (3.8) n'admet que la solution triviale.*

Preuve. on a

$$\widetilde{\varphi} \in N\left(I - \tilde{A}\right) = V$$

Donc

$$\widetilde{\varphi} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \text{ sur } \Gamma.$$

d'où

$$\begin{cases} v = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ et} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

D'après le théorème de Holmgren (proposition 1.4.2) $v = 0$ dans un voisinage de Σ, (car v analytique dans S) alors $v = 0$ dans S, et $\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ sur Γ.

Puisque

$$\varphi = \frac{\partial v}{\partial \eta} \text{ sur } \Gamma,$$

alors, $\varphi = 0$ sur Γ, donc l'équation (3.8) admet uniquement la solution triviale. ■

Chapitre 4

Approximation numérique

4.1 Méthode de quadrature

Dans cette section on rappelle des notions d'intégration numérique.

Définition 4.1.1 *Soit f une fonction définie sur une partie compacte de G et μ une mesure de Jordans dans $\mathbb{R}^d$ non nulle. Toute forme d'approximation de l'intégral $\int_G f(x)\,d\mu$ est appelée formule de quadrature. La formule de quadrature classique contient les valeurs $f(x_i)$ de f au point $x_i \in G$ pour $i = 1...n$. On écrit la formule de quadrature $Q_n(f)$, tel que :*

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} f(x_{i,n}) \tag{4.1}$$

où les cœfficients $\alpha_{i,n}$ sont les points de quadrature.

La définition de l'erreur quadratique par $R(f)$ et donnée par

$$Q(f) = \int_G f(x)\,d\mu = Q_n(f) - R(f) \qquad \text{pour } f \in C(G).$$

Remarque 4.1.1 *Si $G = \Gamma$ une surface de $\mathbb{R}^3$ ou une courbe de $\mathbb{R}^2$. $d\mu = ds$ ou dl (élément de surface ou élément de longueur).*

Définition 4.1.2 *La méthode de quadrature $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ est dite convergente, si*

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(f) = \int_G f(x)\,dx \text{ pour tout } f \in C(G).$$

Définition 4.1.3 *La méthode de quadrature* $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ *est dite consistante s'il existe un sous-ensemble* $V \subset C(G)$ *dense et* $Q_n(f)$ *converge vers* $Q(f)$ *pour tout* $f \in V$.

Définition 4.1.4 *La méthode de quadrature* $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ *est dite stable si*

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{i,n}| : n \in N\right\} < \infty$$

Théorème 4.1.1 (Szegö) *La méthode quadratique est convergente si et seulement si elle est consistante et stable.*

Théorème 4.1.2 (Steklov) *Si* $Q_n(1) \to Q(1), n \to \infty$, *et les points de quadrature positifs, alors la forme quadratique* $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ *converge si et seulement si* $Q_n(g) \to Q(g), n \to \infty$, *pour tout* g *dans un ensemble* U *dense dans* $C(G)$.

4.2 Méthode de Nyström

Soit $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de formule de quadrature convergente pour l'intégral $\int_G f(x)\,dx$ et l'approximation de l'opérateur intégral

$$A\varphi(x) = \int_G K(x,y)\,\varphi(y)\,dy, \quad x \in G$$

de noyau K continu, par une suite d'opérateurs linéaires discrets

$$A_n\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k K(x,x_k)\,\varphi(x_k), \quad x \in G$$

alors la solution de l'équation intégrale de deuxième espèce

$$\varphi(x) - A\varphi(x) = f(x) \tag{4.2}$$

est approchée par la solution de l'équation

$$\varphi_n(x) - A_n\varphi_n(x) = f(x). \tag{4.3}$$

Ce qui nous amène à résoudre un système linéaire dans un espace de dimension finie.

Méthode approchée

Soit φ_n la solution de l'équation

$$\varphi_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} K(x, x_{k,n}) \varphi_n(x_k) = f(x), \quad x \in G \tag{4.4}$$

on pose $\varphi_{i,n} = \varphi_n(x_i), i = 1...n$. Si les points de quadrature $\alpha_{k,n}$ vérifient le système linéaire

$$\varphi_{i,n} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} K(x_{i,n}, x_{k,n}) \varphi_{i,n} = f(x_{i,n}), \quad i = 1...n, \tag{4.5}$$

alors φ_n définie par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} K(x, x_{k,n}) \varphi_{k,n}(x_k), \quad x \in G \tag{4.6}$$

résout l'équation (4.4).

Remarque 4.2.1 *Si le noyau est symétrique i.e* $k(x,y) = k(y,x)$ *la matrice* $(\alpha_{k,n} K(x_{i,n}, x_{k,n}))_{n \geq 1}$ *est généralement non symétrique.*

Théorème 4.2.1 [2] *Pour toute solution de l'équation intégrale de deuxième espèce d'un noyau continu et la fonction f continue, la forme de quadrature de méthode de Nyström convergente est uniformément convergente*

4.3 Cas d'un noyau faiblement singulier

On va décrire la méthode de Nyström appliquée à la résolution approchée de l'équation intégrale du deuxième espèce avec un noyau faiblement singulier de la forme :

$$(A\varphi)(x) = \int_G w(|x-y|) k(x,y) \varphi(y) dy, \ x \in G$$

où la fonction $w : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ représente la singularité de noyau. On suppose que w est continue et satisfait $|w(t)| \leq M t^{\alpha - d}$ pour tout $t > 0$, où M et α deux constant, $\alpha > 0$ et $k \in C(G \times G)$.

On choisit $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ une suite de quadrature définie par

$$(Q_n g)(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n}(x)\, g(x_{j,n}), x \in G,$$

pour l'intégrale

$$(Qg)(x) = \int_G w(|x-y|)\, g(y)\, dy, x \in G$$

avec les points quadratiques dépendant continûment de x. Alors on approche le noyau singulier de l'opérateur intégral par la suite d'opérateurs intégraux discrets :

$$(A_n \varphi)(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n}(x)\, k(x, x_{k,n})\, \varphi(x_{k,n}),$$

la solution de l'équation approchée de deuxième espèce est donnée par (4.6).

Le système linéaire (4.4) s'écrit sous la forme

$$\varphi_{j,n} - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}(x_j)\, K(x_j, x_k)\, \varphi_{k,n} = f(x_j), \quad j = \overline{1,n},$$

Théorème 4.3.1 [11] *Si la forme quadratique $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ converge et satisfait*

$$\lim_{y\to x} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n}(y) - \alpha_{k,n}(x)| = 0$$

alors la suite $A_n\varphi \to A\varphi, n \to \infty$ pour tout $\varphi \in C(G)$ mais non uniformément.

Annexe

Rappel sur les fonctions de Bessel et de Hankel

Dans cette annexe, nous donnons un bref aperçu sur les fonctions de Bessel et de Hankel ainsi que quelques unes de leurs propriétés (cf. [1]).

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit l'équation différentielle suivante:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \qquad (1)$$

L'équation (A.1) est appelée équation de Bessel, et sa solution générale est donnée par

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

Où $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ sont respectivement les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre n données par les expressions suivantes:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} , n \in \mathbb{N},$$

et

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + c\right] J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

pour n≥1:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

avec $a_k = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{1}{mp}$ et $\psi(1) = -C, \psi(k) = -C + a_k, k \geq 2$ et la constante de Euler C=0.5772..... .

On désigne respectivement par $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(1)}$, les fonctions de Hankel de première et deuxième espèce d'ordre n, et on écrit

$$H_n^{(1)} = J_n(x) + iY_n(x),$$

$$H_n^{(2)} = J_n(x) - iY_n(x),$$

Remarque *La solution générale de (1) peut s'écrire aussi sous la forme*

$$y(x) - \alpha H_n^{(1)}(x) + \beta H_n^{(2)}(x)$$

Avec $\propto, \beta$ *des constants complexes arbitraires.*

On donne maintenant quelques propriétés concernant les fonctions de Hankel

On donne les relations de dérivations suivantes

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n} H_n^{(j)}(x)\right) = -x^{-n} H_{n+1}^{(j)}(x), \qquad j = 1,2,$$

$$\frac{d}{dx} H_n^{(j)}(x) = H_{n-1}^{(j)} - \frac{n}{x} H_n^{(j)}(x), \qquad j = 1,2.$$

Un comportement asymptotique à l'infini est donné par

$$H_n^{(1)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp \quad i\left(r - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \to \infty,$$

$$H_n^{(2)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp \quad i\left(r - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \to \infty.$$

On donne aussi le comportement au voisinage de 0 suivant

$$H_0^{(1)}(r) \sim \frac{2i}{\pi} \log x \;, x \to 0^+,$$

$$H_1^{(1)}(r) \sim -\frac{2i}{\pi} \;, x \to 0^+.$$

Bibliographie

[1] **M. Abramowitz, I. Stegun**, *Handbook of mathematical functions*, Dover, Washington, (1964)

[2] **A. Ardjouni**, *Etude mathématique de la diffraction d'onde en optique (cas du dioptre perturbé),* Mémoire de Magister université de Annaba (2004).

[3] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle :* Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[4] **D. Colton et R. Kress**, *Integral equations methods in scattering theory,* John Wiley, New York, (1983).

[5] **D. Colton et R. Kress**, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory,* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] **S. N. Chandler-Wilde,** The impedance *Boundary value problems for the Helmholtz Equation in a Half-plane,* Math. Methodes Appl. Sci 20 (1997), pp. 188-197.

[7] **S. N. Chandler-Willde and Andrew T. Peplow**, *A boundary integral equation formulation for the Helmholtz equation in a locally perturbed half-plane,* ZAMM. Z. Angew. Math. mech. 85, N°2 (2005) 79-88.

[8] **F. John**, *Partical Differential Equation*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[9] **G. Kristensson**, *A uniqueness theorem for Helmholtz equation : penetrable media with an* i*nfinite interface,* SIAM J. Math. Anal. , 11, 1104-1116 (1980).

[10] **R. Kress and T. Tran,** *Inverse Scattering for a locally perturbed half-plane,* Inverse problems 16 (2000). 1541-1559.

[11] **R. Kress**, *Linear Integral Equations*, Second Edition, Springer, 1998

[12] **T. Kato**, *perturbation theory for linear operators*, Springer- Verlag, 1998.

[13] **E. K. Lipacherv,** *Sur la résolution approcheé d'un problème aux limites de la diffraction des ondes dans une régiones avec une frontière illimitée*, Comptes rendus de l'académie de Russie. N4, 2001.

[14] **Mario. Durán, Ignacio Muga, J-C. Nédélec**, *The Helmholtz equation with impedance in a half-plane,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340,(2005) 483-488.

[15] **J. C. Nédélec**, *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*, Rapport interne de l'école polytechnique, Paris 1977.

[16] **W. Rudin**, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.

[17] **H. Ramoul**, *un problème de diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle situe dans un demi-plan homogène,* Mémoire de Magister. université de Annaba (2003).

[18] **V. S. Vladimirov**, *Equations of mathematical Physics,* Mir Publishers Moscow. (1981).

[19] **G.Yan**, *Uniqueness in inverse scattering problem of a locally perturbed half-plane,* I. J. of Computers and Mathematics with Applications, 48 (2004), 411-418.

[20] **G. Yan**, *Uniqueness of the Inverse scattering problem of a locally perturbed Helf-plane.* Computers and Mathematics with Applications 48 (2004) 411-418.