

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

**ÉTUDE DE LA STABILITÉ POUR CERTAINES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES**

Option : Équations aux Dérivées Partielles

Par

BOUCHELAGHEM Fayçal

DIRECTEUR DE MEMOIRE : L. NISSE

M.C. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : BENZINE Rachid

Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEURS : LASKRI Yamina

Prof. U.B.M. ANNABA

SALMI Abdelouaheb

M.C. U.B.M. ANNABA

Année 2013

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et remerciement envers mon directeur de thèse, Monsieur **Nisse Lamine**, Maître de conférence à l'université Badji Mokhtar d' Annaba.

Effectuer ma thèse sous sa direction fut pour moi un grand honneur et un réel plaisir. Ses conseils et ses encouragements ont guidé et stimulé mon travail. Sa rigueur et sa culture scientifique en ont été les modèles.

Je remercie profondément Monsieur **Benzine Rachid**, Professeur à l'université Badji Mokhtar d' Annaba, pour avoir accepté de présider mon jury.

Mes grands remerciements sont adressés aussi à :

-**Laskri Yamina**, Professeur à l'université de Badji Mokhtar d' Annaba

- **Salmi Abdelouaheb**, Maître de conférence à l'université Badji Mokhtar d' Annaba, d'être membres de jury et ayant un grand honneur de présenter ma thèse devant eux.

Je profite l'occasion pour remercier tout le staff et tous mes collègues de l'institut de mathématiques de l'université de Badji Mokhtar d'Annaba.

Je ne pourrais jamais oublier le soutien des collègues et du groupe administratif de mon établissement : grand remerciement à tous.

Je suis très sensible en ce moment là, à exprimer mes sincères et grands remerciements à tous les membres de ma petite et grande famille et à tous mes amis de leurs soutien et de leurs encouragements.

الملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة استقرار الحل لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية و غير الخطية. بإستعمال المشتقات بمفهوم كابوتو Caputo من الرتبة محصورة بين 0 و 2.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier la stabilité de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires. Les dérivées considérées sont au sens de Caputo, et d'ordre compris entre 0 et 2.

Mots clés

Dérivée fractionnaire de Caputo, équation différentielle fractionnaire, équation intégrale de type Volterra, transformée de Laplace.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Notions Fondamentales	4
1.1 Fonctions nécessaires au calcul fractionnaire	4
1.1.1 Fonction Gamma	4
1.1.2 Fonction Bêta	6
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler	7
1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville	8
1.2.1 Définitions des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville	9
1.2.2 Définitions des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville	11
1.3 Dérivées fractionnaires de Caputo	12
1.4 Transformation de Laplace	15
1.4.1 Propriétés de la transformation de Laplace	17
1.4.2 Transformées de quelques fonctions	18
1.4.3 Transformée de Laplace inverse	19

2	Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire linéaire	
	d'ordre $\alpha \in (0; 2)$	20
2.1	Préliminaires	20
2.2	Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire linéaire d'ordre	
	$\alpha \in (0; 1)$	24
2.2.1	Système différentiel fractionnaire linéaire autonome	24
2.2.2	Système différentiel fractionnaire linéaire non autonome	33
2.2.3	Système différentiel fractionnaire linéaire perturbé	38
2.3	Stabilité de La solution d'un système différentiel fractionnaire linéaire d'ordre	
	$\alpha \in (1; 2)$	39
2.3.1	Système différentiel fractionnaire linéaire autonome	39
2.3.2	Système différentiel fractionnaire linéaire non autonome	50
2.3.3	Système différentiel fractionnaire linéaire perturbé	54
2.4	Conclusion	56
3	Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire	
	d'ordre $\alpha \in (0; 2)$	58
3.1	Définitions	58
3.2	Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire	
	d'ordre $\alpha \in (0; 1)$	60
3.3	Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire	
	d'ordre $\alpha \in (1; 2)$	73

Conclusion

81

HISTORIQUE

En mathématiques, l'**analyse fractionnaire** est une branche de l'analyse, qui étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier. Le sujet du calcul fractionnaire a gagné une popularité considérable et importante au cours des trois dernières décennies, principalement par ses applications démontrées dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Il fournit en effet plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations différentielles et intégrales, et divers autres problèmes impliquant des fonctions spéciales de la physique mathématique, ainsi que leurs extensions et généralisations à une et plusieurs variables. Le concept de calcul fractionnaire découle historiquement d'une question soulevée dans l'année 1695 par Marquis de L'Hôpital (1661-1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Lorsque Leibniz a répondu par une lettre à L'Hôpital, il a désigné la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f par le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu alors, "Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?"

Dans sa réponse, datée du 30 Septembre 1695, Leibniz écrit à L'Hôpital comme suit : "... C'est un paradoxe apparent, à partir duquel un jour, des conséquences utiles seront tirées...". Plusieurs auteurs considèrent cette lettre datée en 30 septembre 1695, comme heure de naissance du calcul fractionnaire. Donc le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans.

La mention des dérivées fractionnaires a été faite dans un certain contexte, (par exemple) Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Greer en 1859, Holmgren en 1865, Grinwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krug en 1890, et Weyl en 1917. En fait, dans son manuel de 700 pages, intitulé "Traité du Calcul Différentiel et du Calcul

Intégral" (deuxième édition ; Courcier, Paris, 1819), S.F. Lacroix a consacré deux pages (pp. 409-410) au calcul fractionnaire, montrant finalement que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dv^{\frac{1}{2}}}v = \frac{\sqrt[2]{v}}{\sqrt{\pi}}. \quad (1)$$

Le premier ouvrage, consacré exclusivement à l'objet de calcul fractionnaire, est le livre d'Oldham et Spanier publié en 1974.. En effet, de nombreux autres ouvrages (des livres, des volumes édités, et des comptes rendus de conférences) sont également apparus. Ceux-ci incluent (par exemple) la remarquable monographie encyclopédique et complète de Samko, Kilbas et Marichev , qui a été publiée en russe en 1987 et en anglais en 1993, et le livre consacré essentiellement aux équations différentielles fractionnaires par Miller et Ross, qui a été publié en 1993. Aujourd'hui, il existe au moins deux journaux internationaux qui sont consacrés presque entièrement à l'objet du calcul fractionnaire :

- (i) Journal of Fractional Calculus
- (ii) Fractional Calculus and Applied Analysis.

Récemment, la théorie de stabilité des équations différentielles fractionnaires (EDF) est d'un intérêt principal dans le système physique. En plus quelques résultats de stabilité sont apparus [2 – 9]. Ces résultats de stabilité concernant essentiellement les systèmes différentiels fractionnaires linéaires avec un ordre proportionnel[3].

Par exemple : une condition nécessaire et suffisante sur la stabilité asymptotique du système différentiel fractionnaire linéaire d'ordre $0 < \alpha < 1$.a été donner en [4].

En suite quelques littératures sur la stabilité du système d'équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre $0 < \alpha < 1$ sont apparus [5, 6]. Cependant ce n'est pas tout les systèmes d'équations différentielles fractionnaires à un ordre dans $(0, 1)$, il existe des mo-

dèles fractionnaires qui ont des ordres fractionnaires situés dans $(1, 2)$, par exemple :super – diffusion[7]

Donc la stabilité des systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires d'ordre $1 < \alpha < 2$ a été également considérée par l'utilisation des méthodes de la conversion et le transfère de la fonction[8, 9].

Introduction

Comparons les deux systèmes suivants pour, $0 < \lambda < 1$; $0 < \alpha < 1$ et $x(0) = x_0$.

$$Dx(t) = \lambda t^{\lambda-1} \Rightarrow x(t) = t^\lambda + x_0 \quad (*)$$

$${}^c D_{0+}^\alpha x(t) = \lambda t^{\lambda-1} \Rightarrow x(t) = \frac{\lambda \Gamma(\lambda) t^{\lambda+\alpha-1}}{\Gamma(\lambda+\alpha)} + x_0 \quad (**)$$

Ou ${}^c D_{0+}^\alpha$ la dérivée de Caputo définés par (1.21)

On remarque en effet, que le système d'ordre entier (*) est instable quel que soit $\lambda \in]0, 1[$. Le système d'ordre non entier où fractionnaire (**) est stable quel que soit $\lambda \in]0, 1 - \alpha[$. Ceci montre en général que les systèmes fractionnaires possèdent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier

Le but de ce mémoire est d'étudier la stabilité de la solution d'un système d'équation différentielle fractionnaire avec la dérivée de Caputo d'ordre α appartenant à l'intervalle $(0, 2)$, il se compose de trois chapitres, le premier chapitre contient des notions fondamentales, qui nous seront utiles par la suite, le deuxième chapitre traite les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires; le troisième chapitre concerne les systèmes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires.

CHAPITRE 1

Notions Fondamentales

Le but de ce chapitre est de présenter, d'une manière synthétique et unifiée, les éléments sur la théorie du calcul fractionnaire et des systèmes à dérivée d'ordre non entier sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans les chapitres 2 et 3 .

1.1 Fonctions nécessaires au calcul fractionnaire

Dans cette partie, on présente les fonctions : **Gamma d'Euler, Bêta** et **Mittag-Leffler** qui seront utilisées dans d'autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

En mathématiques, l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction eulérienne Gamma (ou fonction Gamma). C'est une fonction complexe qui prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1.1 Pour tout nombre complexe z tel que $\Re(z) > 0$, la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(z)$ est définie par l'intégral suivant (dit intégral d'Euler) :

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re(z) > 0) \quad (1.1)$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$.

Quelques propriétés importantes de la fonction Gamma

1) Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ d'après (1.1) est la relation suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.2)$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

2) La fonction Gamma généralise le factoriel car :

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (1.3)$$

3) On définit le prolongement de $\Gamma(z)$ pour z nombre réel négatif comme suit :

Supposons $z \in]-1; 0[$ alors $z + 1 > 0$ est bien défini par la formule (1.2), mais non pas par (1.1) .

Alors il convient de définir $\Gamma(z)$ par la relation suivante :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z} \tag{1.4}$$

En suivant la même procédure pour tout nombre réel $z \in] - (n + 1); - n [$ ($n \in \mathbb{N}_0$) on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n + 1)}{z(z + 1)\dots(z + n)} \quad [1 > z + n + 1 > 0] \tag{1.5}$$

Pour $z = 0$: $\Gamma(z)$ est infinie, il en sera de même pour toutes les valeurs entières négatives de z c'est à dire $\Gamma(-1)$; $\Gamma(-2)$; ; $\Gamma(-n)$ sont infinies

On a : $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(0^+) = +\infty$

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $1 \geq z > 0$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2 *La fonction bêta est définie par l'intégrale d'Euler :*

$$B(z; w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \quad (\text{Re}(z) > 0, \text{Re}(w) > 0) \tag{1.6}$$

Cette fonction est liée à la fonction gamma par la relation :

$$B(z; w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)} \quad (z, w \notin \mathbb{Z}_0^-) \tag{1.7}$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler

- Fonction Mittag-Leffler à un seul parametre

Définition 1.1.3 *la fonction **Mittag-leffler** à un seul parametre, est définie par :*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \text{Re}(\alpha) > 0, z \in \mathbb{C} \quad (1.8)$$

2- Fonction Mittag-leffler à deux parametres

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction à deux paramètres a été introduite par ARGAWAL et elle est définie par un développement en série

Définition 1.1.4 *la fonction Mittag-leffler à deux parametres, est définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \text{ et } \beta, z \in \mathbb{C} \quad (1.9)$$

Remarque 1.1.5

- * $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$
- * $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$
- * Par analogie avec (1.9) pour $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on introduit une matrice dans la

fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \beta, z \in \mathbb{C} \quad (1.10)$$

Quelques relations avec les fonctions classiques

D'après (1.9) on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},2}(z) &= \frac{\sinh(z)}{\sqrt{z}} & E_{\frac{1}{2},1}(z) &= \cosh(z) & E_{1,2}(z) &= \frac{e^z - 1}{z} \\ E_{\frac{1}{2}}(z) &= e^{z^2}(1 + \operatorname{erf}(z)) = e^{z^2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt\right) \end{aligned}$$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Dans cette section on donne les définitions des intégrales et des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville sur un intervalle borné dans \mathbb{R} .

On peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successives d'une fonction continue par exemple

Soit $y : [a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$, ($b \leq +\infty$) une fonction continue; une primitive de y qui s'annule en a est donnée par

$$(I_a^1 y)(x) = \int_a^x y(t) dt$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 y)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s y(t) dt \right) ds$$

Le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 y)(x) = \int_a^x (x-t)y(t) dt$$

Puis un itération donne

$$(I_a^n y)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} y(t) dt$$

1.2.1 Définitions des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 Soit $\Omega = (a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) un intervalle fini sur l'axe réel \mathbb{R} . Les intégrales fractionnaires gauche et droite de Riemann-Liouville $I_{a+}^\alpha y$ et $I_{b-}^\alpha y$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) sont définie respectivement par :

$$(I_{a+}^\alpha y)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a, \quad \text{Re}(\alpha) > 0) \quad (1.11)$$

$$(I_{b-}^\alpha y)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b, \quad \text{Re}(\alpha) > 0) \quad (1.12)$$

$\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma définie par (1.1),

On remarque que la formule (1.11) est (du moins formellement) une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre " de primitivation " α non entier

Voyons un exemple

Exemple 1.2.2 considérons la fonction $y(x) = (x-a)^\beta$. Alors

$$I_{a+}^\alpha ((x-a)^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt$$

Pour évaluer cette intégration on pose le changement :

$$t = a + (x - a)\tau \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\beta} &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (x - a)^{\beta+\alpha} \quad \text{d'après (1.7) et (1.6)} \end{aligned}$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$, où on a :

$$\begin{aligned} I_{a+}^1 (x - a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x - a)^{\beta+1} \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1} \quad \text{d'après (1.2)} \end{aligned}$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (1.11) et (1.12) coïncident avec la n ème intégrale de la forme :

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} y)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} y(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{1.14}$$

et

$$\begin{aligned} (I_{b-}^{\alpha} y)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b y(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} y(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.2.2 Définitions des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.2.3 les dérivées fractionnaires ; gauche et droite de Riemann-Liouville $D_{a+}^{\alpha} y$ et $D_{b-}^{\alpha} y$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) sont définies respectivement par :

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} y)(x) & : = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) & (1.16) \\ & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (x > a ; n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha} y)(x) & : = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n ((I_{b-}^{n-\alpha} y)(x)) & (1.17) \\ & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (x < b ; n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1) \end{aligned}$$

$[\operatorname{Re}(\alpha)]$ est la partie entière de $\operatorname{Re}(\alpha)$

En particulier si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, alors

$$(D_{a+}^0 y)(x) = (D_{b-}^0 y)(x) = y(x) ; \quad (D_{a+}^n y)(x) = y^{(n)}(x) \quad (1.18)$$

$$\text{et } (D_{b-}^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$y^{(n)}(x)$ est la dérivée usuelle de $y(x)$ d'ordre n .

Si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$; alors

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad (x > a ; 0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1) \quad (1.19)$$

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad (x < b \quad ; 0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1) \quad (1.20)$$

1.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Dans cette section on présente les définitions et quelques propriétés des dérivées de Caputo.

Soit $[a, b]$ un intervalle borné dans \mathbb{R} ; $D_{a+}^{\alpha} [y(t)](x) = (D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $D_{b-}^{\alpha} [y(t)](x) = (D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$) définies respectivement par (1.16) et (1.17). Les dérivées fractionnaires $({}^cD_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $({}^cD_{b-}^{\alpha}y)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$) sur l'intervalle $[a, b]$ sont définies respectivement comme suit :

$$({}^cD_{a+}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x), \quad (1.21)$$

Et :

$$({}^cD_{b-}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{b-}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x), \quad (1.22)$$

$$\text{avec } n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}_0, \quad n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}_0 \quad (1.23)$$

Les dérivées $({}^cD_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $({}^cD_{b-}^{\alpha}y)(x)$ sont appelées les dérivées fractionnaires gauche et droite de Caputo d'ordre α . En particulier, si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ les relations (1.22) et (1.23)

seront sous les formes suivantes :

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) := (D_{a+}^\alpha [y(t) - y(a)])(x) \quad (1.24)$$

et

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) := (D_{b-}^\alpha [y(t) - y(b)])(x) \quad (1.25)$$

Si $y(x)$ est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo $({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$, $({}^c D_{b-}^\alpha y)(x)$ et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville $(D_{a+}^\alpha y)(x)$ et $(D_{b-}^\alpha y)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$) existent, alors on a les relations suivantes

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1) \quad (1.26)$$

et

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - x)^{k-\alpha} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1) \quad (1.27)$$

En particulier, si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, alors on a :

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha} \quad (1.28)$$

et

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1 - \alpha)} (b - x)^{-\alpha} \quad (1.29)$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo (1.21) et (1.22) coïncident avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (1.16) et (1.17) dans les cas suivants :

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) \quad \text{si} \quad y(a) = y'(a) = y''(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0 \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1) \quad (1.30)$$

et

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) \quad \text{si} \quad y(b) = y'(b) = y''(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0 \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1) \quad (1.31)$$

En particulier , si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, on a :

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) \quad \text{si} \quad y(a) = 0 \quad (1.32)$$

et

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) \quad \text{si} \quad y(b) = 0 \quad (1.33)$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ et la dérivée usuelle $y^{(n)}(x)$ d'ordre n existe , alors les dérivées fractionnaires de Caputo $({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$ et $({}^c D_{b-}^\alpha y)(x)$ coïncident avec $y^{(n)}(x)$

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (1.34)$$

et

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (1.35)$$

Théorème 1.3.1 *soit $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$), et soit $n = [\alpha] + 1$. Si $y(x) \in AC^n[a, b]$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo existent presque par tout en $[a, b]$.*

* si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, $({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$ et $({}^c D_{b-}^\alpha y)(x)$ sont représentées par

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: (I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x) \quad (1.36)$$

et

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n y)(x) \quad (1.37)$$

avec $D = \frac{d}{dx}$ et $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$; et

$$f(x) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \quad [\varphi(t) \in L(a, b)],$$

$$AC^n[a, b] = \{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ et } (D^{n-1}f)(x) \in AC[a, b] \quad D = \frac{d}{dx} \},$$

$$AC^1[a, b] = AC[a, b].$$

En particulier, si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ et $y(x) \in AC[a, b]$,

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^\alpha} =: (I_{a+}^{1-\alpha} Dy)(x) \quad (1.38)$$

et

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y'(t) dt}{(t-x)^\alpha} =: (-1)(I_{b-}^{1-\alpha} Dy)(x) \quad (1.39)$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}_0$, alors $({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$ et $({}^c D_{b-}^\alpha y)(x)$ sont représentées par (1.34) et (1.35),

en particulier $({}^c D_{a+}^0 y)(x) = ({}^c D_{b-}^0 y)(x) = y(x)$

1.4 Transformation de Laplace

La transformation de Laplace appartient à la famille très vaste des transformations intégrales, qui établissent une relation entre une fonction f et sa transformée F sous la forme

$$F(w) = \int_I k(w, t) f(t) dt \quad (1.40)$$

Une transformation particulière nécessite donc la définition du noyau $k(w, t)$ et de l'intervalle d'intégration I

Les transformations les plus utilisées sont celles de Fourier, pour lesquelles on a :

$$I = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad k(w, t) = e^{-iwt} \quad w \in \mathbb{R} \quad (\text{Fourier})$$

et celle de Laplace, pour laquelle on a :

$$I = \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad k(w, t) = e^{-wt} \quad w \in \mathbb{C} \quad (\text{Laplace})$$

Remarque 1.4.1

- Puisque w est complexe, la transformation de Laplace peut être vue comme une généralisation de la transformation de Fourier, restreinte aux fonctions définies sur \mathbb{R}^+

- On exigera qu'une transformation intégrale F possède les propriétés suivantes

* la continuité

* existence d'une transformation inverse

Définition 1.4.2 soit f une fonction de la variable réelle, la transformée de Laplace de f , lorsqu'elle existe, sera la fonction $\mathcal{L}(f)$ de la variable complexe z définie par l'intégrale

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-zt} dt \tag{1.41}$$

- on appelle f l'original et sa transformée $\mathcal{L}(f)$ l'image

- les valeurs de f pour $t < 0$ n'interviennent pas dans la définition (f est dite causale)

1.4.1 Propriétés de la transformation de Laplace

* **Linéarité** : soient f et g deux fonctions du temps, la linéarité de l'intégration permet d'établir l'égalité suivante :

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \mathcal{L}[\lambda f(t)] + \mathcal{L}[\mu g(t)] \quad (1.42)$$

* **Dérivation**

Si $\mathcal{L}[f(t)](z) = F(z)$ alors $F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-zt} dt$

En intégrant par partie $F(z)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](z) &= \left[-\frac{1}{z} e^{-zt} f(t)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{z} f(0) + \frac{1}{z} \mathcal{L}(f'(t))(z) \end{aligned}$$

Soit : $\mathcal{L}(f'(t))(z) = z\mathcal{L}[f(t)](z) - f(0)$.

De même on a :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n \mathcal{L}[f(t)](z) + z^{n-1} f(0) + z^{n-2} f'(0) + \dots + z^n f^{(n-1)}(0) \quad (1.43)$$

Si les conditions initiales sont telles que $f(0) = 0, f'(0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(0) = 0$; alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n \mathcal{L}[f(t)](z) \quad (1.44)$$

* **Intégration**

Soit $\mathcal{L}[f(t)](z) = F(z)$ et $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

c'est-à-dire $g'(t) = f(t)$, on a :

$$F(z) = \mathcal{L}[g'(t)](z) = z\mathcal{L}[g(t)](z) - g(0).$$

D'où : $\mathcal{L}[g(t)](z) = \frac{F(z)}{z}$

donc :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(z) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](z)}{z} \quad (1.45)$$

1.4.2 Transformées de quelques fonctions

- La transformée de Laplace de la fonction unitaire $u(t)$ est :

$$\mathcal{L}(u(t))(z) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} dt = \left[-\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{z} \quad (1.46)$$

Donc : $\mathcal{L}(u(t - t_0))(z) = -\frac{e^{-zt_0}}{z}$

- La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Rieman -Liouville est :

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} D_{a,t}^\alpha x(t) dt = z^\alpha X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^k [D^{\alpha-k-1}x(t)]_{t=a} \quad , \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (1.47)$$

- La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est :

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} {}^c D_{a,t}^\alpha x(t) dt = z^\alpha X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{\alpha-k-1} x^{(k)}(a) \quad , \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (1.48)$$

- La transformée de Laplace de la fonction de Mettag-Leffler est

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} t^{\alpha k - \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at) dt = \frac{k! z^{\alpha-\beta}}{(z^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad , \quad (\text{Re}(z) > |a|^{\frac{1}{n}}) \quad (1.49)$$

1.4.3 Transformée de Laplace inverse

En pratique, on utilise les tables de la transformée de Laplace pour le calcul de la transformée inverse de Laplace notée \mathcal{L}^{-1} .

1°) Soit $\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1}{z(z+1)}$, En analysant la table de Laplace on obtient :

$$f(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

On peut aussi procéder autrement en décomposant $\mathcal{L}[f(t)](z)$ en éléments simples. Soit :

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}$$

Donc : $f(t) = u(t) - e^{-t}u(t) = 1 - e^{-t}$

2°) Cherchons la transformée de Laplace inverse de $\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1-e^{-z}}{z^2}$

On a : $\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{-z}}{z^2}$

D'où : $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-e^{-z}}{z^2}\right) = u(t) - t u(t - 1)$

CHAPITRE 2

Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire
linéaire d'ordre $\alpha \in (0; 2)$

2.1 Préliminaires

Il est utile de rappeler quelques lemmes et les formules asymptotiques de la fonction de Mittag-Leffler

Lemme 2.1.1 (*JORDAN Décomposition* [12])

soit A une matrice carrée complexe, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = J_1 \oplus \dots \oplus J_s \tag{2.1}$$

où J_l sont les blocs de Jordan de A avec les valeurs propres de A sur la diagonale, les blocs de Jordan sont uniquement déterminés par la matrice A

Lemme 2.1.2 *si $0 < \alpha < 2$, β un nombre arbitraire complexe et μ est un nombre arbitraire réel, tel que*

$$\frac{\alpha\pi}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\} \quad (2.2)$$

Alors pour un nombre entier arbitraire $\omega \geq 1$, les expressions suivantes sont vérifiées

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} (z)^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp(z^{\frac{1}{\alpha}}) - \sum_{k=1}^{\omega} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + o(|z|^{-\omega-1}), \quad (2.3)$$

avec $|z| \rightarrow \infty$, $|\text{Arg}(z)| \leq \mu$ et

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^{\omega} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + o(|z|^{-\omega-1}), \quad (2.4)$$

avec $|z| \rightarrow \infty$, $\mu \leq |\text{Arg}(z)| \leq \pi$.

Remarque 2.1.3 *Si $\alpha = \beta$ alors :*

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = \frac{1}{\alpha} (z)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \exp(z^{\frac{1}{\alpha}}) - \sum_{k=2}^{\omega} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + o(|z|^{-\omega-1}), \quad (2.5)$$

avec $|z| \rightarrow \infty$, $|\text{Arg}(z)| \leq \mu$ et

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = - \sum_{k=2}^{\omega} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + o(|z|^{-\omega-1}), \quad (2.6)$$

avec $|z| \rightarrow \infty$ et $\mu \leq |Arg(z)| \leq \pi$.

Preuve. Si résultats sont prouvés en [10] ■

Spécialement en tenant compte du lemme (2.1.2) et la dérivée de la fonction de Mittag-leffler on obtient

$$t^{\alpha j + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(j)}(\lambda t^\alpha) \sim \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^j \left[\frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}} t) \right], \quad (2.7)$$

avec $t \rightarrow \infty$, $|Arg(\lambda)| \leq \mu$ et

$$t^{\alpha j + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(j)}(\lambda t^\alpha) \sim (-1)^{j+1} \left[\frac{j! \lambda^{-j-1}}{\Gamma(\beta - \alpha)} t^{\beta - \alpha - 1} + \frac{(j+1)! \lambda^{-j-2}}{\Gamma(\beta - 2\alpha)} t^{\beta - 2\alpha - 1} \right], \quad (2.8)$$

avec $t \rightarrow \infty$, $\mu \leq |Arg(\lambda)| \leq \pi$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Lemme 2.1.4 (voir [11]) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $0 < \alpha < 2$, β nombre réel arbitraire, μ satisfait $\frac{\alpha\pi}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ et $C > 0$, réelles constantes alors :

$$\|E_{\alpha, \beta}(A)\| \leq \frac{C}{1 + \|A\|}, \quad (2.9)$$

Où $\mu \leq |Arg(\lambda)| \leq \pi$, $\forall \lambda \in \text{spec}(A)$, telle que $\text{spec}(A)$: les valeurs propres de la matrice A et $\|\cdot\|$ est dit l_2 -norme

Lemme 2.1.5 (voir [13]) si :

$$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t k(s)x(s)ds, \quad t \in [t_0, T] \quad (2.10)$$

Où toutes les fonctions impliquées sont continues sur $[t_0, T)$, $T \leq +\infty$ et $k(x) \geq 0$,

alors $x(t)$ satisfait

$$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t k(s)h(s) \exp \left[\int_s^t k(u)du \right] ds, \quad t \in [t_0, T). \quad (2.11)$$

En plus si $h(t)$ est non décroissante, alors

$$x(t) \leq h(t) \exp \left[\int_{t_0}^t k(s)ds \right], \quad t \in [t_0, T) \quad (2.12)$$

Définitions sur la stabilité

Définition 2.1.6 la constante x_{eq} est un point d'équilibre du système différentiel fractionnaire $D_{t_0,t}^\alpha x(t) = f(t, x)$ si est seulement si $f(t, x_{eq}) = D_{t_0,t}^\alpha x(t)|_{x(t)=x_{eq}}$ pour tout $t > t_0$, où l'opérateur $D_{t_0,t}^\alpha$ est ${}^c D_{t_0,t}^\alpha$ ou ${}_{R.L} D_{t_0,t}^\alpha$

sans perdre de généralité, supposons que le point d'équilibre est trivial $x_{eq} = 0$, nous introduisons les définitions suivantes

Définition 2.1.7 la solution Zéro de $D_{t_0,t}^\alpha x(t) = f(t, x(t))$ d'ordre $0 < \alpha < 1$ [ou $1 < \alpha < 2$] est dite stable si, pour toute valeur initiale x_0 [ou x_k ($k = 0, 1$)], il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t > t_0$.

Définition 2.1.8 la solution zéro est dite asymptotiquement stable si en plus d'être stable, $\|x(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$

2.2 Stabilité de la solution d'un système différentiel

fractionnaire linéaire d'ordre $\alpha \in (0; 1)$

2.2.1 Système différentiel fractionnaire linéaire autonome

Dans cette section on étudie la stabilité de la solution du système Différentiel fractionnaire linéaire autonome avec la dérivée de Caputo de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = A x(t) & t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (I)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $0 < \alpha < 1$

Théorème 2.2.1 *Le système différentiel fractionnaire linéaire autonome (I) avec la dérivée de Caputo est asymptotiquement stable si et seulement si $|\text{Arg}(\lambda_l)| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad \forall \lambda_l \in \text{spec}(A)$*

Preuve. ■

Par l'application de la transformation de Laplace, on obtient la solution du système (I)

$$x(t) = E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha)x_0. \quad (2.13)$$

D'après (1.10) on a : $E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+1)}$.

* Premièrement supposons que la matrice A est diagonalisable,

i.e : il existe une matrice inversible P telle que

$$\Lambda = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \quad (2.14)$$

Donc :

$$E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(P\Lambda P^{-1})^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+1)}$$

On a $(P\Lambda P^{-1})^m = P\Lambda^m P^{-1}$

Donc :

$$\begin{aligned} E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P\Lambda^m P^{-1} (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+1)} \\ &= P \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Lambda^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+1)} \right) P^{-1} \end{aligned}$$

On a : $\Lambda^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_s^m)$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha) &= P \text{diag} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+1)}; \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda_2^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+1)}; \dots; \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda_s^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+1)} \right) P^{-1} \\ &= P \text{diag}(E_\alpha(\lambda_1(t-t_0)^\alpha), \dots, E_\alpha(\lambda_s(t-t_0)^\alpha)) P^{-1} \end{aligned}$$

Comme $|\text{Arg}(\lambda_l)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ ($l = 1, \dots, s$), D'après (2.4)

$$\text{On a : } E_\alpha(\lambda_l(t-t_0)^\alpha) = - \sum_{m=1}^{\omega} \frac{(\lambda_l(t-t_0)^\alpha)^{-m}}{\Gamma(1-m\alpha)} + 0(|\lambda_l(t-t_0)^\alpha|^{-\omega-1}) \longrightarrow 0$$

avec $t \longrightarrow +\infty$, $l = 1, \dots, s$

donc $\|x(t)\| \longrightarrow 0$ ($t \longrightarrow +\infty$).

La solution est asymptotiquement stable.

* Ensuite, d'après le lemme (2.1.1) il existe une matrice inversible P telle que

$$A = PJP^{-1} \quad \text{avec } J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$$

où J_l ($l = \overline{1, s}$) sont les blocs de Jordan de la matrice A avec les valeurs propres de A

sur la diagonale

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & & & \\ & \lambda_l & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_l & 1 \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix}_{n_l \times n_l}, \quad (2.15)$$

$l = 1, 2, \dots, s$, $\lambda_l \in \mathbb{C}$ est la valeur propre de la matrice A et $\sum_{l=1}^s n_l = n$.

On a : $A = PJP^{-1}$

Donc $A^m = PJP^{-1}PJP^{-1} \dots PJP^{-1}$

$$A^m = PJ^m P^{-1}$$

On a $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$ alors $J^m = \text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m)$

Donc :

$$A^m(t - t_0)^{\alpha m} = P \text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m) P^{-1} (t - t_0)^{\alpha m}$$

Donc :

$$E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha) = P \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m)(t - t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + 1)} \right] P^{-1}$$

$$\text{On a : } \sum_{m=0}^{\infty} \text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m) = \text{diag}\left(\sum_{m=0}^{\infty} J_1^m, \sum_{m=0}^{\infty} J_2^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} J_s^m\right)$$

Alors :

$$E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha) = P \text{diag}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1^m(t - t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + 1)}, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_2^m(t - t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + 1)}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_s^m(t - t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + 1)}\right) P^{-1}$$

Donc :

$$E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha) = P \begin{pmatrix} E_\alpha(J_1(t-t_0)^\alpha) & & & & \\ & E_\alpha(J_2(t-t_0)^\alpha) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_\alpha(J_s(t-t_0)^\alpha) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (2.16)$$

On a pour $m \in \mathbb{N}$:

$$J_l^m = \begin{pmatrix} \lambda_l^m & \left(\frac{d}{d\lambda}\right)\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} & \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^2\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} & \cdots & \frac{1}{(n_l-1)!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-1)}\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} \\ & \lambda_l^m & \ddots & \ddots & \frac{1}{(n_l-2)!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-2)}\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \left(\frac{d}{d\lambda}\right)\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} \\ & & & & \lambda_l^m \end{pmatrix} \quad l = \overline{1, s} \quad (2.17)$$

et

$$E_\alpha(J_l(t-t_0)^\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_l^m(t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + 1)} \quad l = \overline{1, s}$$

Donc pour $l = \overline{1, s}$:

$$E_\alpha(J_l(t-t_0)^\alpha) = T_l \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m (t-t_0)^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha + 1)} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_l} \quad (2.18)$$

Tel que

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{d\lambda} & \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^2 & \dots & \frac{1}{(n_l-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-1)} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \frac{1}{(n_l-2)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-2)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{d}{d\lambda} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n_l \times n_l} \quad l = \overline{1, s} \quad (2.19)$$

Alors :

$$E_\alpha(J_l(t-t_0)^\alpha) = T_1 [E_\alpha(\lambda(t-t_0)^\alpha)]|_{\lambda=\lambda_l} \quad l = \overline{1, s} \quad (2.20)$$

Donc chaque élément non nul de la matrice $E_\alpha(J_l(t-t_0)^\alpha)$ peut être écrit sous la forme

$$\frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} E_\alpha(\lambda(t-t_0)^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_l} : j = 1, 2, \dots, n_l \quad (2.21)$$

Si $\exists l = \overline{1, s}$ telque $\lambda_l = 0$: Alors

$$\frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} E_\alpha(\lambda(t-t_0)^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_l=0} = \frac{(t-t_0)^{\alpha(j-1)}}{\Gamma(\alpha(j-1)+1)} \quad (2.22)$$

Comme $j \geq 1$ et $0 < \alpha < 1$; ils est claire que

$$\frac{(t - t_0)^{\alpha(j-1)}}{\Gamma(\alpha(j-1) + 1)} \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$$

Donc : $\|x(t)\| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

Si $\forall l = 1, \dots, s : \lambda_l \neq 0$, on a trois cas

1^{er} Cas : **si** $\forall l = 1, \dots, s : |\text{Arg}(\lambda_l)| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (t \longrightarrow \infty)$

D'après (2.8)

$$\frac{1}{(j-1)!} (t-t_0)^{\alpha(j-1)} E_{\alpha}^{(j-1)}(\lambda(t-t_0)^{\alpha}) \Big|_{\lambda=\lambda_l} \sim (-1)^j \left[\frac{\lambda_l^{-j}}{\Gamma(1-\alpha)} (t-t_0)^{-\alpha} + \frac{j \lambda_l^{-j-1}}{\Gamma(1-2\alpha)} (t-t_0)^{-2\alpha} \right]$$

On a

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha}(\lambda(t-t_0)^{\alpha}) = (t-t_0)^{\alpha(j-1)} E_{\alpha}^{(j-1)}(\lambda(t-t_0)^{\alpha}) \quad (2.23)$$

Donc : $\frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha}(\lambda(t-t_0)^{\alpha}) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} = (t-t_0)^{\alpha(j-1)} \frac{1}{(j-1)!} E_{\alpha}^{(j-1)}(\lambda(t-t_0)^{\alpha}) \Big|_{\lambda=\lambda_l}$

Alors

$$\frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha}(\lambda(t-t_0)^{\alpha}) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} \sim (-1)^j \left[\frac{\lambda_l^{-j}}{\Gamma(1-\alpha)} (t-t_0)^{-\alpha} + \frac{j \lambda_l^{-j-1}}{\Gamma(1-2\alpha)} (t-t_0)^{-2\alpha} \right] \quad (2.24)$$

comme $0 < \alpha < 1$; alors pour $j = \overline{1; n_l} \quad (l = \overline{1; s})$

$$\frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha}(\lambda(t-t_0)^{\alpha}) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

Alors : $\|x(t)\| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$

2^{ème} Cas : **si** $\exists l \in \{1, \dots, s\} : |\text{Arg}(\lambda_l)| < \frac{\alpha\pi}{2}$ et $t \longrightarrow \infty$

D'après (2.7)

$$(t - t_0)^{\alpha(j-1)} E_{\alpha}^{(j-1)}(\lambda(t - t_0)^{\alpha}) \sim \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right]$$

Donc d'après(2.23) :

$$\frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} E_{\alpha}(\lambda(t - t_0)^{\alpha}) \Big|_{\lambda=\lambda_l} \sim \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l}, \quad (2.25)$$

$$j = 1, 2, \dots, n_l$$

On a :

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l} = \mathbf{P}(t - t_0) \exp \left[\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0) \right], \quad (2.26)$$

$$j = 1, 2, \dots, n_l$$

tel que $\mathbf{P}(t - t_0)$ est un polynôme de degré $(j - 1)$,

Le terme le plus grand degré de $\mathbf{P}(t - t_0)$ est

$$\frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \quad (2.27)$$

Donc pour $j = 1, 2, \dots, n_l$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right| &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \left| \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right| \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \exp \left[|\lambda_l| \cos\left(\frac{Arg(\lambda_l)}{\alpha}\right) (t - t_0) \right] \end{aligned}$$

Comme $|Arg(\lambda_l)| < \frac{\alpha\pi}{2}$

$$\text{Donc } \left| \frac{Arg(\lambda_l)}{\alpha} \right| < \frac{\pi}{2} \quad \text{Alors} \quad \cos\left(\frac{Arg(\lambda_l)}{\alpha}\right) > 0$$

Alors : $\left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow +\infty)$

Donc $\|x(t)\| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow +\infty)$

3^{ème} Cas Si $\forall l = 1, \dots, s : |Arg(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$; possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique.

Alors les matrices J_l sont diagonales

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & & & & \\ & \lambda_l & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_l & \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix}_{n_l \times n_l} \quad (2.28)$$

Alors $J_l^m = \lambda_l^m \text{diag}(1, \dots, 1)$

Donc $l = \overline{1; s}$:

$$\begin{aligned} E_\alpha(J_l(t-t_0)^\alpha) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_l^m (t-t_0)^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_l^m \text{diag}(1, \dots, 1) (t-t_0)^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)} \\ &= \text{diag}(E_\alpha(\lambda_l(t-t_0)^\alpha), \dots, E_\alpha(\lambda_l(t-t_0)^\alpha)) \end{aligned}$$

D'après (2.7) (on prend $j = 0$)

$$|E_\alpha(\lambda_l(t-t_0)^\alpha)| \sim \left| \frac{1}{\alpha} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right|$$

On a : $\lambda_l = |\lambda_l| [\cos(Arg(\lambda_l)) + i \sin(Arg(\lambda_l))] \quad (i^2 = -1)$

$$\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} = |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = i |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}}$$

Donc : $\forall l = 1, \dots, s, \left| \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right| = \left| \exp(i |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right| = 1$

Donc : $|E_\alpha(\lambda_l(t - t_0)^\alpha)| \sim \frac{1}{\alpha} \quad (t \longrightarrow \infty)$

Donc, la solution du système (I) dans ce cas est stable, sans être asymptotiquement stable.

Remarque 2.2.2

* Supposons $\exists l \in \{1, \dots, s\} : |\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$, telque la multiplicité algébrique de la valeur propre critique λ_l n'est pas égale a la multiplicité géométrique

Alors les matrices J_l sont des blocs de Jordan de la matrice A ,

D'après (2.16) : $E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha) = P \text{diag}(E_\alpha(\lambda_1(t - t_0)^\alpha), \dots, E_\alpha(\lambda_l(t - t_0)^\alpha)) P^{-1}$

La matrice $E_\alpha(J_l(t - t_0)^\alpha)$ peut être écrit comme(2.20), et chaque élément non nul de la matrice $E_\alpha(J_l(t - t_0)^\alpha)$ peut être écrit comme (2.21)

On a : $\frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \{(E_\alpha(\lambda(t - t_0)^\alpha)\} = (t - t_0)^{\alpha(j-1)} \frac{1}{(j-1)!} E_\alpha^{(j-1)}(\lambda(t - t_0)^\alpha)$

D'après le (2.7)

$\frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} E_\alpha(\lambda(t - t_0)^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_l} \sim \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l}, \quad j = 1, 2, \dots, n_l$

On a : $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l} = \mathbf{P}(t - t_0) \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \quad j = 1, 2, \dots, n_l$

tel que $\mathbf{P}(t - t_0)$ est un polynôme de degré $(j - 1)$,

Le plus grand degré de $\mathbf{P}(t - t_0)$ est $\frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1}$

On a : $\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} = |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}} i$

Donc pour $j = 1, 2, \dots, n_l$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right| &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \left| \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right| \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \end{aligned}$$

Alors $\left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{(j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

Donc $\|x(t)\| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

Conclusion

(1) Si $\exists l \in \{1, \dots, s\} : |Arg(\lambda_l)| < \frac{\alpha\pi}{2}$; alors la solution du système (I) n'est pas stable.

(2) Si la matrice A a une valeur propre nulle, la solution du système (I) n'est pas stable.

(3) Si la matrice A a une valeur propre critique λ_l , qui satisfait, $|Arg(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ et que la multiplicité algébrique de la valeur propre critique λ_l n'est pas égale à la multiplicité géométrique, alors la solution du système (I) n'est pas stable.

(4) Si $l \in \{1, \dots, s\} : |Arg(\lambda_l)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, telles que les valeurs propres critiques qui satisfont $|Arg(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique, alors la solution du système (I) est stable, sans être asymptotiquement stable.

2.2.2 Système différentiel fractionnaire linéaire non autonome

Dans cette section on étudie la stabilité d'un système différentiel fractionnaire linéaire non autonome avec la dérivée de Caputo, de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax(t) + B(t)x(t) & t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (II)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la Matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 < \alpha < 1$ et $B(t) : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice continument différentiable

Théorème 2.2.3 Si $\forall \lambda_l \in spec(A) \neq 0, |Arg(\lambda_l)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, telles que les valeurs propres cri-

tiques qui satisfont $|\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique et $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt$ est borné

Alors : la solution du système (II) est stable

On obtient la solution du système (II) en utilisant la transformation de Laplace et la transformée inverse de Laplace

$$x(t) = E_{\alpha}(A(t-t_0)^{\alpha})x_0 + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha})B(\tau)x(\tau)d\tau. \quad (2.29)$$

De la preuve du théorème (2.2.1), on peut démontrer pour tout $t \geq t_0$ les matrices $(t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}(A(t-t_0)^{\alpha})$ sont borné; Conséquent il existe deux nombres positifs $M_0; M_1$ telsque pour tout $t \geq t_0$,

$$\| (t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}(A(t-t_0)^{\alpha}) \| \leq M_k \quad (2.30)$$

de même on peut démontrer que $(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha})$ est borné;

Conséquent, il existe un nombre positifs L telque pour tout $t \geq t_0$

et pour $\tau \in [t_0; t]$,

$$\| (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha}) \| \leq L \quad (2.31)$$

Maintenant on obtient l'estimation de la solution

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| + \int_{t_0}^t L \|B(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau$$

L'application de l'inégalité de Gronwall (2.12) donne :

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| \exp \left(L \int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau \right)$$

Comme $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$, Alors $\|x(t)\| < \infty$,

donc la solution du système(II) est stable

De même on peut déduire le théorème suivant

Théorème 2.2.4 *Si la matrice A satisfait $\forall \lambda_l \in \text{spec}(A) \neq 0, |\text{Arg}(\lambda_l)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ et $\|B(t)\| = O(t - t_0)^\gamma$ ($-1 < \gamma < 1 - \alpha$, $t_0 > 0$) pour $t \geq 0$*

Alors : la solution du système (II) est asymptotiquement stable.

Preuve. ■

On a la solution du système (II)

$$x(t) = E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha)x_0 + \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha)B(\tau)x(\tau)d\tau$$

Donc :

$$\|x(t)\| \leq \|E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha)\| \|x_0\| + \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} \|(t - \tau)E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha)\| \|B(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau \quad (2.32)$$

D'après (2.9) il existe C_0 telle que

$$\| E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha) \| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \quad (2.33)$$

De la preuve du théorème (2.2.1), on peut démontrer que $(t - \tau) E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha)$ est borné; pour tout $\tau \in (t_0; t)$

Donc il existe un nombre positif L_1 telle que pour tout $t \geq t_0$, et pour $\tau \in [t_0; t]$

$$\|(t - \tau) E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha)\| \leq L_1$$

Donc :

$$\|x(t)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_0\| + L_1 \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau \quad (2.34)$$

Donc d'après(2.30) :

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| + L_1 \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau$$

D'après (2.12)

$$x(t) \leq M_0 \|x_0\| \exp \left[L_1 \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| d\tau \right], \quad (2.35)$$

Substituer (2.35) dans (2.34)

$$\|x(t)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_0\| + L_1 M_0 \|x_0\| \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| \exp \left[L_1 \int_{t_0}^t (t - \eta)^{\alpha-2} \|\beta(\eta)\| d\eta \right] d\tau$$

Il résulte de la condition $\|B(t)\| = O(t - t_0)^\gamma$ ($-1 < \gamma < 1 - \alpha$, $t_0 > 0$) pour $t \geq 0$, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\int_{t_0}^t (t - \eta)^{\alpha-2} \|\beta(\eta)\| d\eta \leq M$ et

$$\|x(t)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_0\| + M_0 \|x_0\| L_1 e^{ML_1} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} O(t - t_0)^\gamma d\tau$$

On utilise (1.7)

$$\int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} O(t - t_0)^\gamma d\tau = \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} O(t - t_0)^{\gamma+\alpha-1}$$

Donc :

$$\|x(t)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_0\| + M_0 \|x_0\| L_1 e^{ML_1} \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} O(t - t_0)^{\gamma+\alpha-1} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$$

Donc la solution du système (II) est asymptotiquement stable

2.2.3 Système différentiel fractionnaire linéaire perturbé

Dans cette partie, on étudie la stabilité d'un système différentiel fractionnaire linéaire perturbé suivant avec la Dérivée de Caputo de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax(t) + f(t, x(t)) & t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (III)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la Matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 < \alpha < 1$ et $f(t, x(t)) : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue avec $f(t, 0) = 0$, $f(t, x(t))$ satisfait la condition de Lipschitz pour x , alors la solution unique du Système (III) est

$$x(t) = E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha)x_0 + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha) f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (2.36)$$

Théorème 2.2.5 *Si la matrice A satisfait $\forall \lambda_l \in \text{spec}(A) \neq 0, |\text{Arg}(\lambda_l)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, les valeurs propres critiques qui satisfont $|\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ ont la même multiplicité algébrique et géométrique, de plus il existe une fonction $\gamma(t)$ qui satisfait les conditions suivantes*

- (i) $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt$ est borné
- (ii) $\|f(t, x)\| \leq \gamma(t) \|x(t)\|$

Alors : la solution du système système (III) est stable

Preuve.

■

De la preuve du théorème (2.2.3), et d'après (2.30) et (2.31), on obtient l'estimation de la solution

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| + \int_{t_0}^t L \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau$$

D'après (ii) :

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| + \int_{t_0}^t L \gamma(\tau) \|x(\tau)\| d\tau$$

L'application de l'inégalité de Gronwall (2.12) donne :

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| \exp \left(L \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \right)$$

D'après (i) $\|x(t)\| < \infty$,

Alors la solution du système (III) est stable

2.3 Stabilité de La solution d'un système différentiel fractionnaire linéaire d'ordre $\alpha \in (1; 2)$

2.3.1 Système différentiel fractionnaire linéaire autonome

Dans cette partie, on étudie la stabilité d'un système différentiel fractionnaire linéaire autonome avec la dérivée de Caputo de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = A x(t) & t > t_0 \\ x^{(k)}(t_0) = x_k & (k = 0, 1) \end{cases}, \quad (IV)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la Matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $1 < \alpha < 2$.

Théorème 2.3.1 *Le système Différentiel fractionnaire linéaire autonome (IV) avec la dérivée de Caputo est asymptotiquement stable si est seulement si $\forall \lambda_i \in \text{spec}(A) \neq 0$,*

$$|\text{Arg}(\lambda_l)| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

Dans ce cas les composantes de la décomposition tend vers 0 comme $t^{-\alpha-1}$

Preuve. ■

En appliquant la transformation de Laplace, on obtient la solution du système (IV)

$$\begin{aligned} x(t) &= E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha)x_0 + (t-t_0) E_{\alpha,2}(A(t-t_0)^\alpha)x_1 \\ &= \sum_{k=0}^1 (t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}(A(t-t_0)^\alpha)x_k \end{aligned} \quad (2.37)$$

On va étudier les propriétés des éléments de les matrices

$$B(k) = (t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}(A(t-t_0)^\alpha) \quad (k = 0, 1) \quad (2.38)$$

D'après (1.10) on a :
$$B(k) = (t-t_0)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+k+1)} \quad (k = 0, 1)$$

* Premièrement supposons que la matrice A est diagonalisable,

i.e : il existe une matrice inversible P telle que :

$$\Lambda = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$$

Donc pour $k = 0, 1$:
$$B(k) = (t-t_0)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(P\Lambda P^{-1})^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+k+1)}$$

On a
$$(P\Lambda P^{-1})^m = P\Lambda^m P^{-1}$$

Donc pour $k = 0, 1$:

$$B(k) = (t-t_0)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P\Lambda^m P^{-1} (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+k+1)}$$

$$= (t - t_0)^k P \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Lambda^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+k+1)} \right) P^{-1}$$

On a : $\Lambda^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_s^m)$

$$\text{Donc: } B(k) = (t - t_0)^k P \text{diag} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+k+1)}; \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda_2^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+k+1)}; \dots; \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda_s^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha+k+1)} \right) P^{-1}$$

pour $k = 0, 1$:

$$B(k) = P \text{diag}((t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(\lambda_1 (t - t_0)^\alpha), \dots, (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(\lambda_s (t - t_0)^\alpha)) P^{-1}$$

D'après (2.4) pour $l = 1, \dots, s$ et $k = 0, 1$

$$\text{On a : } (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(\lambda_l (t - t_0)^\alpha) = - \sum_{m=1}^{\omega} \frac{\lambda_l^{-m} (t-t_0)^{1-\alpha m}}{\Gamma(k+1-m\alpha)} + 0(|\lambda_l^{-\omega} (t - t_0)^{1-\omega\alpha}|) \longrightarrow 0,$$

avec $t \longrightarrow +\infty$

Donc pour $k = 0, 1$: $\|B(k)\| \longrightarrow 0$ ($t \longrightarrow +\infty$)

Alors la solution du système (IV) est asymptotiquement stable.

* ensuite, d'après le lemme (2.1.1) il existe une matrice inversible P telle que

$$A = PJP^{-1} \quad \text{avec } J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$$

où J_l ($l = \overline{1, s}$) sont les blocs de Jordan de la matrice A avec les valeurs propres de A sur la diagonale

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & & & \\ & \lambda_l & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_l & 1 \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix}_{n_l \times n_l}$$

$l = 1, 2, \dots, s$, $\lambda_l \in \mathbb{C}$ est la valeur propre de la matrice A et $\sum_{l=1}^s n_l = n$

Donc d'après (1.10) on a, pour $k = 0, 1$:

$$B(k) = (t - t_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m (t - t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)}$$

On a : $A = PJP^{-1}$

Donc $A^m = PJP^{-1}PJP^{-1} \dots PJP^{-1}$

$$A^m = PJ^m P^{-1}$$

On a $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$ alors $J^m = \text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m)$

Donc :

$$A^m (t - t_0)^{\alpha m} = P \text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m) P^{-1} (t - t_0)^{\alpha m}$$

Donc pour $k = 0, 1$:

$$B(k) = (t - t_0)^k P \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m) (t - t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)} \right] P^{-1}$$

On a :
$$\sum_{m=0}^{\infty} \text{diag}(J_1^m, J_2^m, \dots, J_s^m) = \text{diag}(\sum_{m=0}^{\infty} J_1^m, \sum_{m=0}^{\infty} J_2^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} J_s^m)$$

Alors pour $k = 0, 1$:

$$B(k) = (t-t_0)^k P \text{diag} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)}, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_2^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_s^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)} \right) P^{-1}$$

$$B(k) = (t-t_0)^k P \left(\begin{array}{ccccccc} E_{\alpha, k+1}(J_1(t-t_0)^\alpha) & & & & & & \\ & E_{\alpha, k+1}(J_2(t-t_0)^\alpha) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & E_{\alpha, k+1}(J_s(t-t_0)^\alpha) & \\ & & & & & & \end{array} \right) P^{-1} \quad (2.39)$$

avec $k = 0, 1$

On a pour $m \in \mathbb{N}$:

$$J_l^m = \left(\begin{array}{ccccccc} \lambda_l^m & \left(\frac{d}{d\lambda}\right)\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} & \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^2\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} & \dots & \frac{1}{(n_l-1)!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-1)}\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} \\ & \lambda_l^m & \ddots & \ddots & \frac{1}{(n_l-2)!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-2)}\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \left(\frac{d}{d\lambda}\right)\lambda^m \Big|_{\lambda=\lambda_l} \\ & & & & \lambda_l^m \end{array} \right)_{n_l \times n_l} \quad l = \overline{1, s}$$

et

$$E_{\alpha, k+1}(J_l(t-t_0)^\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_l^m (t-t_0)^{\alpha m}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)} \quad l = \overline{1, s}$$

Donc pour $l = \overline{1, s}$:

$$(t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(J_l(t - t_0)^\alpha) = T_2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m (t - t_0)^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_l},$$

tel que

$$T_2 = (t - t_0)^k \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{d\lambda} & \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^2 & \cdots & \frac{1}{(n_l-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-1)} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \frac{1}{(n_l-2)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(n_l-2)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{d}{d\lambda} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n_l \times n_l} \quad l = \overline{1, s}, \quad (2.40)$$

Alors :

$$(t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(J_l(t - t_0)^\alpha) = T_2 [E_{\alpha, k+1}(\lambda(t - t_0)^\alpha)] \Big|_{\lambda=\lambda_l}; \quad l = \overline{1, s} \quad (2.41)$$

Donc chaque élément non nul de la matrice $(t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(J_l(t - t_0)^\alpha)$ peut être écrit sous la forme

$$(t - t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} E_{\alpha, k+1}(\lambda(t - t_0)^\alpha) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l}; \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (2.42)$$

Si $\exists l \in \{1, \dots, s\} : \lambda_l = 0$; Alors

$$\begin{aligned} (t-t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha, k+1}(\lambda(t-t_0)^\alpha) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l=0} &= \frac{(t-t_0)^k (t-t_0)^{\alpha(j-1)}}{\Gamma(\alpha(j-1)+k+1)} \\ &= \frac{(t-t_0)^{\alpha(j-1)+k}}{\Gamma(\alpha(j-1)+k+1)} \end{aligned}$$

Comme $j \geq 1$, $1 < \alpha < 2$ et $k = 0, 1$ il est claire que

$$\frac{(t-t_0)^{\alpha(j-1)+k}}{\Gamma(\alpha(j-1)+k+1)} \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$$

Ainssi pour $k=0;1$: $\|B(k)\| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

Donc : $\|x(t)\| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

Si $\forall l \in \{1, \dots, s\} : \lambda_l \neq 0$; on a 3 cas

1^{er} Cas : **si** $\forall l \in \{1, \dots, s\} : |\text{Arg}(\lambda_l)| > \frac{\alpha\pi}{2}$

On a :

$$(t-t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha, k+1}(\lambda(t-t_0)^\alpha) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} = (t-t_0)^{\alpha(j-1)+k} \frac{1}{(j-1)!} E_{\alpha, k+1}^{(j-1)}(\lambda(t-t_0)^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_l}$$

D'après (2.8) :

$$(t-t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha, k+1}(\lambda(t-t_0)^\alpha) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} \sim (-1)^j \left[\frac{\lambda_l^{-j}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-t_0)^{k-\alpha} + \frac{j \lambda_l^{-j-1}}{\Gamma(k+1-2\alpha)} (t-t_0)^{k-2\alpha} \right]$$

comme $k = 0, 1$ et $1 < \alpha < 2$, pour $j = 1, 2, \dots, n_l$ ($l = \overline{1; s}; ; k = 0; 1$)

$$(t-t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha, k+1}(\lambda(t-t_0)^\alpha) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

Donc pour $k=0;1$: $\|B(k)\| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$

donc $\|x(t)\| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$

2^{ème} Cas : **si** $\forall l \in \{1, \dots, s\} : |\text{Arg}(\lambda_l)| < \frac{\alpha\pi}{2}$ et $t \longrightarrow \infty$

On a $(t-t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha, k+1}(\lambda(t-t_0)^\alpha) \right\} = (t-t_0)^{\alpha(j-1)+k} \frac{1}{(j-1)!} E_{\alpha, k+1}^{(j-1)}(\lambda(t-t_0)^\alpha)$

D'après (2.7)

$$(t-t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} E_{\alpha, k+1}(\lambda(t-t_0)^\alpha) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} \sim \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{-k}{\alpha}} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l}$$

$$j = 1, 2, \dots, n_l \quad (l = \overline{1; s}).$$

on a :

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{-k}{\alpha}} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l} = \mathbf{P}(t-t_0) \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)), \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (l = \overline{1; s}).$$

où $\mathbf{P}(t-t_0)$ est un polynôme de degré $(j-1)$

Le terme de plus grand degré de $\mathbf{P}(t-t_0)$ est :

$$\frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1}$$

Donc pour $k = 0, 1$ et $j = 1, 2, \dots, n_l \quad (l = \overline{1; s})$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right| \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \left| \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right| \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \exp \left[|\lambda_l| \cos\left(\frac{Arg(\lambda)}{\alpha}\right) (t-t_0) \right] \end{aligned}$$

Comme $|Arg(\lambda_l)| < \frac{\alpha\pi}{2}$, on a $\left| \frac{Arg(\lambda_l)}{\alpha} \right| < \frac{\pi}{2}$ Alors $\cos\left(\frac{Arg(\lambda)}{\alpha}\right) > 0$

Ainsi pour $l = \overline{1; s}$:

$$\left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t-t_0)^{j-1} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t-t_0)) \right| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty; l = \overline{1; s})$$

donc : $\|x(t)\| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

3^{ème} Cas Si $\forall l \in \{1, \dots, s\} : |\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$; on la même multiplicité algébrique et géométrique,

Alors les matrices J_l sont diagonales

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & & & & \\ & \lambda_l & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_l & \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix}_{n_l \times n_l}$$

Alors $J_l^m = \lambda_l^m \text{diag}(1, \dots, 1)$

d'après (2.39) pour $k = 0; 1$

$$B(k) = P \text{diag}((t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(J_1(t - t_0)^\alpha); \dots; (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(J_s(t - t_0)^\alpha)) P^{-1}$$

Donc pour $k = 0; 1$ et $l = \overline{1; s}$:

$$\begin{aligned} (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(J_l(t - t_0)^\alpha) &= (t - t_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_l^m (t - t_0)^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)} \\ &= (t - t_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_l^m \text{diag}(1, \dots, 1) (t - t_0)^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha + k + 1)} \\ &= (t - t_0)^k \text{diag}(E_{\alpha, k+1}(\lambda_l(t - t_0)^\alpha), \dots, E_{\alpha, k+1}(\lambda_l(t - t_0)^\alpha)) \end{aligned}$$

On a $|\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$, l'élément diagonal de la matrice précédente

D'après (2.7) (on prend $j = 0$)

$$|(t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(\lambda_l(t - t_0)^\alpha)| \sim \left| \frac{1}{\alpha} \lambda_l^{-\frac{k}{\alpha}} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} (t - t_0)) \right|$$

On a : $\lambda_l = |\lambda_l| [\cos(\text{Arg}(\lambda_l)) + i \sin(\text{Arg}(\lambda_l))] \quad (i^2 = -1)$

$$\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} = |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= i |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{Donc : } \left| \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right| = \left| \exp(i |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right| = 1$$

Donc pour $k = 0; 1$ et $l = \overline{1; s}$:

$$\left| (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(\lambda_l(t - t_0)^\alpha) \right| \sim |\lambda_l|^{\frac{-k}{\alpha}} \quad (t \longrightarrow \infty)$$

Donc : la solution du système (IV) dans ce cas est stable, sans être asymptotiquement stable.

Remarque 2.3.2

* Supposons $\exists l \in \{1, \dots, s\} : |\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ et que la multiplicité algébrique de la valeur propre critique λ_l n'est pas égale à la multiplicité géométrique

Alors les matrices J_l sont des blocs de Jordan de la matrice A ,

les matrices $(t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(J_l(t - t_0)^\alpha)$ peut être écrite comme (2.41), et chaque élément non nul de la matrice peut être écrit sous la forme comme (2.42)

On a :

$$(t - t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \{E_{\alpha, k+1}(\lambda(t - t_0)^\alpha)\} = (t - t_0)^{\alpha(j-1)+k} \frac{1}{(j-1)!} E_{\alpha, k+1}^{(j-1)}(\lambda(t - t_0)^\alpha)$$

D'après le (2.7)

$$(t - t_0)^k \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \{E_{\alpha, k+1}(\lambda(t - t_0)^\alpha)\} \Big|_{\lambda=\lambda_l} \sim \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{-k}{\alpha}} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l}$$

$$j = 1, 2, \dots, n_l \quad (l = \overline{1, s})$$

$$\text{On a : } \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{(j-1)} \left[\frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{-k}{\alpha}} \exp(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_l} = \mathbf{P}(t - t_0) \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}}(t - t_0)) \quad j = 1, 2, \dots, n_l$$

où $\mathbf{P}(t - t_0)$ est un polynôme de degré $(j - 1)$

Le terme de plus grand degré de $\mathbf{P}(t - t_0)$ est

$$\frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1}$$

On a : $\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} = |\lambda_l|^{\frac{1}{\alpha}} i$

Donc pour $j = 1, 2, \dots, n_l$ ($l = \overline{1, s}$) :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} (t - t_0)) \right| \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \left| \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} (t - t_0)) \right| \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} |\lambda_l|^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \end{aligned}$$

Alors $\left| \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\alpha^j} \lambda_l^{\frac{-k}{\alpha} + (j-1)(\frac{1}{\alpha}-1)} (t - t_0)^{j-1} \exp(\lambda_l^{\frac{1}{\alpha}} (t - t_0)) \right| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

Donc $\|x(t)\| \longrightarrow \infty \quad (t \longrightarrow \infty)$

(1) Si $\exists l \in \{1, \dots, s\} : |Arg(\lambda_l)| < \frac{\alpha\pi}{2}$; alors la solution du système (IV) n'est pas stable.

(2) Si la matrice A a une valeur propre nulle, la solution du système (IV) n'est pas stable.

(3) Si la matrice A a une valeur propre critique λ_c , qui satisfait, $|Arg(spec(\lambda_l))| = \frac{\alpha\pi}{2}$ et que la multiplicité algébrique de la valeur propre critique λ_l n'est pas égale à la multiplicité géométrique alors la solution du système (IV) n'est pas stable.

(4) Si toutes les valeurs propres de A satisfont $|Arg(\lambda_l)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, telles que les valeurs propres critiques qui satisfont $|Arg(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique, alors la solution du système (IV) est stable, sans être asymptotiquement stable.

2.3.2 Système différentiel fractionnaire linéaire non autonome

Dans cette partie, on étudie la stabilité du système différentiel fractionnaire linéaire non autonome avec la dérivée de Caputo de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax(t) + B(t)x(t) & t > t_0 \\ x^{(k)}(t_0) = x_k & (k = 0; 1) \end{cases} \quad (V)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $1 < \alpha < 2$ et $B(t) : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice continument différentiable

Théorème 2.3.3 *Si $\forall \lambda_l \in \text{spec}(A) \neq 0$, $|\text{Arg}(\lambda_l)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, telles que les valeurs propres critiques qui satisfont $|\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique et $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt$ est borné,*

alors la solution du système (V) est stable

On obtient la solution du système (V) en utilisant la transformée de Laplace et son inverse

$$x(t) = \sum_{k=0}^1 (t-t_0)^k E_{\alpha, k+1}(A(t-t_0)^\alpha)x_k + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t-\tau)^\alpha)B(\tau)x(\tau)d\tau \quad (2.43)$$

d'après (2.30) et (2.31) on

$$\|(t-t_0)^k E_{\alpha, k+1}(A(t-t_0)^\alpha)\| \leq M_k \quad (k = 0, 1). \quad (2.44)$$

et pour $\tau \in [t_0; t]$

$$\|(t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha)\| \leq L. \quad (2.45)$$

Maintenant on obtient l'estimation de la solution

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| + M_1 \|x_1\| + \int_{t_0}^t L \|B(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau.$$

D'après (2.12) on a :

$$\|x(t)\| \leq (M_0 \|x_0\| + M_1 \|x_1\|) \exp \left(L \int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau \right). \quad (2.46)$$

Comme $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$

Alors la solution du (V) est stable.

De même on peut déduire le théorème suivant

Théorème 2.3.4 *Si la matrice A satisfait $\forall \lambda_l \in \text{spec}(A) \neq 0, |\text{Arg}(\lambda_l)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ et $\|B(t)\| = O(t - t_0)^\gamma$ ($-1 < \gamma < 1 - \alpha$, $t_0 > 0$) pour $t \geq 0$,*

alors la solution du système (V) est asymptotiquement stable.

Preuve. ■

On a la solution du système (V)

$$x(t) = E_\alpha(A(t - t_0)^\alpha) x_0 + (t - t_0) E_{\alpha,2}(A(t - t_0)^\alpha) x_1 + \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha) B(\tau) x(\tau) d\tau$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq & \|E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha)\| \|x_0\| + (t-t_0) \|E_{\alpha,2}(A(t-t_0)^\alpha)\| \|x_1\| \\ & + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-2} \|(t-\tau)E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha)\| \|B(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

D'après (2.9) il existe C_0 et C_1 telle que

$$\| E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t-t_0)^\alpha} \quad (2.47)$$

$$\| E_{\alpha,2}(A(t-t_0)^\alpha)\| \leq \frac{C_1}{1 + \|A\| (t-t_0)^\alpha} \quad (2.48)$$

Donc :

$$\|x(t)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t-t_0)^\alpha} \|x_0\| + (t-t_0) \frac{C_1}{1 + \|A\| (t-t_0)^\alpha} \|x_1\| + L \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau \quad (2.49)$$

Par ailleurs, comme $1 < \alpha$ il existe une constante $L_2 > 0$ telle que

$$\frac{C_0}{1 + \|A\| (t-t_0)^\alpha} \|x_0\| + \frac{C_1}{1 + \|A\| (t-t_0)^{\alpha-1}} \|x_1\| \leq L_2 \quad t > t_0 \quad (2.50)$$

Donc :

$$\|x(t)\| \leq L_2 + L \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau$$

D'après (2.12)

$$x(t) \leq L_2 \exp \left[L_1 \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| d\tau \right] \quad (2.51)$$

Substituer (2.51) dans (2.49)

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq & \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_0\| + (t - t_0) \frac{C_1}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_1\| \\ & + LL_2 \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} \|\beta(\tau)\| \exp \left(L \int_{t_0}^t (t - \eta)^{\alpha-2} \|\beta(\eta)\| d\eta \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.52)$$

Il résulte de la condition $\|B(t)\| = O(t - t_0)^\gamma$ ($-1 < \gamma < 1 - \alpha$, $t_0 > 0$) pour $t \geq 0$;

qu'il existe un nombre constant $M > 0$ telle que

$$\int_{t_0}^t (t - \eta)^{\alpha-2} \|\beta(\eta)\| d\eta \leq M \quad (2.53)$$

Alors :

$$\|x(t)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_0\| + (t - t_0) \frac{C_1}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_1\| + L_2 L e^{ML} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} O(\tau - t_0)^\gamma d\tau \quad (2.54)$$

On utilisant la Fonction Bêta,

$$\int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} O(\tau - t_0)^\gamma d\tau = \int_{t_0}^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} O(\tau - t_0)^{(\gamma+1)-1} d\tau = \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} O(t - t_0)^{\gamma+\alpha-1}$$

Alors

$$\|x(t)\| \leq \frac{C_0}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_0\| + (t - t_0) \frac{C_1}{1 + \|A\| (t - t_0)^\alpha} \|x_1\| + L_2 L e^{M L} \frac{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(1 + \gamma)}{\Gamma(\alpha + \gamma)} O(t - t_0)^{\gamma + \alpha - 1} \quad (2.55)$$

Comme $\gamma < 1 - \alpha$ alors, $\gamma + \alpha - 1 < 0$

$$1 < \alpha < 2 \text{ alors ; } 1 - \alpha < 0$$

Donc $\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$

La solution du (V) est asymptotiquement stable.

2.3.3 Système différentiel fractionnaire linéaire perturbé

Dans cette partie, on étudie la stabilité du système différentiel fractionnaire linéaire perturbé avec la Dérivée de Caputo, de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax(t) + f(t, x(t)) & t > t_0 \\ x^{(k)}(t_0) = x_k & (k = 0; 1) \end{cases}, \quad (VI)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la Matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $1 < \alpha < 2$ et $f(t, x(t)) : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue avec $f(t, 0) = 0$, $f(t, x)$ satisfait la condition de Lipschitz pour x , la solution unique du Système (VI) est

$$x(t) = \sum_{k=0}^1 (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(A(t - t_0)^\alpha) x_k + \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t - \tau)^\alpha) f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (2.56)$$

Théorème 2.3.5 Si la matrice A satisfait $\forall \lambda_l \in \text{spec}(A) \neq 0, |\text{Arg}(\lambda_l)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, telles que

les valeurs propres critiques qui satisfont $|\text{Arg}(\lambda_l)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique, de plus il existe une fonction $\gamma(t)$ qui satisfait les conditions suivantes

$$(i) \int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt \text{ est borné}$$

$$(ii) \|f(t, x)\| \leq \gamma(t) \|x(t)\|$$

Alors : la solution du système (VI) est stable.

Preuve. ■

D'après (2.56); (2.30) et (2.31) on obtient l'estimation de la solution

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| + M_1 \|x_1\| + \int_{t_0}^t L \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \quad (2.57)$$

D'après (ii) :

$$\|x(t)\| \leq M_0 \|x_0\| + M_1 \|x_1\| + \int_{t_0}^t L \gamma(t) \|x(t)\| d\tau$$

L'application de l'intégrale de Gronwall (2.12) on a :

$$\|x(t)\| \leq (M_0 \|x_0\| + M_1 \|x_1\|) \exp \left(L \int_{t_0}^t \gamma(t) d\tau \right)$$

D'après (i), Alors la solution du (VI) est stable.

2.4 Conclusion

1- Considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0, 1)$ suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax(t) & t > t_0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la Matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 < \alpha < 1$.

Le théorème(2.2.1) sur la stabilité, il détermine les différentes régions stables et instables, voir figures -1-

2- Considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre $\alpha \in (1, 2)$ suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax(t) & t > t_0 \\ x^{(k)}(t_0) = x_k & (k = 0; 1) \end{cases}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, la Matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $1 < \alpha < 2$

Le théorème(2.3.1) sur la stabilité, il détermine les différentes régions stables et instables, voir figures -2-

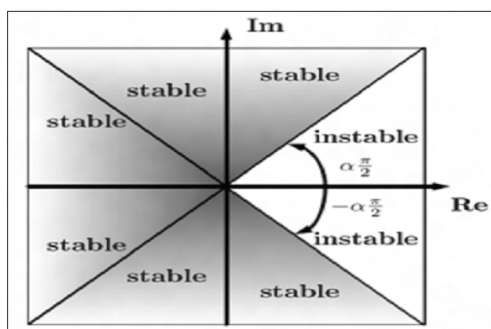


Figure-1 – Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre $\alpha \in (0,1)$

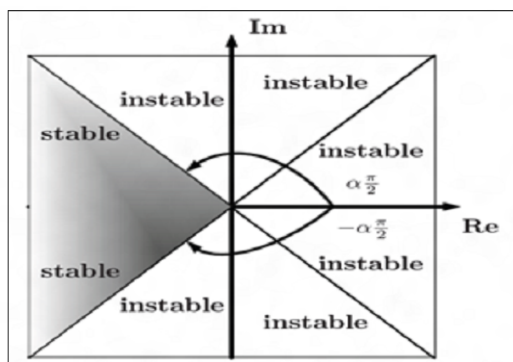


Figure-2 – Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre $\alpha \in (1,2)$

CHAPITRE 3

Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire d'ordre $\alpha \in (0;2)$

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Si il existe un constant e telque $f(e) = 0$, alors "e" est dit :un point d'équilibre pour $\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x)$*

Définition 3.1.2 *Le point d'équilibre "e" est dit :*

⊖ localement stable si est seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$.tel que $|x(t) - e| < \varepsilon$ pour $\forall x_0 \in \{z : |z - e| < \delta\}$ et $\forall t \geq 0$

⊖ localement asymptotiquement stable si est seulement si le point d'équilibre est localement stable et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = e$

Définition 3.1.3 *Soit $x(t), \tilde{x}(t)$ solutions du système (*) avec données initiales x_0, \tilde{x}_0 respectivement, la solution $x(t)$ est dite :*

⊖ localement stable si est seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: tel que $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$ pour $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$ et $\forall t \geq 0$

⊖ localement asymptotiquement stable si est seulement si le point d'équilibre est localement stable et $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) - \tilde{x}(t)] = 0$

Définition 3.1.4 Une fonction étant continue par rapport au temps t ,

(1) $x(t)$ est dite strictement croissante au temps t^* s'il existe une constante assez petite $\varepsilon_0 > 0$ telle que $x(t^* + \varepsilon) > x(t^*), \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$

(2) $x(t)$ est dite croissante au temps t^* s'il existe une constante assez petite $\varepsilon_0 > 0$ telle que $x(t^* + \varepsilon) \geq x(t^*)$ pour $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$

(3) $x(t)$ est dite strictement décroissante au temps t^* s'il existe une constante assez petite $\varepsilon_0 > 0$ telle que $x(t^* + \varepsilon) < x(t^*), \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$

(4) $x(t)$ est dite décroissante au temps t^* s'il existe une constante assez petite $\varepsilon_0 > 0$ telle que $x(t^* + \varepsilon) \leq x(t^*), \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$

Théorème 3.1.5 (voir [14]) Soit le système suivant avec la dérivée de Caputo (1)

$$\begin{cases} {}^c D_a^\alpha x(t) = f(t; x(t)) & m - 1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+ \\ D^k x(a) = x_k & k = 0, 1, 2, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Si la fonction $f(t; x(t))$ est continue, alors le système (1) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de volterra (2)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_k}{k!} (t - a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(x(\tau)) d\tau \quad (2)$$

Inversement toute solution de l'équation intégrale non linéaire de volterra (2) est solution du système (1) et en plus elle est continue.

3.2 Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire d'ordre $\alpha \in (0; 1)$

Dans cette partie, on étudie la stabilité asymptotique locale du point d'équilibre de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x) & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

où f est continue , $0 < \alpha < 1$ et la dérivée est au sens de Caputo.

Remarque 3.2.1 *En suppose $x_0 < 0$, le cas ou $x_0 > 0$ peut être étudiier suivant une démarche analogue.*

Lemme 3.2.2 *Si le système $\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x)$ a une solution zéro, $f(x)$ est continue et $\frac{\partial f(0)}{\partial x} < 0$,*

Alors la solution $x(t)$ de () est strictement croissante au temps $t = 0$.*

Preuve. ■

soit $f(x) = x \frac{\partial f(0)}{\partial x} + o(x)$

D'ou $o(x) = s(x)x$, $f(0) = 0$

Posons $\frac{\partial f(0)}{\partial x} = \lambda$ alors

$$f(x) = (\lambda + s(x)) x \tag{3.1}$$

Comme $\lambda < 0$, alors il existe une constante positive δ assez petite
telle que :

$$\forall x_0 \in \{z : |z| < \delta\} \quad , \quad \lambda + s(x_0) < 0 \quad (3.2)$$

d'après le théorème (3.1.5)

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\lambda + s(x(\tau))) x(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Comme $x(t)$ est continue il existe $\varepsilon_0 > 0$ (assez petit) tel que

$$\lambda + s(x(t)) < 0 \quad \forall t \in [0; \varepsilon_0] \quad (3.4)$$

On prend $0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_0$ tel que $|x(t) - x_0| < -\frac{x_0}{2} \quad \forall t \in [0; \varepsilon'_0]$

i .e $\frac{3x_0}{2} < x(t) < \frac{x_0}{2} < 0$ et $\lambda + s(x(t)) < 0 \quad \forall t \in [0; \varepsilon'_0]$

Donc

$$\forall t \in [0; \varepsilon'_0] \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\lambda + s(x(\tau))) x(\tau) d\tau > 0 \quad (3.5)$$

$$\text{Car } \forall \tau \in [0; t] \quad : \left\{ \begin{array}{l} (t - \tau)^{\alpha-1} > 0 \\ \lambda + s(x(\tau)) < 0 \\ x(\tau) < 0 \end{array} \right.$$

Alors : $\forall t \in [0; \varepsilon'_0] \quad x(t) > x_0$

Donc $x(t)$ est strictement croissante au temps $t = 0$.

Lemme 3.2.3 *Si le système $\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x)$ a une solution zéro, $f(x)$ est continue et $\frac{\partial f(0)}{\partial x} < 0$,*

alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la solution $x(t)$ du système (*) soit toujours supérieure à x_0 avant qu'elle traverse l'axe du temps $\forall t \in (0; \varepsilon_0)$

Preuve. ■

Supposons $\exists T_0 \in (0; \varepsilon_0)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(T_0) = x_0 \\ \text{et} \\ x(t) < 0 \quad \forall t \in [0; T_0] \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Donc
$$x_0 = x(T_0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

Alors :
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau = 0$$

Mais d'après (3.4) et (3.6) on a :
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} (\lambda + s(x(\tau))) x(\tau) d\tau > 0$$

Il y a une contradiction. Ce qui abouti à la conclusion suivante :

Il existe ε'_0 constant assez petit ; $0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_0$ tel que la solution $x(t)$ du système (*) satisfait.

$$0 > \frac{x_0}{2} > x(t) > x_0 \quad \forall t \in (0; \varepsilon'_0)$$

et
$$x(t) > x_0 \quad \forall t \in (0; \varepsilon_0)$$

Lemme 3.2.4 *Si le système (*) a une solution zéro, $f(x)$ continue et $\frac{\partial f(0)}{\partial x} < 0$,*

alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la solution $x(t)$ de (*) ne traversé jamais l'axe du temps sur $[0; \varepsilon_0]$

Preuve. ■

Supposons que $x(t)$ traverse l'axe du temps dans le premier temps T_0 ,

i.e. $\exists T_0 \in (\varepsilon'_0; \varepsilon_0)$ tel que $x(T_0) = 0$

On a 3 cas :

1^{ier} cas : soit ε_1 assez petit tel que $\varepsilon_1 \in (0; \varepsilon_0 - T_0)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 < x(t) < 0 \quad \text{pour } t \in]0 ; T_0] \\ \\ \text{et} \\ \\ x(T_0) = 0 \\ \\ \text{et} \\ \\ 0 < x(t) < -x_0 \quad \text{pour } t \in]T_0 ; T_0 + \varepsilon_1] \end{array} \right.$$

2^{ieme} cas : soit ε_2 assez petit tel que $\varepsilon_2 \in (0; \varepsilon_0 - T_0)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) < 0 \quad : \forall t \in [0; T_0[\\ \\ \text{et} \\ \\ x(t) = 0 \quad : \forall t \in [T_0; T_0 + \varepsilon_2] \end{array} \right.$$

3^{ieme} cas : soit ε_3 assez petit tel que $\varepsilon_3 \in (0; \varepsilon_0 - T_0)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) < 0 \quad : \forall t \in [0; T_0[\cup]T_0; T_0 + \varepsilon_3] \\ \\ \text{et} \\ \\ x(T_0) = 0 \end{array} \right.$$

Pour le 1^{ier} cas Soit ε_1 assez petit tel que $\varepsilon_1 \in (0; \varepsilon_0 - T_0)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 < x(t) < 0 \quad \text{pour } t \in]0 ; T_0] \\ \\ \text{et} \\ \\ x(T_0) = 0 \\ \\ \text{et} \\ \\ 0 < x(t) < -x_0 \quad \text{pour } t \in]T_0 ; T_0 + \varepsilon_1] \end{array} \right.$$

D'après (3.3) on obtient : $x(T_0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$

$\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$

$$\begin{aligned} x(T_0 + \varepsilon) - x(T_0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} [(T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^{T_0 + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\forall \tau \in [0, T_0[: \left\{ \begin{array}{l} (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 - \tau)^{\alpha-1} < 0 \\ \lambda + s(x(\tau)) < 0 \\ x(\tau) < 0 \end{array} \right.$$

Donc

$$\forall \tau \in [0, T_0[: \int_0^{T_0} [(T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau < 0$$

Et :

$$\forall \tau \in]T_0, T_0 + \varepsilon] : \left\{ \begin{array}{l} (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} > 0 \\ \lambda + s(x(\tau)) < 0 \\ x(\tau) > 0 \end{array} \right.$$

Donc

$$\int_{T_0}^{T_0 + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon_1 - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau < 0$$

Alors : $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_1) : x(T_0 + \varepsilon) = x(T_0 + \varepsilon) - x(T_0) < 0$

Mais d'après l'hypothèse $x(T_0 + \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$

(il y a une contradiction)

Donc $x(t)$ est toujours négative

Pour le 2^{ieme} cas soit ε_2 assez petit tel que $\varepsilon_2 \in (0; \varepsilon_0 - T_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) < 0 \quad : \forall t \in [0; T_0[\\ \text{et} \\ x(t) = 0 \quad : \forall t \in [T_0; T_0 + \varepsilon_2] \end{array} \right.$$

$\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2)$

$$\begin{aligned} x(T_0) - x(T_0 + \varepsilon) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} [(T_0 - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^{T_0 + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

On a $\forall \tau \in [T_0; T_0 + \varepsilon] : x(\tau) = 0$

et

$$\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2) \quad : \quad x(T_0) - x(T_0 + \varepsilon) = 0$$

Donc $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2)$

$$\int_0^{T_0} [(T_0 - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau = 0$$

Mais on a $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2)$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} [(T_0 - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau > 0$$

$$\text{Car :} \quad \forall \tau \in [0, T_0[: \left\{ \begin{array}{l} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} > 0 \\ \lambda + s(x(\tau)) < 0 \\ x(\tau) < 0 \end{array} \right.$$

Donc le 2^{ieme} cas n'est pas vrais

Pour le 3^{ieme} cas Soit ε_3 assez petit tel que $\varepsilon_3 \in (0; \varepsilon_0 - T_0)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) < 0 \quad : \forall t \in [0; T_0[\cup]T_0; T_0 + \varepsilon_3] \\ \text{et} \\ x(T_0) = 0 \end{array} \right.$$

soit $\varepsilon^* \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $0 < \varepsilon^* + \varepsilon < \varepsilon_3$

d'après (3.3)

$$x(T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$x(T_0 + \varepsilon^*) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0 + \varepsilon^*} (T_0 + \varepsilon^* - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} x(T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon) - x(T_0 + \varepsilon^*) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0 + \varepsilon^*} [(T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 + \varepsilon^* - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0 + \varepsilon^*}^{T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\text{Soit } I_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0 + \varepsilon^*} [(T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} - (T_0 + \varepsilon^* - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0 + \varepsilon^*}^{T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

D'après le théorème de la valeur moyenne :

$\exists \tau^* \in (0, T_0 + \varepsilon^*)$ tel que :

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau^*)^{\alpha-1} - (T_0 + \varepsilon^* - \tau^*)^{\alpha-1}] \int_0^{T_0 + \varepsilon^*} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha - 1) \int_{T_0 + \varepsilon^* - \tau^*}^{T_0 + \varepsilon^* - \tau^* + \varepsilon} t^{\alpha-2} dt \int_0^{T_0 + \varepsilon^*} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

D'après le théorème de la valeur moyenne :

$\exists t^* \in (T_0 + \varepsilon^* - \tau^*, T_0 + \varepsilon^* - \tau^* + \varepsilon)$ telle que

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\alpha - 1) (t^*)^{\alpha-2} \varepsilon \int_0^{T_0 + \varepsilon^*} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau < 0$$

$$I_1 > \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\alpha - 1) (\tau^{**})^{\alpha-2} \varepsilon \int_0^{T_0 + \varepsilon^*} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$= -c_1 \varepsilon$$

avec c_1 est un nombre constant positif tel que : $\tau^{**} = \inf_{0 < \varepsilon < \varepsilon_3 - \varepsilon^*} t^*(\varepsilon)$

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0 + \varepsilon^*}^{T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

D'après le théorème de la valeur moyenne : $\exists \tau' \in [T_0 + \varepsilon^*; T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon]$ tel que :

$$\begin{aligned} I_2 &= [\lambda + s(x(\tau'))] x(\tau') \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0 + \varepsilon^*}^{T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon} (T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= [\lambda + s(x(\tau'))] x(\tau') \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{1}{\alpha} (T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon - \tau)^\alpha \Big|_{T_0 + \varepsilon^*}^{T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon} \right] \\ &= [\lambda + s(x(\tau'))] x(\tau') \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \varepsilon^\alpha > 0 \end{aligned}$$

Soit $c_2 = \inf_{\tau \in (T_0 + \varepsilon^*; T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon)} \frac{(\lambda + s(x(\tau)))x(\tau)}{\Gamma(\alpha+1)} > 0$

Donc : $[\lambda + s(x(\tau'))] x(\tau') \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \varepsilon^\alpha > c_2 \varepsilon^\alpha$

Alors : $x(T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon) - x(T_0 + \varepsilon^*) > -c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^\alpha$

Comme $0 < \alpha < 1$, alors il existe ε^{**} qui satisfait

$$\varepsilon^{**} > 0 \text{ et } 0 < \varepsilon^* + \varepsilon^{**} < \varepsilon_3$$

Tel que

$$-c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^\alpha > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon^{**})$$

Donc $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon^{**})$: $x(T_0 + \varepsilon^* + \varepsilon) - x(T_0 + \varepsilon^*) > 0$.

Alors $x(T_0 + \varepsilon^*)$ est strictement croissante.

Comme ε^* est un nombre fixe de $[0; \varepsilon_3]$.

Alors $x(t)$ n'est pas décroissante au temps T_0 .

donc on a une contradiction

Alors le 3^{eme} cas n'est pas vrai.

Conclusion :

$$\forall t \in (0; \varepsilon_0) \quad 0 > x(t) > x_0 \tag{3.7}$$

Lemme 3.2.5 *Si le système (*) a une solution zéro, $f(x)$ est continue et $\frac{\partial f(0)}{\partial x} < 0$,*

alors la solution $x(t)$ du () satisfait $\forall t \in (0; +\infty) \quad 0 > x(t) > x_0$*

Preuve. ■

On a d'après (3.7) $\forall t \in (0; \varepsilon_0) \quad 0 > x(t) > x_0$

1- Supposons qu'il existe $T_0 > \varepsilon_0$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(T_0) = x_0 \\ \text{et} \\ x(t) < 0 \quad \forall t \in [\varepsilon_0; T_0] \end{array} \right. \tag{3.8}$$

Donc : $\forall t \in (0; T_0) \quad x_0 < x(t) < 0.$

Alors :

$$\forall \tau \in (0; T_0) \quad \lambda + s(x(\tau)) < 0 \quad (3.9)$$

On a d'après (3.3) $x_0 = x(T_0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$

Alors :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau = 0$$

mais d'après (3.8) et (3.9) :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_0} (T_0 - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau > 0$$

Donc contradiction

Alors

$$\forall t \in (0; +\infty) \quad x(t) < 0 \quad (3.10)$$

2- On montre que $x(t)$ ne transverse jamais l'axe du temps

Supposons $x(t)$ traverse l'axe du temps dans le premier temps T_0 ,

i.e. $\exists T_0 \in]\varepsilon_0; +\infty[$ tel que $x(T_0) = 0$

On a 3 cas en suivant les mêmes étapes de la preuve du lemme (3.2.4),

on conclut que :

$$\forall t \in (0; +\infty) \quad x_0 < x(t) < 0 \quad (3.11)$$

Lemme 3.2.6 Si le système (*) a une solution zéro, $f(x)$ continue et $\frac{\partial f(0)}{\partial x} < 0$,

alors la solution $x(t)$ du (*) est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Preuve. ■

D'après (3.11) on a :

$$\forall t \in (0; +\infty) \quad x_0 < x(t) < 0.$$

Donc

$$\forall t \in (0; +\infty) \quad \lambda + s(x(t)) < 0 \tag{3.12}$$

Soit $\varepsilon > 0$ une constante arbitraire assez petite

supposons que $\varepsilon < \varepsilon_3$ où ε_3 une constante fixe positive.

D'après (3.3)

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$x(t + \varepsilon) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} x(t + \varepsilon) - x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [(t + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} - (t - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\text{Soit } I_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [(t + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} - (t - \tau)^{\alpha-1}] [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$I_4 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] d\tau$$

Selon le théorème de la valeur moyenne :

$\exists \tau^* \in (0, t)$ tel que

$$I_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(t + \varepsilon - \tau^*)^{\alpha-1} - (t - \tau^*)^{\alpha-1}] \int_0^t [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha - 1) \int_{t-\tau^*}^{t+\varepsilon-\tau^*} z^{\alpha-2} dz \int_0^{T_0+\varepsilon^*} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

D'après le théorème de la valeur moyenne :

$\exists z^* \in (t - \tau^*, t - \tau^* + \varepsilon)$ tel que

$$I_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\alpha - 1)(z^*)^{\alpha-2} \varepsilon \int_0^t [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau < 0$$

Donc : $I_3 > -c_3\varepsilon$,

$$\text{Avec } c_3 = \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_3} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\alpha - 1)(t - \tau^*(\varepsilon))^{\alpha-2} \int_0^t [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \right| > 0$$

$$I_4 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau$$

Selon le théorème de la valeur moyenne : $\exists \tau^{**} \in [t ; t + \varepsilon]$ tel que :

$$\begin{aligned} I_4 &= [\lambda + s(x(\tau^{**}))] x(\tau^{**}) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= [\lambda + s(x(\tau^{**}))] x(\tau^{**}) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{1}{\alpha} (t + \varepsilon - \tau)^\alpha \Big|_t^{t+\varepsilon} \right] \\ &= [\lambda + s(x(\tau^{**}))] x(\tau^{**}) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \varepsilon^\alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } c_4 = \inf_{\tau \in (t; t+\varepsilon)} \frac{(\lambda + s(x(\tau)))x(\tau)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Donc $I_4 > c_4\varepsilon^\alpha$

Alors $x(t + \varepsilon) - x(t) > c_4\varepsilon^\alpha - c_3\varepsilon$

Comme $0 < \alpha < 1$, alors il existe $\varepsilon_5 > 0$

Tel que $c_4\varepsilon^\alpha - c_3\varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_5)$

Donc $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_5) \quad x(t + \varepsilon) - x(t) > 0$

Alors $x(t)$ est strictement croissante en toute $t \in (0; +\infty)$.

Théorème 3.2.7 *Si le système (*) a une solution zéro, $f(x)$ continue et $\frac{\partial f(0)}{\partial x} < 0$, alors cette solution nulle (zéro) est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. ■

D'après le lemme (3.2.6) on conclut que $x(t)$ est monotone

On va démontrer que $x(t)$ s'approche asymptotiquement de 0

i.e $\forall \varepsilon > 0$ (arbitraire assez petit), il existe $T > 0$ tel que: $\forall t > T ; |x(t)| < \varepsilon$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall T > 0 : |x(t)| > \varepsilon, t > T$

Comme $x_0 \in \{z : |z| < \delta\}$, donc $\lambda + s(x(t)) < 0 \quad \forall t \geq 0$,

Alors il existe deux constantes $M(> 0)$ et $m(> 0)$,

Telles que $-M < \lambda + s(x(t)) < -m \quad \forall t \geq 0$.

D'après (3.3) on a

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\lambda + s(x(\tau))] x(\tau) d\tau \\ &> x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (m)\varepsilon d\tau = x_0 + \frac{m\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \end{aligned}$$

Comme elle est vraie quelque soit $t \geq 0$

On choisit $t > \left(-\frac{x_0 \Gamma(\alpha+1)}{m\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, alors $x(t) > 0$

Donc on a une contradiction ($x(t) < 0 \quad \forall t \geq 0$).

Alors $x(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$,

la solution est localement asymptotiquement stable.

3.3 Stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire d'ordre $\alpha \in (1;2)$

Dans cette section on étudie la stabilité asymptotique locale de la solution du système différentiel fractionnaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x) & t > 0 \\ x(0) = a & x'(0) = b \end{cases}, \quad (**)$$

où $1 < \alpha < 2$, avec la dérivée de Caputo.

Définition 3.3.1 Soit $\alpha \geq 0$, l'opérateur I_a^α définis sur $L_1[a; b]$ par

$$I_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (3.13)$$

pour $a \leq x \leq b$, est appelé l'opérateur intégral de Riemann-Liouville d'ordre α

Remarque

$$D^1 I_a^1 f(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f(t) dt \right] = f(x) \quad (3.14)$$

Définition 3.3.2 Soit $\alpha \geq 0$, et $n = [\alpha]$ alors on définit la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α par

$${}^c D_a^\alpha f = I_a^{n-\alpha} D^n f \quad (3.15)$$

avec $D^n f \in L_1[a; b]$ (la dérivée usuel d'ordre n)

Remarques

- Si $\alpha \in \mathbb{N}_0$, alors $n = \alpha$: ${}^c D_a^\alpha f = I_a^0 D^n f = D^n f$

- On s'intéresse pour le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$, soit le simple exemple

Exemple 3.3.3 soit $f(x) = (x - a)^\beta$ pour $\beta \geq 0$ alors

$${}^c D_a^\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } \beta \in \{0; 1; \dots; n - 1\} \quad (3.16)$$

$${}^c D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha} \quad \text{si } (\beta \in \mathbb{N}, \beta \geq n) \text{ ou } (\beta \notin \mathbb{N}, \beta > n - 1). \quad (3.17)$$

Définition 3.3.4 soit $\alpha \geq 0$, et $n = \lceil \alpha \rceil$, alors on définit la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α

$$D_a^\alpha f := D^n I_a^{n - \alpha} f \quad (3.18)$$

Théorème 3.3.5 soit $\alpha \geq 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ et $f \in A^n [a; b]$, alors

$${}^c D_a^\alpha f = D_a^\alpha (f - T_{n-1}[f; a]), \quad (3.19)$$

tel que

$$T_{n-1}[f; a] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Remarques

- ${}^c D_a^\alpha f$ existe si $D_a^\alpha f$ existe et f possède $(n - 1)$ dérivées en a .

- Si $n = 0$ alors $T_{n-1}[f; a] = 0$

- Si $\alpha \in \mathbb{N}_0$, alors ${}^c D_a^\alpha f = D_a^n (f - T_{n-1}[f; a])$

$$\begin{aligned}
 &= D^n (f - T_{n-1} [f; a]) \\
 &= D^n f - D^n (T_{n-1} [f; a]) \\
 &= D^n f
 \end{aligned}$$

donc

$${}^c D_a^\alpha f = D^\alpha f \tag{3.20}$$

Car $T_{n-1} [f; a]$ est un polynôme de degré $(n - 1)$.

Lemme 3.3.6 Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha]$, si ${}^c D_a^\alpha f$ et ${}^c D_a^\alpha f$ existe alors,

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k - n + 1)} (x - a)^{k-n}. \tag{3.21}$$

Preuve. ■

On a d'après (3.19) :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha f(x) - D_a^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x - a)^k \right) \\
 &= D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!} D_a^\alpha [(x - a)^k] \\
 &= D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k - n + 1)} (x - a)^{k-n}
 \end{aligned}$$

Remarque

Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha]$, si ${}^c D_a^\alpha f$ et ${}^c D_a^\alpha f$ existe alors,

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x), \tag{3.22}$$

vrais si est seulement si $D^k f(a) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$)

Lemme 3.3.7 Soit $m, n \geq 0$ (tels que $m + n \geq 1$) et $f \in L_1[a; b]$, alors

$$I_a^m I_a^n f = I_a^{m+n} f = I_a^{m+n-1} I_a^1 f \quad (3.23)$$

Lemme 3.3.8 soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \lceil \alpha \rceil$, en plus $f \in C^n[a; b]$, alors

$${}^c D_a^\alpha f \in C[a; b] \quad \text{et} \quad {}^c D_a^\alpha f(a) = 0 \quad (3.26)$$

Lemme 3.3.9 soit $n; \varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in C^k[a; b]$

Alors il existe $L \in \mathbb{N}$ avec $L \leq k$ et $n; n + \varepsilon \in [L - 1; L]$ tels que :

$${}^c D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f = {}^c D_a^{\varepsilon+n} f \quad (3.24)$$

Preuve. ■

* Si $n = L - 1$ et $n + \varepsilon = L$ alors ce cas est trivial

* On s'intéresse pour le cas $0 < \varepsilon < 1$

d'après (3.22) on a

$${}^c D_a^\varepsilon f = D_a^\varepsilon f \quad (3.25)$$

tel que $f(a) = 0$,

On a 3 cas

1* Si $n \notin \mathbb{N}$ et $n + \varepsilon \in \mathbb{N}$, dans ce cas $\lceil n \rceil = n + \varepsilon$ alors $\lceil n \rceil - n = \varepsilon$

On a $f \in C^k[a; b]$, alors d'après le lemme (3.3.8) : ${}^c D_a^n f(a) = 0$

Alors ${}^c D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f = D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f$ (d'après (3.25))

$$\begin{aligned}
 &= D_a^\varepsilon I_a^{[n]-n} D^{[n]} f && \text{(d'après(3.15))} \\
 &= D^1 I_a^{1-\varepsilon} I_a^\varepsilon D^{[n]} f && \text{(d'après(3.18))} \\
 &= D^1 I_a^1 D^{[n]} f && \text{(d'après(3.23))} \\
 &= D^{[n]} f && \text{(d'après(3.14))} \\
 &= {}^c D_a^{[n]} f && \text{(d'après(3.20))} \\
 &= {}^c D_a^{n+\varepsilon} f && \text{(car } [n] = n + \varepsilon \text{)}
 \end{aligned}$$

2* Si $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f &= {}^c D_a^\varepsilon D^n f && \text{(d'après(3.20))} \\
 &= I_a^{1-\varepsilon} D^1 D^n f && \text{(d'après(3.15))} \\
 &= I_a^{1-\varepsilon} D^{n+1} f
 \end{aligned}$$

comme $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$[n + \varepsilon] = n + 1, [n + \varepsilon] - (n + \varepsilon) = 1 - \varepsilon$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f &= I_a^{[n+\varepsilon]-(n+\varepsilon)} D^{[n+\varepsilon]} f \\
 &= {}^c D_a^{\varepsilon+n} f && \text{(d'après(3.15))}
 \end{aligned}$$

3* Si $n \notin \mathbb{N}$ et $n + \varepsilon \notin \mathbb{N}$, tels que $[n] = [n + \varepsilon]$

Comme ${}^c D_a^n f(a) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f &= D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f && \text{(d'après(3.25))} \\
 &= D_a^\varepsilon I_a^{[n]-n} D^{[n]} f && \text{(d'après(3.15))} \\
 {}^c D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f &= D^1 I_a^{1-\varepsilon} I_a^{[n]-n} D^{[n]} f && \text{(d'après (3.18))} \\
 &= D^1 I_a^1 I_a^{[n]-(n+\varepsilon)} D^{[n]} f && \text{(d'après (3.23))}
 \end{aligned}$$

Comme $[n] = [n + \varepsilon]$

$${}^c D_a^\varepsilon {}^c D_a^n f = I_a^{[n+\varepsilon]-(n+\varepsilon)} D^{[n+\varepsilon]} f \quad (\text{d'après (3.14)})$$

$$= {}^c D_a^{n+\varepsilon} f \quad (\text{d'après (3.15)})$$

Remarque 3.3.10

a) Ce résultat ne peut pas être vrai en généralité si la dérivée est de Riemann-Liouville, comme exemple

considérons la fonction f avec $f(x) = 1$; et soit $a = 0$; $n = 1$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$(D_0^{\frac{1}{2}} f')(x) = D_0^{\frac{1}{2}} (0) = 0$$

$$(D_0^{\frac{3}{2}} f)(x) = (D^2 I_0^{\frac{1}{2}} f)(x) \quad (\text{d'après (3.18)})$$

D'après (3.13) on a :

$$\begin{aligned} I_a^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} (-2(x-t)^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^x \\ &= \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } D^2 I_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} x^{-\frac{3}{2}}$$

b) La condition d'existence pour le nombre L dans le lemme est essentiel, voir l'exemple

Soit $n = \varepsilon = \frac{7}{10}$ alors $n < 1 < n + \varepsilon$, et soit $a = 0$, $f(x) = x$

D'après (3.15)

$$\begin{aligned} {}^c D_0^{\frac{7}{5}} f(x) &= I_0^{[\frac{7}{5}]-\frac{7}{5}} D^{[\frac{7}{5}]} f(x) \\ &= I_0^{2-\frac{7}{5}} D^2 f(x) \\ &= I_0^{\frac{3}{5}} (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^c D_0^{\frac{7}{10}} f(x) &= I_0^{\lceil \frac{7}{10} \rceil - \frac{7}{10}} D^{\lceil \frac{7}{10} \rceil} f(x) \\
 &= I_0^{\frac{3}{10}} D^1 f(x) \\
 &= I_0^{\frac{3}{10}} (1) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{10})} \int_0^x (x-t)^{\frac{3}{10}-1} dt && \text{(d'après (3.13))} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{10})} \left(-\frac{10}{3} (x-t)^{\frac{3}{10}} \Big|_0^x \right) \\
 &= \frac{1}{\frac{3}{10} \Gamma(\frac{3}{10})} x^{\frac{3}{10}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{13}{10})} x^{\frac{3}{10}}
 \end{aligned}$$

Donc : ${}^c D_0^{\frac{7}{10}} {}^c D_0^{\frac{7}{10}} f(x) = I_0^{\frac{3}{10}} D^1 {}^c D_0^{\frac{7}{10}} f(x)$ (d'après (3.15))

$$\begin{aligned}
 &= I_0^{\frac{3}{10}} D^1 \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{13}{10})} x^{\frac{3}{10}} \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{10})} I_0^{\frac{3}{10}} (x^{-\frac{7}{10}}) \\
 &= \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{10}))^2} \int_0^x (x-t)^{\frac{3}{10}-1} t^{\frac{3}{10}-1} dt && \text{(d'après (3.13))}
 \end{aligned}$$

Soit changemmet $t = x\tau$

$${}^c D_0^{\frac{7}{10}} {}^c D_0^{\frac{7}{10}} f(x) = \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{10}))^2} x^{-\frac{2}{5}} \int_0^1 (1-\tau)^{\frac{3}{10}-1} \tau^{\frac{3}{10}-1} dt$$

d'après (1.7)

$$\begin{aligned}
 {}^c D_0^{\frac{7}{10}} {}^c D_0^{\frac{7}{10}} f(x) &= \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{10}))^2} \frac{\Gamma(\frac{3}{10})\Gamma(\frac{3}{10})}{\Gamma(\frac{3}{10}+\frac{3}{10})} x^{-\frac{2}{5}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5})} x^{-\frac{2}{5}}
 \end{aligned}$$

c) Soit $\varepsilon \in]0;1[$ tel que $\alpha = 1 + \varepsilon$

D'après le théorème (3.3.9) on a :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \frac{d^{1+\varepsilon} x(t)}{dt^{1+\varepsilon}} = \frac{d^\varepsilon}{dt^\varepsilon} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)$$

posons $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$ et $x'(0) = y(0) = b$

donc $x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau) d\tau$

$$= a + \int_0^t y(\tau) d\tau$$

Le système(**) devient :

$$\begin{cases} \frac{d^\varepsilon}{dt^\varepsilon}(y(t)) = f(x) & t > 0 \\ y(0) = b \end{cases},$$

alors

$$\begin{cases} \frac{d^\varepsilon}{dt^\varepsilon}(y(t)) = f \left[a + \int_0^t y(\tau) d\tau \right] & t > 0 \\ y(0) = b \end{cases},$$

Posons $F(y) = f \left[a + \int_0^t y(\tau) d\tau \right]$

Le système (**) devient :

$$\begin{cases} \frac{d^\varepsilon}{dt^\varepsilon}(y(t)) = F(y) & t > 0 \\ y(0) = b \end{cases},$$

avec $\varepsilon \in]0; 1[$

on a F continue

$$F(0) = f(a) = 0$$

La question qui reste est : déterminé des conditions sur la partie non linéaire, qui permettent l'étude de la stabilité suivant l'approche du cas précédent.

Conclusion

-La solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaires d'ordre $0 < \alpha < 2$ est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A satisfont $|\text{Arg}(\lambda_i)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, telles que les valeurs propres critiques qui satisfont $|\text{Arg}(\lambda_i)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique, sans être asymptotiquement stable.

- Dans le cas d'équation scalaire, après avoir linéarisé l'équation différentielle fractionnaire non linéaire d'ordre $0 < \alpha < 1$, on montre que si $f(x)$ est continue et $\frac{\partial f(0)}{\partial x} < 0$, alors la solution est localement asymptotiquement stable.

- Pour étudier la stabilité d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire d'ordre $1 < \alpha < 2$, on la transforme en un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires d'ordre $0 < \alpha < 1$. Ainsi, la question qui reste est : déterminé des conditions sur la partie non linéaire, qui permettent l'étude de la stabilité suivant l'approche du cas précédent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, San Diego, Calif, USA, 2006.
- [2] C. P. Li and F. R. Zhang, “A survey on the stability of fractional differential equations,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 193, pp. 27–47, 2011.
- [3] D. Matignon, *Représentations en variables d’état de modes de guides d’ondes avec dérivation fractionnaire*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, 1994.
- [4] D. Matignon, “Stability results for fractional differential equations with applications to control processing,” in *Proceedings of the IMACS-SMC*, vol. 2, pp. 963–968, 1996.
- [5] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup, “LMI characterization of fractional systems stability,” in *Advances in Fractional Calculus*, J. Sabatier, O. P. Agrawal, and J. A. Tenreiro Machado, Eds., pp. 419–434, Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007.
- [6] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges, “LMI stability conditions for fractional order systems,” *Computer & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 5, pp. 1594–1609, 2010.
- [7] C. P. Li and Z. G. Zhao, “Numerical approximation of nonlinear fractional differential equations with subdiffusion and superdiffusion,” *Computers and Mathematics with*

- Applications. In press.
- [8] R. Malti, O. Cois, M. Aoun, F. Levron, and A. Oustaloup, “Computing impulse response energy of fractional transfer function,” in Proceedings of the 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain, 2002.
- [9] M. S. Tavazoei and M. Haeri, “A note on the stability of fractional order systems,” *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, no. 5, pp. 1566–1576, 2009.
- [10] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.
- [11] X.-J. Wen, Z.-M. Wu, and J.-G. Lu, “Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 55, no. 11, pp. 1178–1182, 2008.
- [12] F. Z. Zhang, *Matrix Theory*, Universitext, Springer, New York, NY, USA, 1999.
- [13] C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations*, Allyn and Bacon, Boston, Mass, USA, 1971.
- [14] K. Diethelm, N. J. Ford, *Analysis of fractional differential equations*, *J. Math. Anal. Appl.* 265(2002)229-248.