وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Année : 2010

Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option
Fonctions spéciales et optimisation
Titre

Etude de quelques problèmes aux limites avec conditions non locales

Par
Chaoui Abderrezak

DIRECTEUR DE THESE : Pr. A. Guezane-Lakoud Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT:	Dr. I. Kelaiaia	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEURS:	Dr. S. Mesloub	Prof.	U. R.S. RIYADH K.S.A
	Dr. S. Badraoui	M.C.	Univ. GUELMA
	Dr. L. Alem	M.C.	U.B.M. ANNABA

إهداء

ايه يا أمي ويا أبي, ما عساني أقول, والكلمات عني في ذهول,فلساني قاصر عن شكركما ولست ادري ما أنا لولاكما.

ديون الورى تقضى وان عظمت   ولا أرى قط لدينكما انقضاء

رب ارحمهما كما ربياني صغيرا.

إلى زوجتي حبيبتي الحصان الرزان والحرم المصون, إليك يا همس نفسي, يا نجوى فؤادي, يا نشوة روحي, يا بهجة حياتي, يا حركتي, يا سكوني, يا عقل عقلي وعنفوان جنوني,

الى قرة عيني, بني عبد الملك,

اهدي هذه الرسالة المتواضعة

ملخص

تقدم هذه الرسالة في شطرها الأول تحديثا مهما لطريقة المتراجحات الطاقوية لمعالجة سلسلة من المسائل الحدية المولدة بمعادلات تفاضلية ذوات معاملات مؤثرية لها مجالات تعريف متعلقة بالزمن و شروط حدية من نمط كوشي و قورسا.

في شطرها الثاني قمنا بتحديث طريقة روث لتشمل دراسة المسائل غير المحلية نصف الخطية الخاصة بالمعادلات التكاملية التفاضلية مرفقة بشروط ابتدائية, شرط نيومان وشروط تكاملية .

Table des matières

Résumé

L'objectif de cette thèse est de donner, dans **un premier temps**, un développement important de la méthode des inégalités énergétiques dans l'étude d'une série de problèmes aux limites, engendrés par des équations fonctionnelles possédant des coefficients opérationnels à domaines dépendant du temps et des conditions aux limites de Cauchy et de Goursat . Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique, en thermo élasticité et en physique des plasmas peuvent être ramenés à des problèmes aux limites avec différents types de conditions (intégrales, locales, non locales, ...).

Dans un second temps, nous développons la méthode de Rothe à l'étude des problèmes non locaux semi linéaires pour les équations intégro-différentielles de type parabolique et hyperbolique avec des conditions initiales de Neumann et intégrales. La présence des conditions intégrales est la source de grande complication rendant inopérante la méthode de Rothe standard de sorte qu'une adaptation adéquate de cette dernière s'impose. L'idée clef que nous proposons est de mener les calculs dans un espace fonctionnel non classique et d'introduire une généralisation naturelle de la notion de solution faible pour le problème étudié. Appliquant cette idée nous établissons les estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence d'un schéma d'approximation semi discrétisé correspondant est démontré.

La thèse se compose d'une introduction et de Cinque chapitres essentiels, dans les deuxième, troisième et quatrième chapitres, on étudie des problèmes aux limites avec des conditions de Cauchy ou de Goursat. On établit l'existence et l'unicité de la solution forte généralisée par la méthode ds inégalités énergétiques. Dans les cinquième et sixième chapitres, en appliquant la méthode de Rothe, on étudie l'existence et l'unicité de la solution faible des équations intégro-différentielles de type parabolique et hyperbolique à lesquelles sont jointent les conditions initiales, de Neumann et intégrales. Enfin, l'annexe de ce document se compose notamment de rappels de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées par la suite. On termine cette thèse par la bibliographie.

Abstract

The objective of this thesis is to give, in a first step, a development of energy inequality method in the study of a series of boundary value problems, generated by functional equations such that the domains of the operator coefficients depend on time and the boundary conditions are Cauchy and Goursat conditions. Various problems in the theory of heat conduction, thermo elasticity and plasma physics can be reduced to boundary value problems with different types of conditions (integral conditions, local conditions, non local conditions, ...).

In a second step, we develop the method of Rothe to the study of non-local problems for semi-linear integro-differential equations of parabolic and hyperbolic type with initial, Neumann and integral conditions. The presence of the integral conditions is of great complication rendering ineffective the classical method of Rothe, so that adequate adaptation of the latter is required. The idea we propose is to conduct calculations in a non classical functional space and introduce a natural generalization of the notion of weak solution to the studied problem . Applying this idea we establish a priori estimates necessary, that the convergence of a corresponding semi-discretized approximation scheme is proved.

The thesis consists of an introduction and five essential chapters. In the first three chapters, we study boundary value problems with conditions of Cauchy or Goursat type. We establish the existence and uniqueness of strong generalized solution by the energy inequalities method. In the fifth and sixth chapters, by applying the method of Rothe, we study the existence and uniqueness of weak solution of integro-differential equations of parabolic and hyperbolic type with initial, Neumann and integral conditions. Finally, we recall some basic notions of functional analysis to be used thereafter in the annex. We end this thesis by the bibliography.

Chapitre 1

Introduction

De nombreux phénomènes physiques peuvent être modélisés par des problèmes aux limites non classiques avec des conditions non locales. Quand des intégrales apparaissent dans les conditions aux limites, on parle alors de conditions non locales intégrales. Si les intégrales apparaissent dans l'équation elle-même on aboutit à des équations intégro-différentielles. L'étude des ces problèmes est d'actualité ceci est dû à l'importance des conditions non locales qui apparaissent lors de la modélisation mathématique de divers phénomènes de la physique, l'écologie, la biologie... etc. C'est le cas où les valeurs de la fonction sur la frontière sont liées à ses valeurs à l'intérieur du domaine ou lorsque les mesures directes sur la frontière ne sont pas possibles.

On constate que les problèmes liés aux conditions non locales ont beaucoup d'applications dans de nombreux problèmes tels que la dynamique des populations, le processus de conduction de la chaleur, la théorie du contrôle, etc. En particulier, l'introduction de conditions non locales peuvent améliorer les caractéristiques qualitatives et quantitatives du problème ce qui conduire à de bons résultats concernant d'existence, l'unicité et la régularité de la solution.

Au cours de ces dernières années, il y a eu un grand développement dans l'étude des équations d'évolution linéaires et non linéaires. Les applications les plus importantes de cette théorie concernent les problèmes aux limites pour les équations différentielles fonctionnelles. Actuellement, les méthodes fonctionnelles sont devenues essentielles dans l'étude des problèmes mathématiques théoriques et appliqués. Le rôle principal des méthodes fonctionnelles, est de donner de meilleurs résultats par rapport à ceux obtenus par les techniques classiques, en conséquence, il y a eu des progrès considérables dans l'étude des équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Banach ou de Hilbert, mais on remarque que la majorité des résultats obtenus concerne les équations à coefficients constants ou à coefficients opérationnels possédant des domaines de définition constants.

L'une des méthodes fonctionnelles est la méthode des inégalités énergétiques qu'on a développé et appliqué dans cette thèse à l'étude de nouveaux type de problèmes aux limites. Cette méthode est basée sur les idées de Dezin [18] et développée par Ladyzenskaya [44-45], où elle a été utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite les développements importants de la méthode sont dus à J. Leray [48] et L. Garding [19]. Cette méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de Bouziani [], Guezane-Lakoud [], Mesloub [2, 77],Yurchuk [2, 77] et d'autres voir []..

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A. A. Dezin et qui peut être résumé comme suit :

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, on démontre l'inégalité énergétique du type

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F , \forall u \in D(L) \tag{1}$$

La démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine fonction poids. Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite dans les topologies fortes des espaces E et F, on construit la fermeture $\overline{L}$ de l'opérateur L et la solution de l'équation $\overline{L}u = \mathcal{F}, \mathcal{F} \in F$ est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1) à $u \in D\left(\overline{L}\right)$.

Comme l'opérateur L^{-1} est continu on conclut pour l'image de l'opérateur $\overline{L}$ l'égalité $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}$. Pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$, il suffit d'établir la densité de $R\left(L\right)$ dans F qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. Le choix des opérateurs de régularisation est lié au caractère du problème étudié.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

. Le choix des espaces fonctionnels.

. Le choix du multiplicateur Mu

. Le choix de l'opérateur de régularisation.

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée. Chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

L'objectif de cette thèse est de donner, dans **un premier temps**, un développement important de la méthode des inégalités énergétiques dans l'étude d'une série de problèmes aux limites, engendrés par des équations fonctionnelles possédant des coefficients opérationnels à domaines dépendant du temps et des conditions aux limites de Cauchy et de Goursat . Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique, en thermo élasticité et en physique des plasmas peuvent être ramenés à des problèmes aux limites avec différents types de conditions (intégrales, locales, non locales, ...).

L'actualité de l'analyse de ces problèmes (avec des domaines variables) est d'un intérêt important. Cet intérêt est dicté non seulement par le développement de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais aussi par l'étude des problèmes apparaissant au moment de la modélisation de problèmes concrets en physique changeant avec le temps.

Dans un second temps, nous appliquons les méthodes d'approximation à l'étude des équations intégrodifférentielles avec des conditions non locales de type intégrales.

L'importance des méthodes d'approximation est qu'elles ne permettent pas seulement de démontrer l'existence et l'unicité de la solution mais elles permettent aussi la construction des algorithmes pour les solutions numériques. Parmi ces méthodes on peut citer la méthode de Galerkin et la méthode de discrétisation en temps appelée aussi la méthode de Rothe qui est un outil très efficace dans l'étude de la solution approchée et de sa convergence vers la solution des problèmes d'évolution non-linéaire. En général il est difficile de trouver la solution exacte, dans de tels cas, le rapprochement des méthodes d'analyse donnent d'autres moyens afin de trouver les approximatives des solutions.

La méthode de Rothe trouve son origine dans les travaux du mathématicien Allemand E. Rothe en 1930 [71] pour résoudre des équations linéaires paraboliques et unidimensionnelles, elle a été également utilisée et développée dans la résolution des équations paraboliques d'ordre supérieur par O.L. Ladyzenskaja voir $[44-45]$ aussi bien que dans les travaux de K. Rektorys $[67-70]$, J. Necas [65] et J. Kacur $[30-34]$ qui a étudié des équations d'évolution non linéaire de type parabolique. Plusieurs autres résultats ont été réalisés en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant l'équation et les conditions par exemple l'équation de Schrödinger [3], l'équation Navier Stokes [39], l'équation de télégraphe [17], les équations différentielles avec conditions intégrales dans les travaux de Bouziani [] ainsi que les problèmes intégrodifferentiels de Bahuguna $[3-8]$.

Notre objectif est d'étendre cette technique aux équations intégro-différentielles avec conditions aux limites non classiques. Plus précisément nous développons la méthode de Rothe à l'étude des problèmes non locaux semi linéaires dont les conditions aux limites est la source de grande complication rendant inopérante la méthode de Rothe standard de sorte qu'une adaptation adéquate de cette dernière s'impose. L'idée clef que nous proposons est de mener les calculs dans un espace fonctionnel non classique et d'introduire une généralisation naturelle de la notion de solution faible pour le problème étudié. Appliquant cette idée nous établissons les estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence d'un schéma d'approximation semi discrétisé correspondant est démontré.

Le schéma de la méthode de Rothe est comme suite :

On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles (t_{j-1}, t_j), $j = 1, ..., n$. où $t_j = jh$ et $h = T/n$. on note par $u_j = u_j(x) = u_j(x, jh)$ les approximants de u.

-On remplace les dérivées de la fonction u, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta^2 u_j = \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h}$ et $\delta u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}$ pour tout $t = t_j$.

-On obtient un système formé de n équations en x où l'inconnu est $u_j(x)$ donc on approxime le problème posé à tout point $t = t_j$, $j = 1, n$. par un nouveau problème discret.

-On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenu.

-On construit les fonctions de Rothe définies par

$$u^{(n)}(t) = u_{j-1} + \delta u_j (t - t_j), \qquad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n$$

et les fonctions test correspondantes

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j & t \in (t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n \\ U_0 & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

-Après avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^{(n)}(t)$ vers la solution du problème posé.

Nous passons maintenant à la description précise du plan de la thèse.

La première partie est dédiée à l'étude de quelques problèmes aux limites par la méthode des inégalités énergétiques, elle se compose de trois chapitres.

Dans le deuxième chapitre, on étudie un problème de Cauchy pour une équation hyperbolique de type Euleur-Poisson-Darboux dont les coefficients opérationnels sont à domaines variables et avec singularité. Ce travail qui est une généralisation de [17] où l'auteur a étudié le cas des coefficients à domaines constants, est motivé par une séries de résultats récents concernant des problèmes aux limites similaires $[21-22, 50, 52, 54, 56]$.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{S\,(t)}{t}\dfrac{du}{dt} + T(t)u = f(t), t \in I =]0, R[\\ u\,(0) = \dfrac{du}{dt}\,(0) = 0 \end{cases}$$

Où u et f sont des fonctions de I à valeurs dans un espace de Hilbert H . On suppose que les opérateurs $T\,(t)$ et $S(t)$ sont linéaires, non bornés, à domaines $D_t\,(T)$, $D_t\,(S)$ respectivement dépendant de la variable $t \in I$ et denses dans H. Sous certaines conditions sur les coefficients opérationnels, on démontre que ce problème est bien posé au sens de Hadamard . Contrairement au cas constant, on est amené à imposée des conditions supplémentaires et à choisir d'autres espaces fonctionnels. L'existence et l'unicité de la solution forte généralisée sont établies grâce aux estimations a priori. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale :

A. Chaoui and A. Guezane-Lakoud, On an abstract Euler-Poisson-Darboux type equations. Int. J. Appl. Math. Stat : Vol. 13 ;No. M08 ; March 2008 ;12-21.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une classe d'équations hyperboliques bidimensionnelles avec les conditions dites de Goursat. On suppose que le coefficient opérationnel est non borné et à domaine variable. Plus précisément, on considère dans $\Omega =]0, T_1[\times]0, T_2[$ le problème de Goursat suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + T(t)u = f(t) \\ u(t_1, 0) = u(0, t_2) = 0 \end{cases}$$

Les opérateurs $\{T(t), t \in \Omega\}$ sont linéaires, non bornés, auto-adjoints dans H et à domaines $D_t(T)$ dépendants de la variable t et denses dans un espace de Hilbert H, Une série de problèmes similaires a été étudiée dans les travaux [51-56] où les auteurs ont supposé que les coefficients sont à domaines de définition constants, ou à domaines variables dans le cas unidimensionnel. Dans ces travaux, l'existence et l'unicité de la solution forte généralisée sont démontrées.

Nos résultats s'étendent à ceux obtenus dans [2,17], des techniques similaires sont appliquées dans cette étude au même type d'équations sous différentes hypothèses. D'un autre côté, la majorité des résultats existants sont obtenus dans le cas unidimensionnel alors que notre étude traite un problème bidimensionnel ce qui cause des difficultés supplémentaires. Lors du passage à la dimension supérieure, le problème change complètement, car pour les équations hyperboliques du second ordre, les caractéristiques sont présentées par deux ensembles différents.

Existence et l'unicité de la solution forte généralisée sont étudiés Les preuves se basent sur une généralisation de la méthode bien connue des inégalités énergétiques. Premièrement, nous dérivons des estimations a priori pour les solutions fortes généralisées en utilisant les opérateurs d'approximation de Yosida. Puis, en utilisant les résultats précédents, nous montrons que l'image de l'opérateur engendré par le problème posé est dense. Les résultats de ce chapitre sont publiés dans le journal international

- A. Guezane-Lakoud and A. Chaoui, A functional method applied to operator equations, Banach J. Math. Ana. 3. (2009). no 1. 52-60.

Au quatrième chapitre on étend la méthode développée au chapitre précédent à l'étude d'un problème de Goursat engendré par une classe d'équations bidimensionnelles opérationnelles paraboliques où les coefficients opérationnels sont à domaine variable.

On considère le problème bidimensionnel suivant :

$$lu = \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + A(t)u = f(t) \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} l_1u(t_1,t_2) = u(t_1,0) = \varphi(t_1), \\ l_2u(t_1,t_2) = u(0,t_2) = \psi(t_2) \end{cases} \tag{4.2}$$

Nous écrivons le problème sous forme opérationnelle, et nous décrivons le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. Nous établissons un théorème d'homéomorphisme. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et la densité de l'ensemble des valeurs de cet operateur dans l'espace d'arrivé. Les résultats de ce chapitre ont été soumis et acceptés dans un journal international

A. Guezane-Lakoud and A. Chaoui, On functional parabolic equations. To appear.

La deuxième partie concerne l'étude des équations intégro-differentielles par la méthode de Rothe elle se compose de deux chapitres.

Inspirer des travaux de Bahuguna [1-6], on étudie **dans le cinquième chapitre** une équation intégro-différentielles parabolique suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)+\int_0^t a(t-s)\,k(s,u(x,s))\,ds \tag{(pb)}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0)=U_0(x) \qquad x\in(0,1) \tag{(*)}$$

la condition de Newman

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\alpha(t) \qquad t\in\,]0,T[\tag{(**)}$$

et la condition non locales intégrale du premier type

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx=E(t) \qquad t\in\,]0,T[\tag{(***)}$$

Récemment on trouve une série de travaux concernant les problèmes aux limites avec des conditions non locales de types intégrales tels que les travaux de Bouziani[9-10], Mesloub [59-60], Pulkina[66] et Beilin[].

On établit l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication

A. Guezane-Lakoud, M. S. Jasmati, **A. Chaoui,** Rothe's method for an integro-differential equation with integral conditions, Nonlinear Analysis. 72 (2010) 1522-1530. (2010) .

Dans le sixième chapitre on s'intéresse à l'étude d'une équation intégro-differentielle hyperbolique avec des conditions initiales et intégrales par la méthode de Rothe. On ramène les conditions intégrales non homogène à des conditions homogènes en introduisant une nouvelle fonction puis on démontre que sous certaines condition sur les fonction apparaissant dans l'équation, l'existence et l'unicité de la solution faible.

Enfin, **l'annexe** de ce document se compose notamment de rappels de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées par la suite. On termine cette thèse par **la bibliographie**.

Chapitre 2

Etude d'un problème de Cauchy pour une équation abstraite de type Euler-Poisson- Darboux

Résumé

Nous étudions dans ce chapitre un problème de Cauchy pour une équation hyperbolique dont les coefficients opérationnels sont à domaines variables et avec singularité. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale :

A. Chaoui and A. Guezane-Lakoud, On an abstract Euler-Poisson-Darboux type equations. Int. J. Appl. Math. Stat : Vol. 13 ;No. M08 ; March 2008 ;12-21

2.1 Introdction

Nous étudions dans ce chapitre un problème de Cauchy pour une équation hyperbolique dont les coefficients opérationnels sont à domaines variables et avec singularité. Ce travail qui est une généralisation de [21] où l'auteur a étudié le cas des coefficients à domaine constant, est motivé par une séries de résultats récents concernant des problèmes aux limites similaires sans singularité $[25, 26, 54, 56]$. Sous certaines conditions sur les coefficients opérationnels, on démontre que ce problème est bien posé au sens de Hadamard . Contrairement au cas constant, on est amené à imposer des conditions supplémentaires et à choisir d'autres espaces fonctionnels. L'existence et l'unicité de la solution forte généralisée sont établies grâce aux estimations a priori. Dans le cas des coefficients à domaine de définition constant, on trouve plusieurs travaux importants on peut citer [21, 40, 42, 46, 54] où les démonstrations sont basées sur des estimations à priori obtenues grâce aux inégalités énergétiques. Le présent travail généralise [21] des techniques similaires sont appliquées sous différentes hypothèses. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale :

A. Chaoui and A. Guezane-Lakoud, On an abstract Euler-Poisson-Darboux type equations. Int. J. Appl. Math. Stat : Vol. 13 ;No. M08 ; March 2008 ;12-21

2.2 Description du problème

Soit H un espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|$, $(,)$.

On définit sur D_t (le domaine de l'opérateur $T(t)$) le produit scalaire énergétique noté $(,)_t$ par

$$(u, v)_t = (T(t)u, v), \forall u, v \in D_t(T)$$

On note H_T l'espace de Hilbert énergétique qui est le complété de $D_t(T)$ par rapport à la norme :

$$|u|_t = \left| T^{\frac{1}{2}}(t) u(t) \right|$$

On considère dans $I =]0, R[$, $R < \infty$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{S\,(t)}{t}\dfrac{du}{dt} + T(t)u = f(t) \\ u\,(0) = \dfrac{du}{dt}\,(0) = 0 \end{cases} \tag{Pb1}$$

Où u et f sont des fonctions de I à valeurs dans H .

On suppose que les opérateurs $T\,(t)$, $S(t)$ sont linéaires, non bornés, à domaines $D_t\,(T)$, $D_t\,(S)$ respectivement dépendant de la variable $t \in I$ et denses dans H.

On suppose que les opérateur $T\,(t)$, $S(t)$ sont soumises aux hypothèses suivantes:

H1) L'opérateur $T\,(t)$ est auto-adjoint et fortement monotone, i.e., Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$(T(t)v(t), v(t)) \geq c_1 \left| v(t) \right|^2, \forall v(t) \in D_t\,(T) \;\; p.p.t \in I$$

H2) L'opérateur inverse de $T(t)$ existe et est fortement différentiable par rapport à t dans H, de plus

$$\frac{dT^{-1}(t)}{dt}, \frac{d^2T^{-1}(t)}{dt^2} \in B(I, \mathcal{L}(H))$$

où $\mathcal{L}(H)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H à valeurs dans H, muni de la norme $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|Tu|}{|u|}$et $B(I, \mathcal{L}(H))$ l'espace de Banach des opérateurs bornés.

H3) Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$-\operatorname{Re}(\frac{dT^{-1}(t)}{dt} u, u) \leq c_2(T^{-1}(t)u, u), \forall u \in H, \;\; p.p.t \in I$$

H4) Les opérateurs $S\,(t)$ sont fermés dans H, et $ST^{\frac{-1}{2}} \in B(I, \mathcal{L}(H))$, $D_t\left(T^{\frac{1}{2}}\right) \subset D_t\,(S)$ $p.p.$ $t \in I$ et

$$\operatorname{Re}(S\,(t)\,u, u) \geq 0, \forall u \in D_t\,(T)\,, \;\; p.p.t \in I$$

2.3 Espaces fonctionnels

Soit L l'opérateur non borné engendré par le problème (Pb1) de domaine de définition

$$D(L) = \left\{ u \in L_2(I,H), \frac{1}{t}\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, T(t)u \in L_2(I,H), u \in D_t(T), \frac{du}{dt} \in D_t(S) \text{ avec } u(0) = \frac{du}{dt}(0) \right.$$

L'opérateur L agit de l'espace E_1 à valeurs dans l'espace E_2, où

E_1 : est le complété de $D(L)$ par rapport à la norme Hermitienne :

$$\|u\|_1^2 = \int_0^R \left(\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + |u|_t^2 \right) dt$$

On munit l'espace $L_2(I,H)$ de la norme

$$\|f\|_2 = \sup_{v \in E_1} \left(\frac{\left| \int_0^R \left(Lu, (R-t)\frac{dv}{dt}\right) dt \right|}{\|v\|_1} \right)$$

on obtient un espace de Banach noté E_2.

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), $D(L)$ est dense dans $L_2(I,H)$.*

Preuve. voir la preuve du lemme (4.1) . ■

2.4 Estimations à priori

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses (H1) et (H4), l'opérateur L est fermable et sa fermeture $\overline{L}$ a un domaine de définition $D(\overline{L})$ vérifiant $D(\overline{L}) = \overline{D(L)}$.*

Définition 2.1 *La solution de l'équation*

$$\overline{L}u = f$$

est appelée solution forte généralisée.

Théorème 2.1 *Sous les conditions du lemme 2.2, on a*

$$\|u\|_1 \leq K \left\|\overline{L}u\right\|_2 \qquad \forall u \in D(\overline{L}) \tag{2.1}$$

où K est une constante positive indépendante de u et de t.

Preuve. Comme signalé précédemment on va démontrer l'estimation (2.1) pour cela on choisit comme opérateur multiplicateur $Mu = e^{c(R-t)}\,(R-t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{du}{dt}$ puis on intègre par parties

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}\,(R-t)\,(Lu, T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{du}{dt})dt$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\int_0^R e^{c(R-t)}\left|T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)\frac{du}{dt}\right|^2 dt \\
&+\int_0^R e^{c(R-t)}\left|T^{\frac{1}{2}}(t)T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)u\right|^2 dt \\
= \;& 2\,\mathrm{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}\,(R-t)\,(Lu, T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{du}{dt})dt \\
&-c\int_0^R e^{c(R-t)}\,(R-t)\left|T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)\frac{du}{dt}\right|^2 dt \\
&-c\int_0^R e^{c(R-t)}\,(R-t)\left|T^{\frac{1}{2}}(t)T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)u\right|^2 dt \\
&+\mathrm{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}\,(R-t)\,(\frac{du}{dt}, \frac{dT_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}\frac{du}{dt})dt \\
&-2\,\mathrm{Re}\int_0^R \frac{e^{c(R-t)}\,(R-t)}{t}(S(t)\frac{du}{dt}, T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{du}{dt})dt \\
&+\mathrm{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}\,(R-t)\,(\frac{d}{dt}(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t))u, u)dt
\end{aligned} \tag{2.2}$$

En tenant compte des propriétés des opérateurs de régularisation lorsque ε tend vers 0, des hypothèses (H3) et (H4), l'expression (2.2) s'écrit

$$\begin{aligned}
\|u\|_1^2 &= \int_0^R \left(\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + |u|_t^2 \right) dt \leq \\
& 2\operatorname{Re} \int_0^R e^{c(R-t)} (R-t) (Lu, \frac{du}{dt}) dt \\
& -c \int_0^R e^{c(R-t)} (R-t) \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt \\
& + (c_2 - c) \int_0^R e^{c(R-t)} (R-t) \left| T^{\frac{1}{2}}(t) u(t) \right|^2 dt. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Si on choisit c telle que $c \geq c_2 \geq 0$, les deux derniers termes dans le membre droit de (2.3) sont négatifs et par suite

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &\leq 2e^{c_2 R} \sup_{v \in E_1} \frac{\left| \int_0^R \left(Lu, (R-t) \frac{dv}{dt} \right) dt \right|}{\|v\|_1} \\
&= 2e^{c_2 R} \left\| \overline{L} u \right\|_2 .
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1 *De l'estimation (2.1), on déduit l'unicité de la solution forte généralisée du problème (Pb1) si elle existe, sa dépendance continue par rapport à la donnée f, et que l'image $R\left(\overline{L}\right)$ de $\overline{L}$ est fermée dans E_2 et*

$$R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)}; \left(\overline{L}\right)^{-1} = \overline{L^{-1}}.$$

Par conséquence, pour prouver l'existence de la solution forte généralisée, il suffit de démontrer que $R(L)$ est dense dans l'espace réflexive E_2, i.e $R(L)^{\perp} = \{0\}$.

2.5 Existence de la solution forte généralisée

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.1, le problème* (Pb_1) *possède une unique solution forte généralisée* $u \in D(\overline{L})$, $u = \left(\overline{L}\right)^{-1} f$ *vérifiant*

$$\|u\|_1 \leq K \left\|\overline{L}u\right\|_2$$

Preuve. Soient $v \in E_1$ et $u \in D(L)$ vérifiant

$$\int_0^R (Lu, (R-t)\frac{dv}{dt})dt = 0 \tag{2.4}$$

et prouvons que $v = 0$. Soit $u = T_\varepsilon^{-1}(t)h$, où $h \in L_2(I, H)$ telles que les fonctions $\frac{1}{t}\frac{dh}{dt}, \frac{d^2h}{dt^2} \in L_2(I, H)$, $h(0) = \frac{dh}{dt}(0) = 0$ et soit $w \in E_1$, une solution dans H du problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dw}{dt} = e^{-c(R-t)}\frac{dv}{dt}; w(0) = 0.$$

Intégrant (2.4) par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^R \left(\frac{d^2h}{dt^2}, e^{c(R-t)}T_\varepsilon^{-1}(t)(R-t)\frac{dw}{dt}\right) dt \\
= & -2\int_0^R \left(\frac{dT_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}\frac{dh}{dt}, e^{c(R-t)}(R-t)\frac{dw}{dt}\right) dt \\
& -\int_0^R \left(\frac{d^2T_\varepsilon^{-1}(t)}{dt^2}h, e^{c(R-t)}(R-t)\frac{dw}{dt}\right) dt \\
& -\int_0^R \left(\frac{S(t)}{t}T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dh}{dt}, e^{c(R-t)}(R-t)\frac{dw}{dt}\right) dt \\
& -\int_0^R \left(\frac{S(t)}{t}\frac{dT_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}h, e^{c(R-t)}(R-t)\frac{dw}{dt}\right) dt \\
& -\int_0^R \left(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)h, e^{c(R-t)}(R-t)\frac{dw}{dt}\right) dt.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

D'après les propriétés des opérateurs de régularisation et l'hypothèse (H4), on voit que $\frac{dT_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}$, $\frac{d^2T_\varepsilon^{-1}(t)}{dt^2}$, $S(t)T_\varepsilon^{-1}(t)$, $S(t)\frac{dT_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}$, $T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)$ sont bornés dans H. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Poincaré-Friedrichs et l'estimation $\displaystyle\int_0^R \frac{1}{t^2}\left|f\right|^2 dt \leq 4\int_0^R \left|\frac{df}{dt}\right|^2 dt$, on trouve que le membre gauche de (2.5) est majoré par

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^R \left(\frac{d^2h}{dt^2}, e^{c(R-t)}T_\varepsilon^{-1}(t)\,(R-t)\,\frac{dw}{dt}\right)dt\right| \\
\leq\ & \mu\left\|\frac{1}{t}\frac{dh}{dt}\right\|_{L_2(I,H)}\left\|e^{c(R-t)}T_\varepsilon^{-1}(t)\,(R-t)\,\frac{dw}{dt}\right\|_{L_2(I,H)}
\end{aligned}$$

où μ est une constante positive. En intégrant (2.5) par parties et par passage à la limite sur toutes les fonctions $h \in L_2\left(I,H\right)$ telle que

$$\frac{1}{t}\frac{dh}{dt} \in L_2\left(I,H\right), h\left(0\right)=0,$$

puis posant $h=w$, et prenant deux fois la partie réelle, il résulte

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_0^R e^{c(R-t)}\left|T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)\frac{dw}{dt}\right|^2 dt + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_0^R e^{c(R-t)}\left|T^{\frac{1}{2}}(t)T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)w\right|^2 dt \\
=\ & -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} c\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left|T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)\frac{dw}{dt}\right|^2 dt - \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} c\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left|T^{\frac{1}{2}}(t)T_\varepsilon^{\frac{-1}{2}}(t)w\right|^2 dt \\
& -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\operatorname{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left(\frac{dw}{dt},\frac{dT_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}\frac{dw}{dt}\right)dt \\
& --2\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\operatorname{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left(\frac{d^2T_\varepsilon^{-1}(t)}{dt^2}w,\frac{dw}{dt}\right)dt \\
& -2\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\operatorname{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left(S\left(t\right)\frac{dT_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}\frac{w}{t},\frac{dw}{dt}\right)dt \\
& -2\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\operatorname{Re}\int_0^R \frac{e^{c(R-t)}(R-t)}{t}\left(S\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}\frac{dw}{dt},\frac{dw}{dt}\right)dt \\
& +\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\operatorname{Re}\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left(\frac{d\left(TT_\varepsilon^{-1}\right)}{dt}w,w\right)dt
\end{aligned}\tag{2.6}$$

En vertu du $\delta-$inégalité et le faite que $\left\|\frac{d^k}{dt^k}T_\varepsilon^{-1}\right\| \longrightarrow 0, k=1,2;$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, le troisième et le quatrième terme dans le membre droit de (2.6) tendent vers

$$\frac{3}{2}\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt.$$

Comme $\left\|S\frac{dT_\varepsilon^{-1}}{dt}\right\| \longrightarrow 0$, il s'ensuit que le cinquième terme tend vers

$$\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt.$$

En utilisant la condition(H4), le sixième terme va disparaître. Le dernier terme tend vers

$$c_2\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left|w\right|_t^2 dt.$$

Finalement en regroupant les termes similaires on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^R \left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt+\int_0^R \left|w\right|_t^2 dt\\
\leq\ &\left(\frac{3}{2}-c\right)\int_0^R e^{c(R-t)}(R-t)\left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt\\
&+(c_2-c)\int_0^R e^{c(R-t)}\left|w\right|_t^2 dt.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

En choisissant $c \geq \max\left(c_2,\frac{3}{2}\right)$, le membre droit du (2.7) est négatif, et par suite on a

$$\left|\frac{dw}{dt}\right| = \left|w\right|_t = 0 \Longrightarrow w = 0$$

d'ou

$$v = 0,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 2.1 *Soit* $J =]0,\ell[\,,\ell < \infty$ *et* $H = L_2(J)$, *on note par* $\|.\|$ *et* $|.|$ *la norme dans* $L_2(J)$ *et la valeur absolue dans* $\mathbb{R}$*(resp.).*

L'opérateur $T(t)$ est engendré par l'expression :

$$Tu(x,t) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,;(x,t) \in J \times I,$$

et les conditions aux limites

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + a(t)\,u(l,t) = 0, \tag{2.8}$$

où la fonction réelle $a \in C^1$ est non-négative et $\left|\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right| \leq M$. Le domaine $D_t(T)$ de l'opérateur $T(t)$ est donne par

$$D_t(T) = \Big\{u(x,t) \in L_2(J \times I)\,, u(x,t) \in W_2^2(J)\,, \forall t \in I;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \in L_2(J \times I)\,, u(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + a(t)\,u(l,t) = 0.\Big\}$$

Les opérateurs $S(t)$ sont donnés par l'expression différentielle suivante :

$$S(t)\,u(x,t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}; (x,t) \in J \times I.$$

Les opérateurs $T(t)$ et $S(t)$ satisfont les conditions H1-H4.

<u>En effet :</u>

Les opérateurs $T(t)$ sont auto-adjoints dans H. En utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on obtient

$$\begin{aligned}(T(t)\,u,u) &= a(t)\,(u(\ell,t))^2 + \int_0^\ell \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx \\ &\geq c_1 \|u(x,t)\|^2,\end{aligned}$$

où la constante $c_1 = c_\ell^2$.

Les opérateurs inverses de $T(t)$ sont

$$T^{-1}(t)\, v(x,t) = \int_0^x \int_s^\ell v(r,t)\, drds - \frac{xa(t)}{la(t)+1} \int_0^l \int_s^\ell v(r,t)\, drds.$$

De plus

$$\frac{dT^{-1}(t)}{dt} v(x,t) = -\frac{x\partial a(t)/\partial t}{(la(t)+1)^2} \int_0^l \int_s^\ell v(r,t)\, drds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\left\| \frac{dT^{-1}(t)}{dt} v \right\|^2 \leq \frac{M^2 l^6}{3} \|v\|^2,$$

et par suite

$$\frac{dT^{-1}(t)}{dt} \in \beta(I, \mathcal{L}(H))$$

La constante dans la condition H3 est égale à $c_2 = Ml^4/\sqrt{3}$.

Les opérateurs $S(t)$ vérifient

$$\operatorname{Re}(S(t)\, v, v) = \int_0^l -\frac{\partial u}{\partial x} u dx = u^2(l) \geq 0.$$

Les espaces fonctionnels sont définis comme suit :

La norme énergétique est

$$|u|_t = \left(\frac{1}{l} \left\| (a(t))^{\frac{1}{2}} u(\ell, t) \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On choisit le complété de l'ensemble $D(L)$ suivant comme espace de Hilbert E des solutions fortes généralisées

$$D(L) = \left\{ u(x,t) \in L_2(J \times I, H),\, u(x,t) \in W_2^2(J,H),\, \forall t \in I; \right.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &\in L_2(J\times I), \frac{1}{t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), T(t)\,u(x,t) \in L_2(I,H),\\
u(x,t) &\in D_t(T), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in D_t(S),
\end{aligned}
$$

$$
\left. u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, u(0,t) = 0, \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} + a(t)\,u(\ell,t) = 0 \right\},
$$

muni de la norme :

$$
\|u\|_E^2 = \int_0^R \int_s^l \left(\left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|^2 \right) dxdt + \int_0^R a(t)\,|u(\ell,t)|^2\,dt.
$$

L'espace d'arrivé F, est le compété de $L_2(J\times I,H)$ par rapport à la norme

$$
\|f\|_F = \sup_{v\in E} \left(\frac{\left| \int_0^R \int_0^l (R-t)\,f(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,dxdt \right|}{\|v\|_E} \right)
$$

Finalement, on énonce le théorème suivant :

Théorème 2.3 *Pour toute fonction $f \in F$, le problème mixte (Pb1), (2.8) possède une unique solution forte généralisée $u \in E$, telle que*

$$
\|u\|_E \leq K\,\|f\|_F\,.
$$

Chapitre 3

Problème de Goursat pour une équation hyperbolique bidimensionnelle

Résumé

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations hyperboliques bidimensionnelles avec les conditions dites de Goursat. On suppose que le coefficient opérationnel est non borné et à domaine variable. Les résultat de ce chapitre sont publiés dans le journal international

- A. Guezane-Lakoud and A. Chaoui, A functional method applied to operator equations, Banach J. Math. Ana. 3. (2009). no 1. 52-60.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations hyperboliques bidimensionnelles avec les conditions dites de Goursat. On suppose que le coefficient opérationnel est non borné et à domaine variable. Une série de problèmes similaires a été étudiée dans les travaux [55-59, 60] où les auteurs ont supposé que les coefficients sont à domaine de définition constant [14, 25,26, 46, 84,], ou à domaine variable dans le cas unidimensionnel. Dans ces travaux, l'existence et l'unicité de la solution forte généralisée sont démontrées en utilisant la méthode des inégalités énergétiques.

Nos résultats s'étendent à ceux obtenus dans [14,84], des techniques similaires sont appliquées dans cette étude au même type d'équations sous différentes hypothèses. D'un autre côté, la majorité des résultats existants sont obtenus dans le cas unidimensionnel alors que notre étude traite un problème bidimensionnel ce qui cause des difficultés supplémentaires. Lors du passage à la dimension supérieure, le problème change complètement, car pour les équations hyperboliques du second ordre, les caractéristiques sont présentées par deux ensembles différents.

Existence et l'unicité de la solution forte généralisée sont étudiés Les preuves se basent sur une généralisation de la méthode bien connue des inégalités énergétiques . Premièrement, nous dérivons des estimations à priori pour les solutions fortes généralisées en utilisant les opérateurs d'approximation de Yosida. Puis, en utilisant les résultats précédents, nous montrons que l'image de l'opérateur engendré par le problème posé est dense.

Le plan de ce chapitre se présente comme suit : Dans la section suivante, nous exposons le problème, présentons les principales hypothèses et nous définissons les espaces fonctionnels. Dans la section 3, nous dérivons certaines estimations a priori qui prouvent l'unicité de la solution forte généralisée si elle existe et sa dépendance continue par rapport aux données. L'existence de la solution forte généralisée est établie dans la dernière section. Les résultats de ce chapitre sont publiés dans le journal international

- A. Guezane-Lakoud and A. Chaoui, A functional method applied to operator equa-

tions, Banach J. Math. Ana. 3. (2009). no 1. 52-60.

3.2 Position du problème et hypothèses

Soit H un espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|$, $(,)$.

Soit Ω un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$tel que $\Omega =]0, T_1[\times]0, T_2[$.

On considère dans Ω le problème de Goursat suivant :

$$(Pb2) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + T(t)u = f(t) & (3.1) \\ u(t_1, 0) = u(0, t_2) = 0 & (3.2) \end{cases}$$

où u et f sont des fonctions de Ω à valeurs dans H.

On suppose que $\{T(t), t \in \Omega\}$ est une famille d'opérateurs linéaires, non bornés, auto-adjoints dans H et à domaine $D_t(T)$ dépendant de la variable $t = (t_1, t_2) \in \Omega$ et denses dans H, on suppose aussi que les conditions suivantes sont vérifiées:

a) Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que :

$$|v(t)|_t^2 = (T(t)v(t), v(t)) \geq c_1 |v(t)|^2, \forall v(t) \in D_t(T) \ \forall t \in \Omega$$

b) Les opérateurs inverses de $T(t)$ existent et sont fortement différentiable par rapport à t dans H, de plus

$$\frac{\partial T^{-1}(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial T^{-1}(t)}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 T^{-1}(t)}{\partial t_1 \partial t_2} \in \beta(\Omega, \mathcal{L}(H))$$

où : $\mathcal{L}(H)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H à valeurs dans H muni de la norme $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\limits_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \dfrac{|Tu|}{|u|}$.

$\beta(I, \mathcal{L}(H))$ est l'espace de Banach des opérateurs bornés.

c) Il existe deux constantes $a_1 > 0, a_2 > 0$ telle que,

$$-\operatorname{Re}(\frac{\partial T^{-1}(t)}{\partial t_i} u(t), u(t)) \leq a_i(T^{-1}(t)u(t), u(t)), \forall u \in H, i = 1, 2$$

On définit sur D_t le produit scalaire énergétique qu'on le note $(,)_t$ par

$$(u, v)_t = (T(t)u, v), \forall u, v \in D_t\,(T)$$

On note par H_T l'espace de Hilbert énergétique comme le complété de $D_t\,(T)$ par rapport à la norme :

$$|u|_t = \left| T^{\frac{1}{2}}(t)u(t) \right|$$

Soit L l'opérateur engendré par le problème $(Pb2)$

$$D(L) = \Big\{ u \in L_2(\Omega, H), u(t) \in D_t\,(T)\,, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},$$

$$T(t)u \in L_2(\Omega, H), u(t_1, 0) = u(0, t_2) = 0\}$$

On note par E le complété de $D(L)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 \;\; = \;\; \sup_{(s_1,s_2)\in\overline{\Omega}} & \left\{ \int_0^{s_1} \varkappa(t_1, s_2) \left(\left| \frac{\partial u(t_1, s_2)}{\partial t_1} \right|^2 + |u(t_1, s_2)|_t^2 \right) dt_1 + \right. \\ & \left. \int_0^{s_2} \varkappa(s_1, t_2) \left(\left| \frac{\partial u(s_1, t_2)}{\partial t_2} \right|^2 + |u(s_1, t_2)|_t^2 \right) dt_2 \right\}, \end{aligned}$$

où $\varkappa(t_1, t_2) = (T_1 - t_1)\,(T_2 - t_2)\,.$

L'espace F est le complété de $L_2(\Omega, H)$ par rapport à la norme

$$\|f\|_2 = \sup_{v\in E_0}\left(\left|\int\int_{\Omega} \varkappa(t_1,t_2)\,(f,\Lambda v)\,dt_1dt_2\right| / \|v\|_0\right)$$

où $\Lambda u = \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial t_2}$. et E_0 est l'espace de toutes les fonctions $v \in L_2(\Omega, H)$ dont $\dfrac{\partial v}{\partial t_1}, \dfrac{\partial v}{\partial t_2}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} \in L_2(\Omega, H)$,vérifiant les conditions (3.2) et muni de la norme

$$\begin{aligned}\|v\|_0^2 &= \sup_{(s_1,s_2)\in\overline{\Omega}}\left\{\int_0^{s_1}\varkappa(t_1,s_2)\left(\left|\frac{\partial v(t_1,s_2)}{\partial t_1}\right|^2 + c_1\,|v(t_1,s_2)|_t^2\right)dt_1+\right.\\ &\left.\int_0^{s_2}\varkappa(s_1,t_2)\left(\left|\frac{\partial v(s_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2 + c_1\,|v(s_1,t_2)|_t^2\right)dt_2\right\}.\end{aligned}$$

Lemme 3.1 *Sous les conditions (a), (b) et (c), $D(L)$ est dense dans $L_2(\Omega, H)$.*

Preuve. *Voir la preuve du lemme (4.1).* ■

3.3 Estimation a priori

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses (a)-(c) sont satisfaites, alors pour chaque $u \in D(L)$ on a*

$$\|u\|_1 \le C\,\|Lu\|_2\,, \tag{3.3}$$

où C est une constante positive indépendante de t et de u.

Preuve. Soient $u \in D(L)$, l'opérateur d'approximation $T_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon T(t))^{-1}$, $\varepsilon \ge 0$, intégrons l'expression

$$e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)\left(Lu, T_\varepsilon^{-1}(t)\Lambda u\right)$$

par parties sur le domaine $\Omega_s =]0, s_1[\times]0, s_2[\subset \Omega$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^{s_1} \left[e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) \left(\left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) T^{\frac{1}{2}}(t) u(t) \right|^2 \right) \right]_{t_2=s_2} dt_1 \\
& \int_0^{s_1} \left[e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) \left(\left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + \left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) T^{\frac{1}{2}}(t) u(t) \right|^2 \right) \right]_{t_2=s_1} dt_2 \\
= \; & 2 \operatorname{Re} \iint_{\Omega_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) \left(Lu, T_\varepsilon^{-1}(t) \Lambda u \right) dt_1 dt_2 \\
& -2c \iint_{\Omega_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) \left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u(t) \right|_t^2 dt_1 dt_2 \\
& -c \iint_{\Omega_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) \left(\left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + \left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 \right) dt_1 dt_2 \\
& - \iint_{\Omega_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa_1(t_1) \left(\left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u(t) \right|_t^2 \right) dt_1 dt_2 \\
& - \iint_{\Omega_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa_2(t_2) \left(\left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + \left| T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u(t) \right|_t^2 \right) dt_1 dt_2 \\
& + \operatorname{Re} \iint_{\Omega_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, \frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial \left(T(t) T_\varepsilon^{-1}(t) \right)}{\partial t_1} u, u \right) + \left(\frac{\partial \left(T(t) T_\varepsilon^{-1}(t) \right)}{\partial t_2} u, u \right) \right] dt_1 dt_2 \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

où $\varkappa(t_1) = (T_1 - t_1)$ et $\varkappa(t_2) = (T_2 - t_2)$.

En appliquant le $\delta-$Cauchy inégalité avec $\delta = 1$, les propriétés des opérateurs de régularisation et la condition (b), puis par passage à la limite quand ε tend vers 0, il résulte :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s_1}\left[e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u(t)|_t^2\right)\right]_{t_2=s_2}dt_1+\\
&\int_0^{s_2}\left[e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u(t)|_t^2\right)\right]_{t_1=s_1}dt_2\\
\leq\;& 2\operatorname{Re}\int\int_{\Omega_s}e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)\,(Lu,\Lambda u)\,dt_1dt_2\\
&+(-2c+a_1+a_2)\int\int_{\Omega_s}e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)\,|u|_t^2\,dt_1dt_2\\
&+\left(-c+\frac{1}{2}\right)\int\int_{\Omega_s}e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right]dt_1dt_2 \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Pour $c\geq\max\left(\frac{1}{2},\frac{a_1+a_2}{2}\right)=a$, les deux derniers termes dans le membre droit de (3.5) seront négatifs, par suite un simple calcul nous donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s_1}\varkappa(t_1,s_2)\left(\left|\frac{\partial u(t_1,s_2)}{\partial t_1}\right|^2+|u(t_1,s_2)|_t^2\right)_{t_2=s_2}dt_1\\
&+\int_0^{s_1}\varkappa(s_1,t_2)\left(\left|\frac{\partial u(s_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2+|u(s_1,t_2)|_t^2\right)_{t_1=s_1}dt_2\\
\leq\;& 2e^{a(T_1+T_2)}\left|\int\int_{\Omega_s}\varkappa(t_1,t_2)\,(Lu,\Lambda u)\,dt_1dt_2\right| \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

prenons le sup par rapport $(s_1,s_2)\in\overline{\Omega}$ dans le coté gauche de (3.6), divisons les deux membres par $\|u\|_1$ et en tenant compte de la condition (a) on trouve que $\|u\|_1\geq\|u\|_0$, $\forall u\in D(L)$ et par conséquence

$$\|u\|_1\leq 2e^{a(T_1+T_2)}\|Lu\|_2$$

ce qui achève la preuve du théorème.

De manière standard on démontre que l'opérateur L est fermable. Soit $\overline{L}$ sa femeture de domaine de définition $D\left(\overline{L}\right)=\overline{D\left(L\right)}$. ■

Comme les fonctions $u\in D(\overline{L})$ sont des limites des suites $u_n\in D(L)$, par passage à limite, on prolonge l'inégalité (3.3) aux solutions fortes

$$\left\|u\right\|_1\leq C\left\|\overline{L}u\right\|_2;\quad \forall u\in D(\overline{L}) \tag{3.7}$$

Remarque 3.1 *1) A partir de l'inégalité (3.7), la solution forte du problème si elle existe elle est unique et dépend continûment du second membre f.*

Remarque 3.2 *2) Pour l'image de l'opérateur $\overline{L}$ on a :*

$$R(\overline{L})=\overline{R(L)};\quad (\overline{L})^{-1}=\overline{L^{-1}}$$

Par conséquence pour démontrer l'existence de la solution forte généralisée pour f quelconque dans F, il suffit de montrer que $R(L)$ est dense dans l'espace F (i-e $\overline{R(L)}=F$).

3.4 Existence de la solution forte généralisée

Théorème 3.2 *On suppose que les conditions du Théorème 3.1 sont satisfaites. Alors, pour tout $f\in F$, il existe une unique solution forte généralisée $u\in D(\overline{L})$ du problème $(Pb2)$ telle que $u=(\overline{L})^{-1}(f)$, et vérifiant l'inégalité (3.7).*

Preuve. D'aprés un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il suffit de prouver que si

$$\int\int_{\Omega_s}\varkappa(t_1,t_2)\left(Lu,\Lambda u\right)dt_1dt_2=0,\ \forall u\in D\left(L\right) \tag{3.8}$$

$\forall v\in E_0$, alors $v=0$.

Soit $C\left(\Omega,H\right)$ l'ensemble des fonctions $v\in C^\infty$ telles que $v|_{t_2=0}=0;\ v|_{t_1=0}=0$, comme $C\left(\Omega,H\right)$ est dense dans E_0, on va démontrer que si la condition (3.8) est vérifié

$\forall v \in C(\Omega, H)$, alors $v = 0$.En substituant la fonction u dans la relation (3.8) par $T_\varepsilon^{-1}(t)h$, où $h \in E_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
& 2\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} \varkappa(t_1,t_2)(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}, \Lambda v)dt_1dt_2 \\
= \;& -2\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} \varkappa(t_1,t_2)\frac{\partial^2 T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1 \partial t_2}h, \Lambda v)dt_1dt_2 \\
& -2\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} \varkappa(t_1,t_2)(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial h}{\partial t_2}, \Lambda v)dt_1dt_2 \\
& -2\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} \varkappa(t_1,t_2)\left(T(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)h, \Lambda v\right)dt_1dt_2. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

D'après la condition (b) et les propriétés des opérateurs de régularisation, alors les operateurs $\dfrac{\partial^2 T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1 \partial t_2}$, $\dfrac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}$, $\dfrac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2}$, et $T(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)$ sont bornés dans H. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on voit que le membre droit de (3.9) en valeur absolue est estimé par

$$\gamma\left(\left\|\frac{\partial h}{\partial t_1}\right\|^2_{L_2(\Omega,H)} + \left\|\frac{\partial h}{\partial t_2}\right\|^2_{L_2(\Omega,H)}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\varkappa(t_1,t_2)T_\varepsilon^{-1}(t)h\Lambda v\right\|_{L_2(\Omega,H)}$$

où γ est une constante positive. Soit w une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\Lambda w = \Lambda v \\ w(0,t_2) = w(t_1,0) = 0 \end{cases}$$

En intégrant (3.9) par parties, en suite posant $h = w$, on arrive à

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)u\left(t\right)\right|_t^2\right)dt_1dt_2+\\
&\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2+\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)u\left(t\right)\right|_t^2\right)dt_1dt_2\\
=\;&\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_2\left(\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)u\left(t\right)\right|_t^2\right)dt_1dt_2+\\
&\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1\left(\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)u\left(t\right)\right|_t^2\right)dt_1dt_2\\
&-c\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2\right)dt_1dt_2\\
&-2c\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left|T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|_t^2dt_1dt_2\\
&-2\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\frac{\partial^2T_{\varepsilon}^{-1}(t)}{\partial t_1\partial t_2}w,\Lambda w\right)dt_1dt_2\\
&-2\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\frac{\partial T_{\varepsilon}^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial w}{\partial t_2}+\right.\\
&\left.\frac{\partial T_{\varepsilon}^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial w}{\partial t_1},\Lambda w\right)dt_1dt_2+\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\times\\
&\left(\left(\frac{\partial T_{\varepsilon}^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_1}\right)+\left(\frac{\partial T_{\varepsilon}^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial w}{\partial t_1},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)\right)dt_1dt_2\\
&+\operatorname{Re}\int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)\times\\
&\left(\left(\frac{\partial\left(T\left(t\right)T_{\varepsilon}^{-1}(t)\right)}{\partial t_2}w,w\right)+\left(\frac{\partial\left(T\left(t\right)T_{\varepsilon}^{-1}(t)\right)}{\partial t_1}w,w\right)\right)dt_1dt_2 \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les termes $\left\|\frac{\partial^2T_{\varepsilon}^{-1}(t)}{\partial t_1\partial t_2}\right\|$ et $\left\|\frac{\partial T_{\varepsilon}^{-1}(t)}{\partial t_i}\right\|$ tendent vers 0 quand ε tend vers 0, alors le $5^{\text{ième}}$, $6^{\text{ième}}$, et le $7^{\text{ième}}$ terme du membre droit dans (3.10) peuvent être estimés par 0. En appliquant les propriétés des opérateurs de régularisation et la condition (c) à la dernière intégrale, en suite regroupant les termes similaires, il résulte

$$
\begin{aligned}
& \int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) t_1 t_2 \left(\left| \frac{\partial w}{\partial t_1} \right|^2 + \left| w\left(t\right) \right|_t^2 \right) dt_1 dt_2 + \\
& \int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) t_1 t_2 \left(\left| \frac{\partial w}{\partial t_1} \right|^2 + \left| w\left(t\right) \right|_t^2 \right) dt_1 dt_2 \\
\leq \; & \int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) t_2 \left(ct_1+1\right) \left| \frac{\partial w}{\partial t_1} \right|^2 dt_1 dt_2 \\
& \int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) t_1 \left(ct_2+1\right) \left| \frac{\partial w}{\partial t_2} \right|^2 dt_1 dt_2 \\
& \left(-2c+a_2+a_1\right) \int\int_{\Omega} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} \varkappa(t_1,t_2) t_1 t_2 \left| w \right|_t^2 dt_1 dt_2. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

pour $c \geq \max\left\{ \frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2}, \frac{a_2+a_1}{2} \right\}$ le membre droit de (3.11) est négatif, et donc $\left| \frac{\partial w}{\partial t_1} \right| = \left| \frac{\partial w}{\partial t_2} \right| = \left| w \right|_t^2 = 0$ ce qui donne $v = 0$. en effet pour $v \in C\left(\Omega, H\right)$, l'opérateur Λ est inversible et si $\Lambda v = g$ alors

$$
v = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_1-t_2}^{t_1} g\left(s_1, s_1-t_1+t_2\right) ds_1, & t_1 \geq t_2 \\ \displaystyle\int_{t_2-t_1}^{t_2} g\left(s_2+t_1-t_2, s_2\right) ds_2, & t_1 < t_2. \end{cases}
$$

■

Chapitre 4

Problème de Goursat pour une équation parabolique bidimensionnelle

Résumé

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles avec les conditions de Goursat. On suppose que le coefficient opérationnel est non borné et à domaine variable. Les résultat de ce chapitre sont soumis et acceptés pour publication.

.

4.1 Introduction

Dans chapitre, La méthode des inégalités énergétiques est utilisée dans l'étude d'une classe d'équations différentielles paraboliques bidimensionnelles dans un espace de Hilbert, l'opérateur apparaissant dans l'équation est supposé être linéaire, positif, de domaine variable.

Nous mentionnons que ces problèmes apparaissent en cosmologie, dans la théorie du ralentissement des neutrons, ... Voir [13].

L'actualité de l'analyse de ces problèmes (avec des domaines variables) est d'un intérêt important. Cet intérêt est dicté non seulement par le développement de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais aussi par l'étude des problèmes apparaissant au moment de la modélisation de problèmes concrets en physique changeant avec le temps.

Dans le cas où les coefficients opérationnels ont des domaines de définition constant, certains problèmes aux limites ont été étudiés dans [14, 26, 50]. Des problèmes similaires avec conditions aux limites non locales mais dans le cas unidimensionnel ont été étudiés dans [9, 17, 18, 27]. Pour le cas équations où les coefficients sont à domaine variable on peut citer les travaux [25, 58, 56]. Dans tous ces travaux la méthode fonctionnelle utilisée est celle des inégalités énergétiques.

4.2 Description du problème et hypothèses

Soit H un espace de Hilbert muni d'une norme et d'un produit scalaire qu'on note respectivement par $|.|$, $(,)$.

On considère dans D le problème bidimensionnel suivant :

$$(\text{Pb3})\begin{cases} lu = \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial t_2} + A(t)u = f(t) \\ l_1u(t_1,t_2) = u(t_1,0) = \varphi\left(t_1\right), \\ l_2u(t_1,t_2) = u(0,t_2) = \psi\left(t_2\right) \end{cases}$$

où $f : D \longrightarrow H$, $\varphi :]0, T_1[\longrightarrow H$ et $\psi :]0, T_2[\longrightarrow H$ sont les données et u est la fonction inconnue à valeurs dans H.

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) : Les opérateurs $A(t)$ sont auto-adjoint pour tout $t \in D$ et il existe une constante $c_1 > 0$ indépendante de t et de $v(t)$ telle que :

$$(A(t)v(t), v(t)) \geq c_1 |v(t)|^2, \quad \forall v(t) \in D(A(t)) \ \ p.p.t \in D$$

(b) : Les opérateurs inverses de $A(t)$ existent pour tout $t \in D$, $A^{-1}(t)$ est fortement différentiable par rapport à t dans H de plus

$$\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2}, \in L_\infty(D, \mathcal{L}(H))$$

où $\mathcal{L}(H)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H à valeurs dans H. muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|Au|}{|u|}$$

On donne maintenant un exemple d'opérateur $A(t)$ satisfaisant les conditions (a) et (b).

4.3 Espaces fonctionnels

Soit $D\left(A^{\frac{1}{2}}(t)\right) \neq \varnothing$. On construit l'espace de Hilbert $W(t)$ sur $D\left(A^{\frac{1}{2}}(t)\right)$ pour $t \in D$ muni de la norme

$$|u|_t = \left|A^{\frac{1}{2}}(t)\, u\right|.$$

On définit par L l'opérateur (l, l_1, l_2) engendré par le problème (4.1)-(4.2) de domaine définition

$$D\left(L\right)=\left\{u\in L_2\left(D,H\right),u\left(t\right)\in D\left(A\left(t\right)\right),\frac{\partial u}{\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_2},A\left(t\right)u\in L_2\left(D,H\right)\right\}.$$

L'opérateur L agit deE_1 à valeurs dans E_2 où E_1 est le complété de $D\left(L\right)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned}\left\|u\right\|_1^2 &= \sup_{(s_1,s_2)\in\overline{D}}\left\{\int_0^{s_1}\left|u(t_1,s_2)\right|^2 dt_1+\int_0^{s_2}\left|u(s_1,t_2)\right|^2 dt_2\right.\\ &\left.+2\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\left|u\right|_t^2 dt_1dt_2\right\},\end{aligned}$$

E_2 est l'espace de Hilbert $L_2\left(D,H\right)\times L_2\left(\left]0,T_1\right[,H\right)\times L_2\left(\left]0,T_2\right[,H\right),$ muni de la norme

$$\left\|F\right\|_1^2=\left\|f\right\|_{L_2(D,H)}^2+\left\|\varphi\right\|_{L_2(]0,T_1[,H)}^2+\left\|\psi\right\|_{L_2(]0,T_2[,H)}^2$$

Lemme 4.1 *Si les conditions (a) et (b) sont vérifiées, alors $D\left(L\right)$ est dense dans $L_2\left(D,H\right)$.*

Preuve. Soit $v\in L_2\left(D,H\right)$ telle que

$$\int\int_D \left(u,v\right)dt_1dt_2=0\forall u\in D\left(L\right). \tag{4.1}$$

On pose $u=A^{-1}\left(t\right)h,$ où h est une fonction quelconque dans $L_2\left(D,H\right)$. On peut facilement voir que

$$\int\int_D\left(A^{-1}\left(t\right)h,v\right)dt_1dt_2=0. \tag{4.2}$$

En particulier si $v=h$, alors d'après la condition (a) on obtient

$$A^{-1}\left(t\right)v=0,$$

et par suite

$$v=0 \text{ sur } D.$$

■

4.4 Estimations a priori

Théorème 4.1 *Sous les conditions (a) et (b), on obtient pour chaque $u \in D(L)$ l'estimation*

$$\|u\|_1^2 \leq C \, \|Lu\|_2^2 \tag{4.3}$$

où C est une constante positive indépendante de t et de u.

Preuve. Comme les opérateurs $A(t)$ sont non bornés, on va les approximer par des opérateurs bornés et fortement différentiables $A(t) A_\varepsilon^{-1}(t)$ où

$$A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1} ; \varepsilon \succ 0.$$

Intégrant par parties deux fois la partie réelle de l'expression $e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left(lu, A_\varepsilon^{-1}(t) u\right)$ sur le domaine $D_s =]0, s_1[\times]0, s_2[\subset D$, on obtient :

$$2 \operatorname{Re} \int\int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left(lu, A_\varepsilon^{-1}(t) u\right) dt_1 dt_2 =$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s_2} e^{c(s_2-t_2)} \left| A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u \right|_{t_1=s_1}^2 dt_2 - \int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_2)} \left| A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u \right|_{t_1=0}^2 dt_2 \\
&\int_0^{s_1} e^{c(s_1-t_1)} \left| A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u \right|_{t_2=s_2}^2 dt_1 - \int_0^{s_1} e^{c(s_1+s_2-t_1)} \left| A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u \right|_{t_2=0}^2 dt_1 \\
&2 \int\int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left[c \left| A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t) A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t) u \right|^2 \right] dt_1 dt_2 \\
&- \operatorname{Re} \int\int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left(u, \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t) u}{\partial t_1} + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t) u}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

En utilisant le $\delta-$inégalité et en appliquant les propriétés des opérateurs de régularisation quand ε tend vers 0, on obtient

$$\int_0^{s_2} e^{c(s_2-t_2)} \left|u\left(s_1,t_2\right)\right|^2 dt_2 + \int_0^{s_1} e^{c(s_1-t_1)} \left|u\left(t_1,s_2\right)\right|^2 dt_1 +$$

$$2\int\int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left|u\left(t_1,t_2\right)\right|_t^2 dt_1dt_2 \leq \int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_2)} \left|u\left(0,t_2\right)\right|^2 dt_2$$

$$+\int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_1)} \left|u\left(t_1,0\right)\right|^2 dt_1 + \frac{\delta}{2}\int\int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left|lu\left(t_1,t_2\right)\right|^2 dt_1dt_2$$

$$\left(\frac{1}{2\delta}-2c\right)\int\int_{D_s} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left|u\left(t_1,t_2\right)\right|^2 dt_1dt_2. \tag{4.5}$$

Pour éliminer le dernier terme dans le membre droit de l'inégalité (4.5) on choisit $\delta = 4$ et $c = 1$, il s'ensuit que

$$\int_0^{s_2} e^{(s_2-t_2)} \left|u\left(s_1,t_2\right)\right|^2 dt_2 + \int_0^{s_1} e^{(s_1-t_1)} \left|u\left(t_1,s_2\right)\right|^2 dt_1 +$$

$$2\int\int_{D_s} e^{(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left|u\left(t_1,t_2\right)\right|_t^2 dt_1dt_2 \leq \int_0^{s_2} e^{(s_1+s_2-t_2)} \left|l_2u\right|^2 dt_2$$

$$+\int_0^{s_2} e^{(s_1+s_2-t_1)} \left|l_1u\right|^2 dt_1 + 2\int\int_{D_s} e^{(s_1+s_2-t_1-t_2)} \left|lu\left(t_1,t_2\right)\right|^2 dt_1dt_2 \tag{4.6}$$

Sachant que la fonction exponentielle est croissante par rapport à t_1 et t_2, alors

$$\int_0^{s_2} \left|u\left(s_1,t_2\right)\right|^2 dt_2 + \int_0^{s_1} \left|u\left(t_1,s_2\right)\right|^2 dt_1 + 2\int\int_{D_s} \left|u\left(t_1,t_2\right)\right|_t^2 dt_1dt_2 \leq$$

$$e^{T_2}\int_0^{s_2} \left|l_2u\right|^2 dt_2 + e^{T_1}\int_0^{s_1} \left|l_1u\right|^2 dt_1 + 2e^{(T_1+T_2)}\int\int_{D_s} \left|lu\right|^2 dt_1dt_2. \tag{4.7}$$

En passant au sup par rapport à $(s_1,s_2) \in \overline{D}$ dans (4.7) on établit (4.3) où la constante $C = 2e^{(T_1+T_2)}$. ■

Lemme 4.2 *L'opérateur L est fermable et sa fermeture $\overline{L}$ de définition $D(\overline{L})$ vérifiant $D(\overline{L}) = \overline{D(L)}$.*

Preuve. Comme les opérateurs l_1u et l_2u sont continus, il suffit de prouver que si

$$(u_n)_n \in D(L) : u_n \longrightarrow 0, \text{ et } lu_n \longrightarrow f \in L_2(D,H) \Longrightarrow f = 0 \tag{4.8}$$

Soit $v \in D(L)$, alors

$$(f,v)_{L_2(D,H)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int\int_D (lu_n, v)\, dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left[\int\int_D \left(u_n, -\frac{\partial v}{\partial t_1} - \frac{\partial v}{\partial t_2} + A(t)\, v \right) dt_1 dt_2 \right.$$

$$\left. + \int_0^{T_2} (u_n, v)_{t_1 = T_1}\, dt_2 + \int_0^{T_1} (u_n, v)_{t_2 = T_2}\, dt_1 \right]$$

$$= \ 0$$

De la densité de $D(L)$ dans $L_2(D,H)$ (voir lemme 4.1) il s'ensuit que $f = 0$,et par suite tout élément de $D(\overline{L})$ est une limite d'une suite $u_n \in D(L)$, ie :

$$\overline{L}u = \lim_{n \longrightarrow +\infty} Lu_n,$$

et ainsi

$$D(\overline{L}) = \overline{D(L)}.$$

Par passage à limite, on prolonge l'inégalité (4.3) aux solutions fortes généralisées $u \in D(\overline{L})$: ■

$$\|u\|_1^2 \leq C \left\| \overline{L}u \right\|_2^2 ; \forall u \in D(\overline{L}). \tag{4.9}$$

On peut facilement démontrer que $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$ et $(\overline{L})^{-1} = \left(\overline{L^{-1}} \right)$.

Remarque 4.1 *De l'inégalité (4.9), on déduit l'unicité de la solution forte généralisée si elle existe, sa dépendance continue par rapport aux données* (f, φ, ψ) *et la fermeture de* $R(\overline{L})$. *Pour démontrer l'existence de la solution forte généralisée, il revient à démontrer que l'image* $R(L)$ *est dense dans* E_2, *ce qui est équivalent à* $R(L)^{\perp} = \{0\}$.

4.5 Existence de la solution forte généralisée

Théorème 4.2 *On suppose que les conditions du Théorème 4.1 sont satisfaites, et que pour tout* $t \in D$ *l'inégalité*

$$-\operatorname{Re}(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i} v(t), v(t)) \leq a_i |v(t)|^2, \forall v(t) \in H, i = 1, 2 \tag{4.10}$$

est vérifiée, où $a_i \geq 0$, $i = 1, 2$, *sont indépendantes de* v *et de* t,*.alors pour tout* $(f, \varphi, \psi) \in E_2$, *il existe une unique solution forte généralisée* $u \in D(\overline{L})$ *du problème* (Pb_3) *vérifiant*

$$\|u\|_1^2 \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_2^2 ; \forall u \in D(\overline{L}).$$

Preuve. Soit $V = (v, \varphi, \psi) \in R(L)^{\perp}$ et $u \in D(L)$ montrons que si, $(Lu, V) = 0$ alors $V = 0$. On a :

$$(Lu, V) = 0 \Longrightarrow (lu, v)_{L_2(D,H)} + (l_1 u, \varphi)_{L_2(]0,T_1[,H)} + (l_2 u, \psi)_{L_2(]0,T_2[,H)} = 0$$

Première étape : Soit

$$u \in D_0(L) = \{u \in D(L); l_1 u = l_2 u = 0\},$$

alors

$$(Lu, V) = 0 \Longrightarrow (lu, v)_{L_2(D,H)} \tag{4.11}$$

On pose $u = A_{\varepsilon}^{-1}(t) h$ dans (4.11), où h est une fonction arbitraire dans $L_2(D, H)$, telle que $\frac{\partial h}{\partial t_1}, \frac{\partial h}{\partial t_2} \in L_2(D,H)$ et $h(t_1,0) = h(0,t_2) = 0$, on obtient

$$\int\int_D \left(l\left(A_\varepsilon^{-1}(t)\,h\right), v\right) dt = 0,$$

donc

$$\int\int_D \left(\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial h}{\partial t_2}, A_\varepsilon^{-1}(t)\,v\right) dt_1 dt_2 =$$

$$-\int\int_D \left(\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)\,h}{\partial t_1} + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)\,h}{\partial t_2}, v\right) - \int\int_D \left(A(t)\,h, A_\varepsilon^{-1}(t)\,v\right) dt_1 dt_2. \tag{4.12}$$

La fonction $A_\varepsilon^{-1}(t)\,v$ a une dérivée dans $L_2(D,H)$ et s'annule pour $t_1 = T_1$ et $t_2 = T_2$. En intégrant par parties le membre gauche de (4.12), en considérant deux fois la partie réelle, puis remarquant que $h \in H^1$ qui est dense dans $L_2(D,H)$, on généralise l'inégalité obtenue à toutes les fonctions $h \in L_2(D,H)$,puis si on pose $h = v$ on trouve

$$2\int\int_D \left|A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\,A^{\frac{1}{2}}(t)\,v\right|^2 dt_1 dt_2 = -\operatorname{Re}\int\int_D \left(\frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)\,v}{\partial t_1} + \frac{\partial A_\varepsilon^{-1}(t)\,v}{\partial t_2}, v\right) dt_1 dt_2. \tag{4.13}$$

En appliquant les propriétés des opérateurs de régularisation et l'inégalité (4.10) au membre droit de (4.13) il résulte

$$2\int\int_D \left|A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\,A^{\frac{1}{2}}(t)\,v\right|^2 dt_1 dt_2 \leq \varepsilon\,(a_1 + a_2)\left|A_\varepsilon^{-1}(t)\,A(t)\,v\right|^2. \tag{4.14}$$

Faisant tendre ε vers 0 (tenant en compte des propriétés des opérateurs de régularisation) il s'ensuit que

$$\int\int_D \left|A^{\frac{1}{2}}(t)\,v\right|^2 dt_1 dt_2 \leq 0$$

ce qui implique que $\left|A^{\frac{1}{2}}(t)\,v\right| = 0$ $p.p.t \in D$. De la condition (a) on conclut que $v = 0$ $p.p.t \in D$.

Deuxième étape : Soit $u \in D(L)$ alors

$$(Lu, V) = 0 \Longrightarrow (l_1 u, \varphi)_{L_2(]0,T_1[,H)} + (l_2 u, \psi)_{L_2(]0,T_2[,H)} = 0.$$

Comme l'image de l'opérateur (l_1, l_2) est dense dans l'espace $L_2(]0, T_1[, H) \times L_2(]0, T_2[, H)$ alors $\varphi = \psi = 0$, et par suite $V = 0$.Ce qui achève la preuve du Théorème 4.2. ■

On donne maintenant un exemple d'opérateur $A(t)$ satisfaisant les conditions (a) et (b).

Exemple 4.1 *Soit* $I =]0, \ell[, \ell < \infty$ *et* $H = L_2(I)$*, on note par* $\|.\|$ *et* $|.|$ *la norme dans* $L_2(I)$ *et la valeur absolue dans* $\mathbb{R}$ *(resp.). L'opérateur* $A(t)$ *est engendré par l'expression :*

$$Au(x,t) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,; (x,t) \in I \times D$$

avec les conditions aux bord

$$u(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + a(t)\,u(l,t) = 0,$$

où la fonction réelle $a \in C^1$ *est positive et* $\left|\frac{\partial a(t)}{\partial t_i}\right| \leq M_i$*,* $i = 1, 2$*. Le domaine de définition de* $A(t)$ *est*

$$D(A(t)) = \Big\{u(x,t) \in L_2(I \times D), u(x,t) \in W_2^2(I), \forall t \in D;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \in L_2(I \times D), u(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + a(t)\,u(l,t) = 0.\Big\}$$

et vérifie les conditions (a) et (b).

En effet :

Condition (a) : Les opérateurs $A(t)$ sont auto-adjoints (puisque ils sont symétriques dans H). En utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrich voir chapitre(2), on obtient

$$\begin{aligned}(A(t)u,u) &= a(t)(u(\ell,t))^2+\int_0^\ell\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2dx\\ &\geq a(t)(u(\ell,t))^2+c_\ell^2\int_0^\ell|u(x,t)|^2dx\geq c_1\|u(x,t)\|^2,\end{aligned}$$

où la constante $c_1=c_\ell^2$.

Condition (b) : Les opérateurs inverses $A^{-1}(t)$ sont

$$A^{-1}(t)v(x,t)=\int_0^x\int_0^\ell v(r,t_1,t_2)\,drds-\frac{xa(t)}{la(t)+1}\int_0^l\int_0^\ell v(r,t_1,t_2)\,drds.$$

Les dérivés fortes $\dfrac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}$, $\dfrac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2}$ des opérateurs $A^{-1}(t)$ sont égales à

$$\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}v(x,t)=-\frac{x\partial a(t)/\partial t_1}{(la(t)+1)^2}\int_0^l\int_0^\ell v(r,t_1,t_2)\,drds.$$

$$\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2}v(x,t)=-\frac{x\partial a(t)/\partial t_2}{(la(t)+1)^2}\int_0^l\int_0^\ell v(r,t_1,t_2)\,drds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\left\|\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}v\right\|^2\leq\frac{M_i^2l^6}{3}\|v\|^2\,;i=1,2$$

et par suite les opérateurs $\dfrac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}^2\in L_\infty(D,\mathcal{L}(H)).i=1,2$

Exemple 4.2 *Soit $G=I\times D$. On considère dans G le problème mixte suivant*

$$Lu(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t_1}(x,t)+\frac{\partial u}{\partial t_2}(x,t)-t_1^{2k+1}t_2^{2m+1}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(x,t)\,;\quad k,m\in\mathbb{N},$$

avec conditions au bord

$$u(\ell,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$$

et les conditions de Goursat

$$u(x,t_1,0)=\varphi(t_1)\,,u(x,0,t_2)=\psi(t_2)$$

L'opérateur $A(t)$ *est engendré par les expressions*

$$Au(x,t)=-t_1^{-(2k+1)}t_2^{-(2m+1)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$$u(\ell,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$$

avec

$$D(A(t))=\{u(x,t)\in L_2(G)\,,\ t_1^{-(2k+1)}t_2^{-(2m+1)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\in L_2(G)$$

$$u(\ell,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\,\forall t\in D\}$$

Les conditions (a) et (b) sont vérifiées.

En effet : Les opérateurs $A(t)$ sont au-adjoints et vérifient la condition (a) avec

$$c_1=\left(\frac{24}{5}\right)T_1^{-2(2k+1)}T_2^{-2(2m+1)}\ell^{-4.}$$

Les opérateurs inverses $A^{-1}(t)$ sont

$$A^{-1}(t)v(x,t)=t_1^{2k+1}t_2^{2m+1}\int_x^\ell\int_0^s v(r,t_1,t_2)\,drds,\forall v\in H.$$

Les dérivés fortes $\dfrac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}$, $\dfrac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2}$ des opérateurs $A^{-1}(t)$ sont égales à

$$\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}v(x,t)=(2k+1)\,t_1^{2k}t_2^{2m+1}\int_x^\ell\int_0^s v(r,t_1,t_2)\,drds.$$

$$\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2} v\,(x,t) = (2m+1)\, t_1^{2k+1} t_2^{2m} \int_x^{\ell} \int_0^{s} v\,(r, t_1, t_2)\, dr ds.$$

Un calcul simple nous donne

$$\left| \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1} v \right|^2 \leq \left(\frac{5}{24} \right) (2k+1)^2\, T_1^{4k} T_2^{4m+2} \ell^4 \, |v|^2 < \infty$$

$$\left| \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2} v \right|^2 \leq \left(\frac{5}{24} \right) (2m+1)^2\, T_1^{4k+2} T_2^{4m} \ell^4 \, |v|^2 < \infty,$$

et par suite les opérateurs $\dfrac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}^2 \in L_\infty(D, \mathcal{L}(H)), \quad i = 1, 2.$

Chapitre 5

Etude dune équation parabolique intégro-différentielle avec condition intégrale par la méthode de Rothe

Résumé

On étudie une équation intégro-différentielles parabolique à laquelle sont jointent des conditions initiale, de Neumann et intégrale du premier type. Inspirer des travaux de Bahuguna [3-8] et de Bouziani [9,10], on établit l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

5.1 Introduction

On étudie une équation intégro-différentielles parabolique à laquelle sont jointent des conditions initiale, de Neumann et intégrale du premier type. Inspirer des travaux de Bahuguna [1-6] et de Bouziani [66-68], on établit l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données en appliquant la méthode de Rothe. Les conditions intégrales apparaissent en thermo-élasticité par exemple dans l'étude de la quasi-statique flexure d'un bar thermo-élastique, la condition intégrale représente le moyen de l'entropie. L'opérateur intégral de Volterra (ou l'opérateur mémoire) peut modéliser beaucoup des phénomènes physique, tel que le flux à deux phases dans des milieux élastiques ayant des ports avec mémoire, la loi de Darcy dans ce cas prend la forme

$$q\,(t,x) = -k\,(t,x)\,\nabla p\,(t,x) - \int_0^t k\,(t,x)\,\nabla p\,(s,x)\,dx$$

où q dénote le flux volumétrique de l'eau et p est la pressure capillaire [32,33].

La méthode de Rothe trouve son origine dans les travaux du mathématicien Allemand E. Rothe en 1930 [78] pour résoudre des équations linéaires paraboliques et unidimensionnelles, elle a été également utilisée et développée dans la résolution des équations paraboliques d'ordre supérieur par O.L. Ladyzenskaja voir $[48-50]$ aussi bien que dans les travaux de K. Rektorys $[74-76]$, J. Necas [69] et J. Kacur $[34-38,66]$ qui a étudié des équations d'évolution non linéaire de type parabolique. Plusieurs autres résultats ont été réalisés en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant l'équation et les conditions par exemple l'équation de Schrödinger [3] , l'équation Navier Stokes [51], l'équation de télégraphe [28] , les équations différentielles avec conditions intégrales dans les travaux de Bouziani $[10-12]$ et Mesloub [63-65] ainsi que les problèmes intégrodifferentiels de Bahuguna $[1-6]$.

Notre objectif est d'étendre cette technique aux équations intégro-différentielles avec conditions aux limites non classiques. Plus précisément nous développons la méthode de Rothe à l'étude des problèmes non locaux semi linéaires dont les conditions aux limites est la source de grande complication rendant inopérante la méthode de Rothe standard de sorte qu'une adaptation adéquate de cette dernière s'impose. L'idée clef que nous proposons est de mener les calculs dans un espace fonctionnel non classique et d'introduire une généralisation naturelle de la notion de solution variationnelle faible pour le problème étudié. Appliquant cette idée nous établissons les estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence d'un schéma d'approximation semi discrétisé correspondant est démontré.

Le schéma de la méthode de Rothe est comme suite :

On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles (t_{j-1}, t_j), $j = 1, ..., n$. où $t_j = jh$ et $h = T/n$. on note par $u_j = u_j(x) = u_j(x, jh)$ les approximants de u.

-On remplace les dérivées de la fonction u, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta^2 u_j = \dfrac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h}$ et $\delta u_j = \dfrac{u_j - u_{j-1}}{h}$ pour tout $t = t_j$.

-On obtient un système formé de n équations en x où l'inconnu est $u_j(x)$ donc on approxime le problème posé à tout point $t = t_j$, $j = 1, n$. par un nouveau problème discret.

-On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenu.

-On construit les fonctions de Rothe définies par

$$u^{(n)}(t) = u_{j-1} + \delta u_j (t - t_j), \qquad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n$$

et les fonctions test correspondantes

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j & t \in (t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n \\ U_0 & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

-Après avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^{(n)}(t)$ vers la solution du problème posé.

5.2 Espaces fonctionnels et hypothèses

Soit $I = [0, T]$, on note par $(,)$, et $\|.\|$ le produit scalaire et la norme correspondante de $L^2(0,1)$.V est l'espace de Hilbert définit par :

$$V = \left\{ \phi \in L^2(0,1) \ \ tq : \int_0^1 \phi dx = 0 \right\}$$

L'espace de Hilbert $L^2(0,1)$ peut être injecté continûment dans l'espace de Hilbert $B(0,1)$ (appelé aussi Bouziani space) qui est le complété de $C_0(0,1)$, l'espace des fonctions continues à support compact dans $(0,1)$ par rapport au produit scalaire $(u,v)_B = \int_0^1 \Im_x u . \Im_x v dx$ où $\Im_x u = \int_0^x u(\xi)\, d\xi$ et la norme $\|u\|_B = \|\Im_x u\|$. Il s'ensuit que $\|u\|_B^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|^2$.

L'espace des fonctions continues de I dans $B(0,1)$, noté $C(I, B(0,1))$ est un Banach pour la norme $\|x\|_{C(I,B(0,1))} = \max\limits_I \|x(t)\|_B$. On dénote par V_B, $C^{0,1}(I,X)$ et $C^{1,1}(I,X)$ les espaces suivants :

$$V_B = \left\{ \phi \in B(0,1) \ \ \text{tq} : \int_0^1 \phi dx = 0 \right\}$$

$$C^{0,1}(I,X) = \{ u : I \longrightarrow X \ \ \text{tq } u \text{ est lipchitzienne continue} \}$$

$$C^{1,1}(I,X) = \left\{ u \in C^{0,1}(I,X) \ \ \text{tq} \ \frac{du}{dt} \in C^{0,1}(I,X) \right\}$$

où X est un espace normé X. On peut voir la fonction $f : (0,1) \times I \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ comme une fonction associant à $t \longmapsto f(t)$ définie de I dans un espace fonctionnel en posant $f(t) : x \in (0,1) \longmapsto f(x,t)$.

On considère l'équation semi-linéaire intégro-différentielle suivante :

$$(\text{Pb4}) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) + \int_0^t a(t-s)\, k(s, u(x,s))\, ds & \\ \text{avec la condition initiale : } u(x,0) = U_0(x) & x \in (0,1) \\ \text{la condition de Neumann : } \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t) & t \in I \\ \text{et la condition intégrale } \int_0^1 u(x,t)\, dx = E(t) & t \in I \end{cases}$$

On impose les conditions suivantes :

$H_1)$ $f(t) \in L^2(0,1)$ et $\|f(t) - f(t')\|_B \leq l\,|t - t'|$

$H_2)$ $U_0(x) \in H^2(0,1)$

$H_3)$ $\dfrac{\partial U_0}{\partial x} = \alpha(0)$, et $\int_0^1 U_0(x)\,dx = E(0)$

$H_4)$ $\alpha, E \in C^{1,1}(I, \mathbb{R})$

$H_5)$ a : fonction réelle continue tq : $|a(t) - a(t')| \leq c_1\,|t - t'|$.

$k : I \times B(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ est continue pour les deux variables vérifiant : $\|k(t,u)\|_B \leq \|u(t)\|_B$.

$H_6)$

$|k(t,u) - k(t,v)| \leq L(t)\,\|u(t) - v(t)\|_B$ p.p sur I et $\forall u(t), v(t) \in V$ ou $L \in L^1(I)$ positive

Définition 5.1 *Une fonction $u : I \longrightarrow L^2(0,1)$ est dite solution faible du problème (Pb4) si*

i) $u \in L^2(I, L^2(0,1)) \cap C(I, B(0,1))$
ii) u a une dérivé forte $\dfrac{du}{dt} \in L^2(I, B(0,1))$
iii) u vérifie les conditions initiale et intégrale

iv) $\forall v \in L^2(I,V)$, $\displaystyle\int_I \left(\frac{du(t)}{dt}, v(t)\right)_{B_2^1} dt + \int_I (u(t), v(t))\,dt = \int_I (f(t) + K(t)\,u, v(t))_{B_2^1}\,dt$
$\displaystyle + \int_I (\Psi(t), v(t))\,dt$

où $\Psi(x,t) = \alpha(t)\left(x - \frac{1}{2}\right) + E(t), \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times I.$

5.3 Existence et unicité

On pose $t_j = jh$, $j = 0, ..., n$, $h = \frac{T}{n}$.

Alors $\forall n \geq 1$, le problème $(Pb4)$ est approximé par le problème discret suivant :

$$\delta u_j - u_j^{"} = h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i + f_j \tag{5.1}$$

$$u_j'(0) = \alpha_j \tag{5.2}$$

$$\int_0^1 u_j(x)\, dx = E_j \tag{5.3}$$

avec $\delta u_j = \dfrac{u_j - u_{j-1}}{h}$, $f_j = f(x, t_j)$, $\alpha_j = \alpha(t_j)$, $E_j = E(t_j)$, $a_{ji} = a(t_j - t_i)$, $k_i = k(t_i, u_i)$.

Introduisons le problème auxiliaire suivant :

$$\left.\begin{array}{c} -w_j^{"} + \frac{1}{h} w_j = h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i + f_j + \frac{1}{h} w_{j-1} \quad x \in (0,1) \\ w_j'(0) = \alpha_j \\ w_j'(1) = \lambda_j \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

où $w_0 = U_0$ et λ_j pour l'instant est arbitraire mais un réel fixé.

Sachant que $h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i + f_j \in L^2(0,1)$, l'existence et l'unicité d'une solution $w_j \in H^2(0,1)$ du problème elliptique (5.4) sont assurées par le lemme de Lax-Milgram à condition que la fonction précédente w_{j-1} soit connue.

Lemme 5.1 $\forall n \geq 1$ *et pour tout* $\lambda_j \in \mathbb{R}$, *le problème auxiliaire* (5.4), $j = 1, ..., n$ *a une solution unique* $w_j \in H^2(0,1)$.

Preuve. Comme w_j dépend de λ_j, on va écrire $w_j(.,\lambda_j)$ au lieu de w_j. On définit la fonction φ_j comme suit :

$$\varphi_j(\lambda_j) = \int_0^1 w_j(x,\lambda_j)\,dx - E_j \qquad \forall j = 1,...,n \tag{5.5}$$

Donc $w_j(.,\lambda_j)$ est une solution du problème (5.4) ssi λ_j est un zéro de φ_j, alors pour établir l'existence et l'unicité d'une solution du problème (5.4), il suffit de prouver que φ_j possède une seule racine réelle. Introduisons la fonction v_j telle que :

$$w_j(x,\lambda_j) = v_j(x) + \frac{\lambda_j - \alpha_j}{2}x^2 + \alpha_j x \tag{5.6}$$

Il est facile de vérifier que v_j est une solution du problème :

$$\left.\begin{array}{c} -v_j'' + \frac{1}{h}v_j = h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i + f_j + \frac{1}{h}w_{j-1} + \alpha_j\left(\frac{1}{2h}x^2 - \frac{1}{h}x - 1\right) + \lambda_j\left(1 - \frac{1}{2h}x^2\right) \\ v_j'(0) = v_j'(1) = 0 \qquad\qquad x \in (0,1) \end{array}\right\} \tag{5.7}$$

Posons :$v_j = \hat{v}_j + \tilde{v}_j$ où $\hat{v}_j$ et $\tilde{v}_j$ sont les solutions respectivement des problèmes suivants :

$$\left.\begin{array}{l} -\hat{v}_j'' + \frac{1}{h}\hat{v}_j = h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i + f_j + \frac{1}{h}w_{j-1} + \alpha_j\left(\frac{1}{2h}x^2 - \frac{1}{h}x - 1\right) \\ \qquad\qquad \hat{v}_j'(0) = \hat{v}_j'(1) = 0 \\ -\tilde{v}_j'' + \frac{1}{h}\tilde{v}_j = \lambda_j\left(1 - \frac{1}{2h}x^2\right) \\ \qquad\qquad \tilde{v}_j'(0) = \tilde{v}_j'(1) = 0 \end{array}\right\} \tag{5.8}$$

On remarque que $\tilde{v}_j$ dépend uniquement de λ_j. En appliquant la méthode de variation des constantes, on obtient :

$$\tilde{v}_j(x) = \lambda_j\left[\frac{\sqrt{h}}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)}\cosh\frac{x}{\sqrt{h}} - \frac{x^2}{2}\right] \qquad j = 1,...,n \tag{5.9}$$

Substituons dans (5.6), on aura :

$$w_j(x,\lambda_j) = \hat{v}_j(x) + \alpha_j x\left(1-\frac{x}{2}\right) + \lambda_j\left[\frac{\sqrt{h}}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)}\cosh\frac{x}{\sqrt{h}}\right] \tag{5.10}$$

Donc la fonction φ_j dans (5.5) peut s'écrit sous la forme

$$\varphi_j(x) = h\lambda_j + \int_0^1 \left[\hat{v}_j(x) + \alpha_j x\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]dx - E_j \tag{5.11}$$

Ce qui prouve que φ_j admit une seule racine réelle $\bar{\lambda}_j$ donnée par :

$$\bar{\lambda}_j = \frac{1}{h}\left\{E_j - \int_0^1 \left[\hat{v}_j(x) + \alpha_j x\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]dx\right\}. \tag{5.12}$$

Donc on peut énoncer le théorème suivant ■

Théorème 5.1 $\forall n \geq 1$ *et pour tout* $j = 1,...,n$, *le problème* (5.4) *admit une solution unique* u_j *dans* $H^2(0,1)$, *de plus :*

$$u_j(x) = w_j\left(x, \bar{\lambda}_j\right) \qquad x \in (0,1). \tag{5.13}$$

5.4 Estimations a priori

Définissons la fonction de Rothe $u^{(n)} : I \longrightarrow H^2(0.1)$ tq

$$u^{(n)}(t) = u_{j-1} + \delta u_j(t-t_j), \qquad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1,...,n \tag{5.14}$$

alors les fonctions d'état (step functions) sont données par

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j & t \in [t_{j-1}, t_j] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

A présent on va étudier le problème discret dans le cas des conditions homogènes donc

$$\alpha(t) = E(t) = 0 \qquad\qquad t \in I \tag{5.16}$$

Le problème $(5.1) - (5.3)$ s'écrit alors

$$\begin{cases} \delta u_j - u_j^" = h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i + f_j \\ u_j'(0) = 0 \\ \int_0^1 u_j(x)\, dx = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

et la condition H_3 devient

$$\frac{dU_0(0)}{dx} = 0, \text{et} \int_0^1 U_0(x)\, dx = 0 \tag{5.18}$$

Dans tous ce qui suit on suppose que C est une constante indépendante de j, h et de n.

Lemme 5.2 *Il existe $N \in \mathbb{N}$ et une constante C indépendante de j, h et de n telles que $\forall n > N$ on a :*

$$\|u_j\|_B \leq C \qquad j = 1, ..., n \tag{5.19}$$

$$\|\delta u_j\|_B \leq C \qquad j = 1, ..., n \tag{5.20}$$

Preuve. De (5.17) on déduit

$$(\delta u_j, \phi)_B - \left(u_j^", \phi\right)_B = \left(h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i + f_j, \phi\right)_B, \quad \forall \phi \in V \tag{5.21}$$

d'après la première condition dans (5.17)

$$\begin{aligned}\left(u_j^{"},\phi\right)_B &= \int_0^1 \Im_x\left(u_j^{"}\right).\Im_x\phi dx = \int_0^1 \left[u_j'(x)-u_j'(0)\right]\Im_x\phi dx\\ &= \int_0^1 u_j'(x)\,\Im_x\phi dx = u_j(x)\,\Im_x\phi|_0^1 - \int_0^1 u_j\phi dx\\ &= -\left(u_j,\phi\right) \quad \text{car } \phi\in V \quad \text{i.e } \int_0^1 \phi dx = 0\end{aligned}$$

donc

$$(\delta u_j,\phi)_B + (u_j,\phi) = \left(h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i + f_j,\phi\right)_B,\quad \forall\phi\in V. \tag{5.22}$$

Vu la troisième condition dans (5.17) on peut déduire que $u_j\in V$, donc posant $\phi = u_j$ et utilisant l'égalité

$$2\left(u_j-u_{j-1},u_j\right)_B = \|u_j\|_B^2 + \|u_j-u_{j-1}\|_B^2 - \|u_{j-1}\|_B^2 \tag{5.23}$$

et l'ε inégalité (avec $\varepsilon=1$) on obtient :

$$\left(u_j-u_{j-1},u_j\right)_B + h\left(u_j,u_j\right) = h\left(f_j,u_j\right)_B + h^2\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}\left(k_i,u_j\right)_B \tag{5.24}$$

l'ε inégalité avec $\varepsilon=1$ donne

$$\|u_j\|_B^2 \le 2h\|f_j\|_B^2 + 2h\|u_j\|_B^2 + 2Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\|u_i\|_B^2 + 2(j-1)Ch^2\|u_j\|_B^2 + \|u_{j-1}\|_B^2 \tag{5.25}$$

Sachant que

$$\|f_j\|_B^2 \le \|f\|_{C(I,B(0,1))}^2 = C \text{ et } 2(j-1)Ch^2 \le Ch,$$

alors (25) devient

$$\|u_j\|_B^2 \le Ch + Ch\|u_j\|_B^2 + Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\|u_i\|_B^2 + \|u_{j-1}\|_B^2. \tag{5.26}$$

Choisissant N tel que : $C\frac{T}{N} < 1$. Alors pour $n > N$, (26) implique :

$$(1 - Ch) \|u_j\|_B^2 \leq \left(1 + Ch^2\right) \|u_{j-1}\|_B^2 + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-2} \|u_i\|_B^2 + Ch \tag{5.27}$$

Appliquant (27) successivement et on obtient

$$(1 - Ch)^j \|u_j\|_B^2 \leq \left(1 + jCh^2\right)^j \|U_0\|_B^2 + jCh \tag{5.28}$$

Ce qui donne

$$\|u_j\|_B \leq C.$$

Démontrons à présent l'estimation (5.20) . Soit l'égalité

$$(\delta u_1, \phi)_B + h\,(\delta u_1, \phi) = (f_1 + ha_{10}k_0, \phi)_B - (U_0, \phi)\,, \qquad \forall \phi \in V. \tag{5.29}$$

Une intégration par parties donne

$$(U_0, \phi) = \int_0^1 U_0\,(x)\,.\,(\Im_x \phi)'\,dx = -\int_0^1 U_0'\,(x)\,.\Im_x \phi dx$$

comme $U_0'\,(x) = \Im_x\,(U_0''\,(x))$, donc

$$(U_0, \phi) = \int_0^1 \Im_x\,(U_0''\,(x))\,.\Im_x \phi dx = -\,(U_0'', \phi)_B \tag{5.30}$$

par suite (5.29) devient

$$(\delta u_1, \phi)_B + h\,(\delta u_1, \phi) = (f_1 + ha_{10}k_0, \phi)_B + \left(U_0'', \phi\right)_B, \qquad \forall \phi \in V. \tag{5.31}$$

Comme $\delta u_1 \in V$ on peut la prendre comme fonction test dans (5.31), et à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|\delta u_1\|_B^2 + h \|\delta u_1\|_B^2 \leq (\|f_1\|_B + CT \|U_0\|_B + \|U_0''\|_B) \|\delta u_1\|_B \tag{5.32}$$

donc

$$\|\delta u_1\|_B \leq \|f\|_{c(I,B(0,1))} + CT \|U_0\|_B + \|U_0''\|_B = C. \tag{5.33}$$

Considérant la différence $(5.22)_j$ - $(5.22)_{j-1}$ et posant $\phi = \delta u_j$ on aboutit à

$$\|\delta u_j\|_B^2 \leq (f_j - f_{j-1}, \delta u_j)_B + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-2} (k_i, \delta u_j)_B + Ch (k_{j-1}, \delta u_j)_B + (\delta u_{j-1}, \delta u_j)_B \tag{5.34}$$

Une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|\delta u_j\|_B^2 \leq Ch \|\delta u_j\|_B + \left(Ch^2 \sum_{i=0}^{j-2} \|u_i\|_B \right) \|\delta u_j\|_B + Ch \|u_{j-1}\|_B \|\delta u_j\|_B + \|\delta u_{j-1}\|_B \|\delta u_j\|_B \tag{5.35}$$

et donc

$$\|\delta u_j\|_B \leq Ch + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-2} \|u_i\|_B + (1 + Ch) \|\delta u_{j-1}\|_B .. \tag{5.36}$$

Sachant que

$$\|u_i\|_B < C \qquad i = 1, ..., n \text{ et } n > N \quad \text{alors } Ch^2 \sum_{i=0}^{j-2} \|u_i\|_B < Ch,$$

alors

$$\|\delta u_j\|_B \leq Ch + (1 + Ch) \|\delta u_{j-1}\|_B \tag{5.37}$$

Appliquant (37) successivement on obtient

$$\|\delta u_j\|_B \leq (1 + Ch)^{j-1} (1 + \|\delta u_1\|_B) \leq (1 + Ch)^n (1 + \|\delta u_1\|_B) < C.$$

$\blacksquare$

Remarque 5.1 *Du lemme (5.2) on déduit que* $\forall n > N$

$$\left\|u^{(n)}(t)\right\|_B \leq C \ , \quad et \quad \left\|x^{(n)}(t)\right\|_B \leq C \tag{5.38}$$

$$\left\|\frac{du^{(n)}(t)}{dt}\right\|_B \leq C \tag{5.39}$$

$$\left\|x^{(n)}(t) - u^{(n)}(t)\right\|_B \leq \frac{C}{n} \tag{5.40}$$

$$et \quad \left\|u^{(n)}(t) - u^{(n)}(t')\right\|_B \leq C(t-t') \tag{5.41}$$

En effet les inégalités (5.38) *et* (5.39) *résultent directement de* (5.19) *et* (5.20) *en tenant compte de* $\dfrac{du^{(n)}(t)}{dt} = \delta u_j$, $t \in (t_{j-1}, t_j,]$ $1 \leq j \leq n$. (5.40) *se déduit du fait que :*

$$x^{(n)}(t) - u^{(n)}(t) = (t_j - t)\,\delta u_j \qquad t \in (t_{j-1}, t_j,] \quad 1 \leq j \leq n.$$

La relation (5.41) *est obtenue à partir de l'inégalité*

$$\left\|u^{(n)}(t) - u^{(n)}(t')\right\|_B \leq \left|\int_{t'}^{t} \left\|\frac{du^{(n)}(s)}{ds}\right\|_B ds\right|, \quad t, t' \in I.$$

On note par

$$f^n(t) = \begin{cases} f_j, \quad t \in (t_{j-1}, t_j,]\,, \quad 1 \leq j \leq n \\ f_0 = f(0)\,. \end{cases} \tag{5.42}$$

et

$$K^n(0) = ha_{10}k_0, K^n(t) = h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i. \tag{5.43}$$

Soit $v \in L^2(I, V)$ *alors* (5.22) *peut s'écrire comme suit*

$$\left(\frac{du^{(n)}(t)}{dt}, v(t)\right)_B + \left(x^{(n)}(t), v(t)\right) = \left(f^n(t) + K^n(t), v(t)\right)_B \quad pp\ t \in I \tag{5.44}$$

Ce qui donne

$$\int_I \left(\frac{du^{(n)}(t)}{dt}, v(t) \right)_B dt + \int_I \left(x^{(n)}(t), v(t) \right) dt = \int_I \left(f^n(t) + K^n(t), v(t) \right)_B dt \qquad \forall v \in L^2(I, V) \tag{5.45}$$

5.5 Résultats de convergence et existence

Théorème 5.2 *Sous les hypohèses* $H_1 - H_6$*, Il existe une fonction* $u \in L^2(I, V) \cap C(I, B_2^1(0,1))$ *avec* $\frac{du}{dt} \in L^2(I, B_2^1(0,1))$ *et une sous suite* $\left\{u^{(n_k)}\right\}_k \subset \left\{u^{(n)}\right\}_n$, $\left\{x^{(n_k)}\right\}_k \subset \left\{x^{(n)}\right\}_n$ *telles que*

$$u^{(n_k)} \rightharpoonup u \quad dans\ L^2(I, V_B) \tag{5.46}$$

$$x^{(n_k)} \rightharpoonup u \quad dans\ L^2(I, V_B) \tag{5.47}$$

$$\frac{du^{(n_k)}}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad dans\ \ L^2(I, B(0,1)) \tag{5.48}$$

Preuve. A partir de (5.39) il résulte que $\left\{u^{(n)}\right\}_n$ et $\left\{x^{(n)}\right\}_n$ sont uniformément bornées dans $L^2(I, V_B)$ et par suite on peut extraire deux suites $\left\{u^{(n_k)}\right\}_k$ et $\left\{x^{(n_k)}\right\}_k$ convergent faiblement et respectivement vers deux fonctions u et $\bar{u}$ quand $k \to +\infty$. Démontrons que $u = \bar{u}$.

Comme $V_B \hookrightarrow B(0,1)$ alors

$$\begin{aligned} u^{(n_k)} &\rightharpoonup u \text{ dans } L^2(I, B(0,1)) \\ x^{(n_k)} &\rightharpoonup \bar{u} \text{ dans } L^2(I, B(0,1)) \end{aligned}$$

De plus

$$x^{(n_k)} - u = \left(x^{(n_k)} - u^{(n_k)}\right) + \left(u^{(n_k)} - u\right)$$

utilisant (40) on a $\left|\left(x^{(n_k)}-u,v\right)_{L^2(I,B(0,1))}\right| \leq \left\|x^{(n_k)}-u^{(n_k)}\right\|_{L^2(I,B(0,1))}\|v\|_{L^2(I,B(0,1))}$

$$\begin{aligned} & +\left|\left(u^{(n_k)}-u,v\right)_{L^2(I,B(0,1))}\right| \\ \leq\ & \frac{C}{n_k}\|v\|_{L^2(I,B(0,1))}+\left|\left(u^{(n_k)}-u,v\right)_{L^2(I,B(0,1))}\right| \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \end{aligned}$$

quand $k \longrightarrow +\infty$ les deux termes dans le membre droit de la dernière inégalité tendent vers zéro et de l'unicité de la limite on a $\bar{u}=u$. De l'estimation (5.39) on déduit que $\left\{\dfrac{du^{(n)}}{dt}\right\}_n$ est uniformément bornée dans $L^2(I,B(0,1))$, donc on peut extraire une sous suite $\left\{\dfrac{du^{(n_k)}}{dt}\right\}_k$ qui converge faiblement vers une fonction w dans $L^2(I,B(0,1))$ i.e :

$$\frac{du^{(n_k)}}{dt} \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad L^2(I,B(0,1))$$

Démontrons que $w=\dfrac{du}{dt}$. En passant à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$ dans

$$u^{(n_k)}(t)=U_0+\int_0^t \frac{du^{(n_k)}(s)}{ds}, \quad \forall t\in I \tag{5.49}$$

alors

$$u(t)=U_0+\int_0^t w(s)ds \qquad \forall t' \in I \tag{5.50}$$

Ce qui prouve que $u\in C(I,B(0,1))$ et $w=\frac{du}{dt}$ dans $L^2(I,B(0,1))$. ∎

Théorème 5.3 *La fonction u est l'unique solution faible du problème* $(Pb4)$ *homogène* (5.17) *au sens de la définition* (5.1).

Preuve. D'après ce qui précède, on a : $u\in L^2(I,V_B)\cap C(I,B(0,1))$ et par suite u vérifie la condition intégrale avec $E(t)=0$ puisque $u(t)\in V_B$ pp $t\in I$. D'autre part :(5.50) $\Longrightarrow u(0)=U_0$ et donc la condition initiale est aussi satisfaite. En vertu du théorème 5.2, $\dfrac{du}{dt}\in L^2(I,B(0,1))$. D'après (H_1) on a

$$\|f^n(t)-f(t)\|_B \leq \frac{C}{n} \quad pp \tag{5.51}$$

ce qui donne

$$\|f^n(t) - f(t)\|_{L^2(I,B(0,1))} \leq \frac{C}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c-à-d

$$f^n \longrightarrow f \quad \text{dans } L^2(I, B(0,1)). \tag{5.52}$$

On a besoin des lemmes suivants ■

Lemme 5.3 *La suite* $\{K^n(t)\}_n$ *est uniformément bornée dans* $L^2(I, B(0,1))$ *et possède une sous suite* $\{K^{n_k}(t)\}_k$ *telle que*

$$K^{n_k}(t) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\rightharpoonup} K(t) \quad \text{dans } L^2(I, B(0,1)). \tag{5.53}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \|K^n(t)\|_B &= \left\| h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i \right\|_B \leq \frac{T}{n}\max_I |a(t)| \sum_{i=0}^{j-1} \|k_i\|_B \\ &\overset{(H_5)}{\leq} \frac{T}{n}\max_I |a(t)| \sum_{i=0}^{j-1} \|u_i\|_B \overset{(5.19)}{\leq} C \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|K^n(t)\|^2_{L^2(I,B(0,1))} = \int_I \|K^n(t)\|^2_B \, dt \leq C$$

D'autre part, dans [4] l'auteur a démontré que $K^n(t) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} K(t) \quad$ dans $L^\infty(I, H)$ et pour $H = B(0,1)$ on aura $K^n(t) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} K(t) \quad$ dans $L^\infty(I, B(0,1))$. L'injection $L^\infty(I, B(0,1)) \hookrightarrow L^2(I, B(0,1))$ implique

$$K^n(t) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} K(t) \quad \text{dans } L^2(I, B(0,1)).$$

■

Lemme 5.4 *Il existe une sous suite* $\{x^{(n_k)}\}_k$ *de* $\{x^{(n)}\}_n$ *telle que*

$$x^{(n_k)} \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(I, V)$$

Preuve. De (5.45) on conclut que

$$\int_I \left(x^{(n)}(t), v(t)\right) dt = \int_I \left(f^n(t) + K^n(t), v(t)\right)_B dt - \int_I \left(\frac{du^{(n)}(t)}{dt}, v(t)\right)_B dt$$

l'inégalité de Cauchy Schwarz implique

$$\begin{aligned} \left|\int_I \left(x^{(n)}(t), v(t)\right) dt\right| \leq\; & \frac{1}{2}\|f^n\|_{L^2(I,B(0,1))}\|v\|_{L^2(I,V)} + \frac{1}{2}\|K^n\|_{L^2(I,B(0,1))}\|v\|_{L^2(I,V)} \\ & + \frac{1}{2}\left\|\frac{du^{(n)}}{dt}\right\|_{L^2(I,B(0,1))}\|v\|_{L^2(I,V)} \end{aligned} \tag{5.54}$$

d'où

$$\frac{\left|\int_I \left(x^{(n)}(t), v(t)\right) dt\right|}{\|v\|_{L^2(I,V)}} \leq \frac{1}{2}\left[\|f^n\|_{L^2(I,B(0,1))} + \|K^n\|_{L^2(I,B(0,1))} + \left\|\frac{du^{(n)}}{dt}\right\|_{L^2(I,B(0,1))}\right] = C$$

par suite

$$\sup_{\substack{v\in L^2(I,V)\\ v\neq 0}} \frac{\left|\int_I \left(x^{(n)}(t), v(t)\right) dt\right|}{\|v\|_{L^2(I,V)}} \leq C. \tag{5.55}$$

Si on pose :

$$F_{x^{(n)}} : L^2(I,V) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définit par : } F_{x^{(n)}}(v) = \int_I \left(x^{(n)}(t), v(t)\right) dt,\ v \in L^2(I,V) \tag{5.56}$$

on aura

$$F_{x^{(n)}} \in \left(L^2(I,V)\right)'.$$

Sachant que la correspondance $x^{(n)} \longrightarrow F_{x^{(n)}}$ est un isomorphisme isométrique de $L^2(I,V)$ sur un sous espace de $(L^2(I,V))'$ alors

$$\left\|x^{(n)}\right\|_{L^2(I,V)} = \|F_{x^{(n)}}\|_{(L^2(I,V))'} \leq C$$

donc $\left\{x^{(n)}\right\}_n$ est uniformément bornée dans $L^2(I,V)$. Et par suite on peut extraire une sous suite $\left\{x^{(n_k)}\right\}_k$ de $\left\{x^{(n)}\right\}_n$ telle que

$$x^{(n_k)} \rightharpoonup \overset{*}{u} \ \text{ dans } L^2(I,V).$$

L'injection

$$V \hookrightarrow B(0,1) \ \text{ implique } x^{(n_k)} \rightharpoonup \overset{*}{u} \ \text{ dans } L^2(I,B(0,1)).$$

ce qui donne $\overset{*}{u} = u$ c-à-d (l'unicité de la limite)

$$x^{(n_k)} \rightharpoonup u \ \text{ dans } L^2(I,V) \tag{5.57}$$

(Il résulte que $u \in L^2(I,L^2(0,1)) \cap C(I,B(0,1))$ est vérifie la condition intégrale dans le cas homogène).

Finalement : Posant $n = n_{k \longrightarrow +\infty}$ dans (5.45) et tenant compte des relations (5.47), (5.48), (5.53) et (5.57) on trouve

$$\int_I \left(\frac{du(t)}{dt}, v(t)\right)_B dt + \int_I (u(t), v(t))\, dt = \int_I (f(t) + K(t), v(t))_B\, dt \qquad \forall v \in L^2(I,V) \tag{5.58}$$

D'où u est la solution faible du problème (Pb4) au sens de la définition (5.1) dans le cas des conditions homogènes. ■

Remarque 5.2 *La relation* (5.39) *implique*

$$\frac{du(t)}{dt} \in L^\infty(I,B(0,1)).$$

On termine maintenant la démonstration du théorème 5.3.

Preuve. on suppose que u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (Pb4), alors $u = u_1 - u_2$ vérifie

$$\int_I \left(\tfrac{du(t)}{dt}, v(t)\right)_B dt + \int_I (u(t), v(t))\, dt = \int_I \left(\int_0^t a(t-s)\left[k(s,u_1) - k(s,u_2)\right], v(t)\right)_B dt, \forall v \in L^2 (I \tag{5.59}$$

Soit W tel que $W = 2\max_I |a(t)| \int_0^T L(t)\, dt$. On subdivise l'intervalle I en un nombre fini des sous intervalles de longueur égale à p telle que

$$W.p < 1 \tag{5.60}$$

et prenons dans (5.59)

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0,p] \\ 0, & t \in \left]p,T\right] \end{cases}$$

Comme $v \in L^2(I,V)$, on peut écrire

$$\int_0^p \left(\frac{du(t)}{dt}, u(t)\right)_B dt + \int_0^p \|u(t)\|^2 dt = \int_0^p \left(\int_0^t a(t-s)\left[k(s,u_1) - k(s,u_2)\right] ds, u(t)\right)_B dt \tag{5.61}$$

En vertu de la formule $2\left(\dfrac{du(t)}{dt}, u(t)\right)_B dt = \dfrac{d}{dt}\|u(t)\|_B^2$, (H_6), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on arrive à

$$\begin{aligned} \int_0^p \frac{d}{dt}\|u(t)\|_B^2 &\leq 2\int_0^p \left\|\int_0^t a(t-s)\left[k(s,u_1(s)) - k(s,u_2(s))\right] ds\right\|_B \|u(t)\|_B\, dt \\ &\leq 2\max_I |a(t)| \int_0^p \left\|\int_0^t L(s)\|u(s)\|_{B_2^1} ds\right\|_B \|u(t)\|_B\, dt \\ &\leq 2\max_I |a(t)| \int_0^T L(t)\, dt.p.\max_{t\in[0,p]} \|u(t)\|_B^2 . \end{aligned} \tag{5.62}$$

Soit $t_1 \in [0,p]$ tel que $\max_{t\in[0,p]} \|u(t)\|_{B_2^1} = \|u(t_1)\|_{B_2^1}$, alors

$$\int_0^{t_1} \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{B_2^1}^2 \leq \int_0^p \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{B_2^1}^2 . \tag{5.63}$$

Ainsi, (5.62) nous donne

$$\int_0^{t_1} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2_{B_2^1} = \|u(t_1)\|^2_{B_2^1} \leq W.p \|u(t_1)\|^2_{B_2^1} \tag{5.64}$$

et d'après (5.60), on a

$$u(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, p].$$

En appliquant le même procédure sur les intervalles $[ip, (i+1)p]$, $i = 1,...$, on arrive à

$$u(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

D'où $u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t \in [0, T]$. ■

Cas des conditions non homogènes

Traitant maintenant le cas général on a donc

$$(\delta u_j, \phi)_{B_2^1} + (u_j, \phi) = (K_j + f_j, \phi)_{B_2^1} - \alpha_j \int_0^1 \Im_x \ \phi dx, \forall \phi \in V \tag{5.65}$$

où $K_j = h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i$.

(Remarquons que u_j et δu_j ne sont pas dans V, par suite on ne peut pas les prendre comme des fonctions testes).

Pour utiliser les résultats obtenus dans le cas homogène on introduit la transformation suivante :

$$u_j = \widetilde{u_j} + \Psi_j \qquad j = 0, ..., n \tag{5.66}$$

où

$$\Psi_j(x) = \alpha_j \left(x - \frac{1}{2} \right) + E_j, \quad x \in (0,1), \quad j = 0, ..., n \tag{5.67}$$

Il résulte que $\Psi_j'(0) = \alpha_j$ et $\int_0^1 \Psi_j(x) dx = E_j$. Comme $\Psi_j''(x) = 0$ le problème $(1-3)$ alors devient

$$\begin{cases} \delta \widetilde{u_j} - \widetilde{u_j}'' = K_j + f_j - \delta \Psi_j, \quad j = 1, ..., n \\ \widetilde{u_j}'(0) = 0, \quad \int_0^1 \widetilde{u_j}(x) dx = 0, \quad \widetilde{u_0} = U_0 - \Psi_0 \end{cases} \tag{5.68}$$

avec $\delta\Psi_j = \dfrac{\Psi_j - \Psi_{j-1}}{h}$. Il est clair que le problème obtenu est exactement le même que celui qu'on a traité dans le cas homogène avec $U_0 - \Psi_0$ et $K_j + f_j - \delta\Psi_j$ au lieu de U_0 et $K_j + f_j$ (resp.).

Définissons Ψ par

$$\Psi(x,t) = \alpha(t)\left(x - \frac{1}{2}\right) + E(t), \quad (x,t) \in (0,1) \times I$$

Alors (5.68) est le problème discret associé au problème suivant

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = \widetilde{f} \quad \text{dans } (0,1) \times I \tag{5.69}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{U}_0 \qquad x \in (0,1) \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(0,t) = 0 \qquad t \in I \tag{5.71}$$

$$\int_0^1 \widetilde{u}(x,t)\,dx = 0 \qquad t \in I \tag{5.72}$$

avec $\widetilde{f} = f + K - \dfrac{d\Psi}{dt}$, $\widetilde{U}_0 = U_0 - \Psi_{0.}$ En vertu de l'hypothése (H_4) on a $\dfrac{d\Psi}{dt} \in C^{0,1}(I, B_2^1(0,1))$,de même pour $f - \dfrac{d\Psi}{dt}$, donc (H_1) est vérifiée. Les conditions (H_2) et (H_3) impliquent que $\widetilde{U}_0 \in H^2(0,1), \widetilde{U}_0' = 0$ et $\int_0^1 \widetilde{U}_0(x)\,dx = 0.$, et aussi toutes les hypothèses du cas homogène sont satisfaites.

Théorème 5.4 *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_6)$, le problème $(Pb4)$ possède une unique solution faible au sens de la définition* (5.1).

Preuve. Considérons la fonction

$$u = \widetilde{u} + \Psi. \tag{5.73}$$

Comme $\widetilde{u}$ et Ψ sont dans $L^2(I, L^2(0,1)) \cap C(I, B_2^1(0,1))$ alors

$$u \in L^2\left(I, L^2(0,1)\right) \cap C\left(I, B_2^1(0,1)\right), \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \frac{d\Psi}{dt} \in L^2\left(I, B_2^1(0,1)\right).$$

On a aussi $u(0) = U_0$ et $\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 \Psi(x,t)\,dx = E(t)$. Substituons $\widetilde{f} = f + K - \dfrac{d\Psi}{dt}$ et (5.73) dans (5.58) (pour $\widetilde{u}$) on obtient

$$\begin{aligned} \int_I \left(\frac{du(t)}{dt}, v(t)\right)_{B_2^1} dt + \int_I (u(t), v(t))\,dt &= \int_I (f(t) + K(t)\,u, v(t))_{B_2^1}\,dt \\ &+ \int_I (\Psi(t), v(t))\,dt \quad \forall v \in L^2(I, V). \end{aligned} \tag{5.74}$$

Par suite u défini par (5.73) est une solution faible du problème $(Pb4)$. L'unicité de u découle de celle de la solution du problème $(5.69) - (5.72)$. ■

Chapitre 6

Etude dune équation hyperbolique intégro-différentielle avec condition intégrale

Résumé

Nous étudions dans ce chapitre une équation semilinéaire hyperbolique intégro-différentielle avec des conditions intégrales.

Beaucoup de travaux sont consacrés à ce type de problèmes, on peut citer les travaux de Kacur $[34-38]$ et Bahaguna $[1-6]$, Bouziani[11, 10-12]. Sous différents hypothèses, les auteurs ont appliqué la méthode de Rothe dans l'étude des équations linéaires hyperboliques.

6.1 Introduction

Les équations différentielles avec conditions non locales intégrales constituent une classe très intéressante et importante de problèmes aux limites. Les premiers résultats sur ce sujet reviennent à Cannon [16], Kamynin [69] et Ionkin [19]. Dans [2] l'auteur a utilisé la méthode de Galerkin et a établi la solution numérique de l'équation de la chaleur avec une condition intégrale. Pour les problèmes avec conditions intégrales nous renvoyons le lecteur aux travaux [10-12, 63-68].

La méthode de Rothe, qui est un outil puissant pour prouver l'existence et l'unicité des solutions des équations d'évolution. Pour une riche illustration de la méthode appliquée aux différents problèmes de physique nous nous référons à Rektorys [76] Bahuguna et Dabas [5,6] Bouziani [11, 66].

Le but de ce chapitre est d'étudier une équations hyperbolique intégrodifférentielle avec des conditions initiales et intégrales par la méthode de Rothe. On ramène les conditions intégrales non homogènes à des conditions homogènes en introduisant une nouvelle fonction puis on démontre que sous certaines conditions sur les fonctions apparaissant dans l'équation, l'existence et l'unicité de la solution faible.

6.2 Hypothèses et espaces fonctionnels

Soit $I = [0, T]$, on note par $(,)$, et $\|.\|$ le produit scalaire de $L^2(0,1)$ et la norme correspondante. On considère l'équation intégro-différentielle suivante

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = g(x,t) + \int_0^t a(t-s)\,k(s,\theta(x,s))\,ds \qquad (x,s) \in (0,1)\times(0,T) \tag{6.1}$$

à laquelle sont jointes les conditions initiales

$$\theta(x,0) = \theta_0(x)\,,\ \frac{\partial\theta}{\partial x}(x,0) = \theta_1(x) \qquad x \in (0,1) \tag{6.2}$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 \theta(x,t)\,dx = E(t) \tag{6.3}$$

$$\int_0^1 x\theta(x,t)\,dx = M(t) \tag{6.4}$$

En utilisant la transformation

$$u(x,t) = \theta(x,t) - r(x,t)$$

où

$$r(x,t) = 6\left(2M(t) - E(t)\right)x - 2\left(3M(t) - 2E(t)\right),$$

le problème (6.1)-(6.4), peut être remplacé par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) + \int_0^t a(t-s)\,k(s,u(x,s))\,ds \qquad (x,s) \in (0,1)\times(0,T) \tag{6.5}$$

$$u(x,0) = U_0(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = U_1(x) \qquad\qquad x \in (0,1) \tag{6.6}$$

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 xu(x,t)\,dx = 0 \tag{6.7}$$

où

$$\begin{aligned} f(x,t) &= g(x,t) - \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ U_0(x) &= \theta_0(x) - r(x,0) \\ U_1(x) &= \theta_1(x) - \frac{\partial r}{\partial t}(x,0)\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

La solution du problème $(6.1)-(6.4)$, sera obtenue par la formule

$$\theta(x,t)=u(x,t)+r(x,t),$$

on va donc résoudre le problème $(6.5)-(6.7)$.qu'on va noté par (Pb5).

A présent on définit le cadre fonctionnel dans lequel on va travailler. On note par V l'espace de Hilbert défini par :

$$V=\left\{v\in L^2(0,1)\ :\int_0^1 v(x)\,dx=\int_0^1 xv(x)\,dx=0\right\} \tag{6.9}$$

Pour résoudre le problème (Pb5), on impose les conditions suivantes :

$H_1)$ $f(t)\in L^2(0,1)$ et $\|f(t)-f(t')\|_B\le l\,|t-t'|$, où l est une constante positive

$H_2)$ $U_0(x)$ et $U_1(x)\in H^2(0,1)$

$H_3)$

$$\int_0^1 U_0(x)\,dx=\int_0^1 xU_0(x)\,dx=0 \tag{6.10}$$

$$\int_0^1 U_1(x)\,dx=\int_0^1 xU_1(x)\,dx=0 \tag{6.11}$$

$H_4)$ a est une fonction continue telle que $|a(t)-a(t')|\le c_1\,|t-t'|$

$k\,:\,I\times B_2^1(0,1)\longrightarrow L^2(0,1)$ est continue par rapport aux deux variables et vérifie $\|k(t,u)\|_B\le\|u(t)\|_B$.

$H_5)$ Pour $u(t)\,,\,v(t)\in V$, on a

$$\|k(t,u)-k(t,v)\|\le L(t)\,\|u(t)-v(t)\|_B$$

p.p $t\in I$ où $L\in L^1(I)$ une fonction positive.

Définition 6.1 *Une fonction* $u:I\longrightarrow L^2(0,1)$ *est dite solution faible du (Pb5) si*

1) $u\in C^{0,1}(I,V)$

2) $\frac{du}{dt} \in L^{\infty}(I, V) \cap C^{0,1}\left(I, B_2^1(0,1)\right)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^{\infty}\left(I, B_2^1(0,1)\right)$.

3) $u(0) = U_0$ *dans* V *et* $\frac{du}{dt}(0) = U$ *dans* $B_2^1(0,1)$

4) *Pour tout* $\phi \in V$ *et p.p.t* $\in I$, *l'identité*

$$\int_I \left(\frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \phi \right)_{B_2^1} dt + \int_I (u(t), \phi)\, dt = \int_I \left(f(t) + \int_0^t a(t-s)\, k(s,u)\, ds, \phi \right)_{B_2^1} dt \tag{6.12}$$

est satisfaite.

Notre but est de démontrer le théorème suivant

Théorème 6.1 *Supposons que les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$ *sont vérifiées , alors il existe une solution faible u du problème (Pb5) au sens de la définition 5.1. De plus, si* (H_5) *est satisfaite, alors u est unique.*

6.3 Schéma de discrétisation et estimations a priori

On divise l'intervalle en n en sous intervalles de longueur $h = \frac{T}{n}$, et on note $u_j = u(t_j)$,où $t_j = jh$, $j = 1, ..., n$

Pour $j = 1, ..., n$ on résout successivement le problème stationnaire linéaire suivant

$$\frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} - \frac{d^2 u_j}{dx^2} = f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \tag{6.13}$$

$$\int_0^1 u_j(x)\, dx = 0 \tag{6.14}$$

$$\int_0^1 x u_j(x)\, dx = 0 \tag{6.15}$$

où $f_j = f(t_j)$, $a_{ji} = a(t_j - t_i)$, et $k_i = k(t_i, u_i)$.

Posons

$$u_{-1}(x) = U_0(x) - hU_1(x), \; u_0(x) = U_0(x) \quad x \in (0,1)$$

$$\delta u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h},\ \delta^2 u_j = \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h^2}, \qquad j = 0, ..., n$$

et définissons la suite de Rothe (u_n) des fonctions lipchitziennes continues de $I \longrightarrow H^2(0,1) \cap V$ par

$$u^{(n)}(t) = u_{j-1} + \delta u_j (t - t_j), \qquad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n \tag{6.16}$$

et les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\delta u^{(n)}(t) = \delta u_{j-1} + \delta^2 u_j (t - t_j), \qquad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n \tag{6.17}$$

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j & t \in (t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n \\ U_0 & t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{6.18}$$

$$\bar{\delta u}^{(n)}(t) = \begin{cases} \delta u_j & t \in (t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, ..., n \\ U_1 & t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{6.19}$$

Théorème 6.2 *Le problème* $(6.14) - (6.16)$ *possède une unique solution* $u_j \in H^2(0,1)$ *pour* $n \geq 1,\ j = 1, ..., n$

Preuve. Supposons que u_{j-1} et u_{j-2} sont connues et qu'elles soient dans $H^2(0,1)$, alors $f_j \in L^2(0,1)$ et la solution de () est donnée par

$$u_j(x) = k_1(x) \cosh \frac{x}{h} + k_2(x) \sinh \frac{x}{h}, \quad x \in (0,1) \tag{6.20}$$

où k_1 et k_2 sont deux fonctions de x telles que

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dk_1}{dx}(x) \cosh \dfrac{x}{h} + \dfrac{dk_2}{dx}(x) \sinh \dfrac{x}{h} = 0 \\ \dfrac{dk_1}{dx}(x) \sinh \dfrac{x}{h} + \dfrac{dk_2}{dx}(x) \cosh \dfrac{x}{h} = h \left[\dfrac{-2u_{j-1} + u_{j-2}}{h} - f_j - h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right] \end{array}\right\} \tag{6.21}$$

En remarquant que le déterminant de (6.21) est

$$\Delta = \cosh^2 \frac{x}{h} - \sinh^2 \frac{x}{h} = 1 \tag{6.23}$$

alors

$$\frac{dk_1}{dx}(x) = hF_j(x) \sinh \frac{x}{h}$$

$$\frac{dk_2}{dx}(x) = hF_j(x) \cosh \frac{x}{h} \tag{6.24}$$

avec

$$F_j = \frac{-2u_{j-1} + u_{j-2}}{h} - f_j - h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \tag{6.25}$$

ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} k_1(x) = h \int_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{\xi}{h} d\xi + \lambda_1 \\ k_2(x) = h \int_0^x F_j(\xi) \cosh \frac{\xi}{h} d\xi + \lambda_2 \end{array}\right\} \tag{6.26}$$

De l'identité (6.16), on déduit

$$u_j(x) = h \int_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{x - \xi}{h} d\xi + \lambda_1 \cosh \frac{x}{h} + \lambda_2 \sinh \frac{x}{h} \tag{6.27}$$

choisissons alors (λ_1, λ_2) telle que (6.14) et (6.15) soient vérifiées, alors

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 \int_0^1 \cosh \frac{x}{h} dx + \lambda_2 \int_0^1 \sinh \frac{x}{h} dx = -h \int_0^1 \int_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \\ \lambda_1 \int_0^1 x \cosh \frac{x}{h} dx + \lambda_2 \int_0^1 x \sinh \frac{x}{h} dx = -h \int_0^1 \int_0^x x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \end{array}\right\} \tag{6.28}$$

et par suite

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1 \sinh\frac{1}{h}+\lambda_2\left(\cosh\frac{1}{h}-1\right)=-\int_0^1\int_0^x F_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}d\xi dx\\ \lambda_1\left(\sinh\frac{1}{h}-h\cosh\frac{1}{h}+h\right)+\lambda_2\left(\cosh\frac{1}{h}-h\sinh\frac{1}{h}\right)=\int_0^1\int_0^x xF_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}d\xi dx\end{array}\right\}\tag{6.29}$$

Comme le déterminant de (6.29)

$$\triangle(h)=2h-2h\cosh\frac{1}{h}+\sinh\frac{1}{h}=2\sinh\frac{1}{2h}\left(\cosh\frac{1}{2h}-2h\sinh\frac{1}{2h}\right)\tag{6.30}$$

ne s'annule pas $\forall h>0$, alors le système (6.29) admet une unique solution $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, ce qui implique que le problème $(6.13)-(6.15)$ a une unique solution $u_j\in H^2(0,1)$ (puisque $F_j\in L^2(0,1)$).

Remarque 6.1 *Dans la suite, On dénote par C une constante positive indépendante de n, j, et de h.*

Lemme 6.1 *Il existe une constante $C>0$ et un entier naturel $N\in\mathbb{N}^*$ tq :*

$$\|\delta u_j\|^2_{B_2^1}+\|u_j\|^2\le C\qquad j=1,...,n,\ n>N$$

Preuve

Soit $\phi\in V$. Il est facile de voir

$$\int_0^x(x-\xi)\phi(\xi)d\xi=\Im_x^2\phi,\ \forall x\in(0,1)\ \text{ ou }\Im_x^2\phi:=\Im_x(\Im_\xi\phi)=\int_0^x d\xi\int_0^\xi\phi(\mu)d\mu.$$

Ceci implique

$$\Im_1^2\phi=\int_0^1(1-\xi)\phi(\xi)d\xi=\int_0^1\phi(\xi)d\xi-\int_0^1\xi\phi(\xi)d\xi\tag{6.31}$$

Multipliant (6.13) par $\Im_x^2\phi$ pour tout $j = 1, ..., n$ et intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\int_0^1 \delta^2 u_j(x)\,\Im_x^2\phi dx - \int_0^1 \frac{d^2u_j}{dx^2}(x)\,\Im_x^2\phi dx = \int_0^1 \left(f_j(x) + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x^2\phi dx \qquad (6.32)$$

Par une intégration par parties chaque terme de (6.32) et utilisant (6.30) on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \delta^2 u_j(x)\,\Im_x^2\phi dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\Im_x\left(\delta^2 u_j\right)\right)\Im_x^2\phi dx \\
&= \Im_x\left(\delta^2 u_j\right)\Im_x^2\phi\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \Im_x\left(\delta^2 u_j\right)\Im_x\phi dx \\
&= -\left(\delta^2 u_j, \phi\right)_{B_2^1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{d^2u_j}{dx^2}(x)\,\Im_x^2\phi dx &= \frac{du_j}{dx}(x)\,\Im_x^2\phi\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x)\,\Im_x\phi dx = -\int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x)\,\Im_x\phi dx \\
&= -u_j(x)\,\Im_x\phi\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u_j(x)\,\phi(x)\,dx = (u_j, \phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x^2\phi dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\Im_x\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x^2\phi dx \\
&= \Im_x\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x^2\phi - \int_0^1 \Im_x\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x\phi dx \\
&= -\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i, \phi\right)_{B_2^1} \qquad (6.33)
\end{aligned}$$

Alors (6.32) devient

$$\left(\delta^2 u_j, \phi\right)_{B_2^1} + (u_j, \phi) = \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i, \phi\right)_{B_2^1}, \quad \forall\phi \in V,\ \forall j = 1, ..., n \qquad (6.34)$$

Posons $\phi = \delta u_j$ (il est clair que $\delta u_j \in V$) dans (6.34) on obtient

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j)_{B_2^1} + (u_j, u_j - u_{j-1}) = h^2 \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji}k_i, \delta u_j)_{B_2^1} + h\,(f_j, \delta u_j)_{B_2^1}$$

En utilisant les identités

$$2\,(u_j, u_j - u_{j-1}) = \|u_j\|^2 + \|u_j - u_{j-1}\|^2 - \|u_{j-1}\|^2$$

$$2\,(\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j)_{B_2^1} = \|\delta u_j\|^2_{B_2^1} + \|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} - \|\delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|\delta u_j\|^2_{B_2^1} - \|\delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \quad &\leq \quad 2Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|k_i\|_{B_2^1} \|\delta u_j\|_{B_2^1} \\ &\quad +2h\,\|f_j\|_{B_2^1} \|\delta u_j\|_{B_2^1} \end{aligned} \tag{6.35}$$

l'ε inégalité pour $\varepsilon = 1$ implique

$$2\,\|k_i\|\,\|\delta u_j\|_{B_2^1} \leq 2\,\|u_i\|\,\|\delta u_j\|_{B_2^1} \leq \|u_i\|^2 + \|\delta u_j\|^2_{B_2^1}$$

$$2h\,\|f_j\|_{B_2^1} \|\delta u_j\|_{B_2^1} \leq 2h\,\|f\|_{C\left(I, B_2^1\right)} \|\delta u_j\|_{B_2^1} \leq h + Ch\,\|\delta u_j\|^2_{B_2^1}$$

Substituant ces inégalités dans (6.35) on obtient

$$\|\delta u_j\|^2_{B_2^1} - \|\delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \leq Ch\,\|\delta u_j\|^2_{B_2^1} + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|u_i\|^2 + Ch \tag{6.36}$$

Choisissant N tel que $C\frac{T}{N} < 1$,alors pour $n > N$ l'inégalité (6.36) implique

$$\begin{aligned} (1 - Ch)\left[\|\delta u_j\|^2_{B_2^1} + \|u_j\|^2\right] \quad &\leq \quad \left(1 - Ch^2\right)\left[\|\delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} + \|u_{j-1}\|^2\right] \\ &\quad +Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|u_i\|^2 + Ch \end{aligned} \tag{6.37}$$

En appliquant cette inégalité récursivement on obtient

$$(1 - Ch)^j \left[\|\delta u_j\|^2_{B^1_2} + \|u_j\|^2\right] \leq \left(1 + jCh^2\right)^j \left[\|\delta u_0\|^2_{B^1_2} + \|U_0\|^2\right] + jCh$$

ce qui implique

$$\|\delta u_j\|^2_{B^1_2} + \|u_j\|^2 \leq C.$$

Lemme 6.2 *Il existe une constante $C > 0$ et entier $N \in \mathbb{N}^*$ tq :*

$$\left\|\delta^2 u_j\right\|^2_{B^1_2} + \|\delta u_j\|^2 \leq C., \quad j = 1, ..., n > N$$

Preuve :

Considérant la difference $(34)_j - (34)_{j-1}$, on trouve

$$\begin{aligned}\left(\delta^2 u_j, \phi\right)_{B^1_2} + (u_j - u_{j-1}, \phi) &= \left(\delta^2 u_{j-1}, \phi\right)_{B^1_2} + (a_{jj-1} k_{j-1}, \phi)_{B^1_2} \\ &\quad + h \sum_{i=0}^{j-2} \left((a_{ji} - a_{j-1i}) k_i, \phi\right)_{B^1_2} \\ &\quad + (f_j - f_{j-1}, \phi)_{B^1_2} \end{aligned} \tag{6.38}$$

Posant $\phi = \delta^2 u_j$ dans (6.38) on obtient

$$\begin{aligned} 2\left\|\delta^2 u_j\right\|^2_{B^1_2} + 2(\delta u_j, \delta u_j - \delta u_{j-1}) &= 2\left(\delta^2 u_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_{B^1_2} + 2h\left(a_{jj-1} k_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_{B^1_2} \\ &\quad + 2h \sum_{i=0}^{j-2} \left((a_{ji} - a_{j-1i}) k_i, \delta^2 u_j\right)_{B^1_2} \\ &\quad + 2\left(f_j - f_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_{B^1_2} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
2\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2+\left\|\delta u_j\right\|^2-\left\|\delta u_{j-1}\right\|^2 &\leq \left\|\delta^2 u_{j-1}\right\|_{B_2^1}^2+\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2 \\
&+2Ch\left\|k_{j-1}\right\|_{B_2^1}\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1} \\
&+2Ch^2\sum_{i=0}^{j-2}\left\|k_i\right\|_{B_2^1}\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1} \\
&+2\left\|f_j-f_{j-1}\right\|\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1} \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

Sachant que $\|k_i\|_{B_2^1} \leq \|u_i\| \leq C$ et en utilisant l'ε inégalité pour $\varepsilon = 1$ on obtient

$$2Ch\left\|k_{j-1}\right\|_{B_2^1}\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1} \leq Ch\left\|k_{j-1}\right\|_{B_2^1}^2+Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2 \leq Ch+Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
2Ch^2\sum_{i=0}^{j-2}\left\|k_i\right\|_{B_2^1}\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1} &\leq Ch^2\sum_{i=0}^{j-2}\left(\left\|k_i\right\|_{B_2^1}^2+\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2\right) \\
&\leq (j-1)\,Ch^2+(j-1)\,Ch^2\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2 \\
&\leq Ch+Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2
\end{aligned}$$

le dernier terme du membre droit de (6.39) est estimé par

$$2\left\|f_j-f_{j-1}\right\|\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1} \leq 2Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1} \leq Ch+Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2$$

Substituant cette inégalité dans (6.39) on aura

$$\begin{aligned}
\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2-\left\|\delta^2 u_{j-1}\right\|_{B_2^1}^2+\left\|\delta u_j\right\|^2-\left\|\delta u_{j-1}\right\|^2 &\leq Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2 \\
&+Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\left\|\delta u_i\right\|^2+Ch \qquad (6.40)
\end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tq : $C\frac{T}{N} < 1$, pour $n > N$ l'inégalité (6.40) implique :

$$\begin{aligned}(1-Ch)\left[\left\|\delta^2 u_j\right\|_{B_2^1}^2 + \left\|\delta u_j\right\|^2\right] &\leq \left(1+Ch^2\right)\left[\left\|\delta^2 u_{j-1}\right\|_{B_2^1}^2 + \left\|\delta u_{j-1}\right\|^2\right] \\ &\quad + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left\|\delta u_i\right\|^2 + Ch \qquad (6.41)\end{aligned}$$

En procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme (5.1) on obtient le résultat souhaité.

Corollaire 6.1 *Pour tout* $t, s \in I$ *et* $n > N$*, les lemmes* (5.1)*et* (5.2) *impliquent*

$$\left\|u^{(n)}(t)\right\| + \left\|\overline{u}^{(n)}(t)\right\| + \left\|\delta u^{(n)}(t)\right\| + \left\|\overline{\delta u}^{(n)}(t)\right\| + \left\|\frac{d}{dt}\delta u^{(n)}(t)\right\|_{B_2^1} \leq C \qquad (6.42)$$

$$\left\|u^{(n)}(t) - \overline{u}^{(n)}(t)\right\| + \left\|\delta u^{(n)}(t) - \overline{\delta u}^{(n)}(t)\right\|_{B_2^1} \leq \frac{C}{n} \qquad (6.43)$$

$$\left\|u^{(n)}(t) - u^{(n)}(s)\right\| + \left\|\delta u^{(n)}(t) - \delta u^{(n)}(s)\right\| \leq C\left|t-s\right| \qquad (6.44)$$

6.4 Resultats de convergence et d'existence

On note par

$$f^n(t) = \begin{cases} f_j & t \in (t_{j-1}, t_j,] \quad 1 \leq j \leq n \\ f_0 = f(0) & \end{cases}.$$

et

$$K^n(0) = ha_{10}k_0, K^n(t) = h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i$$

alors (6.34) devient

$$\left(\frac{d}{dt}\delta u^{(n)}(t), \phi\right)_{B_2^1} + \left(\overline{u}^{(n)}(t), \phi\right) = \left(f^n(t) + K^n(t), \phi\right)_{B_2^1} \quad \forall \phi \in V \qquad (6.45)$$

Ce qui donne

$$\int_I \left(\frac{d}{dt}\delta u^{(n)}(t), \phi\right)_{B_2^1} dt + \int_I \left(\overset{-}{u}^{(n)}(t), \phi\right) dt = \int_I \left(f^n(t) + K^n(t), \phi\right)_{B_2^1} dt \quad \forall \phi \in V \tag{6.46}$$

Théorème 6.3 *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$, *il existe une fonction* $u \in C^{0,1}(I, V)$ *telle que* $\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(I, V) \cap C^{0,1}(I, B)$, $\dfrac{d^2u}{dt^2} \in L^\infty(I, V)$ *et des sous suites* $\{u^{n_k}\}_k \subset \{u^n\}_n$, $\left\{\overset{-}{u}^{(n_k)}\right\}_k \subset \left\{\overset{-}{u}^{(n)}\right\}_n$ *vérifiant*

$$u^{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(I, V) \tag{6.47}$$

$$\overset{-}{u}^{(n_k)} \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(I, V) \tag{6.48}$$

$$\delta u^{(n_k)} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{dans } L^2(I, V) \tag{6.49}$$

$$\overset{-}{\delta u}^{(n_k)} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{dans } L^2(I, V) \tag{6.50}$$

$$\frac{d}{dt}\delta u^{(n_k)} \rightharpoonup \frac{d^2u}{dt^2} \quad \text{dans } L^2\left(I, B_2^1\right) \tag{6.51}$$

Preuve

De l'estimation (6.42) on déduit que $\left\{u^{(n)}\right\}_n$, $\left\{\overset{-}{u}^{(n)}\right\}_n$ sont uniformément bornées dans $L^2(I, V)$ et par suite, il existe deux sous suites $\{u^{n_k}\}_k$ et $\left\{\overset{-}{u}^{(n_k)}\right\}_k$ convergeant faiblement vers certaines fonctions u et $\overline{u}$ respectivement. De (6.43) on conclut que $u = \overline{u}$.

L'inégalité (6.42) implique que $\left\{\delta u^{(n)}\right\}_n$, et $\left\{\overset{-}{\delta u}^{(n)}\right\}_n$ sont uniformement bornées dans $L^2(I, V)$, donc on peut extraire deux sous suites $\left\{\delta u^{(n_k)}\right\}_k$, $\left\{\overset{-}{\delta u}^{(n_k)}\right\}_k$ convergeant faiblement vers w et $\overline{w}$ (resp.) et de l'inégalite (6.43) on voit que $w = \overline{w}$. Montrons à présent que $w = \dfrac{du}{dt}$.

De la construction de la suite $\{u^n\}_n$ et la condition $u_0 = U_0$on a

$$u^{(n_k)}(t) - U_0 = \int_0^t \frac{du^{(n_k)}(s)}{ds}, \quad \forall t^{'} \in I$$

alors

$$u(t) = U_0 + \int_0^t w(s)ds \qquad \forall t^{'} \in I \tag{6.52}$$

Ce qui montre que $u \in C\left(I, B_2^1\right)$ et $w = \dfrac{du}{dt}$ dans $L^2\left(I, V\right)$.

De l'inégalité (6.42) on déduit que $\left\{\frac{d}{dt}\delta u^{(n)}\right\}_n$ est uniformèment bornée dans $L^2\left(I, B_2^1\right)$, elle admet donc une sous suite $\left\{\frac{d}{dt}\delta u^{(n_k)}\right\}_k$ telle que $\dfrac{d}{dt}\delta u^{(n_k)} \rightharpoonup S$. Montrons que $S = \dfrac{d^2u}{dt^2}$. On a

$$\delta u^{(n_k)} - U_1 = \int_0^t \frac{d}{ds}\delta u^{(n_k)}\left(s\right) ds$$

alors

$$\frac{du}{dt} - U_1 = \int_0^t S\left(s\right) ds \tag{6.53}$$

et par suite $\dfrac{du}{dt} \in C\left(I, B_2^1\right)$ et $S = \dfrac{d^2u}{dt^2}$ p.p dans I

Du corollaire (5.1), il s'ensuit que $u : I \longrightarrow V$ et $w = \dfrac{du}{dt} : I \longrightarrow B_2^1$ sont des fonctions lipchitziennes continues et par suite

$$\frac{du}{dt} \in L^\infty\left(I, V\right) \text{ et } \frac{dw}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} \in L^\infty\left(I, B_2^1\right) \tag{6.54}$$

Lemme 6.3 *La suite $\{K^n\left(t\right)\}_n$ est uniformément bornée dans $L^2\left(I, B_2^1\left(0,1\right)\right)$ et possède une sous suite $\{K^{n_k}\left(t\right)\}_k$ telle que*

$$K^{n_k} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\rightharpoonup} K\left(u\right) \quad \textit{dans } L^2\left(I, B_2^1\left(0,1\right)\right) \tag{6.55}$$

Preuve. Elle se fait de la même manière que celle du lemme(5.3).

Théorème 6.4 *Sous les hypothèses* $(H_1)-(H_4)$*, alors la limite* u *est la solution du problème (Pb5) au sens de la définition 5.1. Si de plus* (H_5) *est vérifiée alors* u *est unique.*

Preuve.

De ce qui précède on a $u \in C^{0,1}(I,V)$, $\dfrac{du}{dt} \in L^{\infty}(I,V) \cap C^{0,1}(I,B_2^1)$, $\dfrac{d^2u}{dt^2} \in L^{\infty}(I,B_2^1)$ et u satisfait les conditions intégrales puisque $u(t) \in V$. En vertu de (6.52) et (6.53) on a $u(0) = U_0$ et $\dfrac{du}{dt}(0) = U_1$. De l'hypothèse (H_1) on a :

$$\|f^n(t) - f(t)\|_{B_2^1} \leq \frac{C}{n} \quad a.e \text{ dans } I, \tag{6.56}$$

ce qui implique

$$f^n \longrightarrow f \quad \text{dans } L^2\left(I, B_2^1(0,1)\right) \tag{6.57}$$

Passant à la limite pour $n = n_k \longrightarrow +\infty$ dans (6.46) et en tenant compte des propriétés (6.48), (6.51), (6.55), et (6.57) on obtient

$$\int_I \left(\frac{d^2u}{dt^2}(t), \phi\right)_{B_2^1} dt + \int_I (u(t), \phi)\, dt = \int_I (f(t), \phi)_{B_2^1} dt + \int_I (Ku(t), \phi)_{B_2^1} dt \quad \forall \phi \in V$$

Démontrons à présent l'unicité sous l'hypothèse (H_5). Si u_1 et u_2 sont deux solutions faibles du problème (Pb5) alors la différence $u = u_1 - u_2$ vérifie :

$$\int_I \left(\frac{d^2u}{dt^2}(t), \phi\right)_{B_2^1} dt + \int_I (u(t), \phi)\, dt = \int_I \left(\int_0^t a(t-s)\left[k(s,u_1) - k(s,u_2)\right] ds, \phi\right)_{B_2^1} dt \quad \forall \phi \in V \tag{6.58}$$

soit

$$w = \max |a(t)| \int_0^T L(t)\, dt \tag{6.59}$$

On subdivisant l'intervalle I en sous intervalles de longueur p telle que

$$w.p < \frac{1}{2} \tag{6.60}$$

l'identité (6.13) implique

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{du}{dt} & t \in [0,p] \\ 0 & t \in]p,T] \end{cases} \tag{6.61}$$

d'où

$$\int_0^p \frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{B_2^1}^2 dt + \int_0^p \frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt = 2\int_0^p \left(\int_0^t a\left(t-s\right)\left[k\left(s,u_1\right)-k\left(s,u_2\right)\right]ds, \frac{du}{dt}\right)_{B_2^1} dt \tag{6.62}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_0^p \frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{B_2^1}^2 dt + \int_0^p \frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt &\leq 2\int_0^p \left\|\int_0^t a\left(t-s\right)\left[k\left(s,u_1\right)-k\left(s,u_2\right)\right]ds\right\| \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{B_2^1} dt \\ &\leq 2\max_I \left|a\left(t\right)\right| .p. \int_0^T L\left(t\right)dt. \left\|u\left(t\right)\right\| . \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{B_2^1} \\ &\leq wp\left[\left(\max_{t\in[0,p]}\left\|u\left(t\right)\right\|\right)^2 + \left(\max_{t\in[0,p]}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{B_2^1}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{6.63}$$

soient t_1 et $t_2 \in [0,p]$ tels que

$$\left\|\frac{du}{dt}\left(t_1\right)\right\|_{B_2^1} = \max_{[0,p]}\left\|\frac{du}{dt}\left(t\right)\right\|_{B_2^1} \tag{6.64}$$

$$\left\|u\left(t_2\right)\right\| = \max_{[0,p]}\left\|u\left(t\right)\right\| \tag{6.65}$$

comme $\dfrac{du}{dt}\left(0\right) = u\left(0\right) = 0$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{B_2^1}^2 dt + \int_0^{t_2} \frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt &= \left\|\frac{du}{dt}\left(t_1\right)\right\|_{B_2^1}^2 + \left\|u\left(t_2\right)\right\|^2 \\ &\leq \int_0^p \frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{B_2^1}^2 dt + \int_0^p \frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt \end{aligned} \tag{6.66}$$

d'après les inégalités $(6.60), (6.63)$, et (6.66) on obtient

$$\frac{du}{dt}(t) = u(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, p]$$

Répétant le même raisonnement sur les intervalles $[ip, (i+1)p]$, $i = 1$,...,on arrive à $u = 0$. Ce qui achève la démonstration.$\blacksquare$

Chapitre 7

Annexe :

7.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

La mojorité de théorèmes énnoncés dans ce chapitre sont tirés des livres d'analyse fonctionnelle [41, 46,81, 83]. Dans la suite on désigne par X et Y deux espaces normés, H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire. La mojorité de théorèmes énnoncer dans ce chapitre sont tirés des livres d'analyse fonctionnelle []

Définition 7.1 *Soit A un opérateur linéaire, tell que $D(A) = X$.*

A est borné si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|Ax\| \leq C\,\|x\|\,, \forall x \in X.$$

Dans le cas contraire on dit que l'opérateur A est non borné.

Théorème 7.1 *Soit A un opérateur linéaire, défini partout dans X. Pour que A soit continu il faut et il suffit qu'il soit borné.*

Théorème 7.2 *L'opérateur A^{-1} existe et est borné sur son image $R(A)$ si et seulement s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$\|Ax\| \geq m\,\|x\|\,, \forall x \in D(A).$$

Théorème 7.3 *Soient H un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel de H. Pour que F soit dense dans H il faut et il suffit qu'il n'existe pas de vecteur non nul orthogonal à F, i.e.*

$$F^{\perp} = \{0\}$$

Définition 7.2 *Soit A un opérateur linéaire de $D(A) \subset X \to Y$, A est dit fermé si pour une suite x_n de $D(A)$ telle que*

$$x_n \to x \text{ et } Ax_n \to y \text{ alors } x \in D(A) \text{ et } y = Ax.$$

Autrement dit, A est fermé si son graphe est fermé.

Théorème 7.4 (Théorème du graphe fermé) *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire fermé et $D(A) = X$, alors l'opérateur A est borné.*

Définition 7.3 *Soit A un opérateur linéaire de $D(A) \subset X \to Y$, l'opérateur A est dit fermable s'il admet un prolongement fermé. On note $\overline{A}$ le plus petit prolongement fermé de A.*

Théorème 7.5 *Si l'opérateur A est fermable alors sa fermeture $\overline{A}$ est définie par*

$$\begin{cases} D\left(\overline{A}\right) = \{x \in X / \exists x_n \in D(A) : x_n \longrightarrow x; \quad Ax_n \longrightarrow y\} \\ \overline{A}x = y \end{cases}$$

Le graphe de $\overline{A}$ n'est que l'adhérence du graphe de A c'est à dire $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.

Théorème 7.6 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle qu'on ait*

$$\|x\| \leq M \|Ax\|. \tag{I}$$

Alors

1)$\ker A = \{0\}$

2)$R(\overline{A}) = \overline{R(A)}$

Preuve. 1) Evident

2) Soit $y \in \overline{R(A)}$ alors il existe $x_n \in D(A)$ telle que $Ax_n \to y$, on remarque d'après l'inégalité (I) que

$$\|x_p - x_q\| \leq M \|Ax_p - Ax_q\|,$$

d'où x_n est une suite de Cauchy dans $D(A) \subset \overline{D(A)}$ donc elle est convergente dans $\overline{D(A)} = D(\overline{A})$, soit $x_0 \in D(\overline{A})$ sa limite, on a :

$$\begin{cases} x_n \to x_0 \\ Ax_n \to y \end{cases}$$

donc $y = \overline{A}x_0 \in R(\overline{A})$, d'où $\overline{R(A)} \subset R(\overline{A})$. L'autre sens est évident. ■

Définition 7.4 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, on appelle adjoint de A, l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset Y^* \longrightarrow X^*$ défini par*

$$\begin{cases} D(A^*) = \{v \in Y^* / \exists w \in X^* : (v, Au) = (w, u); \forall u \in D(A)\}. \\ A^*v = w \end{cases}$$

Théorème 7.7 *Pour que la représentation $(v, Au) = (w, u)$ soit unique pour tout $u \in D(A)$ avec $w \in X^*$, il faut et il suffit que $\overline{D(A)} = X$ et dans ce cas A^* est un opérateur fermé.*

Définition 7.5 *L'opérateur A est dit auto-adjoint si*

$$D(A) = D(A^*), (Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in D(A).$$

Dans ce cas le nombre (Ax, x) est réel et $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$.

Définition 7.6 *L'opérateur A est dit positif si $(Ax, x) \geq 0, \forall\ x \in D(A)$.*

Théorème 7.8 *Soit* $A : D(A) \longrightarrow H$ *un opérateur linéaire, auto-adjoint positif, alors il existe un opérateur* $B : D(B) \longrightarrow H$ *telle que,*

$$D(A) \subset D(B), Ax = B(Bx), \forall x \in D(A)$$

L'opérateur B *est appelé racine carrée de l'opérateur* A *et on le note par* $A^{\frac{1}{2}}$. *On a* $D(A) \subset D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$. *En général on n'a pas l'égalité mais on a :*

$$\overline{D(A)} = D\left(A^{\frac{1}{2}}\right).$$

Théorème 7.9 *Soit* H *un espace de Hilbert et soit* F *un sous espace vectoriel fermé dans* H *alors*

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Théorème 7.10 *Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *un opérateur linéaire auto-adjoint. Alors*

$$(KerA)^{\perp} = \overline{R(A)}.$$

Théorème 7.11 (Lax-Milgram) *Soit* H *un espace de Hilbert, et* $a(u,v)$ *une forme bilinéaire ; continue et coércive. Alors pour tout* $\varphi \in H'$ *il existe* $u \in H$ *unique tel que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle . \quad \forall v \in H.$$

De plus si a *est symétrique, alors* u *est caractérisé par la propriété*

$$u \in H \quad et \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

7.2 Opérateurs dépendant d'un paramètre

Soient X, Y deux espaces de Banach et $\{A(t)\}$ une famille d'opérateurs $(0 \leq t \leq T)$ où $A(t) : D(A(t)) \longrightarrow Y$, $D(A(t)) \subset X$ qui dépend du temps.

Continuité par rapport au paramètre.

Définition 7.7 *La famille d'opérateurs $\{A(t)\}$ est dite fortement continue au point $t_0 \in [0,T[$ en $u(t_0) \in D(A(t_0))$ s'il existe $u(t) \in D(A(t))$ telle que $u(t) \longrightarrow u(t_0)$ dans X et $A(t)\,u(t) \longrightarrow A(t_0)u(t_0)$ dans Y lorsque t tend vers t_0.*

Dérivation par rapport au paramètre

Définition 7.8 *La famille d'opérateurs $A(t)$ est dite fortement dérivable au point $t_0 \in [0,T[$ en $u(t_0) \in D(A(t_0))$ s'il existe $u(t) \in D(A(t))$, $v(t_0) \in D(A(t_0))$ telle que*

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} \longrightarrow v(t_0)$$

et

$$\frac{A(t)u(t)-A(t_0)u(t_0)}{t-t_0} \longrightarrow w(t_0)$$

dans Y lorsque t tend vers t_0 et la limite $w(t_0)$ ne dépend pas du choix de $u(t)$. On définit $A'(t)$ la dérivée de $A(t)$ par la relation suivante :

$$A'(t_0)\,u(t_0) = w(t_0) - A(t_0)v(t_0)$$

7.3 Opérateurs abstraits de régularisation

Définition 7.9 *Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint, défini de $D(A)$ dans H tel que*

$$(Av, v) \geq c_1 \left|v\right|^2 ; \forall v \in D(A).$$

Pour ε positif on définit la famille d'opérateurs suivante :

$$A_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon A)^{-1}$$

A_ε^{-1} s'appelle opérateur abstrait de régularisation.

Théorème 7.12 *L'opérateur* A_ε^{-1} *est borné et vérifie*

$$\left\|A_\varepsilon^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1+\varepsilon c_1} \tag{P$_1$}$$

Preuve. Pour montrer la propriété (P_1) on va utiliser le Théorème du graphe fermé. Vu que l'opérateur A_ε est fermé, montrons qu'il est surjectif. Nous avons $A_\varepsilon : D(A) \subset H \longrightarrow H$, les Théorèmes 6.10 et 6.11 entraînent :

$$H = Ker(A_\varepsilon) \oplus \overline{R(A_\varepsilon)}.$$

Montrons que $Ker(A_\varepsilon) = \{0\}$. Soit $x \in Ker(A_\varepsilon)$ alors $A_\varepsilon x = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \varepsilon Ax &= -x \Rightarrow (\varepsilon Ax, x) = (-x, x) = -|x|^2 \geq \varepsilon c_1 |x|^2 \\ &\Rightarrow (\varepsilon c_1 + 1)|x|^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Montrons que $\overline{R(A_\varepsilon)} = R(A_\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon u, u) &= |u|^2 + \varepsilon (Au, u) \\ &\geq (\varepsilon c_1 + 1)|u|^2 \end{aligned} \tag{a$_1$}$$

D'après le théorème 6.6 on conclut que

$$\overline{R(A_\varepsilon)} = R(A_\varepsilon),$$

et d'après le théorème 6.2, A_ε^{-1} existe et est borné sur $R(A_\varepsilon)$.De (a_1) on peut tirer la relation

$$(1+\varepsilon c_1)|u| \leq |A_\varepsilon u|\,; \quad \forall u \in D(A). \tag{a_2}$$

Soit $u = A_\varepsilon^{-1}v$; oú v est un élément quelconque de H, d'après la relation (a_2) on a

$$(1+\varepsilon c_1)\left|A_\varepsilon^{-1}v\right| \leq |v|\,, \quad \forall v \in H$$

d'où

$$\frac{|A_\varepsilon^{-1}v|}{|v|} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon c_1)}; \quad \forall v \in H,$$

en passant au sup, l'inégalité (P_1) est démontrée. ■

Théorème 7.13 *Les opérateurs de régularisation A_ε^{-1} vérifient les propriétés suivantes*

$$\varepsilon A A_\varepsilon^{-1} = I - A_\varepsilon^{-1} \tag{P$_2$}$$

$$\left|\varepsilon A A_\varepsilon^{-1}x\right| = \left|Ix - A_\varepsilon^{-1}x\right| \longrightarrow 0; \quad \textit{lorsque} \;\; \varepsilon \longrightarrow 0 \tag{P$_3$}$$

$$\textit{L'opérateur } A_\varepsilon^{-1} \textit{ est positif, auto-adjoint et commute avec } A. \tag{P$_4$}$$

Preuve. Montrons (P_2), on a

$$\varepsilon A A_\varepsilon^{-1} = \varepsilon\left(\frac{A_\varepsilon - I}{\varepsilon}\right) A_\varepsilon^{-1} = I - A_\varepsilon^{-1}.$$

Pour montrer (P_3) on doit établir que $|A_\varepsilon^{-1}x - x| \longrightarrow 0$ lorsque ε tend vers 0. D'après la propriété (P_2) on peut voir que l'opérateur AA_ε^{-1} est uniformément borné et

$$\left|A_\varepsilon^{-1}x - x\right| = \left|\varepsilon A A_\varepsilon^{-1}x\right| \leq \varepsilon\left|AA_\varepsilon^{-1}x\right| \leq \varepsilon\left\|AA_\varepsilon^{-1}\right\||x|$$

$\Rightarrow$

$$\left\|A_\varepsilon^{-1} - I\right\| \leq \varepsilon\left\|AA_\varepsilon^{-1}\right\| \to 0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0,$$

d'où le résultat. Pour montrer (P_4) on remarque que

$$A^{-1}A_\varepsilon = A^{-1}(I+\varepsilon A) = A^{-1} + \varepsilon A^{-1}A = A^{-1} + \varepsilon I.$$

D'autre part

$$A_\varepsilon A^{-1} = (I+\varepsilon A)A^{-1} = A^{-1} + \varepsilon A^{-1}A = A^{-1} + \varepsilon I,$$

d'où A commute avec A_ε^{-1}. ■

Théorème 7.14 *Si l'opérateur $A^{-1}(t)$ est différentiable alors $A_\epsilon^{-1}(t)$ est différentiable et on a :*

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} \tag{P_5}$$

$$\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} = \varepsilon A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \tag{P_6}$$

Preuve. Montrons (P_5). En effet : d'après (P_2) on a

$$\begin{aligned} \varepsilon AA^{-1} &= I - A_\varepsilon^{-1} \\ &\Rightarrow \varepsilon \frac{d\left(AA_\varepsilon^{-1}\right)}{dt} = -\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d\left(AA_\varepsilon^{-1}\right)}{dt} = \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Montrons (P_6). En effet : d'après (P_2) on a

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1} + \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}A &= \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1} = \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}\left(I+\varepsilon A\right) \\ &\Rightarrow \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}A_\varepsilon = \frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1} \\ &\Rightarrow \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = -\varepsilon A_\varepsilon^{-1}\frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

comme $AA^{-1} = I$ et A, A_ε^{-1} commute

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt}A^{-1} = -A\frac{dA^{-1}}{dt} \Rightarrow \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = \varepsilon AA_\varepsilon^{-1}\frac{dA^{-1}}{dt}AA_\varepsilon^{-1}$$

■

7.4 Quelques inégalités utiles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Inégalité de Cauchy

$$\forall u, v \in L_2(\Omega)\,; \left|\int_\Omega uv dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N v_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalité de Hölder

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy.

$$\left|\int_\Omega uv dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N |u_i|^p\,dx\right)^{\dfrac{1}{p}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N |v_i|^{p'}\,dx\right)^{\dfrac{1}{p'}}.$$

Inégalité de Cauchy avec l'ε

Qu'on appelle aussi l'ε-**inégalité**

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2\,,\ \forall\varepsilon > 0,\ \forall a,\ b.$$

La généralisation de cette inégalité est appelée l'inégalité de Young

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{b}{\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}}, \quad \forall p > 1.$$

Inégalité de Poincaré-Friedrichs

$$\int_I u(t)dt \leq c_I \int_I u_t^2 dt.$$

Inégalité triangulaire

$$\left(\int_\Omega (u+v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bibliographie

[1] **D. Bahuguna,** Quasilinear integrodifferential equations in Banach spaces, Nonlinear analysis, theory, methods and applications, Vol. 24, N.2, 175-183, (1995) .

[2] **D. Bahuguna, A.K. Pani, V. Raghavendra**, Rothe's method to semilinear hyperbolic integrodifferential equations, Appl. Math. Stochastic Anal. 3 :4, 245-252, (1990),

[3] **D. Bahaguna and V. Raghavendra,** Application of Rothe's method to nonlinear Schrödinger type equations, Appl. Anal. 31 :1 (1988), 149-160..

[4] **D. Bahuguna, V. Raghavendra,** Rothe's method to parabolic integrodifferential equations via abstract integrodifferential equations, Appl. anal. 33,153-167, (1989).

[5] **D. Bahuguna, S. Abbas, J. Dabas**, Partial functional differential equation with an integral boundary condition and application to population dynamics, Nonlinear Anal. TMA 69 (2008) 2623 2635.

[6] **D. Bahuguna, J. Dabas,** Existence and uniqueness of a solution to a semilinear partial delay differential equation with an integral condition, Nonlinear Dynam. Syst. Theory 8 (1) (2008) 7 19.

[7] **S. Beilin,** Existence of solutions for one-dimensional wave equations with non-local conditions, Electron. J. Differential Equations 76, (2001), 1-8.

[8] **S. Beilin,** *On a Mixed nonlocal problem for a wave equation*, Electron. J. Differential Equations 103, (2006), 1-10.

[9] **D. Belakroum,** Problème de Cauchy pour une classe d'équations paraboliques d'ordre supérieur. Mémoire de magistère 2006 Université d'Annaba

[10] **A. Bouziani,**

[11] **A. Bouziani, N. Merazga,** Rothe time discretisation methode applied to a quasilinear wave equation subject to integral conditions, Adv. Difference Equ. 3 (2004) 211-235.

[12] **A. Bouziani, N.Merazga**, Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions, E.J.D.E. 115 (2006) 1-18.

[13] **A. Brenner,** Polyparabolic equations with two dimensional time. Citeseer.nj.nee.com/13366html, monograph (1998).

[14] **N.I. Brich and N.I. Yurchuk**, Goursat's problem for abstract second order linear differential equations, Differencial'nye Uravnenija 7 (1971), 1017–1030, 1139.

[15] **N.I. Brich, N.I. Yurchuk.** Some new boundary value problems for a class of partial differential equations. Diff. Uravn, 6, 1624-1630, (1968).

[16] **J.R. Cannon**, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, quart. Appl. Math. 21, 155-160, (1963).

[17] **A. chaoui,** Problème de Goursat pour une classe d'équations hyperboliques à domaine variable. Mémoire de magistère 2005 Université d'Annaba

[18] **A. Chaoui and A. Guezane-Lakoud,** On an abstract Euler-Poisson-Darboux type equations. Int. J. Appl. Math. Stat : Vol. 13 ;No. M08 ; March 2008 ;12-21.

[19] **N.I. Ionkin,** Solutions of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differents. Urav. 13 (1977) 294 304.

[20] **D. Dao-Quing, H. Yu,** Remarks on heat equation with integral boundary conditions, Nonlinear Anal. TMA 67 (2) (2007) 468 475.

[21] **N.V. Gavrilova and N.I. Yurchuh**, The Cauchy problem for operator differential equations of Euler-Poisson-Darboux type. Diff. Uravn. 17, $N^0$5, 789-795(1981).

[22] **A.A. Dezin**, Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Uspekh. Math. Naouk. 14. N 3. (37). 22-73. 1959.

[23] **L. Garding,** Cauchy's problem for hyperbolic equations, University of Chicago, Lecture notes, 1957.

[24] **A. Guezane-Lakoud**, On a class of hyperbolic equation with abstract non-local boundary conditions. International Journal Of Applied Science & Computations.Vol 8, N° 1, (2001).

[25] **A. Guezane-Lakoud**, Abstract variable domain hyperbolic différential equations. Demonstratio Mathematica. N° 4, V 37,884-892, (2004).

[26] **A. Guezane-Lakoud**, Functional differential equations witrh non-local boundary conditions. Electronic Journal of Differential equations, 2005 N 88 (2005) 1-8.

[27] **A. Guezane-Lakoud**, "Etude de certains problèmes aux limites opérationnels par la méthode des inégalités énergétiques", Thèse de Doctotat d'Etat.

[28] **A. Guezane-Lakoud**, **D. Belakroum,** Rothe's method for a telegraph equation with integral conditions, Nonlinear Anal. 70(2009) 3842-3853.

[29] **A. Guezane-Lakoud**, **A. Chaoui,** A Functional Method Applied To Operator Equations, Banach J. Math. Anal. 3. 2009. no 1. 52-60.

[30] **A. Guezane-Lakoud, M. S. Jasmati**, **A. Chaoui,** Rothe's method for an integrodifferential equation with integral conditions, Nonlinear Analysis. 72 (2010) 1522-1530. (2010) .

[31] **A. Guezane-Lakoud, A. Chaoui**, On functional parabolic equations, To appear

[32] **M.E Gurtin, A.C. Pipkin**. A general theory of heat conduction with finit wave speeds. Archive for Rational Mechanics and analysis 31, 113-126. (1968)

[33] **U. Hornung**, Homogenisation and porous media.New York ;Springer. (1996)

[34] **J. Kacur,** Application of Rothe's method to nonlinear evolution equations, Mat. cas. 25(1975), 63-81.

[35] **J. Kacur,** Application of Rothe's method to perturbed linear hyperbolic equations and variationnal inequalities, Czech. Math. J. 34(109)(1984), 92-106.

[36] **J. Kacur,** Method of Roth in evolution equation, Teubner-Texte zur Mathematik, vol. 80,BSB. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig,1985.

[37] **J. Kacur,** On L^{∞}- convergence of Rothe's method, Commentat. Math. Univ. Carol. 30 :3 (1989), 505-510.

[38] **J. Kacur, R. Van Keer,** On the numerical solution of semilinear parabolic problems in multicomponent structures with Volterra opertors in the transmission conditions and in the boundary conditions, Z. Angew. Math. Mech. 75(1995), no. 2, 91-103.

[39] **L.I. Kamynin**, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with nonclassical boundary condition, Z. Vychisl. Mat. Fiz. 6 (1964) 1006 1024.

[40] **T. Kato.** Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces. N.M.J.V. 19, 93-125, (1961).

[41] **T. Kato.** "Perturbation theory for linear operators", Spring-Verlag, Second edition,1980.

[42] **T. Kato, H. Tanabe**, On the abstract evolution equation. Osaka. Math. J. 14, 107-133,(1962).

[43] **N. Kikuchi, J. Kacur,** Convergence of Rothe's method in Holder spaces, Appl. Math. 48 :5(2003), 353-365.

[44] **V.I. Korzuk**, Energy inequality for the boundary value problem hyperbolic equation with a third order wave operator. Diff. Uravn. Vol 27. N° 6. 1014-1022.(1991).

[45] **V.I. Korzuk**, The method of energy inequalities and averaging operators. Vestnik. Bel.Vol 3. N° 1. 55-71. (1996).

[46] **S.G. Krein**, Linear differential equations in Banach space. A.M.S. Vol 29. (1971).

[47] **A. Kufner,** Weighted Sobolev Spaces, A Wiley-Interscience Publication, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 1985.

[48] **O.A. Ladyženskaya**, Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obš. 7, 1958.

[49] **O. A. Ladyženskaya,** On solution of nonstationary operator equations, Mat. Sbornik 39(1956), No 4.

[50] **O. A. Ladyženskaya,** The boundary value problems of mathematical physics. Springer-Verlags. NewYork. (1985).

[51] **D. Lauerova,** The Rothe method and time periodic solutions to the Navier-Stokes equations and equations of magneto hydro dynamics, Appl. Math. 35 :2(1990), 89-98.

[52] **J. Leray,** Lectures on hyperbolic differential equations with variable coefficients, Princeton, Just for Adv. Study, 1952.

[53] **J.L. Lions.** "Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites", *Berlin,* 1961.

[54] **F.E. Lomovtsev, N.I. Yurchuk,** Cauchy's problem for second order hyperbolic differential operational equations, Diff. Uravn. 12. N 12, 22242-2250. (1976).

[55] **F.E. Lomovtsev, N.I. Yurchuk,** Boundary value problems for differential operational equations with variable operational coefficient domains, Differencial'nye Uravnenija, 27 (1991), no. 10, 1754–1766.

[56] **F.E. Lomovtsev**, Necessary and sufficient conditions for the uniquess solvability of the Cauchy problem for second order hyperbolic equations with a variable domain of operator equations. Diff. Uravn. Vol 28. N° 5. 712-722. (1992).

[57] **F.E. Lomovtsev** A boundary value problem for even order differential equations whose operator coefficients have variable domains. (Russian,Russian Summary), 8, 1412-1425, 1471.(1994).

[58] **F.E. Lomovtsev**, Abstract evolution equations with discontinuous operators coefficients. Diff. Uravn. V31, N°7, pp1132-1141,(1995).

[59] **F.E. Lomovtsev**, Differentiation and integration with respect to the parameter of infinite variable operators with variable domains of definition. Doklad. Nats. Akad. Nauk. Belarusi. Vol 43, N° 1, 13-15, (1999).

[60] **F.E. Lomovtsev**, The Cauchy problem for second order complete hyperbolic differential equation with variable domains of operator coefficients. Diff. Uravn. N°. 4, 542 -548, 575.(2000).

[61] **F.E. Lomovtsev**, Second order hyperbolic operator-differential equation with variable domains of smooth operator coefficients. Doklad. Nats. Akad. Nauk. Belarusi. N°. 1, 34 -37, 137.(2001).

[62] **F.E. L Lomovtsev**, Second order hyperbolic operator-differential equation with variable domains of discontinuous operator coefficient. Doklad. Nats. Akad. Nauk. Belarusi. N°.3,37 -40,124.(2001).

[63] **S. Mesloub,** nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equationJournal of Mathematical Analysis and ApplicationsVolume 316, Issue 1, 1 April 2006, Pages 189-209

[64] **S. Mesloub,** On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, Vol 68, Issue 9, 1 May 2008, 2594-2607.

[65] **S. Mesloub,** Mixed nonlocal problem for a nonlinear singular hyperbolic equation Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 33 Issue 1, 57 - 70.

[66] **N. Merazga, A. Bouziani,** Rothe method for a mixed problem with an integral condition for the two dimentional diffusion equation, Abstract and Applied Analysis 2003 : 16(2003) 899-922.

[67] **N. Merazga, A. Bouziani**, On a time-discretization method for a semilinear heat equation with purely integral conditions in a nonclassical function space, Nonlinear Anal. TMA 66 (2007) 604-623.

[68] **N. Merazga, A. Bouziani,** Rothe time-discretization method for a nonlocal problem arising in thermoelasticity, J. Appl. Math. Stoch. Anal. 1 (2005) 13-28.

[69] **J. Necas,** application of Rothe's method to abstract parabolic equations, Czech. Math. J. 24(1974),496-500.

[70] **L.S. Pulkina,** A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations, Electron. J. Differential Equations 45 (1999) 1-6.

[71] **L. S. Pulkina,** *T*he L_2 solvability of a non-local problem with integral conditions for a hyperbolic equation, Differ. Uravn., (2000), Vol 36, N 2, 279-280.

[72] **L. S. Pulkina,** A Mixed problem with integral conditions for the hyperbolic equation, Zametki, (2003), Vol 74, N 3, 435-445.

[73] **L. S. Pulkina,** A non-local problem with integral conditions for an hyperbolic equation, Differ. Uravn., (2004), Vol 40, N 7, 887-892.

[74] **K. Rektorys,** On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables, Czech. Math. J. 21 (1971), 318-339.

[75] **K. Rektorys,** Variational Methods in Mathematics Science and Engineering, D. Reidel Publishing Company, 1980.

[76] **K. Rektorys,** "The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations", D. Reidel Publishing Company, 1982.

[77] **K. Rektorys,** Solving ordinary and partial boundary value problems in science and engineering, CRS Press, 1999.

[78] **E. Rothe,** Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben, Math. Ann. 102(1930), 650-670.

[79] **E. Rothe, L. Cesari, R. Kannan and H. F. Weinberrger,** Nonlinear Analysis : A Collection of Papers in Honor of Erich H. Rothe, Academic Press, 1978.

[80] **M. P. Sapagovas and R. Yu. Chegies,** On some boundary value problems with a nonlocal condition, Differential Equation, 23(1987), no.7,858-863.

[81] **V. Trinoguine**, "Analyse fonctionnelle", Edition Mir.Mouscou, 1985.

[82] **F. Weber,** Method of Rothe for a Hyperbolic Equation with a nonlinear Boundary Condition, Math. Nachr. 161(1993), 369-380.

[83] **K. Yosida**, "Functional Analysis". Springer-Verlag, Sixth Edition.

[84] **N.I. Yurchuk**, The Goursat problem for second order hyperbolic equations of special kind, Differencial'nye Uravnenija, 4 (1968), 1333–1345.