

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR DE ANNABA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Option : Analyse Numérique

**Etude mathématique et numérique de quelques
problèmes de coques élastiques**

Présentée par

Nora Tabouche

Sous la direction de

Pr. Adel Blouza et Pr. Hocine. Sissaoui

Devant le jury

PRESIDENT	Mohamed Haiour	Pr	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	Abdelhamid Ayadi	Pr	U.Oum-El-Bouaghi
EXAMINATEUR	Zine Aissaoui	MCA	U. de Guelma
EXAMINATEUR	Radouene Ghanem	MCA	U.B.M. ANNABA
INVITÉ	Smail Boutabba	MCA	U. de Guelma

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon premier directeur de thèse Pr. Hocine Sissaoui à qui je dois tout le respect pour ses encouragements, ses conseils précieux, sa grande disponibilité, sa patience, son appui constant et pour avoir codiriger ce travail, Qu'il soit assuré de ma plus profonde et sincère reconnaissance.

Je témoigne toute ma gratitude à mon deuxième directeur de thèse Pr. Adel Blouza, qui a su me proposer une voie de recherche originale et très intéressante, pour m'avoir accueilli chaleureusement au sein du laboratoire J-Louis Lions Paris VI, pour l'atmosphère agréable dont j'ai bénéficié durant mes stages. Malgré l'éloignement, sa disponibilité, sa passion, ses qualités scientifiques et humaines m'ont mis sur une voie de recherche pleine d'espoir et d'optimisme, je lui dis merci du fond du cœur.

Je remercie vivement Pr. Mohamed Haiour pour avoir accepté de présider le jury. J'en suis très honorée.

Je remercie vivement Pr. Abdelhamid Ayadi, Zine Aissaoui et Radouene Ghanem qui ont accepté d'examiner ce travail.

Je remercie particulièrement Pr Smail Boutabba pour avoir accepté de faire parti des invités.

Je tiens à témoigner ma gratitude à Christine Bernardi directrice de recherche au laboratoire J-Louis-Lions pour avoir corrigé une partie de mon travail, pour sa gentillesse, sa disponibilité et son dévouement qu'elle m'a accordé durant mes stages au sein du laboratoire.

Merci à toutes mes amies pour leur soutien.

Grand merci à ma mère et mes sœurs Hassiba, Amel et Karima pour leur amour et leurs soins pour moi.

Enfin, je remercie mon mari pour son immense support moral, ainsi pour sa compréhension et son si tendre amour pour moi. Merci Yazid.

Merci, mes chers enfants Nawfel et Ferial pour votre amour pour moi.

RÉSUMÉ

Ce travail comprend deux problèmes différents

Premier problème : Nous considérons le modèle de Naghdi pénalisé pour des coques linéairement élastiques de surface moyenne peu régulière. Nous menons une analyse a posteriori du problème discret qui conduit à la construction d'indicateurs d'erreurs qui satisfont des estimations optimales. Nous proposons une stratégie d'adaptation de maillage basée sur ces indicateurs et nous présentons quelques expériences numériques qui confirment son efficacité.

Deuxième problème : A partir du modèle de Koiter formulé en coordonnées cartésiennes, nous proposons un modèle décrivant le contact de cette coque avec un corps rigide. Nous prouvons que le système d'inéquations variationnelles qui en résulte est bien posé.

2000 Mathematics Subject Classification : 74K25, 74S05, 65N30.

Mots clés : Modèle de coque de Naghdi, approximation par éléments finis, estimation d'erreur a posteriori, modèle de coque de Koiter, inéquations variationnelles, contact unilatéral.

ABSTRACT

This work consists of two different problems.

First problem : We consider a penalized Naghdi's model in Cartesian coordinates for linearly elastic shells with little regularity. A posteriori analysis of the discrete problem leads to the construction of error indicators, which satisfy optimal estimates. We describe a mesh adaptivity strategy relying on these indicators and we present a numerical experiment that confirm its efficiency.

Second problem : We consider the Koiter's shell model in Cartesian coordinates to derive equations describing the contact of shell with a rigid body. We prove the well-posedness of the resulting system of variational inequalities.

2000 Mathematics Subject Classification : 74K25, 74S05, 65N30.

Key words : Naghdi's shell model, finite element approximation, a posteriori error estimate, Koiter's shell model, variational inequalities, unilateral contact.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires géométriques et présentation du modèle de Naghdi	5
1.1 Notations et géométrie d'une coque	5
1.2 Les tenseurs de déformation et de changement de courbure	9
1.3 Le lemme du mouvement rigide	10
1.4 Le modèle de Naghdi	11
1.4.1 Définitions	11
1.4.2 Les hypothèses de Kirchhoff-Love	12
1.4.3 Déplacement d'un point de la coque	13
1.4.4 Les tenseurs linéarisés de déformation et de changement de courbure de la surface	14
1.4.5 Le tenseur de déformation de la coque	15
1.4.6 Le tenseur de contraintes de la coque	16
1.4.7 Energie de déformation de la coque	16
1.4.8 Energie potentielle des charges extérieures	18
1.4.9 Formulation variationnelle	18
1.4.10 Nouvelles expressions des tenseurs de déformation et de changement de courbure	19
1.4.11 Cadre fonctionnel pour le modèle de Naghdi	19
1.4.12 Existence et unicité pour le modèle de Naghdi	21
1.5 Le modèle de Koiter	24
1.5.1 Cadre fonctionnel pour le modèle de Koiter	25

1.5.2	Existence et unicité pour le modèle de Koiter	26
2	Analyse a posteriori du modèle de Naghdi pénalisé	27
2.1	Une version pénalisée du modèle de Naghdi	30
2.2	Formulation forte du problème pénalisé	34
2.3	Formulation discrète	35
2.3.1	Discrétisation par éléments finis du problème pénalisé	35
2.3.2	Convergence	36
2.4	Analyse a posteriori	37
2.4.1	Equation du résidu	37
2.4.2	Approximation des données	37
2.4.3	Approximation des coefficients	38
2.4.4	Approximations des tenseurs	38
2.5	Stratégie d'adaptation et tests numériques	53
2.5.1	Stratégie d'adaptation	53
2.5.2	Tests numériques	53
3	Problème de contact de Koiter avec un corps rigide	62
3.1	Modèle de Koiter	63
3.1.1	Les équations d'équilibre du modèle de Koiter	65
3.2	Formulation mixte du problème de Koiter	66
3.3	Modélisation du problème de contact	68
3.3.1	Position de la coque et de l'obstacle	69
3.3.2	Réaction de l'obstacle	70
3.3.3	Emplacement de la réaction	70
3.3.4	Modèle de contact	71
3.4	Formulation variationnelle	72
3.5	Analyse du problème variationnel	75
3.5.1	Premier problème de contact réduit	75
3.5.2	Deuxième problème de contact réduit	76
3.6	Existence et unicité du problème variationnel	77

TABLE DES MATIÈRES

v

Conclusion et perspectives

83

Bibliographie

84

Introduction

Une coque est un corps élastique dont la forme est proche d'une surface avec une épaisseur petite. L'étude des coques minces est tout à fait d'actualité, à cause d'une tendance dans l'industrie moderne : carrosseries, coques de navires, fuselages, ailes d'avions, tours de refroidissement, etc.

Pour la dérivation des modèles de coques, on trouve les travaux de Sanchez-Palencia [1989,1990] voir [51], [52] et [53].

Il y a deux familles différentes de modèles linéaires pour les coques minces élastiques. Celles dites de Reissner qui est basée sur la théorie des surfaces de Cosserat [1909] voir [36]. Elle a été développée par Naghdi en 1963 voir [49]. Le modèle bidimensionnel qu'il a présenté prend en compte les effets du cisaillement transverse où les inconnues sont le déplacement des points de la surface moyenne ainsi que la rotation du vecteur normal unitaire à cette surface.

Une seconde famille basée sur la théorie de Kirchhoff-Love a été développée par Koiter en 1970 voir [46]. Ce dernier a suggéré un modèle bidimensionnel pour les coques minces linéairement élastiques où l'inconnue du problème est le champ de déplacement des points de la surface moyenne, les effets de cisaillement étant négligés.

Les formulations des modèles de Naghdi et Koiter utilisées ici ont été établies par BLOUZA [19] et Blouza et Le Dret [23, 24]. Elles sont basées sur l'idée d'utiliser une base locale où les inconnues sont décrites en coordonnées cartésiennes au lieu des composantes covariantes et contravariantes comme il est d'usage en théorie de coques, voir [9]. Elles considèrent des coques où la surface moyenne de classe $W^{2,\infty}$ et

dont les courbures peuvent admettre des discontinuités contrairement à l'approche classique qui impose la carte φ de classe \mathcal{C}^3 voir Bernadou, Ciarlet et Miara [10, 11].

Depuis les travaux pionniers de Babuška et Rheinbolt [1978], l'intérêt pour les estimations d'erreur a posteriori s'est considérablement accru, d'une part parce que ces techniques permettent d'estimer explicitement l'erreur d'approximation et d'autre part parce qu'elles sont à l'origine des algorithmes de raffinement adaptatif du maillage qui permettent très souvent de réduire substantiellement le coût des calculs. Toutefois, l'analyse a posteriori a bien d'autres applications telle que : discrétisations multi-étapes et couplage automatique de modèles.

On connaît trois types d'estimateurs d'erreur a posteriori : les estimateurs par résidu, les estimateurs par dualité et les estimateurs hiérarchiques.

Les techniques d'estimation par résidu ont été introduites par Babuška et Rheinbolt [6], puis leur analyse a été étendue par Verfürth [60] ; voir également [61] pour une revue relativement exhaustive.

Les techniques d'estimation a posteriori par dualité ont été introduites par Johnson [43], on pourra aussi consulter Becker et Rannacher [8].

Les estimateurs a posteriori de type hiérarchique ont été introduits par Bank et Weiser [7], pour une revue relativement détaillée de ces estimateurs, on pourra consulter Ainsworth et Oden [3]. On se réfère à [30] pour un premier travail dans cette direction concernant le modèle de plaque ainsi à [16] concernant un modèle de coques.

Par ailleurs, de nombreux problèmes de la physique et de la mécanique sont décrits par des modèles de contact unilatéral avec ou sans frottement. C'est le cas, par exemple d'emboutissages et d'impact en mécanique des structures. La résolution de tels problèmes représente des enjeux industriels et technologiques de grande importance. Parmi les modèles de contact unilatéral, on cite les équations de Signorini [1933]. Il s'agit de problèmes à frontière libre gouvernés par des équations aux dérivées partielles augmentées de contraintes de type inégalités décrivant le contact sur une partie du bord du domaine de calcul. Il s'ensuit le travail de Fichera [1964]

où le problème de Signorini a été résolu, en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Ceci étant dit, on peut affirmer sans nous tromper que l'étude mathématique des problèmes de contact commence avec la monographie de Duvaut et Lions [1972], qui a le mérite de présenter la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact, accompagnée de résultats d'existence et d'unicité de la solution. D'autres références incontournables sont les livres de Panagiotopoulos, Kikuchi et Oden [1988], Hlaváček, Haslinger, Nečas et Lovisek [1988], dans les deux dernières références, l'analyse numérique de quelques problèmes de contact étant présentée.

Les premiers travaux pour un modèle de contact entre deux membranes et sa discrétisation par éléments finis ont été établis par Ben Belgacem, Bernardi, Blouza et Vohralík [13] ainsi que l'analyse a posteriori du même problème [14]. Un modèle de contact pour la coque de Naghdi a été étudié par Ben Belgacem, Bernardi, Blouza et Taallah [15].

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse concerne les deux directions de recherche évoquées précédemment. D'une part, on effectue une analyse a posteriori d'un modèle de coque de Naghdi pénalisé, c'est un modèle qui prend en compte les effets de scisaillement. D'autre part, on considère un autre modèle de coque à savoir un modèle de coque de Koiter qui néglige les effets de scisaillement et on étudie le contact de cette coque avec un corps rigide.

Cette thèse est composée de 3 chapitres. L'étude se veut assez indépendante; ceci explique le fait que les outils et résultats mathématiques mis en place au chapitre 2 ne soient pas utilisés au chapitre 3. Le chapitre 1 étant introductif.

Dans le premier chapitre, on rappelle la géométrie de la coque et on présente le modèle de la coque de Naghdi et la coque de Koiter en coordonnées cartésiennes appropriée pour des coques linéairement élastiques ainsi que les résultats d'existence et d'unicité dans un cadre fonctionnel qui permet des coques peu régulières voir [19, 22].

Dans le deuxième chapitre, on considère une version pénalisée du modèle de coque de Naghdi destiné à approcher le caractère tangent de la rotation r de la normale à la surface moyenne de la coque. Nous avons mené une analyse a posteriori de la discrétisation par éléments finis de ce modèle. On a établi des estimations d'erreur parfaitement optimales utilisant des indicateurs d'erreur de type résiduel. On a mis en œuvre ces indicateurs à l'aide du logiciel FreeFem++. Pour réduire le temps de calcul on a proposé une stratégie d'adaptation de maillage basée sur ces indicateurs. On a pu modifier un code (de plusieurs centaines de lignes) déjà existant pour une formulation mixte de Naghdi et l'adapter à la formulation pénalisée du même modèle. L'intérêt de ce modèle est numérique. En effet, malgré la sensibilité possible du modèle par rapport au paramètre de pénalisation, cette approche requiert, néanmoins, moins de degrés de liberté donc un gain de temps de calcul que la formulation mixte.

Le troisième chapitre est destiné à l'étude de contact de la coque de Koiter avec un corps rigide. Le cadre fonctionnel utilisé ici ne dépend pas d'une base locale attachée à la surface moyenne de la coque. Ce choix permet d'écrire de façon naturelle la condition de complémentarité décrivant le contact unilatéral entre la coque et l'obstacle. Dans ce cadre fonctionnel, nous présentons des problèmes variationnels disant intermédiaires et pour chacun de ces problèmes nous indiquons les conditions nécessaires pour l'existence et l'unicité de la solution. Finalement nous déduisons que le système combinant équations et inéquations variationnelles qui en découle et qui modélise le contact de la coque avec un corps rigide constitue un problème bien posé.

Chapitre 1

Préliminaires géométriques et présentation du modèle de Naghdi

1.1 Notations et géométrie d'une coque

Dans le présent travail les indices et exposants grecs varient dans l'ensemble $\{1, 2\}$, les indices et exposants latins varient dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Sauf mention du contraire, nous adoptons la convention de sommation d'Einstein. Soit (e_1, e_2, e_3) la base orthonormale canonique de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel. On note $u \cdot v$ le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ la norme euclidienne associée et $u \wedge v$ leur produit vectoriel. Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 . On considère une coque de surface moyenne $S = \varphi(\bar{\omega})$ où $\varphi : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, φ est une application injective dont la régularité sera précisée par la suite mais qui est au moins de classe \mathcal{C}^1 sur $\bar{\omega}$ et admet des dérivées secondes en un sens faible. On suppose que les vecteurs

$$a_\alpha(x) = \partial_\alpha \varphi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.1)$$

sont linéairement indépendants pour tous les points $x = (x_1, x_2) \in \bar{\omega}$. On définit le vecteur normal unitaire

$$a_3(x) = \frac{a_1(x) \wedge a_2(x)}{|a_1(x) \wedge a_2(x)|} \quad (1.2)$$

à la surface au point $\varphi(x)$. Le point $\varphi(x)$ et les trois vecteurs a_i définissent un repère local pour la surface moyenne c'est-à-dire la base covariante attachée au point $\varphi(x)$. Les vecteurs a_1 et a_2 sont tangents aux directions définies par $\varphi(x_1 = cte)$ et $\varphi(x_2 = cte)$. La base contravariante $a^j(x)$ est définie par les relations $a_i \cdot a^j = \delta_i^j$ (en particulier $a^3 = a_3$). Les a^j définissent la base duale de a_j .

Définition 1.1 *Les composantes covariantes de la première forme fondamentale de la surface sont*

$$a_{\alpha\beta}(x) = a_\alpha(x) \cdot a_\beta(x). \quad (1.3)$$

Les composantes contravariantes de la première forme fondamentale de la surface sont

$$a^{\alpha\beta}(x) = a^\alpha(x) \cdot a^\beta(x). \quad (1.4)$$

Les formules de passage d'une base à l'autre sont les suivantes :

$$\begin{cases} a_\alpha = a_{\alpha\beta} a^\beta, \\ a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $(a^{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de $(a_{\alpha\beta})$. Notons que par hypothèse, le déterminant

$$a(x) = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = |a_1 \wedge a_2|^2, \quad (1.6)$$

est strictement positif sur $\bar{\omega}$; il existe alors une constante δ telle que

$$a(x) \geq \delta > 0, \forall x \in \bar{\omega}. \quad (1.7)$$

L'élément d'aire dS est donné par

$$dS = \sqrt{a} dx.$$

La deuxième forme fondamentale est définie par ses composantes covariantes

$$b_{\alpha\beta}(x) = a_3(x) \cdot \partial_\beta a_\alpha(x) = -a_\alpha(x) \cdot \partial_\beta a_3(x), \quad (1.8)$$

ou mixtes

$$b_\alpha^\beta(x) = a^{\beta\rho}(x) b_{\rho\beta}(x). \quad (1.9)$$

La troisième forme fondamentale est définie par ses composantes covariantes

$$c_{\alpha\beta}(x) = b_\alpha^\rho(x) b_{\rho\beta}(x). \quad (1.10)$$

Les symboles de Christoffel de la surface sont donnés par :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \Gamma_{\beta\alpha}^\rho = a^\rho \cdot \partial_\beta a_\alpha = -\partial_\beta a^\rho \cdot a_\alpha. \quad (1.11)$$

Remarque 1.1 Les symboles de Christoffel permettent de calculer les dérivées des vecteurs de base (a_1, a_2, a_3) et (a^1, a^2, a^3) .

Les dérivées des vecteurs des bases locales sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\beta a_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\rho a_\rho + b_{\alpha\beta} a_3, \\ \partial_\beta a^\alpha = -\Gamma_{\beta\alpha}^\rho a^\rho + b_\beta^\alpha a_3, \\ \partial_\beta a_3 = \partial_\beta a^3 = -b_{\beta\rho} a^\rho = -b_\beta^\rho a_\rho. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Soit u un déplacement de la surface moyenne de la coque c'est-à-dire dans la carte φ une application régulière de $\bar{\omega}$ dans \mathbb{R}^3 donnée par $u(x) = u_i(x) a^i(x)$. Les dérivées covariantes des composantes tangentielles du déplacement sont définies par :

$$u_{\alpha|\beta} = \partial_\beta u_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho u_\rho. \quad (1.13)$$

Soient $T_{\alpha\beta}$ et $T^{\alpha\beta}$ les composantes covariantes et contravariantes d'un champ de tenseurs de surface ; alors les fonctions

$$\begin{cases} T_{\alpha\beta|\rho} = \partial_\rho T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma T_{\sigma\beta} - \Gamma_{\beta\rho}^\sigma T_{\alpha\sigma}, \\ T_{|\rho}^{\alpha\beta} = \partial_\rho T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha T^{\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma\rho}^\beta T^{\alpha\sigma}, \end{cases} \quad (1.14)$$

sont les dérivées covariantes des composantes de ce champ de tenseurs.

Si de plus $T_{\alpha\beta}$ sont les composantes covariantes d'un tenseur de surface symétrique ses composantes mixtes $T_\alpha^\beta = a^{\beta\rho} T_{\alpha\rho}$ sont définies sans ambiguïté, et leurs dérivées covariantes sont donnés par

$$T_{\alpha|\rho}^\beta = \partial_\rho T_\alpha^\beta + \Gamma_{\rho\sigma}^\beta T_\alpha^\sigma - \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma T_\sigma^\beta. \quad (1.15)$$

Soit

$$u = u_i a^i = u^i a_i$$

un champ de vecteurs défini sur la surface S ; alors ses dérivées partielles sont données par (on rappelle que $a_3 = a^3$, donc $u_3 = u^3$)

$$\begin{cases} \partial_\alpha u = (u_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta} u_3) a^\beta + (\partial_\alpha u_3 + b_\alpha^\beta u_\beta) a_3, \\ = (u^\beta |_\alpha) - b_\alpha^\beta u_3) a_\beta + (\partial_\beta u_3 + b_{\alpha\beta} u^\beta) a^3. \end{cases} \quad (1.16)$$

Le tenseur de déformation linéarisé ou de changement de métrique,

$\gamma(u) = \gamma_{\alpha\beta}(u) a^\alpha \otimes a^\beta$, de la surface S est défini par ses composantes covariantes

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3. \quad (1.17)$$

Le tenseur de changement de courbure linéarisé, $\Upsilon(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) a^\alpha \otimes a^\beta$ défini par ses composantes covariantes.

$$\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = u_{3|\alpha\beta} + b_\beta^\rho u_{\rho|\alpha} + b_\alpha^\rho u_{\rho|\beta} + b_{\beta|\alpha}^\rho u_\rho - c_{\alpha\beta} u_3 \quad (1.18)$$

où

$$u_{3|\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho u_3 \text{ et } b_{\beta|\alpha}^\rho = \partial_\beta b_\alpha^\rho + \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho b_\beta^\sigma - \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma b_\sigma^\rho.$$

1.2 Les tenseurs de déformation et de changement de courbure

Dans cette section, on présente les tenseurs de déformation et de changement de courbure du déplacement de la surface moyenne de la coque dans un cadre fonctionnel introduit dans [18].

Lemme 1.1 1) Si $u \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ et $\varphi \in W^{2,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$, $p > 2$, alors les expressions

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha), \quad (1.19)$$

définissent des distributions de $H^{-1}(\omega)$ qui coïncident avec les composantes du tenseur de déformation quand u et φ sont réguliers.

2) Si de plus $\varphi \in H^3(\omega; \mathbb{R}^3)$ alors les expressions

$$\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = (\partial_{\alpha\beta} u - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho u) \cdot a_3, \quad (1.20)$$

définissent des distributions de $H^{-2}(\omega)$ qui coïncident avec les composantes du tenseur de changement de courbure quand u et φ sont réguliers.

Remarque 1.2 Ces nouvelles expressions sont plus simples et plus intrinsèques comparées à leurs expressions dans les approches classiques. En particulier les dérivées de la seconde forme fondamentale en sont absentes.

On rappelle que dans l'approche classique $u(x) = u_i(x) a^i(x)$ où $u_i = u \cdot a_i$ le déplacement est identifié avec le triplet (u_i) , $i = 1, 2, 3$ des composantes covariantes. Maintenant, le déplacement u est considéré comme application de ω dans \mathbb{R}^3 et les dérivées partielles $\partial_\alpha u$ et $\partial_{\alpha\beta} u$ sont aussi des fonctions de ω dans \mathbb{R}^3 .

Preuve. Voir [18]

1.3 Le lemme du mouvement rigide

On présente la version du lemme du mouvement rigide permettant l'analyse de coque dans le cadre fonctionnel introduit toujours dans [18].

Théorème 1.1 *Soit $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ un déplacement de la surface moyenne S .*

i) On suppose que $\varphi \in W^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. Si u vérifie $\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0$, alors il existe $\psi \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\partial_\alpha = \psi \wedge \partial_\alpha \varphi \quad (1.21)$$

ii) Si de plus, $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$ et u vérifie $\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = 0$, alors ψ s'identifie à un vecteur constant et l'on a

$$u(x) = c + \psi \wedge \varphi(x) \quad (1.22)$$

où $c \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur constant.

Remarque 1.3 Le champ de vecteur ψ est appelé champ de rotation infinitésimal et est donné par la formule

$$\psi(u) = \varepsilon^{\alpha\beta} (\partial_\beta u_3 + b_\beta^\rho u_\rho) a_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} u_{\alpha|\beta} a_3, \quad (1.23)$$

où $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$ et $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = |a_1 \wedge a_2|^{-1}$ quand u et φ sont réguliers, voir [11].

Preuve. voir [21]

Une application du lemme

L'application : $v \rightarrow |||v|||$ telle que :

$$|||v||| = \left(\sum_{\alpha,\beta} \|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\Upsilon_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur l'espace $H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ avec $v = 0$ sur γ_0 (bord de ω).

En effet il est clair que cette application est une semi norme reste à établir que $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$. Par le lemme du mouvement rigide, si $v \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $\|v\| = 0$ c'est à dire $\gamma_{\alpha\beta}(v) = \Upsilon_{\alpha\beta}(v) = 0$, alors il existe $\psi, c \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(x) = \psi \wedge \varphi + c$, or $v = 0$ sur $\partial\omega = \gamma_0$ (condition au bord).

Sachant que l'ensemble des points

$$\{y \in \mathbb{R}^3, \psi \wedge y + c = 0\} = \begin{cases} \Delta & \text{si } \psi \neq 0 \text{ et } c \neq 0 \\ \emptyset & \text{si } \psi = 0 \text{ et } c \neq 0 \\ \mathbb{R}^3 & \text{si } \psi = c = 0 \end{cases}$$

où Δ est une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 comme $\varphi(\gamma_0)$ n'est pas inclu dans la droite Δ il s'ensuit que $v = 0$, c'est à dire $\psi = c = 0$ car si $\varphi(\gamma_0) \subset \Delta$ et que $\psi \neq 0$ et $c \neq 0$, ψ est parallèle à (Δ) donc $\psi \wedge \varphi(\gamma_0) = 0$, on aurait $v/\gamma_0 = 0 = \psi \wedge \varphi(\gamma_0) + c$ contradiction avec le fait que $c \neq 0$.

Dans toute la suite nous adoptons les préliminaires géométriques et notations introduites dans les sections précédentes.

1.4 Le modèle de Naghdi

1.4.1 Définitions

Une coque

Définition 1.2 Soit S une surface de \mathbb{R}^3 définie par $\bar{S} = \varphi(\bar{\omega})$.

Un point générique de S est alors $\varphi(x)$ où x est un point de ω . Une coque, non déformée ou de référence, de surface moyenne S et d'épaisseur e est un ensemble de \mathbb{R}^3 donné par :

$$\bar{C} = \left\{ \Phi(x, z) = \varphi(x) + za_3(x), x \in \bar{\omega} \text{ et } -\frac{1}{2}e(x) \leq z \leq \frac{1}{2}e(x) \right\} \quad (1.24)$$

l'épaisseur de la coque est définie par l'application $e : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. La coque est dite

mince si $e(x)$ est relativement petite devant le plus petit rayon de courbure de la surface moyenne et les dimensions extérieures.

Une coque déformée

Définition 1.3 Après déformation, la normale a_3 est transformée en un vecteur a_3^* . Le point $\Phi(x, z)$ devient

$$\Phi^*(x, z) = \varphi^*(x) + f(z)a_3^*(x) \quad (1.25)$$

où $\varphi^* = \varphi + u$ la carte définissant la surface moyenne déformée, u étant le déplacement du point $\varphi(x)$ de S . Notons que $f(z)$ est a priori une fonction quelconque de z .

1.4.2 Les hypothèses de Kirchhoff-Love

Particulièrement, la première hypothèse fondamentale de Kirchhoff-Love a été adopté par Naghdi afin d'obtenir son modèle par contre Koiter a adopté toutes les trois hypothèses pour son modèle.

H₁ : La première hypothèse est que la distance entre un point de la coque et la surface moyenne reste constante au cours de la déformation, soit $f(z) = z$.

H₂ : La deuxième hypothèse est que le vecteur a_3 est transformé en un vecteur a_3^* orthogonal à la surface déformée c'est-à-dire :

$$a_3^* = \frac{a_1^* \wedge a_2^*}{|a_1^* \wedge a_2^*|},$$

où $a_\alpha^* = a_\alpha + \partial_\alpha u$ est la base covariante de la surface déformée.

H₃ : Les contraintes sont approximativement planes.

Ainsi, pour le modèle de Naghdi la prise en compte des effets de cisaillement transverse supposent que les particules situées sur la normale a_3 avant déformation, restent alignées lors de la déformation. Alors, sous l'hypothèse \mathbf{H}_1 , la coque déformée sera définie par

$$\Phi^*(x, z) = \varphi^*(x) + za_3^*(x), \quad (1.26)$$

avec

$$a_3^*(x) = a_3(x) + r_\alpha a^\alpha, \quad (1.27)$$

où les paramètres r_α sont les composantes covariantes linéarisées du champ de rotation de la normale a_3 . En fait $r = a_3^* - a_3$.

1.4.3 Déplacement d'un point de la coque

Sous les effets de cisaillement et l'hypothèse \mathbf{H}_1 de Kirchoff-Love, le déplacement d'un point $\Phi(x, z)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\Phi(x, z)) &= U(x, z) \\ &= \Phi^*(x, z) - \Phi(x, z) \\ &= \varphi^*(x) + za_3^*(x) - (\varphi(x) + za_3(x)) \\ &= \varphi(x) + u(x) + za_3^*(x) - \varphi(x) - za_3(x) \\ &= u + z(a_3 + r_\alpha a^\alpha - a_3). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$U(x, z) = u(x) + zr_\alpha a^\alpha,$$

où $u(x)$ est le déplacement de la surface moyenne.

Remarque 1.4 Il vient que la détermination du déplacement U à travers l'épaisseur de la coque nécessite la détermination du déplacement $u(x)$ de la surface moyenne ainsi que les composantes r_α de la rotation de la normale a_3 .

1.4.4 Les tenseurs linéarisés de déformation et de changement de courbure de la surface

Dans le cadre fonctionnel introduit dans l'approche classique de BERNADOU, CIARLET ET MIARA VOIR [11], le déplacement de la surface moyenne et la rotation de la normale a_3 sont respectivement identifiés avec le triplet (u_i) , $i = 1, 2, 3$ et le couple (r_α) , $\alpha = 1, 2$, de leurs composantes covariantes. Les dérivées covariantes des composantes de r et des composantes tangentielles de u sont définies par :

$$u_{\alpha|\beta} = \partial_\beta u_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho u_\rho,$$

et

$$r_{\alpha|\beta} = \partial_\beta r_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho r_\rho.$$

Le tenseur de déformation linéarisé définit par $\gamma(u) = \gamma_{\alpha\beta}(u) a^\alpha \otimes a^\beta$ avec

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3, \quad (1.28)$$

le tenseur de changement de courbure définit par $\chi(u, r) = \chi_{\alpha\beta}(u, r) a^\alpha \otimes a^\beta$ avec

$$\chi_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2} (r_{\alpha|\beta} + r_{\beta|\alpha}) - \frac{1}{2} b_\alpha^\rho (u_{\rho|\beta} - b_{\rho\beta} u_3) - \frac{1}{2} b_\beta^\sigma (u_{\sigma|\alpha} - b_{\sigma\alpha} u_3), \quad (1.29)$$

et le tenseur de cisaillement transverse par $\delta(u, r) = \delta_{\alpha 3}(u, r) a^\alpha \otimes a^3$ avec

$$\delta_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_3 + b_\alpha^\rho u_\rho + r_\alpha). \quad (1.30)$$

1.4.5 Le tenseur de déformation de la coque

La base covariante en un point de la coque tridimensionnelle est définie par

$$\begin{cases} g_\alpha = g_\alpha(x, z) = \partial_\alpha \Phi(x, z) = a_\alpha(x) + z \partial_\alpha a_3(x) \\ g_3 = g_3(x, z) = \partial_3 \Phi(x, z) = a_3(x). \end{cases} \quad (1.31)$$

La base contravariante est définie par : $g_i \cdot g^j = \delta_i^j$.

Pour un milieu continu, le tenseur de déformation a pour expression

$$\varepsilon(U) = \epsilon_{ij} g^i \otimes g^j \quad \text{avec} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij}^* - g_{ij}) \quad (1.32)$$

où g_{ij} et g_{ij}^* désignent respectivement les tenseurs métriques du milieu continu dans les configurations de référence et déformée, pour une même paramétrisation (x, z) .

Une approximation des composantes covariantes, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ et $\varepsilon_{\alpha 3}$, du tenseur de déformation de la coque est définie par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) = \gamma_{\alpha\beta}(u) + z \chi_{\alpha\beta}(u, r), \\ \varepsilon_{\alpha 3}(U) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3 + b_\alpha^\rho u_\rho + r_\alpha), \\ \varepsilon_{33}(U) = 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

où $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ et $\chi_{\alpha\beta}(u, r)$ sont les tenseurs de déformation et de changement de courbure de la surface moyenne de la coque de référence.

1.4.6 Le tenseur de contraintes de la coque

On considère une coque homogène, élastique et isotrope satisfaisant la loi de comportement de Hooke :

$$\sigma(U) = \lambda \text{tr} \varepsilon(U) Id + 2\mu \varepsilon(U). \quad (1.34)$$

Les quantités λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau ($\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$) et σ est le tenseur des contraintes.

Le tenseur de contraintes $\sigma(U)$ donné par loi de comportement (1.34) s'écrit sous la forme

$$\sigma(U) = \sigma^{ij} g_i \otimes g_j \quad \text{avec} \quad \sigma^{ij} = \sigma(U) : g^i \otimes g^j = E^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.35)$$

où la notation $\sigma : \tau = \sigma_{ij} g^{ik} g^{jl} \tau_{kl}$ et E^{ijkl} est le tenseur élastique qui a pour expression :

$$E^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}). \quad (1.36)$$

Enfin, pour obtenir le modèle bidimensionnel de Naghdi la troisième hypothèse \mathbf{H}_3 de Kirchhoff-Love fût adopté autrement dit les contraintes sont approximativement planes c'est à dire $\sigma^{33}(U) = 0$.

1.4.7 Energie de déformation de la coque

L'énergie de déformation de la coque associée au champ de déplacement U est donnée par :

$$W(U) = \frac{1}{2} \int C (A^{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \varepsilon_{\rho\sigma}(U) + 4\mu g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha 3}(U) \varepsilon_{\beta 3}(U)) dC, \quad (1.37)$$

où

$$A^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} + \mu(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho}). \quad (1.38)$$

Une approximation des composantes covariantes, $g^{\alpha\beta}$, de la métrique de la coque est donnée par :

$$g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + 2zb^{\alpha\beta} + \dots \quad (1.39)$$

où $b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\rho} a^{\beta\sigma} b_{\rho\sigma}$ sont les composantes de la deuxième forme fondamentale de la surface S . Le terme en z étant négligé dans (1.39) et une intégration sur l'épaisseur dans (1.37) conduit à l'approximation suivante

$$\left\{ \begin{aligned} W(U) &= \frac{1}{2} \int_{\omega} \left(ea^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(u) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(u, r)) \right. \\ &\quad \left. + 4e\mu a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(u, r) \right) \sqrt{a} \, dx. \end{aligned} \right. \quad (1.40)$$

où

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\sigma} + \mu (a^{\alpha\rho} a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma} a^{\beta\rho}). \quad (1.41)$$

A cette approximation, il est associé (voir [18]) les formes bilinéaires suivantes :

$$a((u, r), (v, s)) = \int_{\omega} ea^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(v, s)) \sqrt{a} \, dx, \quad (1.42)$$

et

$$b((u, r), (v, s)) = \int_{\omega} 4e\mu a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(v, s) \sqrt{a} \, dx, \quad (1.43)$$

1.4.8 Energie potentielle des charges extérieures

L'énergie potentielle des charges extérieures associée à un champ de déplacement $V = v + z s_\alpha a^\alpha$ des particules de la coque est approché par

$$l(v, s) = \int_{\omega} p \cdot v \sqrt{a} dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v - M^\alpha s_\alpha) \sqrt{a_{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta} d\gamma, \quad (1.44)$$

où p est la résultante de densité de force, $l = \sqrt{a^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta}$ est l'élément de longueur sur $\partial\omega$, où (τ_1, τ_2) sont les coordonnées covariantes du vecteur unitaire tangent à $\partial\omega$, $N = N^i a_i$ est la densité de traction appliquée et $M = M^\alpha a_\alpha \wedge a_3 = \varepsilon_{\beta\alpha} M^\alpha a^\beta$ la densité de moment appliquée.

1.4.9 Formulation variationnelle

Soit

$$V_0 = \left\{ ((u_i), (s_\alpha)) \in [H^1(\omega)]^5, \quad v_i = s_\alpha = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma_0 \right\}.$$

La formulation faible du problème de Naghdi est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad (u, r) = ((u_i), (r_\alpha)) \in V_0 \quad \text{tel que} \\ a((u, r), (v, s)) + b((u, r), (v, s)) = l(v, s), \quad \forall (v, s) \in V_0 \end{array} \right.$$

Remarque 1.5 Dans la suite, au lieu d'identifier le déplacement u et la rotation r avec leurs composantes covariantes comme il est d'usage, dans l'approche introduite dans [18], ils sont considérées comme des fonctions vectorielles de $\bar{\omega}$ dans \mathbb{R}^3 .

Notons que ce point de vue n'est pas entièrement intrinsèque puisque u et r restent toujours définis à l'aide de la carte φ . Les dérivées partielles $\partial_\alpha u$, $\partial_{\alpha\beta} u$ et $\partial_\alpha r$ sont aussi des fonctions de ω dans \mathbb{R}^3 .

1.4.10 Nouvelles expressions des tenseurs de déformation et de changement de courbure

Lemme 1.2 Soient $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$, $r \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $r \cdot a_3 = 0$ et $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. Alors les expressions

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha), \quad (1.45)$$

définissent des fonctions de $L^2(\omega)$ qui coïncident avec les composantes du tenseur de déformation quand u et φ sont dans $\mathcal{C}^2(\omega; \mathbb{R}^3)$. Les expressions

$$\chi_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3 + \partial_\alpha r \cdot a_\beta + \partial_\beta r \cdot a_\alpha), \quad (1.46)$$

définissent des fonctions de $L^2(\omega)$ qui coïncident avec les composantes covariantes du tenseur de changement de courbure quand u, r et φ sont dans $\mathcal{C}^2(\omega; \mathbb{R}^3)$.

Les expressions

$$\delta_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_3 + r \cdot a_\alpha), \quad (1.47)$$

définissent des fonctions de $L^2(\omega)$ qui coïncident avec les composantes du tenseur de cisaillement quand u, r et φ sont $\mathcal{C}^2(\omega; \mathbb{R}^3)$.

1.4.11 Cadre fonctionnel pour le modèle de Naghdi

Dans cette section, on présente le cadre fonctionnel pour le modèle de Naghdi établi dans [18].

On considère une coque de surface moyenne S . La carte φ est supposée dans $W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. Soit l'espace

$$V = \left\{ (v, s) \in [H^1(\omega; \mathbb{R}^3)]^2; s \cdot a_3 = 0, v = s = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|(v, s)\|_V = \left(\|v\|_{1,\omega}^2 + \|s\|_{1,\omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace V est un espace de Hilbert. L'espace V définit une extension naturelle du cadre fonctionnel de **Ciarlet** et **Miara** voir [35] à ce cas. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 1.3 *Supposons que $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$, alors l'espace V est égal à l'espace des déplacements $(v = v_i a^i, s = s_\alpha a^\alpha) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ dont les composantes covariantes $\left((v_i)_{i=1,2,3}, (s_\alpha)_{\alpha=1,2} \right)$ appartiennent à $V_0 = [H^1(\omega)]^5$. Quand V_0 est muni de la norme*

$$\|(v, s)\|_{V_0} = \left(\sum_i \|v\|_{1,\omega}^2 + \sum_\alpha \|s_\alpha\|_{1,\omega}^2 \right),$$

cette correspondance définit un isomorphisme.

Preuve. Voir [18].

Version du lemme du mouvement rigide pour une coque de Naghdi

On présente une version du lemme du mouvement rigide pour une coque de Naghdi, qui généralise le lemme du mouvement rigide introduit dans la section 1.3 (thm 1.1).

Théorème 1.2 *Soient $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ et $r \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $r \cdot a_3 = 0$ respectivement un déplacement et une rotation de la normale a_3 de la surface moyenne. Soit $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$.*

i) On suppose que $\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0$ alors il existe un unique $\psi \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\partial_\alpha u = \psi \wedge \partial_\alpha \varphi. \quad (1.48)$$

ii) Si $\delta_{\alpha 3}(u, r) = 0$ alors $\partial_\alpha u \cdot a_3 = -r \cdot a_\alpha \in H^1(\omega)$. De plus $r \cdot a_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta} \psi \cdot a^\beta$.

iii) Si de plus $\chi_{\alpha\beta}(u, r) = 0$, alors ψ s'identifie à un vecteur de \mathbb{R}^3 et l'on a

$$u(x) = c + \psi \wedge \varphi(x) \quad (1.49)$$

où c est un vecteur constant de \mathbb{R}^3 et

$$r(x) = -(\varepsilon_{\alpha\beta}(x) \psi \cdot a^\beta(x)) a^\alpha(x). \quad (1.50)$$

Preuve. Voir [19]

1.4.12 Existence et unicité pour le modèle de Naghdi

Dans cette partie, on rappelle un théorème d'existence et d'unicité de la solution du modèle linéaire de Naghdi pour des coques dont les surfaces moyennes sont de classe $W^{2,\infty}$ seulement. On considère une coque de surface moyenne S , d'épaisseur e et de constante de Lamé $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$. De plus le bord $\partial\omega$ est divisé en deux parties, une partie γ_0 de mesure strictement positive sur laquelle la coque est encastrée et d'une partie complémentaire γ_1 sur laquelle la coque est soumise à des tractions et moments appliqués.

Théorème 1.3 *Soit $p \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ résultante de densité de force, $N^i \in L^2(\gamma_1)$ et $M^\alpha \in L^2(\gamma_1)$. Alors il existe une unique solution du problème variationnel :*

Trouver $(u, r) \in V$ tel que

$$B((u, r), (v, s)) = L(v, s) \quad \forall (v, s) \in V, \quad (1.51)$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} B((u, r), (v, s)) &= \int_{\omega} \left(e a^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(v, s)) \right) \sqrt{a} \, dx \\ &+ \int_{\omega} 4e\mu a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(v, s) \sqrt{a} \, dx \end{aligned} \right. \quad (1.52)$$

et

$$L(v, s) = \int_{\omega} p \cdot v \sqrt{a} \, dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v - M \cdot s) \sqrt{a_{\alpha\beta} \tau_{\alpha} \tau_{\beta}} \, d\gamma. \quad (1.53)$$

Où $a^{\alpha\beta\rho\sigma}$ tenseur d'élasticité défini par (1.41) qui satisfait la symétrie usuelle et uniformément strictement positif c'est-à-dire :

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} \tau_{\alpha\beta} \tau_{\rho\sigma} \geq c \sum_{\alpha\beta} |\tau_{\alpha\beta}|^2,$$

pour tout tenseur symétrique $\tau_{\alpha\beta}$.

On donnera brièvement les étapes de la preuve de ce théorème pour plus de détails voir [18, 19]. En particulier, la démonstration se base sur le lemme de Lax-Milgram. La V-éllipticité de la forme bilinéaire repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.4 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$B((v, s); (v, s)) \geq C \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{\alpha, \beta} \|\chi_{\alpha\beta}(v, s)\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{\alpha} \|\delta_{\alpha 3}(v, s)\|_{L^2(\omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.54)$$

pour tout $(v, s) \in [H^1(\omega; \mathbb{R}^3)]^2$.

Lemme 1.5 *La forme bilinéaire du problème (1.51) est V-élliptique.*

Preuve. Notons que le lemme du mouvement rigide est une étape cruciale dans la démonstration. Pour une preuve plus détaillée on renvoie à [18, 19]. L'idée est de

montrer que

$$\begin{aligned} \|(v, s)\| = & \left(\sum_{\alpha, \beta} (\|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\chi_{\alpha\beta}(v, s)\|_{L^2(\omega)}^2) \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha} \|\delta_{\alpha 3}(v, s)\|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.55)$$

est une norme sur l'espace V équivalente à la norme de $\|\cdot\|_V$.

Puisque le lemme 1.4 fournit $B((v, s), (v, s)) \geq C \|(v, s)\|$, il suffit d'établir que l'application $(v, s) \rightarrow \|(v, s)\|$ est une norme sur V . Il est clair que cette application est une semi norme reste à prouver que si $\|(v, s)\| = 0$ alors $v = 0$ et $s = 0$.

Soit $(v, s) \in V$ tel que $\|(v, s)\| = 0$ c'est à dire $\gamma_{\alpha\beta}(v) = 0$, $\chi_{\alpha\beta}(v, s) = 0$ et $\delta_{\alpha 3}(v, s) = 0$. Par application du théorème 1.2 (lemme du mouvement rigide) il existe $\psi, c \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$v(x) = \psi \wedge \varphi(x) + c.$$

En appliquant les conditions au bord plus un argument par contradiction donne $\psi = 0$ implique $s = 0$ et donc $v = s = 0$ dans ω .

La deuxième partie de la preuve consiste à montrer l'équivalence des deux normes : un raisonnement par l'absurde est utilisé basé sur le lemme du mouvement rigide et l'argument standard de compacité qui utilise d'une part l'inégalité de Korn et d'autre part le lemme de Rellich.

Preuve du théorème 1.3.

La forme bilinéaire associée est V -elliptique grâce au lemme 1.5. Il est clair que la forme linéaire (1.53) du problème (1.51) est continue sur l'espace V et vérifie

$$\|L\| \leq c \left(\|p\|_{L^2(\omega)^3} + \|N\|_{L^2(\gamma_1)^3} + \|M\|_{L^2(\gamma_1)^3} \right).$$

Le théorème 1.3 découle du lemme de Lax -Milgram.

1.5 Le modèle de Koiter

Contrairement au modèle de Naghdi, le modèle de Koiter néglige les effets de cisaillement transverse.

On décrira brièvement le modèle de Koiter pour une description détaillée voir [18, 22].

Une coque déformée

Définition 1.4 Soit C une coque de surface moyenne S et d'épaisseur e définie par (1.24). Après déformation, la normale a_3 est déformée en un vecteur a_3^* qui n'est pas forcément orthonormal à la surface déformée. Sous les hypothèses \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 de Kirchhoff-Love vu en section 1.4.2, le point $\Phi(x, z)$ devient

$$\Phi^*(x, z) = \varphi^*(x) + z(a_3 - (\partial_\alpha u \cdot a_3)a^\alpha), \quad (1.56)$$

ainsi, le déplacement d'un point $\Phi(x, z)$ s'écrit

$$\mathcal{U}(\Phi(x, z)) = U(x, z) = \Phi^*(x, z) - \Phi(x, z). \quad (1.57)$$

Il suit que

$$U(x, z) = u(x) - z(\partial_\alpha u \cdot a_3)a^\alpha. \quad (1.58)$$

Il suffit de connaître le déplacement u du point $\varphi(x)$ de la surface moyenne pour approcher les déplacements à travers l'épaisseur de la coque \overline{C} .

Comme dans le cas de Naghdi, on considère une coque homogène, élastique et isotrope satisfaisant la loi de comportement de Hooke définie par (1.34).

Enfin, pour obtenir le modèle bidimensionnel de Koiter la troisième hypothèse \mathbf{H}_3 fût aussi adopté.

L'énergie de déformation de la coque associée au champ de déplacement U est donnée

$$W(U) = \frac{1}{2} \int_{\omega} e a^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \Upsilon_{\alpha\beta}(u) \Upsilon_{\rho\sigma}(v)) \sqrt{a} \, dx \quad (1.59)$$

où $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ est le tenseur de déformation défini par (1.19) et $\Upsilon_{\alpha\beta}(u)$ est le tenseur de changement de courbure défini par (1.20).

A cette approximation de l'énergie est associée la forme bilinéaire

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\omega} e a^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u)\gamma_{\rho\sigma}(u) + \frac{e^2}{12} \Upsilon_{\alpha\beta}(u)\Upsilon_{\rho\sigma}(u)) \sqrt{a} \, dx. \quad (1.60)$$

L'énergie potentielle des charges associée à un champ de déplacement $U = u - z(\partial_\alpha u \cdot a_3)a^\alpha$ des particules de la coque, peut être approchée par

$$\tilde{l}(v) = \int_{\omega} f \cdot v \sqrt{a} \, dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v + M \cdot \psi(v)) \sqrt{a_{\alpha\beta}\tau_\alpha\tau_\beta} \, d\gamma, \quad (1.61)$$

où f est la résultante de densité de force, N est toujours la densité de traction appliquée, M est la densité de moment appliquée et $\psi(v)$ est le vecteur de rotation infinitésimal, qui est défini par (1.23).

1.5.1 Cadre fonctionnel pour le modèle de Koiter

Dans cette partie on reprend le cadre fonctionnel pour le modèle de coque de Koiter établi dans [18].

Soit une coque de surface moyenne S . La carte φ est supposée dans l'espace $W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. Soit l'espace

$$\tilde{V} = \{v \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3), \partial_{\alpha\beta} v \cdot a_3 \in L^2(\omega), v = \partial_\alpha v \cdot a_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\}, \quad (1.62)$$

muni de la norme

$$\|v\|_{\tilde{V}} = \left(\|v\|_{H^1(\omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|(\partial_{\alpha\beta} v \cdot a_3)a^\alpha\|_{1,\omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.63)$$

\tilde{V} est un espace de Hilbert qui prolonge l'espace classique de Bernadou et Ciarlet voir [9] au cas $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. Pour les détails de ce résultat voir [18, 19].

1.5.2 Existence et unicité pour le modèle de Koiter

Dans cette partie, nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité pour une coque de Koiter encastrée sur une partie γ_0 du bord et soumise à une distribution de forces et moments sur la partie complémentaire γ_1 du bord, sous la seule hypothèse $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$.

Théorème 1.4 *Soit $f \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ résultante de densité de force, $N^i \in L^2(\gamma_1)$ et $M^\alpha \in L^2(\gamma_1)$. Alors il existe une unique solution du problème variationnel :*

Trouver $u \in \tilde{V}$ tel que

$$A(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad (1.64)$$

où

$$A(u, v) = \tilde{a}(u, v) = \int_{\omega} \left(ea^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u)\gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \Upsilon_{\alpha\beta}(u)\Upsilon_{\rho\sigma}(v)) \right) \sqrt{a} \, dx \quad (1.65)$$

et

$$L(v) = \tilde{l}(v) = \int_{\omega} f \cdot v \sqrt{a} \, dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v - M \cdot \psi(v)) \sqrt{a_{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta} \, d\gamma. \quad (1.66)$$

Avec on rappelle $N = N^i a_i$ et $M = M^\alpha a_\alpha \wedge a_3 = \varepsilon_{\beta\alpha} M^\alpha a^\beta$.

Preuve. Voir [18, 19].

Notons que cette preuve comme dans le cas du modèle de Naghdi applique le lemme de Lax-Milgram. Aussi, utilise une version du lemme du mouvement rigide pour la coque de Koiter afin de montrer la \tilde{V} ellipticité de la forme bilinéaire $A(u, v)$.

Chapitre 2

Analyse a posteriori du modèle de Naghdi pénalisé

Nous considérons une version pénalisée du modèle de Naghdi en coordonnées cartésiennes pour des coques linéairement élastiques de surface moyenne peu régulière ainsi que sa discrétisation par éléments finis ; voir [20] pour une revue détaillée du modèle.

Dans ce travail, Nous menons une analyse a posteriori du problème basée sur le résidu de la solution approchée voir équation (2.29). Cette analyse a posteriori conduit à la construction d'indicateurs d'erreur qui satisfont des estimations optimales.

Finalement, nous proposons une stratégie d'adaptation de maillage basée sur ces indicateurs, destinée à réduire le temps de calcul. Nous présentons quelques expériences numériques qui confirment son efficacité. Ces résultats ont fait l'objet de la publication [58].

Soit $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $\partial_{\alpha\beta} u \cdot a_3 \in L^2(\omega)$, un déplacement régulier de la surface moyenne, et $r \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ la rotation du vecteur unitaire normal a_3 , donnés en composantes covariantes et cartésiennes par

$$u(x) = u_i(x)a^i(x) = u_i^c(x)e_i, \text{ où } u_i = u \cdot a_i \text{ et } u_i^c = u \cdot e_i.$$

$$r(x) = r_\alpha(x)a^\alpha(x) = r_i^c(x)e_i, \text{ où } r_\alpha(x) = r(x) \cdot a_\alpha \text{ et } r_i^c = r \cdot e_i.$$

Soit $a^{\alpha\beta\rho\sigma} \in L^\infty(\omega)$ un tenseur d'élasticité qui vérifie les symétries usuelles et est uniformément strictement positif, c'est à dire il existe une constante $c > 0$ tel que

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} \tau_{\alpha\beta} \tau_{\rho\sigma} \geq c \sum_{\alpha\beta} |\tau_{\alpha\beta}|^2,$$

pour tout tenseur symétrique $\tau_{\alpha\beta}$.

On considère le cas d'un matériau homogène et isotrope de module de Young $E > 0$ et coefficient de poisson ν , $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$, où ses composantes sont données par

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\rho} a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma} a^{\beta\rho}) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} a^{\alpha\beta} a^{\rho\sigma} \quad (2.1)$$

Dans l'approche voir [18], les composantes covariantes du tenseur de changement de métrique sont données par :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha), \quad (2.2)$$

les composantes covariantes du tenseur de changement de courbure sont données par :

$$\chi_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3 + \partial_\alpha r \cdot a_\beta + \partial_\beta r \cdot a_\alpha), \quad (2.3)$$

et les composantes du tenseur de cisaillement sont données par :

$$\delta_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_3 + r \cdot a_\alpha), \quad (2.4)$$

où $\gamma_{\alpha\beta}(u)$, $\chi_{\alpha\beta}(u, r)$ et $\delta_{\alpha 3}(u, r)$ sont des fonctions de $L^2(\omega)$, quand $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$, $r \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ et $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega, \mathbb{R}^3)$.

Nous considérons une coque de surface moyenne S de classe $W^{2,\infty}$ seulement, d'épaisseur e dont le bord $\partial\omega$ est divisé en deux parties γ_0 sur laquelle la coque est encastrée et la partie complémentaire $\gamma_1 = \partial\omega \setminus \gamma_0$ où la coque est soumise à des tractions et moments appliqués.

Nous reprenons le modèle de Naghdi vu en section 1.5 du chapitre I.

Soit l'espace

$$\mathbb{V}(\omega) = \{V = (v, s) \in [H^1(\omega, \mathbb{R}^3)]^2, s \cdot a_3 = 0 \text{ dans } \omega, v = s = 0 \text{ sur } \gamma_0\}. \quad (2.5)$$

Muni de la norme :

$$\|V\|_{\mathbb{V}} = \|(v, s)\|_{\mathbb{V}} = \left(\|v\|_{1,\omega}^2 + \|s\|_{1,\omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

\mathbb{V} est un espace de Hilbert.

Supposons $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$, $f \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ la résultante de densité de force, $N \in L^2(\gamma_1; \mathbb{R}^3)$ densité de traction appliquée et $M \in L^2(\gamma_1; \mathbb{R}^3)$ densité de moment appliquée. Le théorème 1.3 fournit l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel : trouver $(u, r) \in \mathbb{V}$ tel que

$$a((u, r), (v, s)) = L(v, s), \quad \forall (v, s) \in \mathbb{V}, \quad (2.6)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a((u, r), (v, s)) = \int_{\omega} \left(e a^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(v, s)) \right) \sqrt{a} \, dx \\ \quad + \int_{\omega} 4e\mu a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(v, s) \sqrt{a} \, dx \end{array} \right.$$

et

$$L(v, s) = \int_{\omega} f \cdot v \sqrt{a} \, dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v + M \cdot s) l \, d\tau.$$

Les tenseurs χ , γ et δ sont respectivement les tenseurs de changement de courbure, de changement de métrique et le tenseur de cisaillement transverse définies ci-dessus par (2.2), (2.3) et (2.4).

La forme linéaire L est bien continue sur \mathbb{V} et vérifie

$$\|L\| \leq c(\|f\|_{L^2(\omega)^3} + \|N\|_{L^2(\gamma_1)^3} + \|M\|_{L^2(\gamma_1)^3}). \quad (2.7)$$

La forme bilinéaire a est \mathbb{V} -elliptique : Il existe $c^* > 0$ tel que :

$$\forall V \in \mathbb{V}(\omega), \quad a(V, V) \geq c^* \|V\|_{\mathbb{V}(\omega)}^2. \quad (2.8)$$

2.1 Une version pénalisée du modèle de Naghdi

Nous reprenons le modèle pénalisé de Naghdi voir [20], destiné à approcher le caractère tangent de la rotation r , où les inconnues restent toujours le déplacement u et la rotation r éléments de l'espace $H^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ sans aucune contrainte orthogonale sur r .

Soit l'espace des fonctions relaxées

$$\mathbb{X} = \left\{ (v, s) \in H^1(\omega, \mathbb{R}^3)^2, v = s = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}, \quad (2.9)$$

muni de la norme H^1 .

Théorème 2.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p \leq 1$. Soit $f \in L^2(\omega, \mathbb{R}^3)$, $N \in L^2(\gamma_1, \mathbb{R}^3)$ et $M \in L^2(\gamma_1, \mathbb{R}^3)$. Il existe une unique solution du problème trouver $U_p = (u_p, r_p) \in \mathbb{X}$ tel que*

$$\forall (v, s) \in \mathbb{X}, a((u_p, r_p); (v, s)) + \frac{1}{p} b(r_p \cdot a_3; s \cdot a_3) = L(v, s) \quad (2.10)$$

où

$$b(\lambda; \mu) = \int_{\omega} \partial_{\alpha} \lambda \partial_{\alpha} \mu \, dx \quad (2.11)$$

et p paramètre de pénalisation.

On donnera les grandes lignes de la preuve pour plus de détails voir [20].

La démonstration est basée sur la version suivante du lemme du mouvement rigide.

Lemme 2.1 *Soit $(u, r) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)^2$ et supposons que $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$.*

- i) *Si $\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0$, alors il existe $\psi \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $\partial_{\alpha} u = \psi \wedge a_{\alpha}$.*
- ii) *Si $\delta_{\alpha 3}(u, r) = 0$, alors $\partial_{\alpha} u \cdot a_3 = -r \cdot a_{\alpha} \in H^1(\omega)$.*
- iii) *Si en plus de i) et ii), $\chi_{\alpha\beta}(u, r) = 0$, alors ψ est un vecteur constant de \mathbb{R}^3 et il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que*

$$u(x) = c + \psi \wedge \varphi(x) \quad (2.12)$$

et

$$r(x) = \psi \wedge a_3(x) + (r(x) \cdot a_3) a_3(x). \quad (2.13)$$

Preuve. Pour i),ii) et iii) même démonstration du Théorème 1.2 Chapitre I. Excepté pour iii) comme nous considérons $r \cdot a_3 \neq 0$ d'où le terme $(r(x) \cdot a_3) a_3(x) = r_3 a_3(x)$ dans la formule (2.13).

Lemme 2.2 *La forme bilinéaire (2.10) est \mathbb{X} -élliptique, uniformément en p pour $0 < p \leq 1$.*

Preuve. Pour une preuve plus détaillée voir [20, 57].

Soit

$$\begin{aligned} |||(v, s)||| &= \left\{ \sum_{\alpha, \beta} (\|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2}^2 + \|\chi_{\alpha\beta}(v, s)\|_{L^2}^2) + \sum_{\alpha} \|\delta_{\alpha 3}\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha} \|\partial_{\alpha}(s \cdot a_3)\|_{L^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pour $p \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{p} \geq 1$, le tenseur d'élasticité $a^{\alpha\beta\rho\sigma}$ est strictement positif. On rappelle que

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) \tau_{\alpha\beta} \tau_{\rho\sigma} \geq 2\mu c \tau_{\alpha\beta} \tau_{\rho\sigma}$$

et que

$$a^{\alpha\beta}(x) \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \geq c \sum_{\alpha} (\eta_{\alpha})^2, \quad \text{pour tout } x \in \bar{\omega}.$$

Alors il existe une constante c' tel que :

$$\begin{aligned} a((v, s); (v, s)) + \frac{1}{p} b(s \cdot a_3, s \cdot a_3) &\geq \\ \int_{\omega} \left\{ e 2\mu c' \sum_{\alpha, \beta} \left[\gamma_{\alpha\beta}(v) \gamma_{\alpha\beta}(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(v, s) \chi_{\alpha\beta}(v, s) \right] \right. \\ &\quad \left. + e \frac{E}{1+\nu} c' \sum_{\alpha} (\delta_{\alpha 3}(v, s))^2 \right\} \sqrt{a} \, dx + \sum_{\alpha} \|\partial_{\alpha}(s \cdot a_3)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

il vient que : $\exists C > 0$ tel que

$$a((v, s); (v, s)) + \frac{1}{p} b(s \cdot a_3, s \cdot a_3) \geq C \left\{ \sum_{\alpha, \beta} (\|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2}^2 + \|\chi_{\alpha\beta}(v, s)\|_{L^2}^2) + \sum_{\alpha} \|\delta_{\alpha 3}(v, s)\|_{L^2}^2 + \sum_{\alpha} \|\partial_{\alpha}(s \cdot a_3)\|_{L^2}^2 \right\}.$$

D'où

$$a((v, s); (v, s)) + \frac{1}{p} b(s \cdot a_3, s \cdot a_3) \geq C \| \! \| (v, s) \! \| \! \|^2. \quad (2.14)$$

L'idée est de prouver que $\| \! \| \cdot \! \| \! \|$ est une norme équivalente à $\| \cdot \|_{\mathbb{X}}$. Un argument de contradiction standard est utilisé. Il est Supposé qu'il existe une suite $(v_n, s_n) \in \mathbb{X}$ telle que $\|(v_n, s_n)\|_{\mathbb{X}} = 1$ mais $\| \! \| (v_n, s_n) \! \| \! \| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Où l'on peut en extraire une sous suite notée toujours (v_n, s_n) qui converge fortement vers $(v, s) \in \mathbb{X}$ dans $L^2(\omega; \mathbb{R}^3) \times L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ (par le théorème de Rellich) et tel que :

$$\gamma_{\alpha\beta}(v_n) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta}(v), \quad \chi_{\alpha\beta}(v_n, s_n) \rightharpoonup \chi_{\alpha\beta}(v, s) \quad \text{et} \quad \delta_{\alpha 3}(v_n, s_n) \rightharpoonup \delta_{\alpha 3}(v, s)$$

convergence faible dans $L^2(\omega)$. L'hypothèse $\| \! \| (v_n, s_n) \! \| \! \| \rightarrow 0$ donne

$$\gamma_{\alpha\beta}(v_n) \rightarrow 0, \quad \chi_{\alpha\beta}(v_n, s_n) \rightarrow 0, \quad \delta_{\alpha 3}(v_n, s_n) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \partial_{\alpha}(s_n \cdot a_3) \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

fortement dans $L^2(\omega)$. Il s'ensuit que

$$\gamma_{\alpha\beta}(v) = \chi_{\alpha\beta}(v, s) = \delta_{\alpha 3}(v, s) = \partial_{\alpha}(s \cdot a_3) = 0.$$

Par application du lemme du mouvement rigide (lemme 2.1) et les conditions au bord il vient que : $v = \psi = 0$. De plus l'inégalité de Poincaré et les conditions au bord appliquées à $s \cdot a_3$ donne $s \cdot a_3 = 0$. La seconde partie du lemme montre que $s = 0$. Soit le vecteur $(w_n)_{\alpha} = v_n \cdot a_{\alpha}$, d'après ce qui précède $w_n \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(\omega; \mathbb{R}^2)$. Par ailleurs, il est défini $2e_{\alpha\beta}(w) = \partial_{\alpha}w_{\beta} + \partial_{\beta}w_{\alpha}$. Il est facile de voir que :

$$e_{\alpha\beta}(w_n) = \gamma_{\alpha\beta}(v_n) + \frac{1}{2}v_n(\partial_{\alpha}a_{\beta} + \partial_{\beta}a_{\alpha}) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\omega) \quad \text{fort.}$$

$w_n \rightarrow 0$ dans $H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$ (par inégalité de Korn et (2.15)).

Par conséquent

$$\partial_{\rho}v_n \cdot a_{\alpha} = \partial_{\rho}((w_n)_{\alpha}) - v_n \cdot \partial_{\rho}a_{\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\omega) \quad \text{fort,} \quad (2.16)$$

Par ailleurs, comme $s_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ fort et $\partial_\rho v_n \cdot a_3 = 2\delta_{\alpha 3}(v_n, s_n) - s_n \cdot a_\alpha$. Par (2.15) il vient que :

$$\partial_\rho v_n \cdot a_3 \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\omega) \text{ fort.} \quad (2.17)$$

D'où

$$\partial_\rho v_n = (\partial_\rho v_n \cdot a_k) a^k \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\omega; \mathbb{R}^3),$$

par (2.16) et (2.17). Par conséquent $v_n \rightarrow 0$ dans $H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ fort. Soit $(w'_n) = s_n \cdot a_\alpha$. Il est clair que $w'_n \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(\omega; \mathbb{R}^2)$. D'autre part, puisque

$$2e_{\alpha\beta}(w'_n) = 2\chi_{\alpha\beta}(v_n, s_n) - (\partial_\alpha v_n \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta v_n \cdot \partial_\alpha a_3) + s_n \cdot (\partial_\alpha a_\beta + \partial_\beta a_\alpha)$$

par (2.15), il vient que :

$$e_{\alpha\beta}(w'_n) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\omega).$$

L'inégalité de Korn implique

$$w'_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H^1(\omega; \mathbb{R}^2).$$

L'inégalité de Poincaré et la convergence $\partial_\alpha(s_n \cdot a_3) \rightarrow 0$ dans $L^2(\omega)$ fort par (2.15) donnent

$$s_n \cdot a_3 \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H^1(\omega).$$

Puisque $s_n = (s_n a_i) a^i$, il vient que $s_n \rightarrow 0$ fortement dans $H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$.

Tout cela conduit à $\|(v_n, s_n)\|_{\mathbb{X}} \rightarrow 0$ ce qui contredit $\|(v_n, s_n)\|_{\mathbb{X}} = 1$ et prouve le lemme.

Preuve du théorème 2.1

Il est clair que la forme linéaire $L(v, s)$ est continue sur l'espace \mathbb{X} . D'autre part la forme bilinéaire $a((v, s); (v, s)) + \frac{1}{p} b(s \cdot a_3, s \cdot a_3)$ est \mathbb{X} -élliptique par le lemme 2.2, alors le théorème 2.1 découle du lemme de Lax-Milgram.

La pénalisation fournit une approximation du problème contraint d'où l'objet du théorème suivant

Théorème 2.2 *Soit $U = (u, r)$ et $U_p = (u_p, r_p)$ respectivement uniques solutions des problèmes (2.6) et (2.10). Alors*

$$\|r_p \cdot a_3\|_{H^1(\omega)} \leq Cp, \quad (2.18)$$

et

$$\|U_p - U\|_{\mathbb{X}} \leq Cp. \quad (2.19)$$

Preuve. Voir [20].

2.2 Formulation forte du problème pénalisé

Dans cette partie, nous établissons les équations aux dérivées partielles liées à notre problème et qui seront utiles par la suite. Pour commencer, on va réécrire la forme bilinéaire $a(U, V)$ sous une forme plus réduite en appliquant la même technique utilisée dans [16]; voir également [34].

Introduisons les tenseurs :

$$n^{\rho\sigma}(u) = ea^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\alpha\beta}(u), \quad (2.20)$$

$$m^{\rho\sigma}(U) = \frac{e^3}{12}a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\alpha\beta}(U), \quad (2.21)$$

et

$$t^\beta(U) = e\frac{E}{1+\nu}a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha 3}(U). \quad (2.22)$$

Notons que

$$\chi_{\rho\sigma}(V) = \theta_{\rho\sigma}(v) + \gamma_{\rho\sigma}(s), \text{ avec } \theta_{\rho\sigma}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\rho v \cdot \partial_\sigma a_3 + \partial_\sigma v \cdot \partial_\rho a_3). \quad (2.23)$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
a(U_p, V) &= \int_{\omega} (n^{\rho\sigma}(u_p)\gamma_{\rho\sigma}(v) + m^{\rho\sigma}(U_p)\theta_{\rho\sigma}(v) + t^\beta(U_p)\partial_\beta v \cdot a_3) \sqrt{a} \, dx \\
&\quad + \int_{\omega} (m^{\rho\sigma}(U_p)\gamma_{\rho\sigma}(s) + t^\beta(U_p)s \cdot a_\beta) \sqrt{a} \, dx.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

En utilisant la nouvelle forme de $a(U_p, V)$ avec les propriétés de symétrie $n^{\rho\sigma}(u_p) = n^{\sigma\rho}(u_p)$ et $m^{\rho\sigma}(U_p) = m^{\sigma\rho}(U_p)$. En plus, nous appliquons la formule de Green dans le problème (2.10) et par identification avec son second membre $L(V)$, on obtient les équations aux dérivées partielles associées à la formulation variationnelle du problème pénalisé suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-\partial_\rho((n^{\rho\sigma}(u_p)a_\sigma + m^{\rho\sigma}(U_p)\partial_\sigma a_3 + t^\rho(U_p)a_3)\sqrt{a}) = f\sqrt{a} & \text{dans } \omega, \\
-\partial_\rho(m^{\rho\sigma}(U_p)a_\sigma\sqrt{a}) + t^\beta(U_p)a_\beta\sqrt{a} - \frac{1}{p}\partial_{\rho\rho}(r_p \cdot a_3)a_3 = 0 & \text{dans } \omega, \\
u_p = r_p = 0 & \text{sur } \gamma_0, \\
\nu_\rho(n^{\rho\sigma}(u_p)a_\sigma + m^{\rho\sigma}(U_p)\partial_\sigma a_3 + t^\rho(U_p)a_3)\sqrt{a} = Nl & \text{sur } \gamma_1, \\
\nu_\rho(m^{\rho\sigma}(U_p)a_\sigma\sqrt{a} + \frac{1}{p}\partial_\rho(r_p \cdot a_3)a_3) = Ml & \text{sur } \gamma_1.
\end{array} \right. \tag{2.25}$$

2.3 Formulation discrète

2.3.1 Discrétisation par éléments finis du problème pénalisé

Dans cette section, Nous reprenons le problème discret introduit dans [20]. En effet, le problème pénalisé est un problème standard formulé dans H^1 . L'approximation standard par éléments finis conformes est utilisée.

Soit \mathcal{T}_h une famille affine régulière de triangulations qui couvre tout le domaine ω (par des triangles), dans le sens usuel :

- Pour chaque h , $\bar{\omega}$ est la réunion de tous les éléments de \mathcal{T}_h
- Pour tout h , l'intersection de deux éléments distincts de \mathcal{T}_h est soit vide soit un sommet, un côté ou une face entière de ces deux éléments.
- Le quotient h_K/ρ_K du diamètre h_K d'un élément K de \mathcal{T}_h par le diamètre ρ_K de son cercle inscrit ou de la sphère inscrite est inférieur ou égal à une constante τ qui ne dépend ni de K ni de h .

h_K étant le diamètre de K . L'indice h de \mathcal{T}_h représente le maximum des h_K , $K \in \mathcal{T}_h$.

Pour tout entier positif k et pour tout élément K de \mathcal{T}_h , soit $\mathcal{P}_k(K)$ l'espace des restrictions à K des polynômes de degré total $\leq k$.

On définit ainsi l'espace discret des déplacements admissibles et rotations par

$$\mathbb{X}_h = \{V_h = (v_h, s_h) \in C^0(\omega; \mathbb{R}^3)^2, V_h|_K \in \mathcal{P}_1(K), v_h = s_h = 0 \text{ sur } \gamma_0\}. \quad (2.26)$$

qui est contenu dans l'espace continu \mathbb{X} .

Le problème discret est alors : Trouver $U_{p,h} = (u_{p,h}, r_{p,h}) \in \mathbb{X}_h$ tel que

$$\forall V_h \in \mathbb{X}_h, \quad a(U_{p,h}, V_h) + \frac{1}{p} b(r_{p,h} \cdot a_3, s_h \cdot a_3) = L(V_h). \quad (2.27)$$

Ce problème a une unique solution, pour plus de détails voir [20, Th.3.1].

2.3.2 Convergence

Théorème 2.3 *Il existe une suite $h_p \rightarrow 0$ telle que*

$$\|(u, r) - (u_{p,h_p}, r_{p,h_p})\|_{\mathbb{X}} \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Preuve. Voir [20, 57].

2.4 Analyse a posteriori

Dans cette partie nous menons une analyse a posteriori du problème (2.27) utilisant des indicateurs d'erreur de type résiduel. Les techniques d'estimation d'erreur par résidu ont été introduites par Babuška et Rheinbolt [6], puis leur analyse a été étendue par Verfürth [60]; voir également [61] pour une revue relativement exhaustive.

2.4.1 Equation du résidu

En appliquant le problème (2.27) à l'erreur $U_p - U_{p,h}$, on obtient l'équation du résidu suivante :

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathbb{X}(\omega), \forall V_h \in \mathbb{X}_h, \\ a(U_p - U_{p,h}, V) + \frac{1}{p} b((r_p \cdot a_3 - r_{p,h} \cdot a_3); s \cdot a_3) \\ = L(V - V_h) - a(U_{p,h}, V - V_h) - \frac{1}{p} b(r_{p,h} \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Usuellement, pour ce type de problème voir [61], la construction des indicateurs d'erreur de type résiduel nécessite les approximations des données et des coefficients.

2.4.2 Approximation des données

Dans un premier temps, il s'agit de considérer \mathcal{E}_h^1 l'ensemble des côtés des éléments de \mathcal{T}_h qui sont contenus dans γ_1 . Ensuite, introduisons f_h approximation de f dans \mathbb{Z}_h et N_h, M_h approximations respectives de N et M dans \mathbb{Z}_h^1 , où les espaces \mathbb{Z}_h et \mathbb{Z}_h^1 sont définis par :

$$\mathbb{Z}_h = \{ \mathbf{g}_h \in L^2(\omega)^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{g}_{h|K} \in \mathcal{P}_0(K)^3 \}, \quad (2.30)$$

$$\mathbb{Z}_h^1 = \{ \mathbf{p}_h \in L^2(\gamma_1)^3; \forall e \in \mathcal{E}_h^1, \mathbf{p}_{h|e} \in \mathcal{P}_0(e)^3 \}. \quad (2.31)$$

2.4.3 Approximation des coefficients

On introduit les approximations des coefficients scalaires $a^{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta\rho\sigma}$, \sqrt{a} et l dans l'espace \mathbb{M}_h ; notées respectivement par $a_h^{\alpha\beta}$, $a_h^{\alpha\beta\rho\sigma}$, $(\sqrt{a})_h$ et l_h , où l'espace \mathbb{M}_h est défini par :

$$\mathbb{M}_h = \{ \chi_h \in H^1(\omega); \forall K \in T_h, \chi_h / K \in \mathcal{P}_1(K) \} \quad (2.32)$$

Similairement, nous considérons les approximations a_k^h des vecteurs a_k et d_α^h de $\partial_\alpha a_3$ dans l'espace \mathbb{M}_h .

2.4.4 Approximations des tenseurs

Notons par $\gamma_{\alpha\beta}^h(\cdot)$, $\chi_{\alpha\beta}^h(\cdot)$ et $\delta_{\alpha 3}^h(\cdot)$ les approximations des tenseurs donnés par (2.2) à (2.4) où tous les coefficients sont remplacés par leurs approximations définies ci-dessus. Ainsi $\gamma_{\alpha\beta}^h(\cdot)$, $\chi_{\alpha\beta}^h(\cdot)$ et $\delta_{\alpha 3}^h(\cdot)$ sont respectivement définies par :

$$\gamma_{\alpha\beta}^h(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_\beta^h + \partial_\beta u \cdot a_\alpha^h), \quad (2.33)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^h(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot d_\beta^h + \partial_\beta u \cdot d_\alpha^h + \partial_\alpha r \cdot a_\beta^h + \partial_\beta \cdot a_\alpha^h), \quad (2.34)$$

et

$$\delta_{\alpha 3}^h(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_3^h + r \cdot a_\alpha^h). \quad (2.35)$$

Ceci conduit à la définition de l'approximation de la forme linéaire

$$L_h(V) = \int_\omega f_h \cdot v (\sqrt{a})_h dx + \int_{\gamma_1} (N_h \cdot v + M_h \cdot s) l_h d\tau, \quad (2.36)$$

ainsi que les approximations des formes bilinéaires

$$\begin{aligned} a_h(U, V) = \int_\omega \left\{ e a_h^{\alpha\beta\rho\sigma} \left[\gamma_{\alpha\beta}^h(u) \gamma_{\rho\sigma}^h(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}^h(U) \chi_{\rho\sigma}^h(V) \right] \right. \\ \left. + 2e \frac{E}{1+\nu} a_h^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}^h(U) \delta_{\beta 3}^h(V) \right\} (\sqrt{a})_h dx, \end{aligned} \quad (2.37)$$

et

$$b_h(r \cdot a_3, s \cdot a_3) = \int_{\omega} (\partial_{\alpha} r \cdot a_3^h + r \cdot d_{\alpha}^h) \partial_{\alpha} s \cdot a_3^h dx. \quad (2.38)$$

Nous vérifions aisément que : $\forall V \in \mathbb{X}(\omega), \forall V_h \in \mathbb{X}_h$,

$$\begin{aligned} & L(V - V_h) - a(U_{p,h}, V - V_h) - \frac{1}{p} b(r_{p,h} \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3)) \\ &= (L - L_h)(V - V_h) + L_h(V - V_h) - (a - a_h)(U_{p,h}, V - V_h) \\ & \quad - a_h(U_{p,h}, V - V_h) - \frac{1}{p} (b - b_h)(r_{p,h} \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3)) \\ & \quad - \frac{1}{p} b_h(r_{p,h} \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3)). \end{aligned} \quad (2.39)$$

L'expression (2.39) sera utilisée plus tard.

Comme il est d'usage, nous commençons par introduire quelques notations standard qui nous permettront d'aller plus loin.

Notation

Pour chaque élément K de \mathcal{T}_h ,

- 1) E_K est l'ensemble des côtés de K qui ne sont pas contenus dans $\overline{\gamma_0}$;
- 2) E_K^1 est l'ensemble des éléments de E_K qui sont contenus dans $\overline{\gamma_1}$;
- 3) Pour chaque élément e de E_K , $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ est le vecteur normal à e , où ν est extérieur à ω dès que e est dans E_K^1 ;
- 4) Pour chaque $e \in E_K$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ est le vecteur normal à e , où ν est extérieur à ω dès que e est dans E_K^1 ;
- 5) Pour chaque $e \in E_K$, h_e est la longueur de e ;
- 6) Pour chaque $e \in E_K \setminus E_K^1$, où $[\cdot]_e$ désigne le saut à travers e ;
- 7) ω_K est l'union des triangles de \mathcal{T}_h qui partage un côté avec K ;
- 8) Δ_K est l'union des triangles de \mathcal{T}_h qui ont une intersection avec K (soit un sommet ou un côté).

Nous rappelons à partir de [17, Th. IX.3.11 et Cor. IX.3.12], l'existence de l'opérateur de régularisation de Clément \mathcal{R}_h qui opère de $H_{\gamma_0}^1(\omega)$ dans $M_h^{\gamma_0} = M_h \cap H_{\gamma_0}^1$ et vérifie pour toute fonction $\chi \in H_{\gamma_0}^1(\omega)$, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et chaque côté e de K qui n'est pas contenu dans γ_0 ceci :

$$\begin{aligned} \|\chi - \mathcal{R}_h \chi\|_{L^2(K)} + h_K |\chi - \mathcal{R}_h \chi|_{H^1(K)} &\leq c h_K \|\chi\|_{H^1(\Delta_K)}, \\ \|\chi - \mathcal{R}_h \chi\|_{L^2(e)} &\leq c h_e^{\frac{1}{2}} \|\chi\|_{H^1(\Delta_K)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Notons que l'évaluation des erreurs liées à l'approximation des données et des coefficients est assurée par les lemmes suivants, on se réfère à [16] pour leurs preuves :

Lemme 2.3 *Pour tout $V \in \mathbb{X}(\omega)$ et $V_h = (\mathcal{R}_h v, \mathcal{R}_h s)$ on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} &|(L - L_h)(V - V_h)| \\ &\leq c \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in E_K^1} h_e (\|N - N_h\|_{L^2(e)}^2 + \|M - M_h\|_{L^2(e)}^2)) \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + (h \|\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h\|_{L^\infty(\omega)} + h^{\frac{1}{2}} \|l - l_h\|_{L^\infty(\gamma_1)}) \|L\| \right) \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Lemme 2.4 *Pour tout $V \in \mathbb{X}(\omega)$ et $V_h = (\mathcal{R}_h v, \mathcal{R}_h s)$, on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} &|(a - a_h)(U_h, V - V_h)| \leq c (\|\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h\|_{L^\infty(\omega)} \\ &\quad + \sup_{1 \leq \alpha, \beta, \rho, \sigma \leq 2} \|a^{\alpha\beta\rho\sigma} - a_h^{\alpha\beta\rho\sigma}\|_{L^\infty(\omega)} + \sup_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \|a^{\alpha\beta} - a_h^{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\omega)}) \\ &\quad + \sup_{1 \leq k \leq 3} \|a_k - a_k^h\|_{L^\infty(\omega)} + \sup_{1 \leq \alpha \leq 2} \|\partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h\|_{L^\infty(\omega)} \|L\| \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Lemme 2.5 *Pour tout $V \in \mathbb{X}(\omega)$ avec $V_h = (\mathcal{R}_h v, \mathcal{R}_h s)$ on a l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} & |(b - b_h)(V - V_h, \psi_h)| \\ & \leq c \left(\|a_3 - a_3^h\|_{L^\infty(\omega)^3} + \|\partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h\|_{L^\infty(\omega)^3} \right) \|L\| \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A partir de ces lemmes, nous définissons la quantité liée à l'erreur de l'approximation locale des données :

Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\varepsilon_K^{(d)} = h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)^3} + \sum_{e \in E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} (\|N - N_h\|_{L^2(e)^3} + \|M - M_h\|_{L^2(e)^3}), \quad (2.44)$$

ainsi, on définit aussi la quantité liée à l'erreur de l'approximation globale des coefficients :

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^{(e)} &= \left(\|\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h\|_{L^\infty(\omega)} + h^{\frac{1}{2}} \|l - l_h\|_{L^\infty(\gamma_1)} \right) \\ &+ \sup_{1 \leq \alpha, \beta, \rho, \sigma \leq 2} \left\| a^{\alpha\beta\rho\sigma} - a_h^{\alpha\beta\rho\sigma} \right\|_{L^\infty(\omega)} + \sup_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \left\| a^{\alpha\beta} - a_h^{\alpha\beta} \right\|_{L^\infty(\omega)} \\ &+ \sup_{1 \leq k \leq 3} \|a_k - a_k^h\|_{L^\infty(\omega)^3} + \sup_{1 \leq \alpha \leq 2} \left\| \partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h \right\|_{L^\infty(\omega)^3} \|L\|. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Maintenant, nous sommes en position de prouver l'estimation d'erreur a posteriori. Tout d'abord, nous introduisons les indicateurs d'erreur.

Pour simplifier, nous reprenons l'équation du résidu (2.29) et utilisons la formulation forte du problème introduite dans la section 2.2 équations (3.11) pour écrire les formes $a_h(U_{p,h}, V - V_h)$ et $b_h(r_{p,h} \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3))$ avec les quantités $n_h^{\rho\sigma}(\cdot)$, $m_h^{\rho\sigma}(\cdot)$, $t_h^\beta(\cdot)$ et $\theta_{\rho\sigma}^h(\cdot)$ approximations respectives des quantités $n^{\rho\sigma}(\cdot)$, $m^{\rho\sigma}(\cdot)$, $t^\beta(\cdot)$ et $\theta_{\rho\sigma}(\cdot)$. Tous les coefficients sont remplacés par leurs approximations introduites ci-dessus.

On définit alors la famille d'indicateurs d'erreur de la façon suivante : pour tout K dans \mathcal{T}_h ,

$$\eta_K = \eta_{K1} + \eta_{K2} \quad (2.46)$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_{K1} = & h_K \left\| f_h(\sqrt{a})_h + \partial_\rho \left((n_h^{\rho\sigma}(u_{p,h})a_\sigma^h + m_h^{\rho\sigma}(U_{p,h})d_\sigma^h + t_h^\rho(U_{p,h})a_3^h)(\sqrt{a})_h \right) \right\|_{L^2(K)^3} \\ & + \sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \left\| [\nu_\rho (n_h^{\rho\sigma}(u_{p,h})a_\sigma^h + m_h^{\rho\sigma}(U_{p,h})d_\sigma^h + t_h^\rho(U_{p,h})a_3^h)(\sqrt{a})_h]_e \right\|_{L^2(e)^3} \\ & + \sum_{e \in E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \left\| N_h l_h - \nu_\rho (n_h^{\rho\sigma}(u_{p,h})a_\sigma^h + m_h^{\rho\sigma}(U_{p,h})d_\sigma^h + t_h^\rho(U_{p,h})a_3^h)(\sqrt{a})_h \right\|_{L^2(e)^3}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

et

$$\begin{aligned} \eta_{K2} = & h_K \left\| \partial_\rho (m_h^{\rho\sigma}(U_{p,h})a_\sigma^h(\sqrt{a})_h) - t_h^\beta(U_{p,h})a_\beta^h(\sqrt{a})_h \right. \\ & \left. + \frac{1}{p} (\partial_\rho (\partial_\rho(r_{p,h} \cdot a_3)a_3^h) - \partial_\rho(r_{p,h} \cdot a_3)d_\rho^h) \right\|_{L^2(K)^3} \\ & + \sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\nu_\rho m_h^{\rho\sigma}(U_{p,h})a_\sigma^h(\sqrt{a})_h + \frac{1}{p} \nu_\rho \partial_\rho(r_{p,h} \cdot a_3)a_3^h \right]_e \right\|_{L^2(e)^3} \\ & + \sum_{e \in E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \left\| M_h l_h - \nu_\rho m_h^{\rho\sigma}(U_{p,h})a_\sigma^h(\sqrt{a})_h - \frac{1}{p} \nu_\rho \partial_\rho(r_{p,h} \cdot a_3)a_3^h \right\|_{L^2(e)^3}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Théorème 2.4 *Pour toute donnée (f, N, M) dans $L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$, on a l'estimation d'erreur a posteriori entre la solution U_p du problème (2.10) et la solution $U_{p,h}$ du problème (2.27)*

$$\|U_p - U_{p,h}\|_{\mathbb{X}(\omega)} \leq c \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \varepsilon_K^{(d)2}) \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(c)} \right). \quad (2.49)$$

Preuve. De la propriété d'éllipticité de la forme bilinéaire pénalisée (2.10) voir lemme 2.2, on déduit :

$$\|U_p - U_{p,h}\|_{\mathbb{X}(\omega)} \leq c \sup_{V \in \mathbb{X}(\omega)} \frac{a(U_p - U_{p,h}, V) + \frac{1}{p} b((r_p \cdot a_3 - r_{p,h} \cdot a_3); s \cdot a_3)}{\|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}}. \quad (2.50)$$

En utilisant l'équation du résidu (2.29) en remplaçant son second membre par l'expression (2.39), combinée avec l'inégalité triangulaire et les estimations (2.41), (2.42) et (2.43) des lemmes 2.3 à 2.5. Ceci conduit aux majorations des termes $(L - L_h)(V - V_h)$, $(a - a_h)(U_{p,h}, V - V_h)$ et $(b - b_h)(r_{p,h} \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3))$ respectivement par $c(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_K^{(d)^2})^{\frac{1}{2}} \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}$ et $c(\varepsilon_h^{(c)}) \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}$; reste alors à majorer la quantité suivante $L_h(V - V_h) - a_h(U_{p,h}, V - V_h) - \frac{1}{p} b_h(r_{p,h} \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3))$, avec $V_h = (\mathcal{R}_h v, \mathcal{R}_h s)$ image de $V = (v, s)$ par l'opérateur \mathcal{R}_h de Clément, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} L_h(V - V_h) &= L_h((v - \mathcal{R}_h v), (s - \mathcal{R}_h s)) \\ &= L_h((v - \mathcal{R}_h v), 0) + L_h(0, (s - \mathcal{R}_h s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_h(U_h^p, V - V_h) &= a_h(U_h^p, (v - \mathcal{R}_h v, s - \mathcal{R}_h s)) \\ &= a_h(U_h^p, (v - \mathcal{R}_h v, 0)) + a_h(U_h^p, (0, s - \mathcal{R}_h s)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} b_h(U_h^p, V - V_h) &= \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (s \cdot a_3 - s_h \cdot a_3)) \\ &= \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (s \cdot a_3 - \mathcal{R}_h s \cdot a_3)) \\ &= \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (v - \mathcal{R}_h v, 0)) + \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (0, s \cdot a_3 - \mathcal{R}_h s \cdot a_3)) \end{aligned}$$

(notons que $b_h(r_h^p \cdot a_3; (v - \mathcal{R}_h v, 0)) = 0$).

Il revient alors à majorer les deux quantités suivantes :

$$A_1 = \sup_{v \in H_{\gamma_0}^1(\omega)^3} \frac{L_h(v - \mathcal{R}_h v, 0) - a_h(U_h^p, (v - \mathcal{R}_h v, 0))}{\|v\|_{H^1(\omega)^3}}$$

et

$$A_2 = \sup_{s \in H_{\gamma_0}^1(\omega)^3} \frac{L_h(0, s - \mathcal{R}_h s) - a_h(U_h^p, (0, s - \mathcal{R}_h s)) - \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (0, (s - \mathcal{R}_h s) \cdot a_3))}{\|s\|_{H^1(\omega)^3}}.$$

1) Posons $w = v - \mathcal{R}_h v$ et utilisant les propriétés de symétrie de $n_h^{\rho\sigma}(\cdot)$ et $m_h^{\rho\sigma}(\cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned} L_h(v - \mathcal{R}_h v, 0) - a_h(U_h^p, (v - \mathcal{R}_h v, 0)) &= \int_{\omega} f_h \cdot w (\sqrt{a})_h \, dx + \int_{\gamma_1} N_h \cdot w \, l_h \, d\tau \\ &- \int_{\omega} (n_h^{\rho\sigma}(u_h^p) \partial_{\rho} w \cdot a_{\sigma}^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h^p) \partial_{\rho} w \cdot d_{\sigma}^h + t_h^{\beta}(U_h^p) \partial_{\beta} w \cdot a_3^h) (\sqrt{a})_h \, dx. \end{aligned}$$

En remplaçant l'intégrale sur ω par la somme d'intégrales sur les K dans \mathcal{T}_h et intégrant par parties sur chaque K , on obtient

$$\begin{aligned} L_h(v - \mathcal{R}_h v, 0) - a_h(U_h^p, (v - \mathcal{R}_h v, 0)) &= \int_{\omega} f_h \cdot w (\sqrt{a})_h \, dx + \int_{\gamma_1} N_h \cdot w \, l_h \, d\tau \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K \partial_{\rho} (n_h^{\rho\sigma}(u_h^p) a_{\sigma}^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h^p) d_{\sigma}^h + t_h^{\beta}(U_h^p) a_3^h) (\sqrt{a})_h \cdot w \, dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial K} \nu_{\rho} (n_h^{\rho\sigma}(u_h^p) a_{\sigma}^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h^p) d_{\sigma}^h + t_h^{\beta}(U_h^p) a_3^h) (\sqrt{a})_h \cdot w \, d\tau \right). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz combiné avec (2.40) conduit à

$$A_1 \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{K1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.52)$$

2) Posons $t = s - \mathcal{R}_h s$, on a

$$\begin{aligned} & L_h(0, s - \mathcal{R}_h s) - a_h(U_h^p, (0, s - \mathcal{R}_h s)) - \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (0, (s - \mathcal{R}_h s) \cdot a_3)) \\ &= \int_{\gamma_1} M_h \cdot t l_h d\tau - \int_{\omega} \left(m_h^{\rho\sigma}(U_h^p) \partial_{\rho} t \cdot a_{\sigma}^h + t_h^{\beta}(U_h^p) t \cdot a_{\beta}^h \right) (\sqrt{a})_h dx \\ & \quad - \frac{1}{p} \int_{\omega} (\partial_{\alpha} r_h^p \cdot a_3^h + r_h^p \cdot d_{\alpha}^h) \partial_{\alpha} t \cdot a_3 dx. \end{aligned}$$

En remplaçant l'intégrale sur ω par la somme d'intégrales sur les K dans \mathcal{T}_h , et intégrant par parties sur chaque K , notons que

$$\begin{aligned} b_h(r_h^p \cdot a_3; (0, (s - \mathcal{R}_h s) \cdot a_3)) &= \int_{\omega} (\partial_{\alpha} r_h^p \cdot a_3^h + r_h^p \cdot d_{\alpha}^h) \partial_{\rho} t \cdot a_3 dx \\ &= \int_{\omega} \partial_{\alpha} (r_h^p \cdot a_3^h) \partial_{\alpha} t \cdot a_3 dx, \end{aligned}$$

il vient que

$$\begin{aligned} & L_h(0, s - \mathcal{R}_h s) - a_h(U_h^p, (0, s - \mathcal{R}_h s)) - \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (0, (s - \mathcal{R}_h s) \cdot a_3)) \\ &= \int_{\gamma_1} M_h \cdot t l_h d\tau + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K \partial_{\rho} (m_h^{\rho\sigma}(U_h^p) a_{\sigma}^h) (\sqrt{a})_h \cdot t - \int_{\partial K} \nu_{\rho} (m_h^{\rho\sigma}(U_h^p) a_{\sigma}^h) (\sqrt{a})_h \cdot t d\tau \right. \\ & \quad - \int_K (t_h^{\beta}(U_h^p) t \cdot a_{\beta}^h) (\sqrt{a})_h dx + \frac{1}{p} \left(\int_K (\partial_{\rho} (\partial_{\rho} r_h^p \cdot a_3) a_3^h) \cdot t dx \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_K \partial_{\rho} (r_h^p \cdot a_3) d_{\rho}^h \cdot t dx - \int_{\partial K} \nu_{\rho} \partial_{\rho} (r_h^p \cdot a_3) a_3^h \cdot t d\tau \right) \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec (2.40) on obtient

$$A_2 \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{K2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.54)$$

En combinant les estimations (2.52) et (2.54) avec (2.50), on obtient la majoration cherchée.

Théorème 2.5 *On suppose la donnée (f, N, M) dans $L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$, tout indicateur défini en (2.47) et (2.48) vérifie la majoration suivante :*

$$\eta_{Ki} \leq c \left(\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(\omega_K)} + \left(\sum_{\kappa \subset \omega_K} (\varepsilon_\kappa^{(d)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(c)} \right), \quad i = 1, 2 \quad (2.55)$$

Preuve. On montrera (2.55) pour η_{K1} et η_{K2} . Tout d'abord, on écrit η_{K1} sous la forme compacte suivante :

$$\eta_{K1} = h_K \|F_h\|_{L^2(K)^3} + \sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|[G_h]_e\|_{L^2(e)^3} + \sum_{e \in E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|N_h l_h - G_h\|_{L^2(e)^3}.$$

La démonstration se fait en trois étapes, la première étape consiste à majorer le premier terme de η_{K1} . L'équation (2.51) est vérifiée pour $\mathcal{R}_h v$ remplacé par 0 et nous prenons $w = v$ tel que

$$w = \begin{cases} F_h \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \omega \setminus K, \end{cases}$$

où ψ_K est la fonction bulle sur K , on note que la fonction w est à support contenu dans K et s'annule sur ∂K de sorte que tous les termes à droite de l'équation (2.51) s'annulent sauf le terme en intégrale sur K . Il découle alors de (2.51) que

$$\left\| F_h \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)^3}^2 = L_h(w, 0) - a_h(U_h^p, (w, 0)).$$

En utilisant l'équation (2.39), l'équation du résidu (2.29) et les lemmes 2.3 à 2.4 on obtient

$$\left\| F_h \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)^3}^2 \leq c \left(\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(K)} + (\varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_h^{(c)}) \right) \|w\|_{\mathbb{X}(K)}.$$

On observe que sur K la fonction w (donc F_h) est un polynôme de degré ≤ 3 de sorte qu'on a l'inégalité inverse voir ([17, proposition VII.4.1], [16]),

$$\|w\|_{\mathbb{X}(K)} \leq c h_K^{-1} \|w\|_{L^2(K)}.$$

Sachant que la fonction ψ_K prend ses valeurs entre 0 et 1 sur K (fonction bulle), nous en déduisons

$$\|w\|_{\mathbb{X}(K)} \leq c h_K^{-1} \|F_h\|_{L^2(K)^3}.$$

Finalement, par passage au triangle de référence on a l'inégalité suivante :

$$\|F_h\|_{L^2(K)^3} \leq c \left\| F_h \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)^3}. \quad (2.56)$$

En combinant tout ceci, on obtient

$$\|F_h\|_{L^2(K)^3} \leq c h_K^{-1} \left(\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(K)} + \varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_K^{(c)} \right). \quad (2.57)$$

Multipliée par h_K , cette inégalité donne la majoration du premier terme de η_{K1} . La deuxième étape consiste à majorer le second terme de η_{K1} . Pour tout côté e partagé par deux éléments K et K' , on choisit ici la fonction w dans (2.51) égale à

$$w = \begin{cases} \mathcal{L}_{e,\kappa} ([G_h]_e \psi_e) & \text{sur } \kappa \in \{K, K'\}, \\ 0 & \text{sur } \omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où ψ_e est la fonction bulle sur e et $\mathcal{L}_{e,\kappa}$ opérateur de relèvement introduit dans [17, lemme XI.2.7] de l'espace des polynômes $P_{l-1+d}(e)$ (dans notre cas $l = 1$ (degré du polynôme introduit dans l'espace \mathbb{X}_h) et $d = 2$ (dimension)) s'annulant sur ∂e dans l'espace des polynômes sur $K : P_{l-1+d}(K)$ s'annulant sur $\partial K \setminus e$, construit par transformation affine à partir d'un opérateur $\widehat{\mathcal{L}}$ similaire sur le triangle de référence, pour plus de détails voir [17, lemme XI.2.7]. Par définition de ψ_e , la fonction $[G_h]_e \psi_e$ s'annule sur ∂e de sorte que la fonction w s'annule sur $\partial(K \cup K')$. En utilisant cette fonction dans (2.51), (Notons que l'intégrale sur ∂K dans (2.51) s'écrit comme une somme d'intégrales sur les éléments $e \in E_K \setminus E_K^1$ de la quantité $[G_h]_e \psi_e$ car sur e $\mathcal{L}_{e,\kappa}([G_h]_e \psi_e) = [G_h]_e \psi_e$ par définition de l'opérateur $\mathcal{L}_{e,\kappa}$) on voit que :

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} \left\| [G_h]_e \psi_e^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(e)^3}^2 = a_h(U_h^p, (w, 0)) - L_h(w, 0) \\ & + \sum_{\kappa \in \{K, K'\}} \left(\int_{\kappa} f_h \cdot w(\sqrt{a})_h dx \right. \\ & \left. + \int_{\kappa} \partial_{\rho} \left((n_h^{\rho\sigma} (u_h^p) a_{\sigma}^h + m_h^{\rho\sigma} (U_h^p) d_{\sigma}^h + t_h^{\beta} (U_h^p) a_3^h) (\sqrt{a})_h \right) \cdot w dx \right). \end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.39),(2.29), les lemmes 2.3 à 2.4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} \left\| [G_h]_e \psi_e^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(e)^3}^2 \leq \sum_{\kappa \in \{K, K'\}} (\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(\kappa)} \|w\|_{\mathbb{X}(\kappa)}) \\ & + c \left(\left(\sum_{\kappa \in \{K, K'\}} \varepsilon_{\kappa}^{(d)2} \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(c)} \right) \|w\|_{\mathbb{X}(\kappa)} + \|F_h\|_{L^2(\kappa)^3} \|w\|_{L^2(\kappa)}. \end{aligned}$$

On utilise alors [17, lemme XI.2.7] plus l'inégalité inverse suivante, analogue à (2.56),

$$\| [G_h]_e \|_{L^2(e)^3} \leq c \left\| [G_h]_e \psi_e^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(e)^3}, \quad (2.58)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} \|[G_h]_e\|_{L^2(e)^3} &\leq c h_e^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{\kappa \in \{K, K'\}} (\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(\kappa)} \right. \\ &\left. + \left(\sum_{\kappa \in \{K, K'\}} \varepsilon_\kappa^{(d)2} \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(c)} + h_K \|F_h\|_{L^2(\kappa)^3} \right). \end{aligned}$$

On conclut en multipliant par $h_e^{\frac{1}{2}}$ et en utilisant (2.57) ainsi, on a la majoration du second terme de η_{K1} suivante :

$$\sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|[G_h]_e\|_{L^2(e)^3} \leq c \left(\sum_{\kappa \in \{K, K'\}} \|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(\kappa)} + \left(\sum_{\kappa \in \{K, K'\}} \varepsilon_\kappa^{(d)2} \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(c)} \right).$$

Finalement, on termine par la majoration du troisième terme pour chaque e dans E_K^1 , on choisit la fonction w dans (2.51) égale à

$$w = \begin{cases} \mathcal{L}_{e,\kappa}((N_h l_h - G_h) \psi_e) & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \omega \setminus K. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_K^1} \left\| (N_h l_h - G_h) \psi_e^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(e)^3} &= \\ a_h(U_h^p, (w, 0)) - L_h(w, 0) &+ \int_K f_h \cdot w (\sqrt{a})_h dx \\ + \int_K \partial_\rho \left((n_h^{\rho\sigma} (u_h^p) a_\sigma^h + m_h^{\rho\sigma} (U_h^p) d_\sigma^h + t_h^\beta (U_h^p) a_3^h) (\sqrt{a})_h \right) &\cdot w dx. \end{aligned}$$

Combinée avec l'inégalité de Cauchy-Shwarz, (2.39), l'équation du résidu (2.29) et les lemmes 2.4 à 2.5, ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_K^1} \left\| (N_h l_h - G_h) \psi_e^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(e)^3} &\leq (\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(K)} \\ &+ c (\varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_h^{(c)})) \|w\|_{\mathbb{X}(K)} + \|F_h\|_{L^2(K)^3} \|w\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

On utilise alors [17, lemme XI.2.7] avec l'inégalité inverse suivante analogue à (2.58)

$$\|(N_h l_h - G_h)\|_{L^2(e)^3} \leq \left\| (N_h l_h - G_h) \psi_e^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(e)^3},$$

ce qui entraîne

$$\sum_{e \in E_K^1} \|(N_h l_h - G_h)\|_{L^2(e)^3} \leq c h_e^{-\frac{1}{2}} (\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(K)} + \varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_h^{(c)} + h_K \|F_h\|_{L^2(K)^3}).$$

En multipliant cette dernière inéquation par $h_e^{\frac{1}{2}}$ et en utilisant (2.57) on obtient la majoration du troisième terme

$$\sum_{e \in E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|(N_h l_h - G_h)\|_{L^2(e)^3} \leq c (\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(K)} + \varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_h^{(c)}).$$

On peut noter que lorsque e parcourt $E_K \setminus E_K^1$, les éléments κ précédents sont soit égaux à K soit égaux à l'élément K' qui partage e avec K , d'où le résultat d'après la définition de ω_K et en combinant tout ceci on a la majoration de η_{K1} .

De la même façon, on procède pour une majoration de η_{K2} . On donne une brève démonstration. On écrit d'abord η_{K2} sous la forme compacte suivante :

$$\eta_{K2} = h_K \|H_h\|_{L^2(K)^3} + \sum_{e \in E_K \setminus E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|[I_h]_e\|_{L^2(e)^3} + \sum_{e \in E_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|M_h l_h - I_h\|_{L^2(e)^3}.$$

La démonstration se fait en trois étapes, la première étape consiste à majorer le premier terme de η_{K2} . L'équation (2.53) est vérifiée pour $\mathcal{R}_h s = 0$ et on prend $t = s$ tel que :

$$t = \begin{cases} H_h \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \omega \setminus K, \end{cases}$$

où ψ_K est la fonction bulle sur K . Alors tous les termes du membre de droite de l'équation (2.53) s'annulent sauf le terme en intégrale sur K on obtient :

$$\left\| H_h \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)^3}^2 = L_h(0, t) - a_h(U_h^p, (0, t)) - \frac{1}{p} b_h(r_h^p \cdot a_3; (0, t) \cdot a_3).$$

En utilisant (2.39), les lemmes 2.4 à 2.5 et l'équation (2.29) on arrive à

$$\left\| H_h \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)^3}^2 \leq c(\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(K)} + (\varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_h^{(c)})) \|t\|_{\mathbb{X}(K)}.$$

En appliquant l'inégalité inverse voir [17, proposition VII.4.1] et suivant les mêmes étapes ci-dessus pour majorer le premier terme de η_{K1} , on obtient la majoration suivante du premier terme de η_{K2}

$$h_K \|H_h\|_{L^2(K)^3} \leq c(\|U^p - U_h^p\|_{\mathbb{X}(K)} + (\varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_h^{(e)})).$$

La deuxième étape consiste à majorer le second terme de η_{K2} . Similairement, pour tout élément e partagé par deux éléments K et K' on prend la fonction t dans (2.53) égale à

$$t = \begin{cases} \mathcal{J}_{e,\kappa}([I_h]_e \psi e) & \text{sur } \kappa \in \{K, K'\} \\ 0 & \text{sur } \omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où ψe est la fonction bulle sur e et $\mathcal{J}_{e,\kappa}$ l'opérateur introduit dans [12, lemme XI.2.7]

vu ci-dessus, ceci donne la majoration du second terme de η_{K2} . Finalement pour chaque e dans E_K^1 , on choisit la fonction t dans (2.53) égale à

$$t = \begin{cases} \mathcal{J}_{e,\kappa}((M_h l_h - I_h) \psi e) & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \omega \setminus K, \end{cases}$$

ceci donne la majoration du troisième terme de η_{K2} .

En combinant les majorations des trois termes on obtient la majoration de η_{K2} .

2.5 Stratégie d'adaptation et tests numériques

Dans cette section, nous mettons en œuvre ces indicateurs locaux à l'aide du logiciel FreeFem++. Pour réduire le temps de calcul, nous proposons une stratégie d'adaptation de maillage basée sur ces indicateurs. Nous avons modifié un code déjà existant pour une formulation mixte de Naghdi (voir [20]) afin de l'adapter à la formulation pénalisée du même modèle. L'intérêt de ce modèle pénalisé est numérique.

2.5.1 Stratégie d'adaptation

Étape 1 Consiste à construire un premier maillage \mathcal{T}_h^0 , on pose $i = 0$.

Étape 2 On résoud le problème sur \mathcal{T}_h^i , on note u_h^i la solution.

Étape 3 On calcule les indicateurs d'erreurs $\eta_{K_i}(u_h^i)$ sur $K_i \in \mathcal{T}_h^i$.

Étape 4 Si l'estimateur global est suffisamment petit, on arrête le calcul.

Étape 5 On calcule le nouveau pas de maillage $h_{K_{i+1}}$ tel que :

$$h_{K_{i+1}} = \frac{1}{2}h_{K_i} \quad \text{si} \quad \eta_{K_i}(u_h^i) \geq TOL \quad \text{sinon} \quad h_{K_{i+1}} = lh_{K_i}, \quad l \geq 1.$$

$$\text{Avec } TOL = \frac{1}{n_{t_i}} \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h^i} \eta_{K_i}(u_h^i),$$

où n_{t_i} est le nombre de triangles de \mathcal{T}_h^i .

C'est à dire lorsque un des η_{K_i} est supérieur à TOL moyenne des η_{K_i} , on raffine le maillage dans le sous-domaine correspondant à cet η_{K_i} .

Étape 6 On génère le nouveau maillage \mathcal{T}_h^{i+1} et on reprend à partir de l'étape 2.

2.5.2 Tests numériques

Les tests numériques que nous présentons sont réalisés en utilisant le code FreeFem++ voir [42]. La visualisation en dimension trois de la coque déformée est réalisée en Medit, un logiciel libre de visualisation de maillage disponible à l'adresse <http://www.ann.jussieu.fr/frey/logiciels/medit.html>.

Dans le but de vérifier l'efficacité de la stratégie d'adaptation de maillage, nous avons opté dans nos tests pour la même géométrie et les mêmes données dans la référence [20].

Coque parabolöide hyperbolique

On considère la coque parabolöide hyperbolique. Le domaine de référence ω est le carré

$$\omega = \left\{ (x, y); |x| + |y| \leq \sqrt{2}b \right\},$$

et la carte φ est définie par

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, \frac{c}{2b^2}(x^2 - y^2) \right)^T.$$

Nous choisissons

$$b = 50 \text{ cm}, \quad c = 10 \text{ cm}.$$

L'épaisseur de la coque est $e = 0.8 \text{ cm}$.

Nous supposons que la coque est encastree sur tout le bord $\gamma_0 = \partial\omega$ et est soumise à une pression uniforme

$$q = -0.01 \text{ kp/cm}^2.$$

Les données mécaniques sont données par :

$$E = 2.8 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2, \quad \nu = 0.4.$$

La valeur de référence pour ces tests est le déplacement normal au centre $A(0, 0)$ de la coque. Sa valeur est déjà calculée par diverses méthodes et est égale à -0.0240000 cm , voir [10]. Le paramètre de pénalisation p est pris égal à $\frac{1}{10^3 \frac{E}{2(1+\nu)}}$.

Résultats avec adaptation de maillage

Les résultats suivants sont obtenus en utilisant adaptation de maillage et éléments finis P2.

Itération	1	2	3
Nombre de degrés de liberté	3009	7188	13424
$U_3(A)$	-0.0242561	-0.0241186	-0.0240031

Résultats sans adaptation de maillage

Nombre de degrés de liberté	20157	23849
$U_3(A)$	-0.0238721	-0.0239905

Notons que la résolution du problème discret avec adaptation de maillage donne la convergence vers la solution au bout de la troisième itération avec un nombre de degrés de liberté égal à 13424.

Alors que la résolution du problème sans adaptation de maillage donne une solution approchée avec une erreur de l'ordre de 4.9^{-3} , avec un nombre de degrés de liberté plus important comparé à celui calculé par adaptation de maillage.

Les figures 2.1 et 2.2 représentent respectivement le maillage initial et le maillage final adapté associé à la stratégie décrite en section 2.5.1.

Les figures 2.3 et 2.4 représentent la coque déformée, à savoir la surface

$$\varphi(x) + 600 u(x) \quad x \in \bar{\omega},$$

dont la solution est calculée avec pénalisation, vues faces supérieure et inférieure.

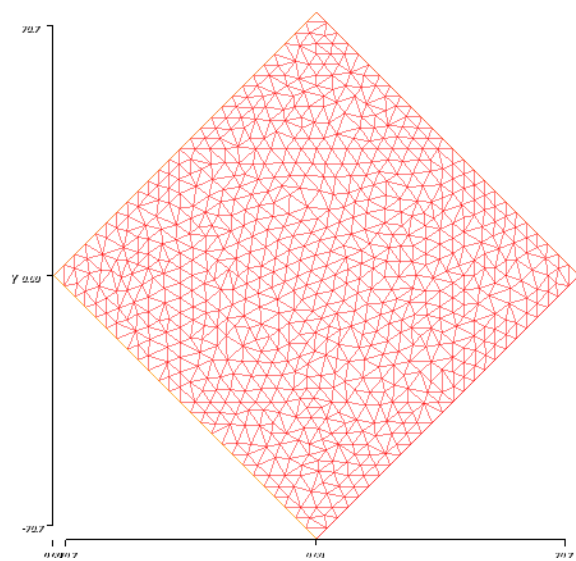


FIGURE 2.1 – Maillage initial

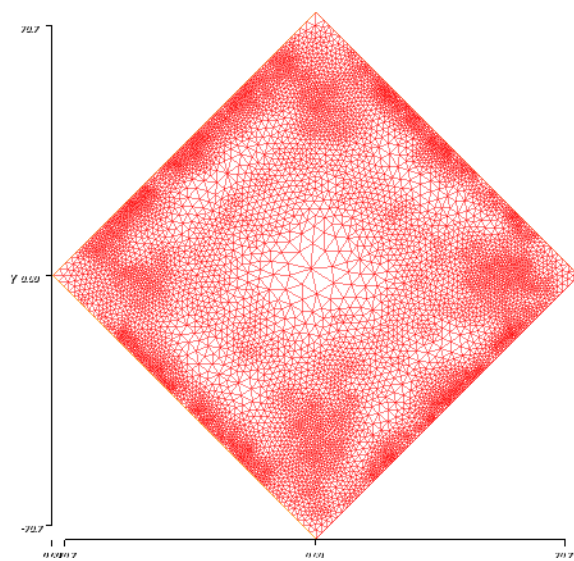


FIGURE 2.2 – Maillage adapté

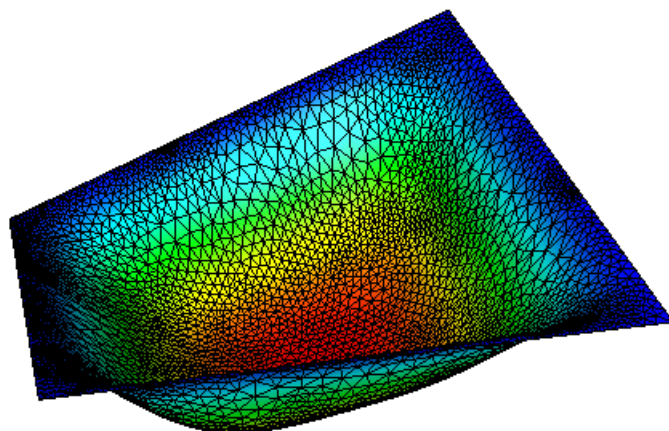


FIGURE 2.3 – Coque déformée face supérieure

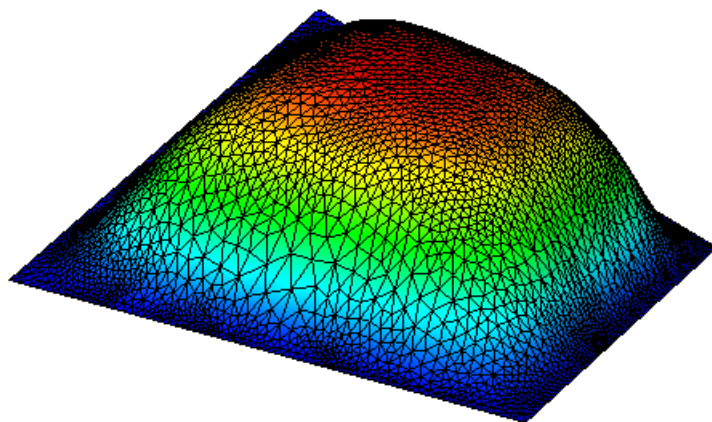


FIGURE 2.4 – Coque déformée face inférieure

Coque plaque cylindrique

On considère une coque formée d'une plaque en raccord \mathcal{C}^1 avec une portion de cylindre. Le domaine de référence de la surface moyenne est donné par

$$\omega =]-R, R[\times]-L, L[,$$

et la carte φ est définie par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (x, y, 0)^T & \text{si } x < 0 \\ (R \sin(x/R), y, R(1 - \cos(x/R)))^T & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

avec

$$R = 300 \text{ cm}, \quad L = 600 \text{ cm}.$$

L'épaisseur de la coque est $e = 7.5 \text{ cm}$.

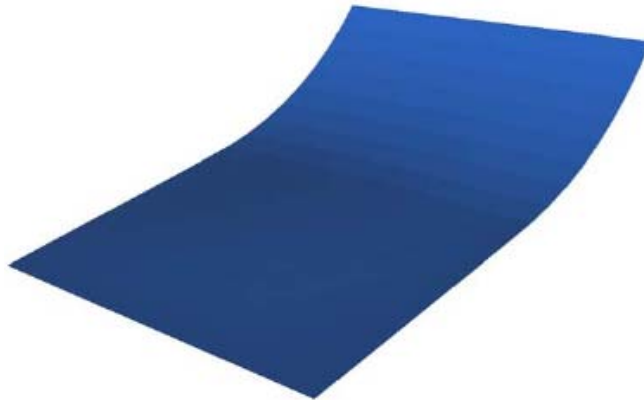


FIGURE 2.5 – Coque plaque cylindrique

Les données mécaniques sont données par $E = 2.1 \times 10^4$, $\nu = 0.0$.

La coque est soumise à une pression $q = -0.625\text{kp/cm}^2$.

Nous considérons le cas où la coque est encastrée sur tous les bords. Nous voudrions calculer la valeur du déplacement U au point B(2,4), à savoir que c'est un point de la portion cylindre. Contrairement, à l'exemple précédent on n'a pas une valeur de référence concernant le déplacement.

Résultats avec adaptation de maillage

Les résultats suivants sont obtenus en utilisant adaptation de maillage et éléments finis P1.

Itération	1	2	3	4
Nombre de degrés de liberté	1260	2400	5670	15036
$U_3(B)$	-0.0219772	-0.0211307	-0.0211072	-0.0211008

Résultats sans adaptation de maillage

Nombre de degrés de liberté	13890	37302
$U_3(B)$	-0.0219921	-0.0219905

Notons que les résultats obtenus avec adaptation de maillage donne convergence vers la solution à partir de la troisième itération avec un nombre de degrés de liberté égal à 5670, alors que les résultats obtenus sans adaptation de maillage donne un nombre de degrés de liberté plus important égal à 37302 et une solution approchée avec une erreur égale à 4.2^{-2} . Les figures 2.6 et 2.7 représentent respectivement le maillage initial et le maillage adapté associé toujours à la stratégie proposée en section 2.5.1. La figure 2.8 représente la coque déformée avec maillage adapté visionnée à l'aide du logiciel Medit.

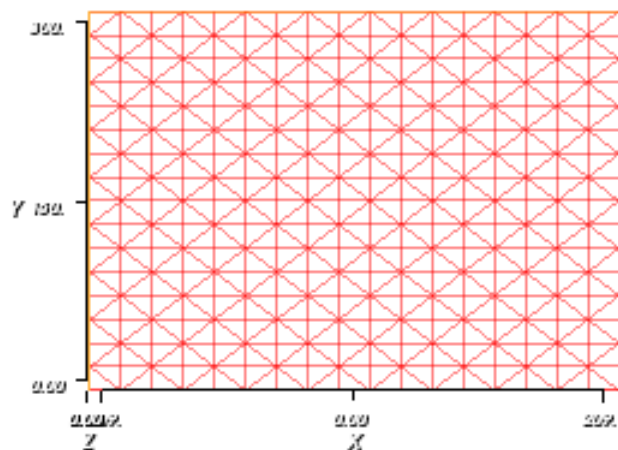


FIGURE 2.6 – Maillage initial

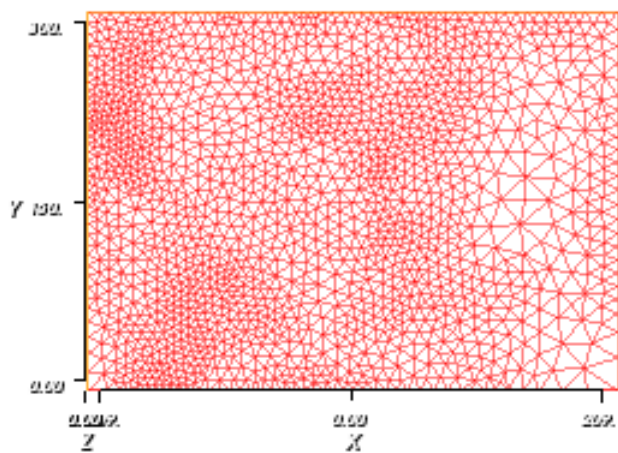


FIGURE 2.7 – Maillage adapté

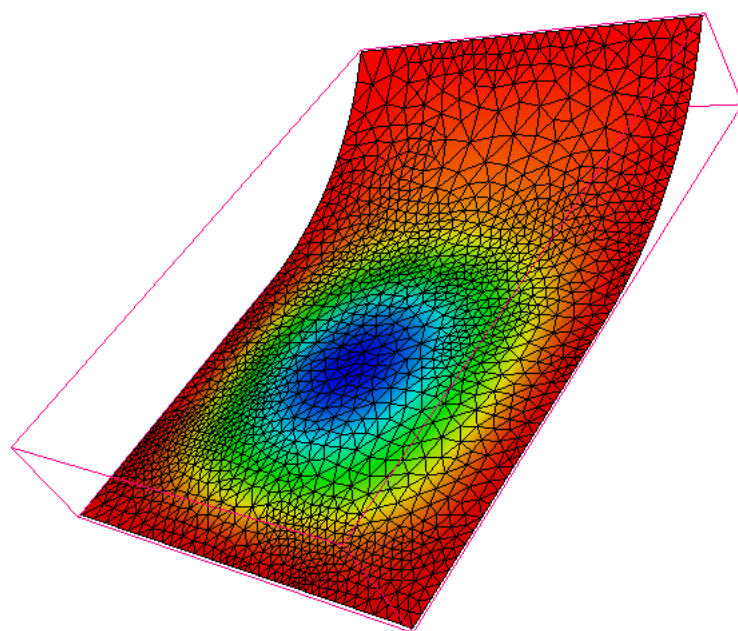


FIGURE 2.8 – Plaque cylindrique maillage adapté

Chapitre 3

Problème de contact de Koiter avec un corps rigide

On s'intéresse à l'étude du problème de contact de la coque de Koiter avec un corps rigide. On considère le modèle de Koiter introduit dans [23]. Cette formulation est basée sur l'idée suivante : Au lieu d'utiliser des inconnues dans une base locale (covariante ou contravariante) comme il est d'usage [11], chaque inconnue est considérée comme une fonction vectorielle dans \mathbb{R}^3 . Cette approche permet l'étude des coques pouvant présenter des courbures discontinues, dans un cadre fonctionnel où la surface moyenne est seulement $W^{2,\infty}$, contrairement à l'approche classique qui considère des coques dont la carte est de classe \mathcal{C}^3 . A partir de ce modèle, on établit le modèle de contact avec un corps rigide (système d'équations aux dérivées partielles combinant inéquation de contact et équation de complémentarité). En considérant la formulation mixte de Koiter voir [5], on a pu établir la formulation variationnelle du problème de contact et prouver que ce problème est bien posé.

3.1 Modèle de Koiter

Nous considérons la formulation variationnelle du problème de Koiter (1.64) vu au chapitre I. Nous supposons le bord $\partial\omega$ du domaine de la carte qui paramétrise la coque est divisé en deux parties, une partie γ_0 sur laquelle la coque est encastree et une partie complémentaire $\gamma_1 = \partial\omega \setminus \gamma_0$ sur laquelle la coque est soumise à des tractions et moments appliqués.

Le problème est trouver $u \in \tilde{V}$ tel que

$$A(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad (3.1)$$

on rappelle

$$\tilde{V} = \{v \in H^1(\omega, \mathbb{R}^3), (\partial_\alpha v \cdot a_3) a^\alpha \in H^1(\omega)^3, v = \partial_\alpha v \cdot a_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\}, \quad (3.2)$$

$$A(u, v) = \tilde{a}(u, v) = \int_{\omega} \left(e a^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \Upsilon_{\alpha\beta}(u) \Upsilon_{\rho\sigma}(v)) \right) \sqrt{a} \, dx, \quad (3.3)$$

$$L(v) = \tilde{l}(v) = \int_{\omega} f \cdot v \sqrt{a} \, dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v - M \cdot \psi(v)) \sqrt{a_{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta} \, d\gamma, \quad (3.4)$$

avec

$$N = N^i a_i, M = M^\alpha a_\alpha \wedge a_3 = \varepsilon_{\beta\alpha} M^\alpha a^\beta$$

et

$$\psi(v) = \varepsilon^{\alpha\beta} (\partial_\beta v \cdot a_3) a_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (\partial_\beta v \cdot a_\beta) a_3.$$

Finalement, $l = \sqrt{a^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta}$ est l'élément de longueur sur $\partial\omega$, où (τ_1, τ_2) sont les coordonnées covariantes du vecteur unitaire tangent à $\partial\omega$.

Théorème 3.1 *Soit $f \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ la résultante de densité de force, $M \in L^2(\gamma_1; \mathbb{R}^3)$ tel que $M \cdot a_3 = 0$ p.p sur γ_1 , $N \in L^2(\gamma_1; \mathbb{R}^3)$ et $e > 0$ l'épaisseur de la coque. Alors le problème (3.1) admet une unique solution.*

Preuve. Voir [18, 19].

Notons que pour $v \in \tilde{V}$, $\Upsilon_{\alpha\beta}(v)$ peut s'écrire.

$$\Upsilon_{\alpha\beta}(v, s) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha v \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta v \cdot \partial_\alpha a_3 + \partial_\alpha s \cdot a_\beta + \partial_\beta s \cdot a_\alpha), \quad (3.5)$$

où $s = -\partial_\alpha v \cdot a_3 a^\alpha$.

L'expression (3.5) a été initialement introduite dans [47] pour considérer l'approche DKT du modèle de Koiter et ensuite dans [4] pour décrire des coques générales, notamment quand $\varphi \in W^{1,\infty}$ et $a_3 \in W^{1,\infty}$.

Soit l'espace de Hilbert \mathbb{W} , introduit dans [5] et défini par

$$\mathbb{W} = \left\{ (v, s) \in [H^1(\omega; \mathbb{R}^3)]^2; s + (\partial_\alpha v \cdot a_3) a^\alpha = 0; v = s = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \quad (3.6)$$

Le problème (3.1) devient : Trouvez $U = (u, r) \in \mathbb{W}$ tel que

$$a(U; V) = L(V), \quad \forall V = (v, s) \in \mathbb{W}, \quad (3.7)$$

où

$$a(U; V) = \int_{\omega} e a^{\alpha\beta\rho\sigma} \left[\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \Upsilon_{\alpha\beta}(u, r) \Upsilon_{\rho\sigma}(v, s) \right] \sqrt{a} \, dx \quad (3.8)$$

et

$$L(V) = \int_{\omega} f \cdot v \sqrt{a} \, dx + \int_{\gamma_1} (M \cdot s + N \cdot v) l \, d\tau \quad (3.9)$$

Dans la suite, les inconnues sont le déplacement u et la rotation r de la normale à la surface moyenne.

3.1.1 Les équations d'équilibre du modèle de Koiter

Dans cette partie, on réécrit le problème (3.7) sous forme de système d'équations aux dérivées partielles (voir section 2.2), qui seront utiles par la suite dans la formulation du problème de contact. Pour cela introduisons les tenseurs

$$n^{\rho\sigma}(u) = ea^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\alpha\beta}(u),$$

$$m^{\rho\sigma}(U) = \frac{e^3}{12}a^{\alpha\beta\rho\sigma}\Upsilon_{\alpha\beta}(u, r).$$

Alors, la forme bilinéaire $a(U, V)$ donnée par (3.8) s'écrit sous la forme suivante

$$a(U; V) = \int_{\omega} (n^{\rho\sigma}(u)\gamma_{\rho\sigma}(v) + m^{\rho\sigma}(U)\Upsilon_{\rho\sigma}(V)) \sqrt{a} dx. \quad (3.10)$$

En utilisant la nouvelle forme (3.10) de $a(U, V)$, ainsi que les propriétés de symétrie des tenseurs $n^{\rho\sigma}(u)$, $m^{\rho\sigma}(U)$ et en appliquant la formule de Green dans le problème (3.7) on obtient les équations aux dérivées partielles liées à ce problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{\rho}(n^{\rho\sigma}(u)a_{\sigma}\sqrt{a} + m^{\rho\sigma}(U)\partial_{\sigma}a_3\sqrt{a}) = f\sqrt{a} & \text{dans } \omega, \\ -\partial_{\rho}(m^{\rho\sigma}(U)a_{\sigma}\sqrt{a}) = 0 & \text{dans } \omega, \\ r + (\partial_{\alpha}u \cdot a_3)a^{\alpha} = 0 & \text{dans } \omega, \\ u = r = 0 & \text{dans } \gamma_0 \\ \nu_{\rho}(n^{\rho\sigma}(u)a_{\sigma}\sqrt{a} + m^{\rho\sigma}(U)\partial_{\sigma}a_3\sqrt{a}) = Nl & \text{dans } \gamma_1 \\ \nu_{\rho}(m^{\rho\sigma}(U)a_{\sigma}\sqrt{a}) = Ml & \text{dans } \gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Remarque 3.1 En vue de considérer le problème discret, La contrainte fonctionnelle $r \cdot a_\alpha + \partial_\alpha u \cdot a_3 = 0$ qui figure dans la définition de l'espace \mathbb{W} ne peut être implémenter dans un espace conforme pour des coques générales. Alors, l'approche utilisée dans [5] consistait à introduire le problème de Koiter pénalisé où les inconnues sont u et r , éléments de l'espace $H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ sans aucune contrainte fonctionnelle. D'où l'espace des fonctions relaxées.

$$X = \left\{ (v, s) \in [H^1(\omega; \mathbb{R}^3)]^2; v = s = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}, \quad (3.12)$$

muni de la norme

$$\|(v, s)\|_X = \left(\|v\|_{H^1(\omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|s\|_{H^1(\omega; \mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Notons que cet espace sera utilisé ultérieurement.

3.2 Formulation mixte du problème de Koiter

Dans cette section, nous considérons une formulation mixte établie dans [5]. L'idée est de reformuler la contrainte fonctionnelle $r + \partial_\alpha u \cdot a_3 a^\alpha = 0$ en deux contraintes : l'une tangentielle $r \cdot a_3 = 0$ et l'autre normale $r \cdot a_\alpha + \partial_\alpha u \cdot a_3 = 0$.

Cette formulation consiste à trouver :

$(U, \tilde{\lambda}, \lambda) = ((u, r), \tilde{\lambda}, (\lambda_1, \lambda_2)) \in X \times H_{\gamma_0}^1(\omega) \times [L^2(\omega)]^2$ (où $\lambda_\alpha = \lambda \cdot a_\alpha$) tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(U; V) + b_1(s \cdot a_3; \tilde{\lambda}) + b_2(V; \lambda) = L(V), & \forall V = (v, s) \in X, \\ b_1(r \cdot a_3; \tilde{\mu}) = 0, & \forall \tilde{\mu} \in H_{\gamma_0}^1(\omega), \\ b_2(U; \mu) = 0, & \forall \mu \in [L^2(\omega)]^2, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où

$$b_1(\tilde{\mu}; \tilde{v}) = \int_{\omega} \partial_{\alpha} \tilde{\mu} \partial_{\alpha} \tilde{v} dx, \quad (3.15)$$

et

$$b_2(V; \lambda) = \int_{\omega} \lambda_{\alpha} (s \cdot a_{\alpha} + \partial_{\alpha} v \cdot a_3) dx. \quad (3.16)$$

On rappelle que l'inconnue $U = (u, r)$ est le déplacement u et la rotation r de la normale à la surface moyenne. Les inconnues $\tilde{\lambda}$ et λ sont les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes $r \cdot a_3 = 0$ et $r \cdot a_{\alpha} + \partial_{\alpha} u \cdot a_3 = 0$.

La forme $b_1(\cdot, \cdot) + b_2(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition inf-sup suivante établie dans [5] :

Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\inf_{(\tilde{\lambda}, \lambda) \in H_{\gamma_0}^1(\omega) \times [L^2(\omega)]^2} \sup_{V=(v,s) \in X} \frac{b_1(s \cdot a_3; \tilde{\lambda}) + b_2(V; \lambda)}{\|V\|_X + \left\| \tilde{\lambda} \right\|_{H_{\gamma_0}^1(\omega)} + \|\lambda\|_{[L^2(\omega)]^2}} \geq \beta \quad (3.17)$$

L'ellipticité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ combinée avec la condition inf-sup (3.17) de la forme $b_1(\cdot, \cdot) + b_2(\cdot, \cdot)$ conduisent au résultat suivant

Théorème 3.2 *Soit $f \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ la résultante de densité de force, $M \in L^2(\gamma_1; \mathbb{R}^3)$ tel que $M \cdot a_3 = 0$ presque partout dans γ_1 , $N \in L^2(\gamma_1; \mathbb{R}^3)$ et $e > 0$ l'épaisseur de la coque. Alors, le problème mixte (3.14) admet une unique solution. De plus, U est solution du problème de Koiter (3.7).*

Preuve. Voir [5].

3.3 Modélisation du problème de contact

Dans cette section, nous allons essayer d'associer au processus de contact un modèle mathématique, représenté par un système d'équations aux dérivées partielles lié aux conditions aux limites et aux hypothèses prises en considération dans la description de ce phénomène.

On rappelle que le modèle de Koiter est un modèle bidimensionnel, c'est à dire qu'un déplacement sur la coque peut être défini à partir d'un déplacement sur la surface moyenne. La dérivation du modèle de contact suppose que la distance entre un point et la surface moyenne reste constante pendant la déformation de la coque. Nous rappelons aussi que la coque C de surface moyenne $S = \varphi(\bar{\omega})$ et d'épaisseur e est donnée par

$$C = \left\{ \varphi(x) + za_3(x); x \in \bar{\omega}, -\frac{e(x)}{2} \leq z \leq \frac{e(x)}{2} \right\}, \quad (3.18)$$

où z représente la distance d'un point de la coque à la surface moyenne.

On s'intéresse à l'étude du contact sans frottement de cette coque avec un obstacle rigide (contact unilatéral) contenu dans le demi espace $z < 0$ et tel que son bord occupe tout le plan $z = 0$. Nous supposons que la fonction φ satisfait $\varphi(x) \cdot e_3 > 0$ pour tout x dans $\bar{\omega}$. Alors, le contact se produit dans la partie inférieure de la surface de la coque, à savoir dans la surface

$$\left\{ \varphi(x) - \frac{e(x)}{2}a_3, x \in \bar{\omega} \right\}. \quad (3.19)$$

Notons que dans les modèles standards de contact, la condition de contact combine les positions respectives de la coque et de l'obstacle, la réaction de l'obstacle sur la coque et la localisation de cette réaction. Dans ce qui suit, on va décrire toutes ces étapes.

3.3.1 Position de la coque et de l'obstacle

La coque déformée C^* est donnée par

$$C^* = \left\{ \varphi^*(x) + za_3^*(x), x \in \bar{\omega}, -\frac{e(x)}{2} \leq z \leq \frac{e(x)}{2} \right\}, \quad (3.20)$$

de surface moyenne déformée $S^* = \varphi^*(\bar{\omega})$ avec

$$\varphi^* = \varphi + u.$$

On rappelle aussi que

$$a_3^*(x) = a_3(x) - (\partial_\alpha u \cdot a_3) a^\alpha = a_3(x) + r(x),$$

et z représente toujours la distance du point de la coque à la surface moyenne S^* .

Par suite, du fait que la coque est au dessus de l'obstacle voir (3.19), on peut écrire

$$\forall x \in \bar{\omega}, \forall z \in \left[-\frac{e(x)}{2}, \frac{e(x)}{2} \right], (\varphi^*(x) + za_3^*(x)) \cdot e_3 \geq 0,$$

ou encore

$$\forall x \in \bar{\omega}; \left[\varphi(x) + u(x) - \frac{e(x)}{2} (a_3(x) + r(x)) \right] \cdot e_3 \geq 0.$$

Si l'on pose

$$\Phi(x) = \left(\frac{e(x)}{2} a_3 - \varphi(x) \right) \cdot e_3, \quad (3.21)$$

la première inégalité de contact s'écrit

$$\left(u(x) - \frac{e(x)}{2} r(x) \right) \cdot e_3 \geq \Phi \quad \text{dans } \omega. \quad (3.22)$$

On note ω_c la zone de contact, c'est à dire l'ensemble des points x de ω tel que :

$$\left(u(x) - \frac{e(x)}{2}r(x)\right) \cdot e_3 = \Phi(x). \quad (3.23)$$

3.3.2 Réaction de l'obstacle

Dans notre situation, nous considérons la réaction de l'obstacle liée à la présence de la coque de la forme ηe_3 pour la fonction scalaire η .

Dans le second membre de l'équation (3.7), le terme $\int_{\omega} f \cdot v \sqrt{a} \, dx$ est remplacée par

$$\int_{\omega} f \cdot v \sqrt{a} \, dx + \int_{\omega} \eta e_3 \cdot \left(v - \frac{e(x)}{2}s\right) \sqrt{a} \, dx,$$

en effet, l'obstacle agit sur la partie inférieure de la coque, représentée par :

$$\left(v - \frac{e(x)}{2}s\right).$$

D'autre part, puisque la coque est au dessus de l'obstacle, on a

$$\eta \geq 0 \quad \text{dans } \omega. \quad (3.24)$$

3.3.3 Emplacement de la réaction

Notons que la réaction est bien limitée à la zone de contact ω_c définie par l'équation (3.23). Ceci nous conduit à l'équation de complémentarité suivante :

$$\eta \left(\left(u - \frac{e(\cdot)}{2} r \right) \cdot e_3 - \Phi \right) = 0 \quad \text{dans } \omega. \quad (3.25)$$

3.3.4 Modèle de contact

En intégrant le tout dans les équations (3.11), nous obtenons le modèle de contact de la coque dont les inconnues sont la déformation u de la coque, la rotation r et la réaction η de l'obstacle :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_\rho(n^{\rho\sigma}(u)a_\sigma\sqrt{a} + m^{\rho\sigma}(U)\partial_\sigma a_3\sqrt{a}) - \eta e_3\sqrt{a} = f\sqrt{a} & \text{dans } \omega, \\ -\partial_\rho(m^{\rho\sigma}(U)a_\sigma\sqrt{a}) + \eta e_3 \frac{e(\cdot)}{2} \sqrt{a} = 0 & \text{dans } \omega, \\ r \cdot a_\alpha + \partial_\alpha u \cdot a_3 = 0 & \text{dans } \omega, \\ \left(u - \frac{e(\cdot)}{2} r \right) \cdot e_3 \geq \Phi, \quad \eta \geq 0, & \text{dans } \omega, \\ \eta \left(\left(u - \frac{e(\cdot)}{2} r \right) \cdot e_3 - \Phi \right) = 0 & \text{dans } \omega, \\ u = r = 0 & \text{sur } \gamma_0, \\ \nu_\rho(n^{\rho\sigma}(u)a_\sigma\sqrt{a} + m^{\rho\sigma}(U)\partial_\sigma a_3\sqrt{a}) = Nl & \text{sur } \gamma_1, \\ \nu_\rho(m^{\rho\sigma}(U)a_\sigma\sqrt{a}) = Ml & \text{sur } \gamma_1. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Remarque 3.2 Nous observons que la coque est fixée à l'obstacle sur la partie γ_0 du bord si et seulement si la fonction Φ est nulle sur γ_0 . Cette hypothèse correspond à la situation physique réelle et est nécessaire du point de vue mathématique dans toute la suite.

3.4 Formulation variationnelle

Dans le but de donner un sens au modèle mathématique obtenu, on passe par la formulation variationnelle du modèle. En s'inspirant des idées établies dans [15], nous introduisons les cônes suivants

$$H_{\gamma_0^+}^1(\omega) = \{ \sigma \in H_{\gamma_0}^1(\omega); \sigma \geq 0 \text{ p.p dans } \omega \}, \quad (3.27)$$

et

$$\Lambda = \left\{ \mu \in H_{\gamma_0}^1(\omega)'; \forall \sigma \in H_{\gamma_0^+}^1(\omega), \langle \sigma, \mu \rangle \geq 0 \right\}, \quad (3.28)$$

où $H_{\gamma_0}^1(\omega)'$ est l'espace dual de $H_{\gamma_0}^1(\omega)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre $H_{\gamma_0}^1(\omega)$ et $H_{\gamma_0}^1(\omega)'$. A partir de la formulation mixte (3.14), on considère le problème variationnel suivant :

Trouver $(U, \tilde{\lambda}, \lambda, \eta) \in X \times H_{\gamma_0}^1(\omega) \times [L^2(\omega)]^2 \times \Lambda$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(U, V) + b_1(s \cdot a_3, \tilde{\lambda}) + b_2(V, \lambda) - c(V, \eta) = L(V), & \forall V = (v, s) \in X, \\ b_1(r \cdot a_3, \tilde{\mu}) = 0, & \forall \tilde{\mu} \in H_{\gamma_0}^1(\omega), \\ b_2(U, \mu) = 0, & \forall \mu \in [L^2(\omega)]^2, \\ c(U, \theta - \eta) \geq \langle \Phi, \theta - \eta \rangle, & \forall \theta \in \Lambda, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

avec les formes $a(\cdot, \cdot)$, $b_1(\cdot, \cdot)$, $b_2(\cdot, \cdot)$ et $L(\cdot)$ sont données respectivement par (3.10), (3.15), (3.16) et (3.9). La forme $c(\cdot, \cdot)$ est donnée par

$$c(V, \theta) = \left\langle \left(v - \frac{e(\cdot)}{2} s \right) \cdot e_3, \theta \right\rangle. \quad (3.30)$$

En premier lieu, nous vérifions l'équivalence entre ce problème variationnel et le modèle mathématique fournit par le système d'équations (3.26).

Proposition 3.1 Supposons que la partition de $\partial\omega$ en γ_0 et γ_1 est suffisamment régulière pour que $\mathcal{D}(\omega \cup \gamma_1)$ soit dense dans $H_{\gamma_0}^1$. Alors, tout élément $(U, \tilde{\lambda}, \lambda, \eta) \in X \times H_{\gamma_0}^1(\omega) \times [L^2(\omega)]^2 \times \Lambda$ est solution du problème (3.29) si et seulement si est solution du système (3.26) au sens des distributions.

Preuve. En utilisant la condition inf-sup (3.17) de $b_1 + b_2$, toute solution du problème (3.29) est solution du problème (3.7) voir théorème (3.2), il y a même équivalence des deux problèmes voir [40], par densité de $\mathcal{D}(\omega \cup \gamma_1)$ dans $H_{\gamma_0}^1$ on obtient équivalence entre 1ère ligne de (3.29) et 1ère, 2ème, 6ème et 7ème ligne de (3.26). Ensuite la 3ème équation du problème (3.29) est équivalente à la 3ème ligne de (3.26). Les définitions respectives de l'espace $H_{\gamma_0}^1(\omega)$ et le cône Λ assurent les conditions au bord de u et r sur γ_0 et la positivité de η .

Reste à vérifier que la 4ème ligne du problème (3.29) est équivalente à

$$\begin{aligned} & \left(u - \frac{e(\cdot)}{2}r\right) \cdot e_3 \geq \Phi \\ \text{et} & \hspace{15em} \text{dans } \omega. \\ & \eta \left(\left(u - \frac{e(\cdot)}{2}r\right) \cdot e_3 - \Phi \right) = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

1) Si (U, η) satisfait (3.31), on a pour tout θ dans Λ

$$\begin{aligned} c(U, \theta - \eta) &= c(U, \theta) - c(U, \eta) \\ &= c(U, \theta) - \langle \Phi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Puisque θ est positive ou nulle,

$$c(U, \theta - \eta) \geq \langle \Phi, \theta - \eta \rangle,$$

et c'est bien la quatrième ligne de (3.29).

2) Inversement, si (U, η) satisfait la quatrième ligne de (3.29), prenons $\theta = \eta + \chi_{\mathcal{O}}$ (voir [15]), où $\chi_{\mathcal{O}}$ est la fonction caractéristique de tout sous ensemble mesurable \mathcal{O} de ω ($\chi_{\mathcal{O}}$ est évidemment dans Λ), on a bien

$$\int_{\mathcal{O}} \left(u - \frac{e(x)}{2}r\right) \cdot e_3 \sqrt{a} \, dx \geq \int_{\mathcal{O}} \Phi \sqrt{a} \, dx,$$

ce qui donne la première partie de (3.31).

D'une autre part, prenons θ égal successivement à 0 et 2η nous obtenons alors

$$c(U, -\eta) \geq \langle \Phi, -\eta \rangle, \text{ donc } c(U, \eta) \leq \langle \Phi, \eta \rangle$$

et

$$c(U, \eta) \geq \langle \Phi, \eta \rangle,$$

ce qui mène à $c(U, \eta) = \langle \Phi, \eta \rangle$ c'est à dire

$$\left\langle \left(u - \frac{e(\cdot)}{2}r\right) \cdot e_3, \eta \right\rangle = \langle \Phi, \eta \rangle,$$

on a bien

$$\left\langle \left(\left(u - \frac{e(\cdot)}{2}r\right) \cdot e_3 - \Phi \right), \eta \right\rangle = 0.$$

Puisque les deux quantités $\left(u - \frac{e(\cdot)}{2}r\right) \cdot e_3 - \Phi$ et η sont positives ou nulles ceci donne $\eta \left(\left(u - \frac{e(\cdot)}{2}r\right) \cdot e_3 - \Phi \right) = 0$, qui est bien la deuxième partie de (3.31).

3.5 Analyse du problème variationnel

Maintenant, nous allons aborder l'analyse du problème variationnel (3.29) et établir l'existence et l'unicité de la solution. L'idée utilisée est similaire à celle utilisée dans [15], inspirée aussi de l'approche utilisée dans [28]. Cela consiste à considérer un premier problème variationnel réduit équivalent au problème variationnel de départ ensuite considérer un deuxième problème réduit et établir que les deux problèmes réduits sont bien posés et en combinant tous les résultats obtenus, on conclut pour l'existence et l'unicité du problème variationnel (3.29).

3.5.1 Premier problème de contact réduit

Considérons le problème réduit suivant :

Trouvez $(U, \eta) \in \mathbb{W} \times \Lambda$ tel que

$$\begin{cases} \forall V \in \mathbb{W}, & a(U, V) - c(V, \eta) = L(V), \\ \forall \theta \in \Lambda, & c(U, \theta - \eta) \geq \langle \Phi, \theta - \eta \rangle. \end{cases} \quad (3.32)$$

où l'espace \mathbb{W} a été introduit en (3.6).

Notons que si $V \in \mathbb{W}$, alors b_1 et b_2 s'annulent dans la première équation de (3.29) (voir [5]) d'où l'idée de considérer ce problème.

Dans un premier temps, nous allons utiliser un résultat de Brezzi-Fortin [27] et Girault-Raviart [40] dû au fait que $b_1 + b_2$ vérifie la condition inf-sup (3.17) et qui assure l'équivalence entre le problème variationnel (3.29) et le premier problème réduit (3.32).

Proposition 3.2 Le problème (3.29) et (3.32) sont équivalents dans le sens suivant

- i) Si $(U, \tilde{\lambda}, \lambda, \eta)$ est solution du problème (3.29), alors (U, η) est solution du problème (3.32).
- ii) Si (U, η) est solution du problème (3.32), il existe une unique fonction $(\tilde{\lambda}, \lambda) \in H_{\gamma_0}^1(\omega) \times [L^2(\omega)]^2$ tel que $(U, \tilde{\lambda}, \lambda, \eta)$ est solution du problème (3.29).

Désormais, nous devons établir l'existence de la solution du problème (3.29). Cependant, la proposition (3.2) n'est pas suffisante pour prouver cette existence.

Notons que le problème d'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement avec un obstacle rigide conduit à une inéquation variationnelle.

Pour se faire, nous commençons par définir le convexe fermé suivant

Définition 3.1 On définit le convexe fermé de l'espace \mathbb{W} par

$$\mathbf{K}_\Phi(\omega) = \left\{ V \in \mathbb{W}; \left(v - \frac{e(\cdot)}{2}s \right) \cdot e_3 \geq \Phi \quad \text{p.p dans } \omega \right\}. \quad (3.33)$$

Note. Soit $(U, \tilde{\lambda}, \lambda, \eta)$ solution du problème variationnel (3.29). Par la proposition 3.2, (U, η) est bien une solution du premier problème réduit (3.32). En plus, elle satisfait la quatrième ligne du problème (3.26) par la proposition 3.1. Alors toute partie U de toute solution (U, η) du problème (3.32) appartient à $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$.

3.5.2 Deuxième problème de contact réduit

Considérons le problème réduit qui consiste en une inéquation variationnelle suivante :

Trouver U dans $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$ tel que

$$\forall V \in \mathbf{K}_\Phi(\omega), \quad a(U, V - U) \geq L(V - U). \quad (3.34)$$

En se basant sur le théorème d'existence et d'unicité de Stampacchia pour les inéquations variationnelles voir [48], on sera en mesure d'énoncer un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (3.34) sous une certaine hypothèse qui fait l'objet de la proposition suivante :

Proposition 3.3 On suppose que Φ satisfait la condition suivante

$$\Phi(x) \leq 0 \quad \text{dans } \omega. \quad (3.35)$$

Alors, pour toute donnée $(f, N, M) \in L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$, le problème (3.34) a une unique solution U dans $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$.

Preuve. $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$ est un cône fermé convexe et par (3.35) il s'ensuit que $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$ est non vide (il contient au moins l'élément nul). Puisque $a(U, V)$ est elliptique dans \mathbb{W} (voir [23]), on est bien dans les conditions du théorème d'existence et d'unicité de Lions-Stampacchia (voir [48]). Alors le problème (3.34) a une unique solution.

3.6 Existence et unicité du problème variationnel

Maintenant, il s'agit de prouver l'existence de la solution du premier problème réduit (3.32) qui induit l'existence de la solution du problème variationnel (3.29).

On se réfère à [28] pour un problème mixte abstrait similaire à (3.32), l'approche utilisée établit l'existence et l'unicité de la solution du problème mixte et du problème qui consiste en une inéquation variationnelle sous une condition inf-sup de la forme bilinéaire $c(\cdot, \cdot)$. Cette condition fait l'objet du lemme suivant établi dans [15].

Lemme 3.1 La forme $c(\cdot, \cdot)$ est continue dans $X(\omega) \times H_{\gamma_0}^1(\omega)'$ et satisfait la condition inf-sup suivante, pour une constante $\delta > 0$,

$$\forall \mu \in H_{\gamma_0}^1(\omega)', \quad \sup_{V \in \mathbb{W}(\omega)} \frac{c(V, \mu)}{\|V\|_{X(\omega)}} \geq \delta \|\mu\|_{H_{\gamma_0}^1(\omega)'}. \quad (3.36)$$

Preuve. Voir [15].

Proposition 3.4 Supposons Φ satisfait la condition (3.35) et en plus la condition

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{dans } \gamma_0. \quad (3.37)$$

Alors pour toute donnée $(f, N, M) \in L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$, le premier problème réduit (3.32) a au moins une solution $(U, \eta) \in \mathbb{W}(\omega) \times \Lambda$.

Preuve. La technique de démonstration reprend le cheminement de [40] et [15], en tenant compte des spécificités de notre problème.

Soit U solution du problème (3.34) (voir proposition 3.3). D'abord, nous introduisons $\mathbf{K}_0(\omega)$ le noyau de la forme $c(\cdot, \cdot)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{K}_0(\omega) = \left\{ V \in \mathbb{W}(\omega); \left(v - \frac{e(\cdot)}{2} s \right) \cdot e_3 = 0 \quad \text{p.p. dans } \omega \right\}.$$

D'autre part, si $W \in \mathbf{K}_0(\omega)$, alors $V = U \pm W$ appartient à $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$.

Appliquons le problème (3.34) à $V = U + W$ et $V = U - W$ on obtient

$$a(U, W) = L(W) \quad \forall W \in \mathbf{K}_0(\omega).$$

Alors la forme $V \rightarrow a(U, V) - L(V)$ appartient à l'espace polaire noté $\mathbf{K}^0(\omega)$ de $\mathbf{K}_0(\omega)$. A partir de la condition inf-sup (3.36) voir le résultat dans [40, Chap.I, lemme 4.1], il existe un unique $\eta \in H_{\gamma_0}^1(\omega)'$ tel que

$$\forall V \in \mathbb{W}(\omega), \quad c(V, \eta) = a(U, V) - L(V). \quad (3.38)$$

Ainsi la 1ère ligne du premier problème simplifié (3.32) est établie. Pour conclure, nous prouvons la deuxième ligne de (3.32).

1) Pour tout $\sigma \in H_{\gamma_0^+}^1(\omega)$, prenons $V = U + W$ avec $W = ((0, 0, \sigma), 0)$, cette fonction W appartient bien à $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$, ainsi le deuxième problème simplifié (3.34) conduit à

$$c(W, \eta) = a(U, V - U) - L(V - U) \geq 0.$$

Puisque $c(W, \eta)$ coïncide avec $\langle \sigma, \eta \rangle$ et par définition du cône Λ (3.28), on a bien $\eta \in \Lambda$, puisque $\langle \sigma, \eta \rangle \geq 0$. 2) Maintenant, prenons $V = ((0, 0, \Phi), 0)$, V appartient bien à $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$. En plus le problème (3.34) conduit à

$$\begin{aligned} c(V - U, \eta) &= a(U, V - U) - L(V - U) \geq 0 \quad \text{ce qui donne} \\ c(V, \eta) - c(U, \eta) &\geq \langle \Phi, \eta \rangle - c(U, \eta) \geq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$-c(U, \eta) \geq -\langle \Phi, \eta \rangle. \quad (3.39)$$

D'autre part, il s'ensuit de la définition 3.1 de $\mathbf{K}_\Phi(\omega)$, plus la condition (3.37) de Φ ,

$$\forall \theta \in \Lambda, \quad c(U, \theta) \geq \langle \Phi, \theta \rangle. \quad (3.40)$$

En combinant les deux inégalités (3.39) et (3.40), on obtient

$$c(U, \theta - \eta) \geq \langle \Phi, \theta - \eta \rangle,$$

ce qui établit la 2ème ligne du premier problème simplifié (3.32). Alors, (U, η) appartient à $\mathbb{W}(\omega) \times \Lambda$, et satisfait les deux lignes du problème (3.32).

Maintenant, on est en mesure d'énoncer un résultat d'existence et d'unicité pour le premier et deuxième problème simplifié sous certaines conditions de Φ .

Proposition 3.5 Supposons que Φ satisfait les conditions (3.35) et (3.37). Alors, pour toute donnée $(f, N, M) \in L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$, le problème (3.32) a au plus une solution $(U, \eta) \in \mathbb{W}(\omega) \times \Lambda$. De plus, U est solution du problème (3.34).

Preuve. On commence par démontrer que U est solution du problème (3.34).

1) Soit (U, η) solution du problème (3.32). Suivant la même technique dans la preuve de la proposition 3.1, pour tout sous ensemble \mathcal{O} de ω , notons par $\chi_{\mathcal{O}}$ la fonction caractéristique de \mathcal{O} . Prenons $\theta = \eta + \chi_{\mathcal{O}}$ dans le problème (3.32), on obtient

$$\int_{\mathcal{O}} \left(u - \frac{e(\cdot)}{2} r \right) \cdot e_3 \sqrt{a} \, dx \geq \int_{\mathcal{O}} \Phi \sqrt{a} \, dx,$$

ce qui implique que U appartient à $\mathbf{K}_{\Phi}(\omega)$.

D'autre part, on montrera que

$$\forall V \in \mathbf{K}_{\Phi}(\omega), \quad c(V - U, \eta) \geq 0.$$

On prend $\theta = 0$ dans le problème (3.32), on obtient l'inégalité (3.39) c'est-à-dire ($-c(U, \eta) \geq -\langle \Phi, \eta \rangle$), en utilisant la définition de $\mathbf{K}_{\Phi}(\omega)$ (3.33) et le fait que $\eta \in \Lambda$, on obtient évidemment

$$c(V, \eta) \geq \langle \Phi, \eta \rangle \tag{3.41}$$

Sommant les des deux inégalités (3.39) et (3.41), on obtient

$$c(V - U, \eta) = c(V, \eta) - c(U, \eta) \geq 0.$$

Or

$$c(V - U, \eta) = a(U, V - U) - L(V - U) \geq 0. \tag{3.42}$$

(Notons que $V - U$ est dans \mathbb{W} pour pouvoir écrire la dernière inégalité (3.42)).

D'où on a bien :

$$a(U, V - U) \geq L(V - U), \quad \forall V \in \mathbf{K}_{\Phi}(\omega),$$

U est bien solution de (3.34).

2) Maintenant, montrons l'unicité de la solution du problème (3.32).

Soient (U_1, η_1) et (U_2, η_2) deux solutions du problème (3.32).

La partie 1) de la preuve fournit que U_1 et U_2 sont bien solutions du problème (3.34).

Par la proposition 3.3, on a bien $U_1 = U_2$. Puisque les fonctions η_1 et η_2 satisfont l'équation (3.38), il suit que

$$\begin{aligned} a(U, V) - L(V) &= c(V, \eta_1) = c(V, \eta_2) \quad \forall V \in \mathbb{W}(\omega) \\ \Rightarrow c(V, \eta_1 - \eta_2) &= 0 \Rightarrow \eta_1 = \eta_2 \quad \text{par (3.36)}. \end{aligned}$$

D'où l'unicité de la solution du problème (3.32).

Finalement, on conclut à l'existence et l'unicité du problème de contact de départ par les propositions 3.2, 3.4 et 3.5 et nous obtenons le résultat principal suivant

Théorème 3.3 *Supposons que la fonction Φ satisfasse les conditions (3.35) et (3.37). Alors, pour toute donnée $(f, N, M) \in L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$, le problème (3.29) a une unique solution $(U, \tilde{\lambda}, \lambda, \eta) \in X \times H_{\gamma_0}^1(\omega) \times [L^2(\omega)]^2 \times \Lambda$.*

Extension du travail

Nous nous intéressons à la discrétisation du problème réduit (3.34), cependant la contrainte fonctionnelle $r = -\partial_\alpha u \cdot a_3 a^\alpha$ dans ω ne peut être implémenter dans un espace conforme pour des coques générales. Alors, on introduit le convexe

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\Phi(\omega) &= \left\{ V \in X; \left(v + \frac{e(\cdot)}{2} (\partial_\alpha v \cdot a_3) a^\alpha \right) \cdot e_3 \geq \Phi \quad \text{p.p dans } \omega \right\} \\ &= \left\{ V \in X; \left(v - \frac{e(\cdot)}{2} s \right) \cdot e_3 \geq \Phi \quad \text{p.p dans } \omega \right\}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

et nous considérons le problème suivant :

Trouver $(U, \tilde{\lambda}, \lambda) \in \mathbf{L}_\Phi(\omega) \times H_{\gamma_0}^1(\omega) \times [L^2(\omega)]^2$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall V = (v, s) \in \mathbf{L}_\Phi(\omega), \\ a(U, V - U) + b_1(s \cdot a_3, \tilde{\lambda}) + b_2(V - U, \lambda) \geq L(V - U), \\ \forall \tilde{\mu} \in H_{\gamma_0}^1(\omega), \\ b_1(r \cdot a_3, \tilde{\mu}) = 0, \\ \forall \mu \in [L^2(\omega)]^2, \\ b_2(U, \mu) = 0. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Nous projetons de prouver que ce problème est bien posé et est équivalent au problème réduit (3.34). Ensuite, mener une approximation par éléments finis et finalement une analyse a priori et a posteriori de ce problème.

Conclusion et perspectives

Au cours de notre travail, nous avons étudié deux problèmes différents pour deux modèles de coques linéairement élastiques.

En premier lieu, on s'est intéressé à l'analyse a posteriori par résidu de la discrétisation par éléments finis d'un modèle de coque de Naghdi pénalisé, destiné à approcher le caractère tangent de la rotation de la normale à la surface moyenne de la coque. On a bien établi que cette analyse conduit à des estimations parfaitement optimales. Nous avons validés des tests numériques en proposant une stratégie d'adaptation de maillage qui a permis de réduire le nombre de degrés de liberté; donc le coût de calcul.

En deuxième lieu, on a considéré le modèle de Koiter pour une coque en coordonnées cartésiennes. La difficulté ici est que la coque est modélisée par sa surface moyenne, tandis que le contact se produit sur une partie de la surface physique de la coque. Toutefois, en utilisant une définition appropriée de cette surface physique, nous considérons un modèle qui semble mathématiquement raisonnable et réaliste. A partir de la formulation mixte de Koiter on a pu proposer un modèle du problème de contact de Koiter avec un corps rigide et a partir des formulations variationnelles et pour chacune d'elles les hypothèses permettant l'existence et l'unicité de la solution.

Pour ce qui est des extensions envisageables du travail, nous nous intéressons à la discrétisation par éléments finis, une analyse a priori, a posteriori du problème de contact ainsi des simulations numériques. Par ailleurs, la considération du problème de contact de deux coques, constitue une étude importante à effectuer.

Bibliographie

- [1] R.A. Adams : Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65., Academic Press, New York-London, (1975).
- [2] M. Ainsworth, J.T. Oden, C.Y. Lee, Local a posteriori error estimators for variational inequalities, Numer. Methods for Partial Differential Equations 9, 23–33, (1993).
- [3] M. Ainsworth, J. T. Oden, A posteriori error estimation in finite element analysis. Wiley, New York, NY, (2000).
- [4] S. Anicic, H. Le Dret et A. Raoult, The infinitesimal rigid displacement lemma in Lipschitz coordinates and applications to shells with minimal regularity, Math. Methods Appl. Sci., 27, pp. 1283-1299, (2004).
- [5] S. Aouadi, A. Blouza et L. El Alaoui, A posteriori analysis of penalized and mixed formulations of Koiter's shell model, Proceedings of 4th Tam–Tam, Kenitra, Maroc, (2009).
- [6] I. Babuška et W. Rheinbolt, Error estimates for adaptive finite element method computations, SIAM J.Numer. Anal., vol. 15, p.736-754, (1978).
- [7] R. Bank et A. Weiser, Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations, Math. Comp., vol. 44, p. 283-301, (1985).
- [8] R. Becker et R. Rannacher, An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods, Acta Numerica, vol. 10, p. 1-102, (2001).
- [9] M. Bernadou et P.G. Ciarlet, Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter, in Computing Methods in Sciences and Engineering, R. Glowinski,

- J.-L. Lions (eds.), *Lecture Notes in Economics and Math. Systems*, vol. 134, Springer-Verlag, Berlin, 89-136, (1976).
- [10] M. Bernadou, *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, RMA, Masson, Paris, (1994).
- [11] M. Bernadou et P.G. Ciarlet, B. Miara, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories. *J. Elasticity* 34, no. 2, 111–138, (1994).
- [12] C. Bernardi, F. Ben Belgacem, A. Blouza, et M. Vohralik, A finite element discretization of the contact between two membranes, *M2AN*, 43, p.p. 33-52, (2008).
- [13] C. Bernardi, F. Ben Belgacem, A. Blouza, et M. Vohralik, On the Unilateral Contact Between Membranes Part 1 : Finite Element Discretization and Mixed Reformulation, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena, Modelling and numerical methods in contact mechanics*, Vol. 4, No. 1, pp. 21-43, (2009).
- [14] C. Bernardi, F. Ben Belgacem, A. Blouza, et M. Vohralik, On the Unilateral Contact Between Membranes Part 2 : A posteriori analysis and numerical experiments, *IMA Journal of Numerical Analysis*, doi : 10, 1093/imanum/drr003211, (2011).
- [15] F. Ben Belgacem, C. Bernardi, A. Blouza, et F. Taallah, On the obstacle problem for a Naghdi shell, *J. Elasticity*, 103, 1-13, (2011).
- [16] C. Bernardi, A. Blouza, F. Hecht et H. Le Dret, A posteriori analysis of finite element discretizations of a Naghdi shell model, *IMA J. Numer. Anal.* volume 33, no. 1, p190-211, (2012).
- [17] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Collection “Mathématiques & Applications” 45, Springer-Verlag (2004).
- [18] A. Blouza, *Étude de quelques problèmes de coques en élasticité*, Thèse de l'Université Paris 6, (1996).
- [19] A. Blouza, Existence et unicité pour le modèle de Naghdi pour une coque peu régulière *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, série I, p. 839-844, (1997).

-
- [20] A. Blouza, F. Hecht et H. Le Dret, Two finite element approximations of Naghdi's shell model in Cartesian coordinates. *SIAM J. Numer. Anal.* 44, no. 2, 636-654, (2006).
- [21] A. Blouza et H. Le Dret, Sur le lemme du mouvement rigide, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 319, série I, 1015-1020, (1994).
- [22] A. Blouza et H. Le Dret, Existence et unicité pour le modèle de Koiter pour une coque peu régulière, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 319, série I, 1127-1132, (1994).
- [23] A. Blouza et H. Le Dret, Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol LVII, N2, p. 317-337, (1999).
- [24] A. Blouza et H. Le Dret, Naghdi's Shell Model : Existence, Uniqueness and Continuous Dependence on the Midsurface, *Journal of Elasticity* 64 : 199-216, (2001).
- [25] H. Brezis, G. Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, *Bull. Soc. Math. France* 96, 153-180, (1968).
- [26] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, (1983).
- [27] F. Brezzi et M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Ser. Comput. Math. 15, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [28] F. Brezzi, W.W. Hager, P.-A. Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. II. Mixed methods, *Numer. Math.* 31, 1-16, (1978).
- [29] M. Carrive, P. Le Tallec, et J. Mouro, Approximation par éléments finis d'un modèle de coques géométriquement exact, *Rev. Europ. Eléments Finis*, 4, pp. 633-662, (1995).
- [30] C. Carstensen, J. Schöberl, Residual-based a posteriori error estimate for a mixed Reißner-Mindlin plate finite element method, *Numer. Math.* 103, 225-250, (2006).
- [31] Z. Chen, R.H. Nochetto, Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems, *Numer. Math.* 84, 527-548, (1995).

-
- [32] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, (1978).
- [33] P.G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. II, P.G. Ciarlet & J.-L. Lions eds., North-Holland, Amsterdam, 17–351, (1991).
- [34] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Vol III : Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam, (2000).
- [35] P.G. Ciarlet et B. Miara, *On the ellipticity of linear shell models*, *Z. Angew. Math. Phys.*, 43, pp. 243–253, (1992).
- [36] E. Cosserat et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris, (1909).
- [37] P. Destuynder et M. Salaün, *A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions. Part 1. The mixed variational formulation*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 120, 195–217, (1995).
- [38] L. E. Fraenkel, *On regularity of the boundary in the theory of Sobolev spaces*, *Proc. London Math. Soc. (3)*, 39, 385–427, (1979).
- [39] P.J.Frey, P.-L.George, *Maillages, applications aux éléments finis*, Hermès (1999).
- [40] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer–Verlag, (1986).
- [41] P. Hild, S. Nicaise, *Residual a posteriori error estimators for contact problems in elasticity*, *Model. Math. Numer. Anal.* 41, 897–923, (2007).
- [42] F.Hecht, O.Pironneau, *FreeFem++*, see www.freefem.org.
- [43] C. Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni, (1987).
- [44] N. Kerdid et P. Mato-Eiroa, *Approximation par éléments finis conformes d’un modèle de coques peu régulières*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 326, 1335–1340, (1998).

-
- [45] N. Kerdid et P. Mato-Eiroa, Conforming finite element approximation for shells with little regularity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1-3, 95-107, (2000).
- [46] W.T. Koiter, On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. B* 73, 169–195, (1970).
- [47] P. Le Tallec et S. Mani, Analyse numérique d'un modèle de coque de Koiter discrétisé en base cartésienne par éléments finis DKT, *Model. Math. Anal. Numer.*, 32, pp. 433–450, (1998).
- [48] J.-L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, *Comm. Pure and Appl. Math.* 20, 493–519, (1967).
- [49] P.-M. Naghdi, *Foundation of the elastic Shell Theory*, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 4. North-Holland, Amsterdam, pp. 1-99, (1963).
- [50] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
- [51] E. Sanchez-Palencia, Statique et dynamique des coques minces. I. Cas de flexion pure non inhibée, *C. R. Acad. Sci. Paris* 309, Sér. I, 411-417, (1989a).
- [52] E. Sanchez-Palencia, Statique et dynamique des coques minces. II. Cas de flexion pure inhibée - Approximation membranaire, *C. R. Acad. Sci. Paris* 309, Sér. I, 531-537, (1989b).
- [53] E. Sanchez-Palencia, Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I. 309, pp. 909-916, (1990).
- [54] L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, (1959).
- [55] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, (1957).
- [56] L. Slimane, A. Bendali and P. Laborde, Mixed formulations for a class of variational inequalities, *Model. Math. Numer. Anal.* 38, 177–201, (2004).
- [57] N. Tabouche, A. Blouza et H. Sissaoui, Etude d'un modèle de coque en élasticité linéaire, *Mémoire de Magister de l'université Badji.M de Annaba*, (2006).

-
- [58] N. Tabouche, A posteriori analysis of finite element discretization of a penalized Naghdi shell, *IJDE*, vol. 8, no1, pp. 111-124, (2013).
- [59] A. Tikonov, A. Vasil'eva et A. Sveshnikov, *Differential equations*, Springer-Verlag, (1985).
- [60] R. Verfürth, Error estimates for a mixed finite element approximation of the stokes equation, *RAIRO, Anal. Num.*, vol. 18, p. 175-182, (1984).
- [61] R. Verfürth, *A review of a posteriori Error Estimates and adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Teubner Verlag and J. Wiley, Stuttgart, (1996).
- [62] B.I. Wohlmuth, An a posteriori error estimator for two body contact problems on non-matching meshes, *J. Sci. Computing* 33, 25–45, (2007).