

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI
MOKHTAR- ANNABA



جامعة باجي مختار عنابة

Année 2022

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT en sciences

THEME

*Traitement numérique des équations non linéaires issues de
l'écoulement des fluides par des algorithmes stochastiques*

Spécialité : Génie mécanique

Option : Génie mécanique

Par :

NOUAR AHCENE

Directeur de Thèse : DIB Amar (M.C.A) Université Badji Mokhtar Annaba

Devant le Jury

Président : KHADRI Youcef (Pr.) Université Badji Mokhtar Annaba

Examineurs :

MZAD Hocine (Pr.) Université Badji Mokhtar Annaba

YOUNES Ramdane (M.C.A) Université Larbi Tébessi Tébessa

BOUSSAHA El Hadi (M.C.A) Université 20 Août 1955 Skikda

HAROUZ Riad (M.C.A) Université Mohamed Cherif Messaidia Souk Ahras

Année : 2022

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur le Docteur DIB Amar, le directeur de cette thèse, je lui adresse ma profonde et sincère reconnaissance pour son suivi rigoureux, son encouragement et son soutien continuels durant mes années de recherches.

Je suis très honoré que Monsieur le Professeur KHADRI Youcef de l'Université Badji Mokhtar - Annaba a accepté de présider mon jury de soutenance.

Ma reconnaissance va également à Monsieur MZAD Hocine, Professeur à l'Université Badji Mokhtar - Annaba, pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer ce travail de thèse en tant que examinateur.

Je tiens à témoigner toute ma gratitude à Monsieur YOUNES Ramdane, Maître de conférences à l'Université Larbi Tébessi - Tébessa, d'avoir accepté d'être membre de mon jury comme examinateur.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur BOUSSAHA El Hadi, Maître de conférences à l'Université 20 Août 1955 - Skikda, qu'il trouve ici le témoignage de ma reconnaissance en tant que examinateur.

Je tiens à remercier Monsieur HAROUZ Riad, Maître de conférences à l'Université Mohamed Cherif Messaidia - Souk Ahras, pour l'intérêt qu'il a accordé à mon travail et pour avoir accepté d'être examinateur de ma thèse.

Je tiens particulièrement à remercier le Doyen de la faculté de technologie à l'Université Badji Mokhtar - Annaba. Ainsi que le Chef de Département de Génie Mécanique.

Je voudrais aussi exprimer ma reconnaissance à tous les membres du Département de Génie Mécanique et du Laboratoire de Mécanique Industrielle (LMI) de l'Université Badji Mokhtar - Annaba, Enseignants et Enseignants-chercheurs, Ingénieurs, Techniciens et travailleurs.

Dédicace

A ma femme et mes chers enfants.

A la mémoire de mes parents.

Que Dieu accueille leurs âmes dans son vaste paradis.

Résumé

Au cours de ces dernières années la connaissance du comportement dynamique et thermique des écoulements des nanofluides c'est devenu une priorité pour les chercheurs. Dans cette thèse, de nouvelles techniques d'intelligence artificielles en utilisant des algorithmes stochastiques ont été développées pour la solution du problème de l'écrasement instable non linéaire d'un nanofluide entre deux plaques parallèles en utilisant trois réseaux de neurones artificiels différents à action directe optimisés avec une méthode de points intérieurs. Les équations régissant le problème de l'écoulement laminaire incompressible bidimensionnel avec transfert de chaleur sont transformées à des équations différentielles ordinaires non linéaires équivalentes du quatrième ordre. Trois modèles de réseau de neurones utilisant des fonctions d'activation log-sigmoïde, à base-radiale et tan-sigmoïde sont développés pour les équations transformées de manière non supervisée. L'optimisation des poids de chaque réseau de neurones est effectuée avec la méthode des points intérieurs. Les modèles proposés traiter ce problème en faisant fixer des nombres sans dimensions, des propriétés thermo-physique tout en variant le reste des paramètres. La précision, la convergence et l'efficacité des modèles conçus sont validées par des analyses comparatives et statistiques basées sur un nombre suffisamment de simulations indépendantes. Des études comparatives des solutions proposées avec des résultats numériques standards, ainsi que des solutions récemment rapportées de méthodes semi-analytiques illustrent la fiabilité des schémas proposés.

Mots-clés : Ecoulement de nanofluides ; Equations différentielles non linéaire ; Réseaux de neurones artificielle ; Algorithmes stochastiques.

Abstract:

In recent years, the knowledge of the dynamic and thermal behavior of nanofluid flows has become a priority for researchers. In this thesis, new artificial intelligence techniques using stochastic algorithms have been developed for the solution of the nonlinear unsteady squeezing problem of a nanofluid between two parallel plates using three different feedforward artificial neural networks optimized with an interior point method. The equations governing the two-dimensional incompressible laminar flow problem with heat transfer are transformed to equivalent fourth-order nonlinear ordinary differential equations. Three neural network models using log-sigmoid, radial-based and tan-sigmoid activation functions are developed for the unsupervised transformed equations. The optimization of the weights of each neural network is performed with an interior point method. The proposed models are evaluated for this problem by fixing dimensionless numbers, thermo-physical properties and varying others. The accuracy, convergence and efficiency of the designed models are validated by comparative and statistical analyses based on a sufficient number of independent simulations. Comparative studies of the proposed solutions with standard numerical results, as well as recently reported solutions of semi-analytical methods illustrate the reliability of the proposed schemes.

Keywords: Nanofluid flow; Nonlinear differential equations; Artificial neural networks; Stochastic algorithms.

ملخص

في السنوات الأخيرة، أصبحت معرفة السلوك الديناميكي والحراري لتدفقات الموائع النانوية من أولويات الباحثين. في هذه الأطروحة، تم تطوير تقنيات ذكاء اصطناعي جديدة باستخدام الخوارزميات العشوائية لحل مشكلة الضغط غير المستقر وغير الخطي لسوائل نانوية بين لوحين متوازيين باستخدام ثلاث شبكات عصبية اصطناعية مختلفة تعمل بشكل مباشر محسنة بطريقة النقاط الداخلية. يتم تحويل المعادلات التي تحكم مشكلة التدفق الصفحي غير القابل للضغط ثنائي الأبعاد مع نقل الحرارة إلى معادلات تفاضلية عادية غير خطية مكافئة من الدرجة الرابعة. تم تطوير ثلاثة نماذج للشبكات العصبية باستخدام وظائف التنشيط "log-sigmoid" ، "base-radial" و "tan-sigmoid" من أجل حل المعادلات المحولة غير الخاضعة للإشراف. يتم تحسين أوزان كل شبكة عصبية بطريقة النقاط الداخلية. يتم معالجة هذه المشكلة بواسطة النماذج المقترحة من خلال تثبيت بعض الأرقام الخاصة بدون أبعاد وبعض الخصائص الحرارية الفيزيائية وتغيير الآخرين. يتم التحقق من دقة النماذج المصممة وتقاربها وكفاءتها من خلال التحليلات المقارنة والإحصائية بناءً على عدد كافٍ من عمليات المحاكاة المستقلة. توضح الدراسات المقارنة للحلول المقترحة مع نتائج الحلول الرقمية القياسية، وكذلك الحلول التي تم التوصل إليها مؤخرًا بالطرق شبه التحليلية، موثوقية المخططات المقترحة.

الكلمات المفتاحية: تدفق الموائع النانوية؛ المعادلات التفاضلية غير الخطية؛ الشبكات العصبية الاصطناعية؛ الخوارزميات العشوائية.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	17
Chapitre I : Généralités et recherche bibliographique.....	21
I.1 Introduction	22
I.2 Généralités sur les nanofluides.....	22
I.2.1 Définition	22
I.2.2 Nanoparticules et les fluides porteurs	22
I.2.3 Types de nanoparticules	24
I.2.4 Fabrication et préparation des nanofluides	24
I.2.5 Propriétés thermophysiques des nanofluides	26
I.2.5.1 La masse volumique.....	26
I.2.5.2 La chaleur spécifique	27
I.2.5.3 Le coefficient d'expansion thermique.....	28
I.2.5.4 La conductivité thermique des nanofluides	28
I.2.5.4.1 Modèle de Maxwell.....	29
I.2.5.4.2 Modèle de Hamilton-Crosser	29
I.2.5.4.3 Modèle de Yu et Choi	30
I.2.5.4.4 Modèle de Bruggeman	30
I.2.5.5 La viscosité dynamique.....	31
I.2.5.5.1 Modèle d'Einstein	31
I.2.5.5.2 Modèle de Brinkman.....	31
I.2.5.5.3 Modèle de Batchelor	32
I.2.5.5.4 Modèle Maiga et al.....	32
I.2.5.5.5 Modèle Pack et Cho	32
I.3 Recherche Bibliographique	32
I.4 Conclusion.....	43
Chapitre 2 : Modélisation mathématique	44
II.1 Introduction.....	45

II.2 Elément mathématique de base.....	45
II.2.1 Equation de continuité	45
II.2.2 Equations de la quantité de mouvement	45
II.2.3 Equation de l'énergie	46
II.3 Hypothèses	46
II.4 Géométrie et formulation mathématique	47
II.4.1 Géométrie du problème physique	47
II.4.2 Modèle mathématique et équations dimensionnelles	48
II.4.3 Adimensionnalisation des équations.....	49
II.5 Conclusion	50
Chapitre 3 : Les algorithmes stochastiques optimisés	51
III.1 Introduction	52
III.2 Le neurone biologique et le neurone artificiel.....	52
III.2.1 Les neurones biologiques	53
III.2.2 Le neurone artificiel	54
III.2.2.1 Le modèle mathématique	54
III.2.2.2 Fonction de transfert.....	56
III.3 Réseaux de neurones artificiels (ANN).....	57
III.4 Architecture des réseaux de neurones à perceptron multicouche (MLP).....	58
III.5 L'apprentissage des réseaux de neurones.....	61
III.5.1 L'apprentissage supervisé	61
III.5.2 L'apprentissage non supervisé	61
III.6 Notions général sur l'optimisation	62
III.6.1 Optimisation globale et locale	62
III.6.2 Convexité.....	63
III.6.3 La méthode des points intérieurs dans l'optimisation	63
III.6.4 Programmation linéaire et non linéaire	63
III.6.4.1 Programmation linéaire	64
III.6.4.2 Méthode de points intérieurs pour la programmation linéaire	64
III.6.4.2.1 L'algorithme de Karmarkar et ses variantes.....	66

III.6.4.2.2	Algorithme de mise à l'échelle affine primale	67
III.6.4.2.3	Conditions d'optimalité	70
III.6.4.3	La programmation non linéaire	71
III.6.4.3.1	Principes fondamentaux des algorithmes d'optimisation non linéaire sous contrainte	71
III.6.4.3.2	Méthodes de points intérieurs pour la programmation non linéaire	71
III.6.4.3.3	La méthode de points intérieurs à région de confiance	73
III.7.	Conclusion	74
Chapitre 4 :	Résultats et discussions	75
IV.1	Introduction	76
IV.2	Modélisation des réseaux de neurones	76
IV.3	Méthode d'optimisation	83
IV.4	Validation des modèles	85
IV.5	Etude paramétrique de l'écoulement nanofluidique par écrasement entre deux plaques parallèles en utilisant les trois schémas de solution	96
IV.5.1	Effet de la coordonnée sans dimension δ sur les profils de vitesse et de température	96
IV.5.1.1	Cas $\delta = 0.01$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.01$, $\phi = 0.02$ (Cu-H ₂ O), et $S = 1$	97
IV.5.1.2	Cas $\delta = 0.1$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.01$, $\phi = 0.02$ (Cu-H ₂ O), et $S = 199$	99
IV.5.2	Effet de la fraction volumique des nanoparticules sur les profils de vitesse et de température	103
IV.5.2.1	Cas $\phi = 0$ (H ₂ O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$	104
IV.5.2.2	Cas $\phi = 0.02$ (Cu-H ₂ O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$	106
IV.5.2.3	Cas $\phi = 0.04$ (Cu-H ₂ O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$	108
IV.5.2.4	Cas $\phi = 0.06$ (Cu-H ₂ O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$	110
IV.5.3	Variations des profils de vitesse et de température pour différents types de nanoparticules	114
IV.5.3.1	Cas cuivre-eau, $\phi = 0.06$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$	114

IV.5.3.2 Cas alumine-eau, $\phi = 0.06$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$	116
IV.5.3.3 Cas oxyde de titane-eau, $\phi = 0.06$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$	118
IV.5.4 Effet du nombre d'écrasement sur les profils de vitesse et de température	122
IV.5.4.1 Cas $S = -1$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\phi = 0.06$ (Cu-H ₂ O), et $\delta = 0.1$	122
IV.5.4.2 Cas $S = -0.5$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\phi = 0.06$ (Cu-H ₂ O), et $\delta = 0.1$	124
IV.5.4.3 Cas $S = 0$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\phi = 0.06$ (Cu-H ₂ O), et $\delta = 0.1$	126
IV.5.4.4 Cas $S = 0.5$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\phi = 0.06$ (Cu-H ₂ O), et $\delta = 0.1$	128
IV.5.4.5 Cas $S = 1$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\phi = 0.06$ (Cu-H ₂ O), et $\delta = 0.1$	130
IV.6 Conclusion.....	134
CONCLUSION GENERALE	135

LISTE DES FIGURES

Figure (I.1) : Nanoparticules sphériques ; Nanotubes de carbone [22].	24
Figure (I.2) : Procédé de synthèse de nanofluide en une seule étape [21].	25
Figure (I.3) : Géométrie du problème [8].	33
Figure (I.4) : Géométrie du modèle physique [36].	34
Figure (I.5) : Géométrie du problème [37].	35
Figure (I.6) : Géométrie du modèle physique [38].	36
Figure (I.7) : Configuration géométrique du problème [39].	37
Figure (I.8) : Géométrie du problème, nanofluide entre les plaques parallèles [11].	38
Figure (I.9) : Diagramme schématique du problème [40].	39
Figure (I.10) : Géométrie de l'écoulement de nanofluide MHD [41].	40
Figure (I.11) : Géométrie du travail présenté [42].	40
Figure (I.12) : Modèle schématique du nanofluide d'écoulement [43].	41
Figure (I.13) : Le modèle d'écoulement physique et sa géométrie [44].	42
Figure (II.1) : Géométrie du problème, A. Dib et al. [8].	48
Figure (III.1) : Le neurone biologique [63].	54
Figure (III.2) : Le neurone artificiel.	55
Figure (III.3) : Les réseaux à action directe (feed-forward).	58
Figure (III.4) : Réseau à connexions récurrentes ou contre réaction (feed-back).	58
Figure (III.5) : Architecture simple d'un réseau de neurones.	59
Figure (III.6) : Réseau multi-couches à action directe comportant 2 neurones d'entrée, 4 neurones cachés et un neurone de sortie [70].	60
Figure (III.7) : Différence entre les méthodes de points extérieurs et intérieurs.	65
Figure (III.8) : Déplacement le long d'une direction.	68
Figure (IV.1) : Schéma de réseau de neurones pour la vitesse.	81
Figure (IV.2) : Schéma de réseau de neurones pour la température.	82
Figure (IV.3) : Processus de recherche des poids optimaux des réseaux de neurones (a) Procédure globale (b) Optimisation avec IPM [14].	84

Figure (IV.4) : Les poids obtenus des réseaux de neurones optimisés avec IPM pour le schéma DENN-LS.	88
Figure (IV.5) : Les poids des réseaux de neurones optimisés avec IPM pour le schéma DENN-RB.	88
Figure (IV.6) : Les poids obtenus des réseaux de neurones optimisés avec IPM pour le schéma DENN-TS.	89
Figure (IV.7) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas avec la méthode numérique.	94
Figure (IV.8) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas avec la méthode numérique.	95
Figure (IV.9) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas de solution.	99
Figure (IV.10) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas de solution.	99
Figure (IV.11) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas de solution.	101
Figure (IV.12) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas de solution.	101
Figure (IV.13) : Comparaison de la variation du profil de vitesse en fonction de la coordonnée sans dimension (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.	102
Figure (IV.14) : Comparaison de la variation du profil de température en fonction de la coordonnée sans dimension (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution. ...	103
Figure (IV.15) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas de solution.	106
Figure (IV.16) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas de solution.	106
Figure (IV.17) : Comparaison de la variation du profil de vitesse en fonction de la fraction volumique des nanoparticules (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.	112

Figure (IV.18) : Comparaison de la variation du profil de température en fonction de la fraction volumique des nanoparticules (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution. 113

Figure (IV.19) : Comparaison de la variation des profils de vitesse en fonction de différents types de nanoparticules pour les trois schémas de solution. 120

Figure (IV.20) : Comparaison de la variation des profils de température en fonction de différents types de nanoparticules pour les trois schémas de solution. 121

Figure (IV.21) : Comparaison de la variation des profils de vitesse en fonction du nombre d'écrasement (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution..... 132

Figure (IV.22) : Comparaison de la variation des profils de température en fonction du nombre d'écrasement (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution..... 133

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (I.1) : Combinaisons nanoparticules/fluides de base (Ribeiro et Gruss) [21].	23
Tableau (II.1) : Propriétés thermo-physiques du fluide et des nanoparticules [46].	47
Tableau (III.1) : Les modèles de fonctions d'activation.	56
Tableau (IV.1) : Paramètres utilisés dans les simulations.	84
Tableau (IV.2) : Poids formés pour le profil de vitesse en utilisant les algorithmes DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM, et DENN-TS-IPM.....	86
Tableau (IV.3) : Poids formés pour le profil de température en utilisant les algorithmes DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM, et DENN-TS-IPM.....	87
Tableau (IV.4) : Comparaison entre les résultats de DENN-LS-IPM et de la méthode numérique.	91
Tableau (IV.5) : Comparaison entre les résultats de DENN-RB-IPM et de la méthode numérique.	92
Tableau (IV.6) : Comparaison entre les résultats de DENN-TS-IPM et de la méthode numérique.	92
Tableau (IV.7) : Comparaison entre les résultats de DENN-LS-IPM et de Sheikholeslami et al. [83] pour $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$	93
Tableau (IV.8) : Comparaison entre les résultats de DENN-RB-IPM et de Sheikholeslami et al. [83] pour $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$	93
Tableau (IV.9) : Comparaison entre les résultats de DENN-TS-IPM et de Sheikholeslami et al. [83] pour $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$	94

SYMBOLES ET ABREVIATIONS

- x, y : Coordonnées cartésiennes (m).
- u : La vitesse dans la direction x (m/s).
- v : La vitesse dans la direction y (m/s).
- p : Pression (Pa).
- T_H : Température de la surface (K).
- C_p : Chaleur spécifique à pression constante (J/kg.K).
- k : Conductivité thermique (W/m.K).
- f : Vitesse adimensionnelle.
- l : Position initiale (m).
- A_1, A_2, A_3 : Coefficients de l'équation algébrique discrétisée .
- \tilde{f} : Vitesse approximative adimensionnelle.
- f^{iv} : Dérivation quatrième de la fonction f .
- \mathbb{R}^n : Espace des vecteurs réels de longueur n .
- PDEs : Partial Differential Equations.
- ODEs : Ordinary Differential Equations.
- DTM : Differential Transform Method.
- MHD : Magnetohydrodynamics.
- LSM : Least Square Method.
- ADM : Adomian Decomposition Method.
- HAM : Homotopy Analysis Method.
- VIM : Variational Iteration Method.
- DRA : Duan-Rach Approach.
- HPM : Homotopy Perturbation Method.
- RSM : Response Surface Method.
- CM : Collocation Method.
- NSGA-II : Genetic algorithm for multi-objective optimization.
- ANN : Artificial Neural Network.
- MLP : Multi-Layer Perceptron.

LINMAP : Linear Programming Technique for Multidimensional Analysis of Preference.

TOPSIS : Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution.

DENN : Differential Equation Neural Networks.

IPM : Interior Point Method.

PSO : Particle Swarm Optimization.

IPA : Interior Point Algorithm.

ASM : Active-Set Method.

SQP : Sequential Quadratic Programming.

PL : Programmation Linéaire.

g : Fonction d'activation.

RK4 : Runge-Kutta de quatrième ordre.

Lettres grecques

ρ : Masse volumique (kg/m^3).

μ : Viscosité dynamique (Pa.s).

η : Distance adimensionnelle.

θ : Température adimensionnelle.

ϕ : Fraction volumique des nanoparticules (—).

α : Constant (1/s).

δ : Coordonnée caractéristique sans dimension.

$\tilde{\theta}$: Température approximative adimensionnelle.

w_i, α_i, β_i : Poids formés pour la vitesse (—).

$\bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}$: Poids formés pour la température (—).

ε_f : Fonction erreur (fitness) pour la vitesse (—).

ε_θ : Fonction erreur (fitness) pour la température (—).

η : Variable de similarité (—).

∇ : Opérateur gradient.

Nombres adimensionnels

Pr : Nombre de Prandtl.

Ec : Nombre d'Eckert.

S : Nombre d'écrasement.

C_f : Coefficient de frottement local.

Nu : Nombre de Nusselt.

Indices et exposants

s : Solide.

f : Fluide.

nf : Nanofluide.

TS : Fonction d'activation tan-sigmoïde.

LS : Fonction d'activation log-sigmoïde.

RB : Fonction d'activation à base radiale.

INTRODUCTION GENERALE

L'étude de l'écoulement des nanofluides dans le domaine de l'ingénierie connaît une croissance exponentielle. L'amélioration du transfert de chaleur constitue un grand défi à l'avenir pour les dispositifs de lubrification et de refroidissement. Les nouvelles caractéristiques des nanofluides peuvent apporter une solution plus importante dans différentes procédures de transfert de chaleur comme la microélectronique dans les dispositifs miniatures. De nombreux chercheurs déploient de gros efforts pour trouver les équations qui peuvent décrire l'utilisation de nanoparticules dans un fluide de base. Le premier à avoir introduit le terme nanofluide est Choi [1]. Nous pouvons appeler nanofluide tout fluide dans lequel des particules de taille nanométrique sont suspendues dans le fluide de base à faible conductivité thermique tel que l'eau, l'éthylène glycol et l'huile. Plusieurs articles expliqués sur ce domaine peuvent être trouvés dans [2-6]. Sheikholeslami et Ganji [7] ont étudié l'écoulement MHD instationnaire et le transfert de chaleur entre deux plaques parallèles en considérant le mouvement brownien. La corrélation KKL (Koo-Kleinstreuer-Li) a été utilisée pour calculer la conductivité thermique effective et la viscosité. Il a été démontré que la sélection de CuO comme nanoparticule conduit à une meilleure amélioration du transfert de chaleur. Dib et al. [8] ont proposé une approche Duan-Rach pour suivre la solution d'un nanofluide instable en écoulement. Les résultats obtenus ont montré un bon accord avec la méthode numérique (algorithme Runge-Kutta de quatrième ordre). Des résultats intéressants ont été trouvés lorsque Turkyilmazoglu [9] a étudié le rayonnement thermique et la source de chaleur sur l'écoulement transitoire de convection libre du nanofluide.

Hayat et al. [10] ont essayé de modéliser l'écrasement hydromagnétique bidimensionnel d'un nanofluide de second ordre. Les auteurs ont constaté que les grandes valeurs du paramètre d'écrasement provoquent une décroissance de la température et de la concentration. Seyedi et al. [11] ont proposé une nouvelle méthode multi-échelle pour discuter du même problème précédent. Les résultats montrent que le nombre d'écrasement peut affecter remarquablement la température et que son effet est plus important que la fraction volumique des nanoparticules. Khan

et al. [12] ont étudié un écoulement visqueux de nanomatériaux hybrides entre deux plaques parallèles en prenant en compte la réaction chimique avec un nouvel aspect de l'énergie d'activation. La principale conclusion de ce travail est que pour des Pr et Ec plus grands, la température diminue. Turkyilmazoglu [13] a trouvé que les tubes de carbone nous donnent un taux de transfert de chaleur élevé que les autres nanoparticules.

Dans le même contexte, ces dernières années, l'avancement de l'utilisation de techniques stochastiques pour résoudre un large éventail de problèmes de valeurs initiales et limites d'équations différentielles non linéaires a ouvert une nouvelle voie à de nombreux chercheurs pour étudier l'écoulement des nanofluides avec une grande efficacité. Dans le traitement numérique de l'écoulement MHD non linéaire de Jeffery-Hamel, Raja et Samar [14] ont utilisé un réseau de neurones optimisé par l'algorithme des points intérieurs. Les modèles de réseau de neurones utilisant la log-sigmoïde, la base radiale et la tan-sigmoïde avec la méthode des points intérieurs ont fourni une solution fiable pour les équations différentielles non linéaires issues de l'écoulement MHD de Jeffery-Hamel. Esfe et Tilebon [15], ont optimisé la conductivité thermique et la viscosité de divers nanofluides hybrides Al_2O_3 -MWCNT/huile thermique en utilisant les données expérimentales via la méthodologie de surface de réponse (RSM) et NSGA-II avec un réseau de neurones artificiel (ANN). Les résultats obtenus ont montrés que les meilleures méthodes pour prédire la conductivité thermique et la viscosité sont les modèles RSM et ANN, séparément. Les résultats expérimentaux ont révélé que le réseau de neurones MLP avec deux couches cachées, trois neurones dans la première couche et cinq neurones dans la deuxième couche avec une fonction d'activation de transit, est le meilleur. Bagherzadeh et al. [16] ont combiné le réseau de neurones artificiel (ANN) et l'algorithme génétique (GA) pour prédire les propriétés thermophysiques du nanofluide. De plus amples informations sur l'utilisation de l'approche du réseau de neurones pour résoudre les équations différentielles non linéaires peuvent être trouvées dans ces références [17, 18]. Ghazvini et al [19] ont utilisé un réseau ANN à perceptron multicouche avec deux couches cachées pour modéliser les résultats expérimentaux. Le modèle obtenu a montré une excellente précision sur la base des

valeurs des indicateurs statistiques. Hojjat [20] a proposé un réseau de neurones artificiel (ANN) pour prédire le comportement thermique et hydrodynamique de deux types de nanofluides newtoniens utilisés comme réfrigérants dans un échangeur de chaleur tubulaire (STHE). Les méthodes LINMAP et TOPSIS ont donné la meilleure solution à partir d'un point du front de Pareto.

Dans cette étude, des solveurs numériques sont proposés pour résoudre les équations non linéaires issues de l'écoulement instationnaire des nanofluides en utilisant deux modèles de réseaux de neurones artificiels à action directe optimisés par la méthode des points intérieurs (IPM). L'architecture des réseaux de neurones est construite au moyen de fonctions d'activation log-sigmoïde, à base radiale et tan-sigmoïde. Dans la première, le problème bidimensionnel est réduit à des équations différentielles ordinaires non linéaires. La méthode des points intérieurs est utilisée pour optimiser les poids de chaque modèle. La solution obtenue de nos champs de variables (vitesse et température) est continue contrairement à la forme discrète obtenue par le schéma numérique.

Le manuscrit de cette thèse se subdivise en quatre principaux chapitres :

Le premier chapitre présente une théorie générale qui permet une meilleure appréhension des nanofluides, et de décrire les différents modèles de la littérature souvent utilisés pour l'estimation des propriétés thermo-physiques (conductivité thermique, viscosité dynamique, masse volumique...). Ainsi, une synthèse bibliographique consacrée à une revue des différents travaux concernant les écoulements des nanofluides par écrasement entre deux plaques parallèles. L'analyse de ces travaux permet d'identifier les différents paramètres qui peuvent influencer le comportement thermique et dynamique des nanofluides.

Le second chapitre présente la géométrie et description du modèle mathématique qui traduisent le comportement de ces écoulements, dans un système de coordonnées cartésiennes. Après avoir caractérisé les propriétés physiques des nanofluides, ces modèles seront traduits par les équations différentielles non linéaires aux dérivées partielles de masse et de quantités de mouvement et de l'énergie sous forme adimensionnelle.

La méthodologie de résolution ces équations modélisantes adimensionnelles est consacrées au troisième chapitre. Après une brève introduction justifiant le choix de la méthode semi-numérique utilisée qui est celle des méthodes stochastiques optimisées, la modélisation par réseaux de neurones artificielle sera présentée. Enfin, les algorithmes d'optimisation utilisés, tels l'algorithme de points intérieurs, sera présenté.

Nous rassemblons dans le quatrième chapitre les principaux résultats numériques de cette étude. Ces résultats porteront les différents comportements dynamiques et thermiques pour le mode d'écoulement en écrasement. Pour cet écoulement, on analyse l'influence des paramètres de contrôle tels les nombres d'écrasement et d'Ecart ainsi que celle de la concentration des nanoparticules, sur les champs dynamiques et thermiques dans l'ensemble du domaine d'étude rempli par les nanofluides. Les comparaisons et les interprétations des divers résultats seront présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

On clôturera ce travail par une conclusion générale qui récapitule les différents résultats obtenus, suivi par des perspectives pour entamer éventuellement des nouveaux travaux de recherches.

Chapitre I : Généralités et recherche bibliographique

I.1 Introduction

Les transferts de chaleur au sein de fluides conduisent à de nombreuses applications pratiques et industrielles, y compris dans le transport, l’approvisionnement en énergie, la climatisation et le refroidissement électronique, etc. L’essor actuel des nanosciences a pour origine la mise en évidence des propriétés spécifiques de la matière aux dimensions nanométriques. Ceci a suscité de nouveaux champs d’études dans de très nombreux laboratoires et a permis le développement des fluides aux propriétés originales.

Ce chapitre est composé de deux parties. La première partie présente une étude descriptive des nanofluides, leur composition et leurs propriétés physiques et thermiques. La deuxième partie présente une synthèse bibliographique consacrée à une revue des différents travaux concernant les nanofluides et leurs écoulements entre deux plaques parallèles.

I.2 Généralités sur les nanofluides

I.2.1 Définition

Les nanofluides sont des dispersions de particules de taille nanométrique (dont le diamètre est typiquement inférieur à 100 nm), appelées nanoparticules, dans un fluide de base afin d’en améliorer certaines propriétés. Ce type de solution suscite un grand intérêt depuis la découverte de leurs propriétés thermiques particulières.

Dans le cas des fluides caloporteurs, un des premiers paramètres à prendre en compte afin d’évaluer le potentiel d’échange de chaleur est la conductivité thermique. En effet, les fluides de base souvent utilisés dans les applications de refroidissement ou de chauffage ont des conductivités thermiques très faibles qui limitent leur capacité de transfert de chaleur. L’idée est alors d’insérer au sein des liquides de base des nanoparticules de conductivité très élevée, afin d’augmenter la conductivité thermique effective du mélange et ainsi améliorer ces performances thermiques.

I.2.2 Nanoparticules et les fluides porteurs

La nanoparticule est un assemblage de quelques centaines à quelques milliers d’atomes, conduisant à un objet dont au moins l’une des dimensions est de taille

nanométrique (1 à 100 nm). Les nanoparticules se situent à la frontière entre l'échelle microscopique et l'échelle atomique ou moléculaire. Elles ont un intérêt à la fois fondamental, et sont très étudiées de nos jours. De nombreux physiciens et chimistes les synthétisent, d'autres physiciens les étudient afin de comprendre la physique de ces objets nanométriques et des biologistes les utilisent comme marqueurs cellulaires. Les liquides de base généralement utilisés dans la préparation des nanofluides sont ceux d'usage commun dans les applications de transfert de chaleur tels que l'eau, l'éthylène glycol, l'huile de moteur etc... ; Les nanoparticules peuvent être à base de métaux, d'oxydes, de carbures, de nitrures ou de carbone.

Le tableau (I.1) regroupe une liste non exhaustive de combinaisons de nanoparticules et de fluides de base préparés par différents groupes de recherche.

Tableau (I.1) : Combinaisons nanoparticules/fluides de base (Ribeiro et Gruss) [21].

	Acétone	Eau	Ethylène glycol	Huile	Toluène	Décène	éthanol
Ag		×		×			
AIN							×
Au		×			×		
Al ₇₀ Cu ₃₀							
Al ₂ O ₃		×	×	×			
Bi ₂ Te ₃							
C (diamant)		×					
C (graphite)		×		×			
C (NTC)		×		×		×	
C (fullerène)					×	×	
Cu	×	×	×	×			
CuO			×	×			
Fe			×				
SiC		×					
SiO ₂		×	×				
TiO ₂		×	×				
WO ₃			×				
ZrO ₂		×					

I.2.3 Types de nanoparticules

La production de nouveaux nanomatériaux (nanoparticules) constitue un champ de recherche en pleine expansion, aussi seules les nanoparticules les plus couramment utilisées dans les applications liées aux transferts thermiques sont ici brièvement mentionnées.

D'une manière générale, les nanoparticules peuvent être classées selon leur forme en deux grandes catégories (Figure (I.1)) [22] :

- Les nanoparticules sphériques pour lesquelles plusieurs types de matériaux peuvent être utilisés pour leur fabrication. Ces nanoparticules sphériques peuvent ainsi être à base de métaux (l'aluminium Al, cuivre Cu, fer Fe, or Au, argent Ag...) ou d'oxydes (oxyde d'aluminium Al_2O_3 , oxyde de cuivre CuO, oxyde de titane TiO_2 ...).
- Les nanotubes (les nanotubes de carbone NTC, les nanotubes de titane TiO_2 , Nanotube de silicium...)

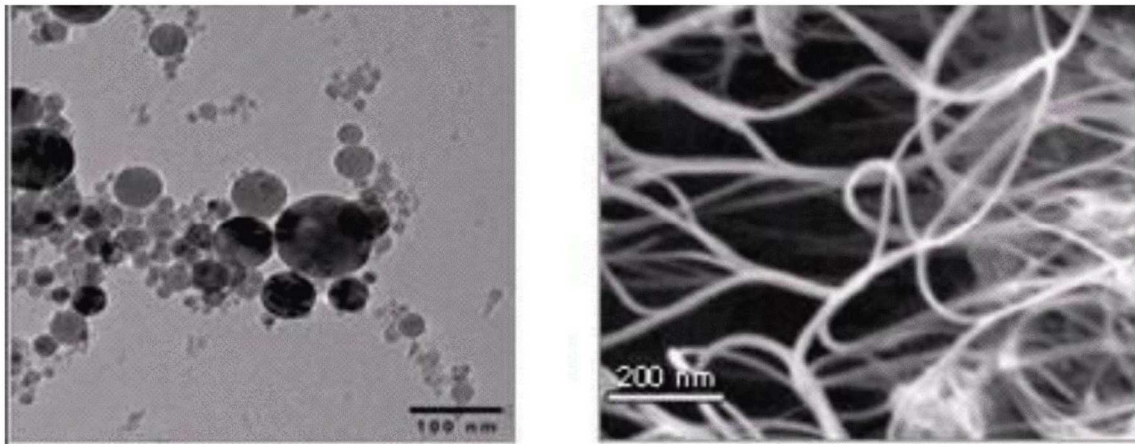


Figure (I.1) : Nanoparticules sphériques ; Nanotubes de carbone [22].

I.2.4 Fabrication et préparation des nanofluides

Le point délicat est la fabrication de si petits morceaux de matière plus ou moins bien calibrés. Inutile d'essayer d'en faire chez soi en ponçant un bout de cuivre pour en faire de la poussière par exemple. Ça ne fera que des particules de taille micrométrique au mieux, qui encrasseront le circuit. Les procédés de fabrication de nanoparticules sont nombreux. Ils peuvent être classés en deux catégories :

- les procédés physiques, comme le broyage mécanique,
- les procédés chimiques, comme la pyrolyse laser ou la précipitation chimique.

En général, les nanoparticules utilisées pour la synthèse de nanofluides sont à base d'oxydes, de nitrures, de carbures, de métaux purs ou d'alliages, de nanotubes de carbone (NTC). On trouve également des particules composites pouvant utiliser des polymères. Il y a deux méthodes principales pour obtenir un nanofluide :

- La méthode en une seule étape consiste à produire les nanoparticules dans le fluide de base. Moins industrielle, elle n'est utilisable que pour certains nanofluides mais permet d'éviter l'agglomération et l'oxydation des nanoparticules. Un exemple de procédé consiste à condenser sous forme de nanoparticules une vapeur métallique dans un réacteur sur un film de liquide à basse tension de vapeur (Figure (I.2)).

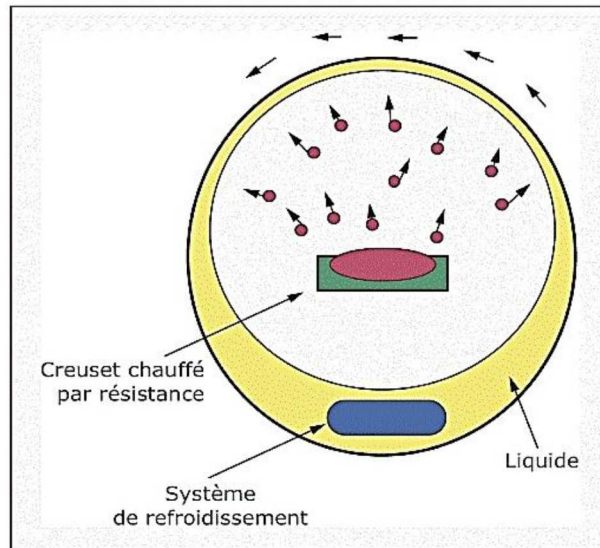


Figure (I.2) : Procédé de synthèse de nanofluide en une seule étape [21].

- La méthode en deux étapes consiste à produire dans un premier temps les nanoparticules, puis à les disperser dans le fluide de base. Pour permettre une bonne dispersion, une forte action mécanique à l'aide d'un agitateur rotatif ou d'ultrasons est souvent nécessaire afin de briser les agglomérats. En outre, pour éviter l'agglomération due aux forces d'attraction entre les particules, on utilise des forces de répulsion électrostatique en chargeant la surface des particules en adaptant le pH. On peut également utiliser les forces de répulsion stériques à l'aide de molécules adsorbées ou greffées sur la surface.

Les procédés de fabrication sont de nature physique ou chimique. Ils font l'objet de beaucoup de recherches pour améliorer le coût de production qui reste parfois élevé vu les difficultés de mise en œuvre et pour obtenir des particules de taille voulue. Chaque méthode a ses inconvénients et certains ne sont pas aptes à produire de grandes quantités de nanoparticules pour une production de masse vu les contraintes inhérentes au procédé. Les principaux moyens peuvent être :

- ✓ La mécanosynthèse (broyage à haute énergie).
- ✓ La précipitation chimique (réduction de sels métalliques par exemple).
- ✓ Les dépôts chimiques ou physiques en phase vapeur (CVD ou PVD).
- ✓ Les dépôts chimiques en phase vapeur assistés par plasma (PECVD).
- ✓ La condensation de vapeurs par détente brutale dans des tuyères supersoniques.
- ✓ La pulvérisation cathodique radiofréquence.
- ✓ La sublimation par ablation laser (vaporisation d'un échantillon par impulsion laser).
- ✓ La pyrolyse laser (interaction entre un faisceau laser continu et un flux de réactifs).
- ✓ La désintégration d'électrodes submergées par passage d'étincelles (comme pour un usinage par électroérosion).

I.2.5 Propriétés thermophysiques des nanofluides

Les propriétés thermo-physiques (conductivité thermique, viscosité dynamique et cinématique, capacité thermique massique, etc.) sont profondément modifiées par l'ajout de nanoparticules et un grand nombre de paramètres peuvent avoir un effet non négligeable sur cette déviation (le matériau, la taille, le rapport d'aspect, la concentration des particules en suspension, la conductivité du fluide de base, la température du milieu). De nombreux groupes de recherche tentent de comprendre quels sont le ou les mécanismes à l'origine de telles différences mais aucune phénoménologie n'a pu être encore formulée de manière concise et satisfaisante.

I.2.5.1 La masse volumique

Pour calculer la masse volumique d'un nanofluide que nous supposons parfaitement homogène (bonne dispersion des nanoparticules dans le fluide) en

fonction de la fraction volumique ϕ a une température T donnée, nous revenons à la définition de la masse volumique de ce mélange.

$$\rho_{nf} = \left(\frac{m}{V}\right)_{nf} = \frac{m_f + m_s}{V_f + V_s} = \frac{\rho_f V_f + \rho_s V_s}{V_f + V_s} \quad (I.1)$$

La fraction volumique des nanoparticules, notée ϕ désigne le rapport du volume des nanoparticules sur le volume total (fluide + solide).

$$\phi = \frac{\text{Volume du solide}}{\text{Volume totale du nanofluide}} = \frac{V_s}{V_s + V_f}$$

On en déduit alors la masse volumique du nanofluide :

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s \quad (I.2)$$

où ρ_{nf} : la masse volumique du nanofluide.

ρ_f : la masse volumique du fluide de base.

ρ_s : la masse volumique des nanoparticules solides.

I.2.5.2 La chaleur spécifique

La chaleur spécifique est la capacité calorifique par unité de masse d'une substance ou d'un système homogène ($C_p = dQ/mdT$). La chaleur spécifique correspond à l'apport de chaleur nécessaire pour élever la température de l'unité de substance de 1 K lors de la transformation considérée. Pour la détermination de la chaleur spécifique d'un nanofluide, on a retrouvé suivant les auteurs l'une ou l'autre des deux relations suivantes. De nombreux auteurs dont Pak et Cho. [23] ont utilisé :

$$(C_p)_{nf} = (1 - \phi)(C_p)_f + \phi(C_p)_s \quad (I.3)$$

Certains autres dont Xuan et Roetzel [24] ont utilisé :

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_s \quad (I.4)$$

$(C_p)_{nf}, (C_p)_f, (C_p)_s$ désignent respectivement les chaleurs spécifiques du nanofluide, du fluide de base et des nanoparticules.

C'est cette dernière relation que nous conservons dans la suite de notre travail puisqu'elle est, contrairement à la première plus fréquemment utilisée, mais a tort, dans de nombreux travaux, les formes aux lois de la thermodynamique.

I.2.5.3 Le coefficient d'expansion thermique

En générale la grande partie des études réalisés ou encours de réalisation dans ce domaine s'intéresse aux seuls fluides porteurs incompressibles (masse volumique indépendante de la pression) mais dilatables. Cette variation de masse volumique sous l'action de la température est caractérisée par le coefficient d'expansion thermique $(\beta_T = -\frac{1}{\rho}(\partial\rho/\partial T)_p)$, appelé également coefficient de dilatabilité, A. Bejan [25].

Pour calculer la valeur de ce coefficient pour les nanofluides de très nombreux auteurs ont utilisé à la suite des premiers travaux sur les nanofluides, par analogie avec la relation (I.2), on déduit l'expression suivante :

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \phi)(\rho\beta)_f + \phi(\rho\beta)_s \quad (I.5)$$

Kim et al. [26] ont supposé que le coefficient d'expansion thermique du fluide β_f est largement plus grand que celui des nanoparticules solides β_s . Il ramené l'équation (I.5) à la forme simplifiée suivante :

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \phi)(\rho\beta)_f \quad (I.6)$$

I.2.5.4 La conductivité thermique des nanofluides

Etant donné que les nanoparticules à haute conductivité thermique suspension dans le fluide de base qui a une faible conductivité thermique, augmentent remarquablement la conductivité thermique de nanofluides. Les chercheurs ont développé plusieurs modèles pour prédire l'estimation de la conductivité du nanofluide et de nombreuses expériences ont été menées pour comparer les données expérimentales avec ces modèles analytiques, constitués par des éléments très réguliers tels que les nanoparticules sphériques. Les modelés décrits dans la littérature sont des outils de prédictions développés, afin d'appréhender les mécanismes de

transfert thermique au sein des nanofluides. Nous présenterons dans cette partie les modèles les plus utilisés dans le cas des nanofluides.

I.2.5.4.1 Modèle de Maxwell

Maxwell fait partie des chercheurs qui se sont intéressés au calcul de la conductivité thermique d'un fluide contenant des particules sphériques en suspension. Pour aboutir à l'estimation de cette dernière, il a supposé que le fluide renferme plusieurs particules sphériques de même diamètre D_p .

La formule de Maxwell [27] est donnée par :

$$k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2\phi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \phi(k_f + k_s)} k_f \quad (I.7)$$

k_{nf} , k_f , k_s désignent respectivement les conductivités thermiques du nanofluide, du fluide de base et des particules solides.

Le modèle de Maxwell est satisfaisant pour les suspensions contenant des particules sphériques de concentrations volumiques relativement faibles mais ne tient pas compte de l'effet de la taille ni de la forme des particules. Il est à noter aussi que l'effet des interactions inter-particules est négligé dans ce modèle.

I.2.5.4.2 Modèle de Hamilton-Crosser

Le modèle de Hamilton et Crosser [28] a été établi pour résoudre la limite de modèle de Maxwell. Puisque ce dernier n'est valable que dans le cas des particules sphériques une chose qui rend le modèle non efficace pour la description de tous les phénomènes, pour cela le modèle du Hamilton et Crosser a été développé pour rendre plus efficace le calcul de la conductivité thermique du nanofluide quel que soit la forme de la nanoparticule, et ça en introduisant la notion du facteur géométrique appelé la sphéricité (ψ). Ce facteur est défini comme étant le rapport de la surface de la sphère ayant le même volume que les nanoparticules sur la surface d'une nanoparticule. La conductivité thermique apparente du milieu est donnée par l'expression suivante :

$$k_{nf} = \frac{k_s + (n - 1)k_f - (n - 1)\phi(k_f - k_s)}{k_s + (n - 1)k_f + \phi(k_f - k_s)} k_f \quad (I.8)$$

où n est un facteur de forme empirique donne par : $n = \frac{3}{\psi}$

$n = 3$ pour les particules sphériques et $n = 6$ pour les particules cylindriques.

Pour $\psi = 1$ (particules sphériques), le modèle de Hamilton-Crosser est identique au modèle de Maxwell.

I.2.5.4.3 Modèle de Yu et Choi

Une autre expression pour calculer la conductivité thermique a été introduite par Yu et Choi [29]. Ils ont proposé de modéliser les nanofluides comme un liquide de base et des particules solides séparées par une couche nanométrique, cette couche agit comme un pont thermique entre le fluide et les nanoparticules. De plus, ils ont supposé que la conductivité thermique de la couche nanométrique est plus grande que la conductivité thermique de liquide :

$$k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2(k_f - k_s)(1 + \beta)^3 \phi}{k_s + 2k_f - (k_s - k_f)(1 + \beta)^3 \phi} k_f \quad (I.9)$$

où β est le rapport de l'épaisseur de la couche nanométrique sur le rayon des particules.

I.2.5.4.4 Modèle de Bruggeman

Le modèle proposé par Bruggeman [30] semble mieux approximer certains résultats expérimentaux comparés aux autres modèles pour le cas des nanoparticules sphériques avec aucune limitation concernant les concentrations des nanoparticules :

$$k_{nf} = \frac{(3\phi - 1) \frac{k_p}{k_f} + \{3((1 - \phi) + \sqrt{\Delta})\}}{4} k_f \quad (I.10)$$

avec :
$$\Delta = \left[(3\phi - 1) \left(\frac{k_s}{k_f} \right)^2 + (2 - 3\phi)^2 + 2(2 + 9\phi - 9\phi^2) \left(\frac{k_s}{k_f} \right) \right]$$

I.2.5.5 La viscosité dynamique

La viscosité caractérise l'aptitude d'un fluide à s'écouler. Sa connaissance est fondamentale pour toutes les applications impliquant le transport de fluides. L'ajout des nanoparticules permet d'augmenter et d'améliorer la conductivité thermique du nanofluide, mais cela peut aussi conduire à une augmentation défavorable de la viscosité dynamique. De nombreuses études théoriques et expérimentales ont été menées afin d'estimer ou de mesurer la viscosité dynamique des nanofluides, et de quantifier l'importance des principaux paramètres qui l'influencent. Plusieurs modèles théoriques ont été développés pour prédire l'évolution de la viscosité dynamique des suspensions sous certaines conditions. Dans cette partie, nous nous intéresserons aux modèles les plus utilisés dans le cas des nanofluides.

I.2.5.5.1 Modèle d'Einstein

Einstein [31] a déterminé l'énergie dissipée autour d'une seule particule dans un fluide en associant son énergie au travail réalisé pour la faire avancer relativement au fluide. A partir de ce résultat, il a déterminé l'expression décrivant une dépendance linéaire de la viscosité des suspensions dans un fluide avec la concentration :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 2,5\phi) \quad (I.11)$$

La formule d'Einstein a depuis été vérifiée expérimentalement et est considérée satisfaisante pour des suspensions très diluées de particules sphériques (browniennes ou non browniennes), typiquement pour des concentrations volumiques inférieures à 1 %. Il est à noter que ce modèle ne tient pas compte des effets de la taille des particules et des interactions inter-particules.

I.2.5.5.2 Modèle de Brinkman

La formule de Brinkman [32] complète le modèle d'Einstein jusqu'à une concentration volumique inférieure à 4 % :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2,5}} \quad (I.12)$$

On remarque que cette relation décrit une évolution non linéaire de la viscosité dynamique avec la concentration volumique mais ne tient pas compte de la collision entre les particules.

I.2.5.5.3 Modèle de Batchelor

En effet, l'écoulement autour de chaque particule est influencé par la présence éventuelle d'autres particules à proximité et par les collisions entre particules. Ainsi, cela se traduit par la prise en compte d'un terme ϕ^2 dans le modèle de Batchelor [33] :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + \eta\phi + k_H\phi^2) \quad (I.13)$$

où η est la viscosité intrinsèque et k_H est le coefficient de Huggins. La valeur de η et k_H est de 2,5 et 6,5 respectivement pour des particules sphériques.

I.2.5.5.4 Modèle Maiga et al.

D'autres relations ont été proposées dans la littérature limitée à des applications bien précises. Maiga et al. [34] à partir de résultats de mesures ont proposé la corrélation présentée par l'équation :

$$\mu_{nf} = \mu_f(123\phi^2 + 7,3\phi + 1) \quad (I.14)$$

En comparant cette corrélation aux modèles d'Einstein et de Brinkman, on trouve que ces deux dernières approches sous-estiment les valeurs expérimentales de la viscosité des nanofluides.

I.2.5.5.5 Modèle Pack et Cho

Pack et Cho [23] ont proposé, quant à eux une corrélation pour les nanoparticules Al_2O_3 disperses dans l'eau donnée par :

$$\mu_{nf} = \mu_f(533,9\phi^2 + 39,11\phi + 1) \quad (I.15)$$

I.3 Recherche Bibliographique

L'étude de l'écoulement des nanofluides dans le domaine de l'ingénierie connaît une croissance exponentielle au cours des dernières années. L'amélioration du transfert

de chaleur constitue un grand défi à l'avenir pour les dispositifs de lubrification et de refroidissement. Les nouvelles caractéristiques des nanofluides peuvent apporter une solution plus importante dans différentes procédures de transfert de chaleur comme la microélectronique dans les dispositifs miniatures. De nombreux chercheurs déploient de gros efforts pour trouver les équations qui peuvent décrire l'utilisation de nanoparticules dans un fluide de base, ainsi que leurs solutions qui sont en relation directe avec notre étude avec différentes conditions aux limites.

Les caractéristiques de transfert de chaleur et de masse pour un écoulement instable de nanofluide composé de micro-organismes gyrotactiques entre des plaques parallèles sont étudiées par Ammarah Raee et al. [35]. Le modèle de nanofluide contrôlé passivement donné par Kunzetsov et Nield, est utilisé pour modéliser ce problème. En utilisant des transformations de similarité, les équations différentielles à dérivées partielles gouvernantes sont réduites à un ensemble d'équations différentielles ordinaires non linéaires. La méthode d'analyse d'homotopie (HAM) a été appliquée pour obtenir la solution analytique en série des équations résultantes. Les valeurs optimales des paramètres de contrôle de convergence sont sélectionnées pour obtenir des résultats convergents et l'analyse des erreurs a été donnée pour montrer la validité de la solution en série homotopique acquise.

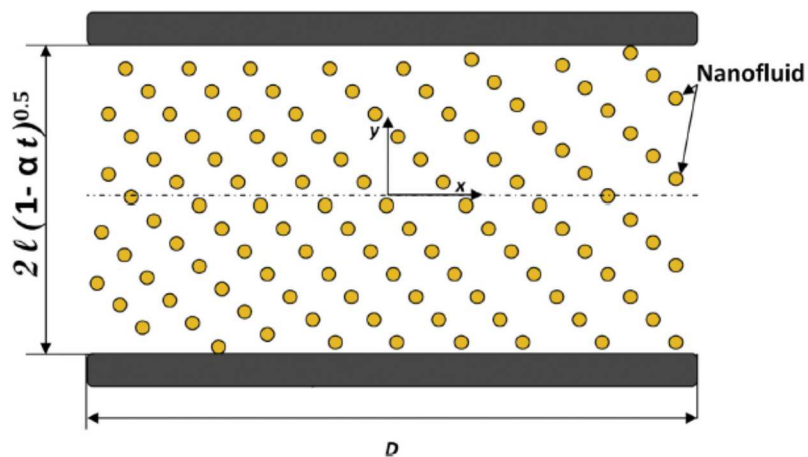


Figure (I.3) : Géométrie du problème [8].

A. Dib et al. [8] ont étudié l'application de l'approche de Duan-Rach (DRA) pour obtenir une solution analytique approximative d'un écoulement nanofluide instationnaire en écrasement (Figure (I.3)). Une solution analytique approximative

peut être obtenue pour un profil de vitesse et un profil de température. Cette méthode modifie la méthode standard de décomposition adomienne (ADM) en évaluant directement les opérateurs inverses aux conditions aux limites. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec la méthode numérique (algorithme Runge-Kutta de quatrième ordre). L'algorithme dérivé de cette approche peut être facilement mis en œuvre.

O. Pourmehran et al. [36] ont mené une étude analytique est appliquée pour l'écoulement instationnaire d'un nanofluide se pressant entre deux plaques parallèles (Figure (I.4)). La méthode de collocation (CM), la méthode des moindres carrés (LSM) et la méthode numérique Runge-Kutta du quatrième ordre (MN) sont utilisées pour résoudre ce problème. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par la méthode de collocation (CM), la méthode des moindres carrés et la méthode numérique établie (Runge-Kutta d'ordre 4). Il a été démontré que la LSM et la CM présentaient des résultats précis. L'eau (H_2O) était le fluide de base contenant différents types de nanoparticules, à savoir du cuivre, de l'argent, de l'alumine et de l'oxyde de titane.

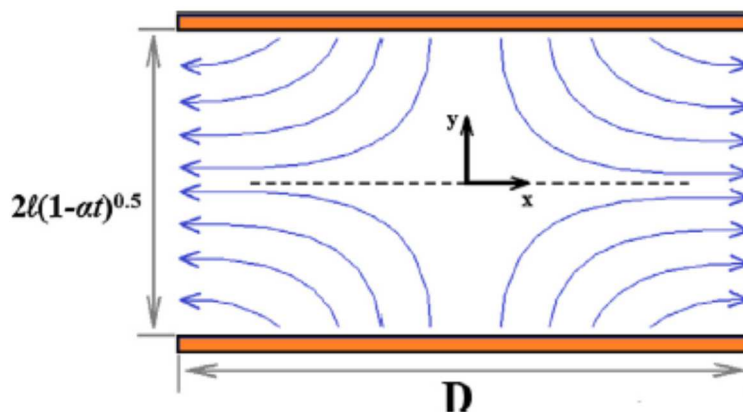


Figure (I.4) : Géométrie du modèle physique [36].

La conductivité thermique effective et la viscosité du nanofluide sont calculées à l'aide des modèles Maxwell-Garnetts (MG) et Brinkman, respectivement. La recherche analytique est effectuée pour divers paramètres de contrôle tels que le nombre d'écrasement, la fraction volumique des nanoparticules et le nombre d'Eckert. Le résultat principal de cette étude est que les résultats du LSM sont plus précis que ceux du CM et qu'ils sont en excellent accord avec les résultats

numériques. Le LSM peut donc être utilisé pour trouver facilement des solutions analytiques aux équations couplées dans les problèmes des nanofluides. Les résultats démontrent que lorsque deux plaques se déplacent ensemble, le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules et du nombre d'Eckert tandis qu'il diminue avec l'augmentation du nombre d'écrasement. A. K. Gupta et S. Saha Ray [37] ils ont utilisé une nouvelle méthode basée sur l'expansion des ondelettes de Chebyshev est proposée pour résoudre un système couplé d'équations différentielles ordinaires non linéaires afin de modéliser l'écoulement instationnaire d'un nanofluide écrasé entre deux plaques parallèles (Figure (1.5)). La méthode des ondelettes de Chebyshev a été appliquée pour calculer la solution numérique d'un système couplé d'équations différentielles ordinaires non linéaires afin de modéliser l'écoulement instable d'un nanofluide. Les solutions approximatives des équations différentielles ordinaires non linéaires obtenues par cette méthode sont comparées à celles obtenues par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode Runge-Kutta du quatrième ordre et la méthode d'analyse d'homotopie (HAM). Les résultats obtenus par les méthodes ci-dessus ont été présentés et discutés en détail par les auteurs. Ils montrent que le schéma utilisé est très simple, efficace et approprié pour obtenir la solution numérique d'un écoulement nanofluide instationnaire entre des plaques parallèles.

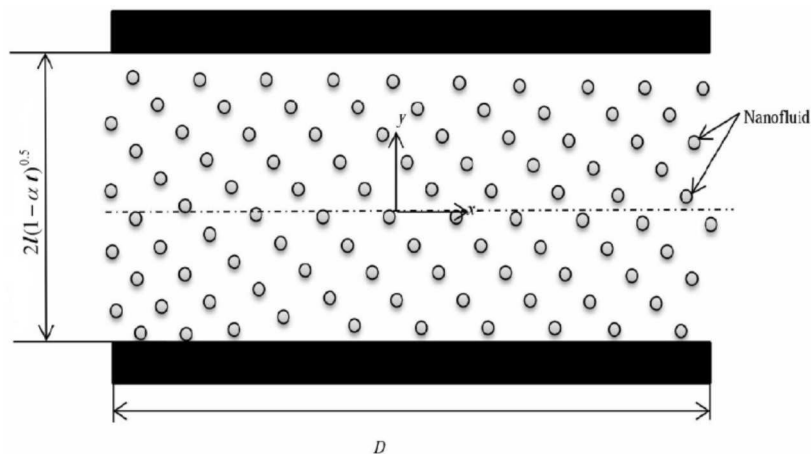


Figure (I.5) : Géométrie du problème [37].

R. C. Mittal et Sapna Pandit [38] ont étudié un écoulement nanofluide instable entre deux plaques parallèles pour la première fois avec des ondelettes (Figure (I.6)).

La transformation de similitude a été utilisée pour transformer l'équation non linéaire de quantité de mouvement et d'énergie thermique en une équation différentielle ordinaire non linéaire couplée avec des conditions aux limites adaptées. Pour l'équation différentielle ordinaire non linéaire couplée, ils ont présenté une nouvelle perspective de la transformée en ondelettes de Haar avec l'idée essentielle d'ondelettes de Haar d'échelle 3. L'étude numérique est réalisée pour différents paramètres physiques tels que le nombre d'écrasement, le nombre de Reynolds, le nombre d'Eckert et la fraction volumique des nanoparticules. Le résultat principal de cette étude est que les ondelettes donnent des résultats plus précis que les autres résultats numériques disponibles dans la littérature. Ils ont utilisé des ondelettes de Haar avec des paramètres d'échelle 2 et d'échelle 3 pour la dilatation et ils ont constaté que les ondelettes d'échelle 3 donnent de meilleurs résultats que les ondelettes d'échelle 2.

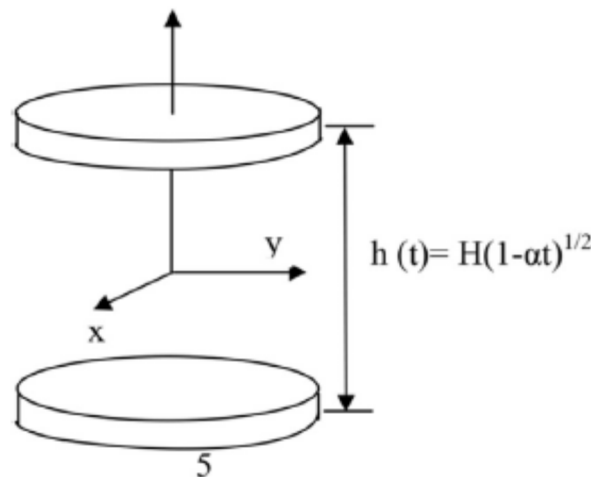


Figure (I.6) : Géométrie du modèle physique [38].

Tasawar Hayat et al. [10] sont intéressés à l'écoulement instationnaire par écrasement d'un nanoliquide non-newtonien entre deux plaques parallèles. Une relation rhéologique de liquide de second ordre est utilisée. Le rayonnement thermique, le mouvement brownien et la diffusion thermophorétique sont retenus. Le liquide de second degré est conduit électriquement sous l'effet d'un champ magnétique dépendant du temps. Le champ magnétique induit est négligé pour un petit nombre de Reynolds magnétique. Des transformations appropriées permettent d'obtenir un système différentiel ordinaire fortement non linéaire. Le système non linéaire

résultant a été résolu. Les intervalles de convergence des solutions en série sont explicitement déterminés. Les champs de vitesse, de température et de concentration ont été analysés graphiquement. Le coefficient de frottement local et les nombres locaux de Nusselt et de Sherwood ont été calculés numériquement et examinés par les auteurs. Ils ont observé que les distributions de température et de concentration sont améliorées pour des valeurs plus grandes du paramètre de mouvement brownien. De plus, les nombres de Lewis et de Prandtl ont des comportements similaires pour la distribution de la concentration.

A. G. Madaki et al. [39] ont mené une étude analytique d'un écoulement instationnaire d'un nanofluide en écrasement au milieu de deux plaques parallèles (Figure (I.7)). Les effets du rayonnement thermique et de la génération/absorption de chaleur le long du profil de température ont été observés. La méthode de perturbation de l'homotopie (HPM) a été utilisée pour résoudre les équations non linéaires bidimensionnelles de quantité de mouvement et d'énergie. Les résultats trouvés dans cette étude sont comparés avec les résultats obtenus en utilisant la technique RK4 et avec le schéma de tir. Les résultats obtenus par les auteurs concordent de manière fascinante avec les solutions numériques.

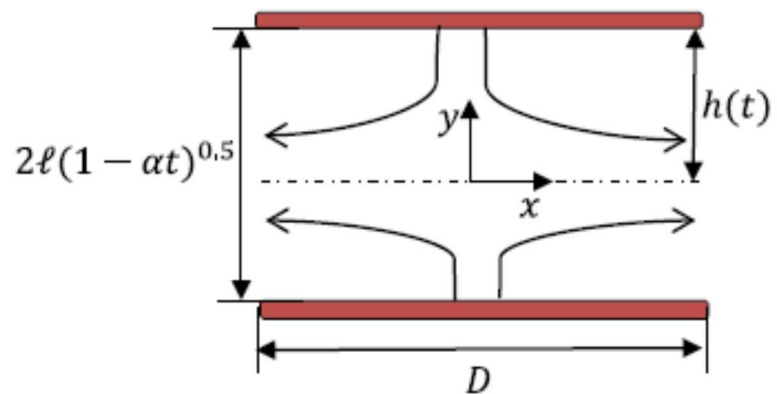


Figure (I.7) : Configuration géométrique du problème [39].

S. Hadi Seyedi et al. [11], ils ont réalisé une nouvelle méthode, multi-échelle et précise pour discuter de l'analyse du transfert de chaleur et de masse pour un écoulement nanofluide instationnaire qui est écrasé entre deux plaques parallèles (Figure (I.8)). La solution de similitude a été utilisée pour réduire les équations différentielles partielles gouvernantes à un ensemble d'équations différentielles

ordinaires (ODE), puis les équations non linéaires obtenues ont été résolues par une nouvelle méthode multi-échelle. Une matrice opérationnelle d'intégrale a été établie pour la connexion précise de la fonction et de ses dérivés. L'effet de paramètres tels que la concentration en nanoparticules, le nombre de Prandtl, le nombre d'Eckert et le nombre d'écrasement sur les profils sans dimension de vitesse et de température a été étudié. Les résultats des simulations ont montré que le changement du nombre d'écrasement peut affecter remarquablement les profils de température et que son effet est plus notable que la fraction volumique des nanoparticules. Quatre types différents de nanoparticules ont été utilisés et leur influence sur le profil de température, le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement local a été étudiée. Les résultats obtenus ont été illustrés graphiquement et comparés à plusieurs méthodes numériques et semi-analytiques de la littérature. Les résultats des simulations réalisées par les auteurs avec le nouveau schéma multi-échelle montrent un excellent accord avec la méthode Runge-Kutta de quatrième ordre et pourraient être étendues à la résolution d'autres problèmes d'ingénierie hautement non linéaires.

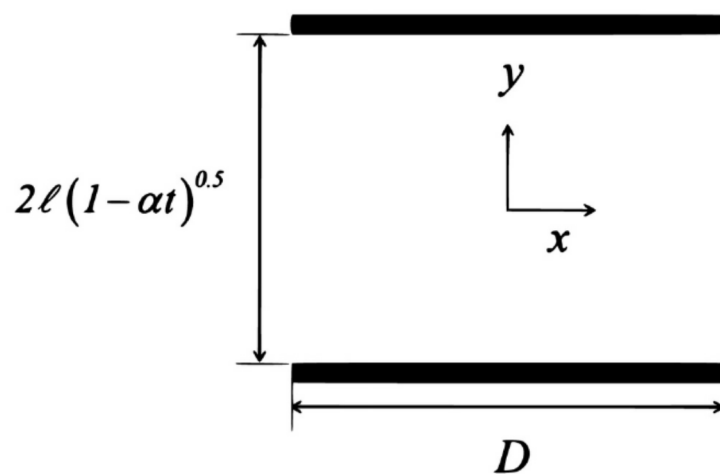


Figure (I.8) : Géométrie du problème, nanofluide entre les plaques parallèles [11].

Abdul-Sattar J. Al-Saif et Assma J. Harfash [40] ont été étudié et analysé le transfert de chaleur et de masse dans un écoulement instable entre des plaques parallèles en utilisant un algorithme de perturbation-itération (Figure (I.9)). La transformation de similarité est utilisée pour transformer les équations différentielles à dérivées partielles en équations différentielles ordinaires, avant d'être résolues. Les solutions de la vitesse, de la température et de la concentration ont été dérivées et tracées pour

expliquer l'influence de divers paramètres physiques. La convergence de ces solutions a été également discutée par les auteurs. Les résultats numériques du coefficient de frottement local, du nombre de Nusselt et du nombre de Sherwood ont été comparés aux travaux précédents. Les résultats montrent que la méthode utilisée dans ce travail donne des solutions convergentes avec une bonne précision.

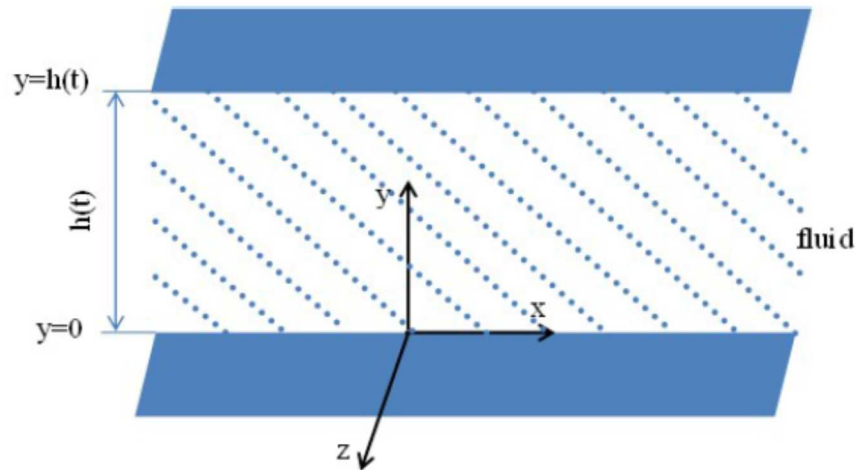


Figure (I.9) : Diagramme schématique du problème [40].

Sihem Lahmar et al. [41] ils ont examiné l'écoulement et le transfert de chaleur d'un nanofluide instable (Fe_3O_4 -eau) entre deux plaques parallèles dans le cas où la conductivité thermique est une fonction de la température et sous la présence d'un champ magnétique incliné (Figure (I.10)). Les effets de la conductivité thermique variable et du champ magnétique incliné sont conçus en équations différentielles ordinaires non linéaires, qui caractérisent les distributions de vitesse et de température du problème considéré, ceci a été résolu numériquement via la méthode de tir basée sur Runge-Kutta-Fehlberg et analytiquement par une technique analytique à savoir la méthode DTM. D'autre part, ainsi que l'influence de la variation des paramètres physiques tels que : la fraction volumique des nanoparticules de type magnétite (Fe_3O_4), le nombre de Hartmann, le nombre d'écrasement, l'angle d'inclinaison du champ magnétique appliqué et le paramètre de conductivité, les résultats obtenus mettent en évidence l'efficacité de la technique analytique adoptée. Les résultats ont montré que les nanoparticules de (Fe_3O_4) dans (H_2O) comme fluide de base améliorent considérablement les caractéristiques de transfert de chaleur. L'existence

d'une conductivité thermique variable et d'un champ magnétique incliné entraîne une diminution du transfert de chaleur.

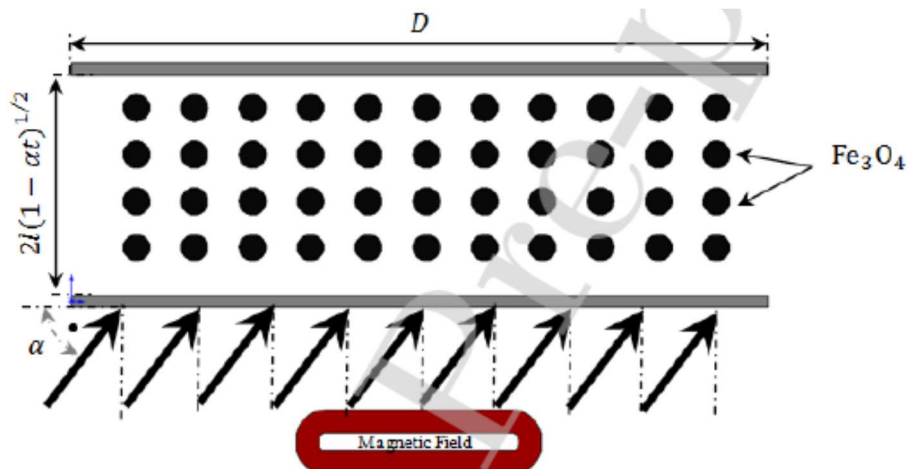


Figure (I.10) : Géométrie de l'écoulement de nanofluide MHD [41].

A. El harfouf et al. [42] sont intéressé par l'analyse du transfert de chaleur pour l'écoulement instable d'un nanofluide visqueux entre deux plaques parallèles en considérant le modèle de flux de chaleur de Fourier (Figure (I.11)). Les équations différentielles à dérivées partielles représentant le modèle d'écoulement sont réduites en équations différentielles ordinaires non linéaires en introduisant une transformation de similarité. Les équations différentielles ordinaires non linéaires et sans dimension des fonctions de vitesse et de température obtenues ont été résolues en utilisant la méthode de perturbation d'homotopie (HPM).

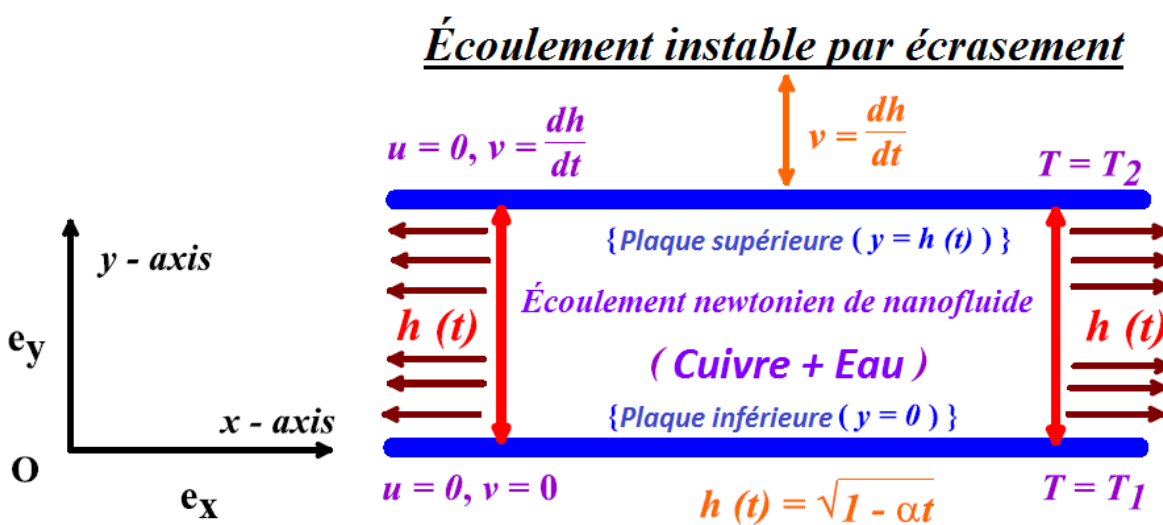


Figure (I.11) : Géométrie du travail présenté [42].

Les résultats trouvés dans ce papier sont vérifiés en les comparant avec les résultats obtenus en utilisant la méthode numérique RK4, il est trouvé que ces résultats sont en accord avec cette solution numérique. Les effets des différents paramètres sur les profils de vitesse et de température sont examinés graphiquement, et les calculs numériques pour le coefficient de frottement local et le nombre de Nusselt local sont tabulés. Il est constaté par ce travail un excellent accord dans l'étude comparative avec les résultats de la littérature.

Umair Rashid et al. [43] ils ont analysé l'effet de forme des nanoparticules d'or (Au) sur l'écoulement du nanofluide par écrasement et le transfert de chaleur entre des plaques parallèles (Figure (I.12)). Les différentes formes de nanoparticules, à savoir colonne, sphère, hexaèdre, tétraèdre et lamelle, ont été examinées en utilisant l'eau comme fluide de base. Les équations différentielles à dérivées partielles (PDE) sont transformées en équations différentielles ordinaires (ODE) par des transformations appropriées. En conséquence, les équations différentielles ordinaires non linéaires à valeur limite sont traitées analytiquement en utilisant la méthode d'analyse d'homotopie (HAM) et la convergence de la solution en série est assurée.

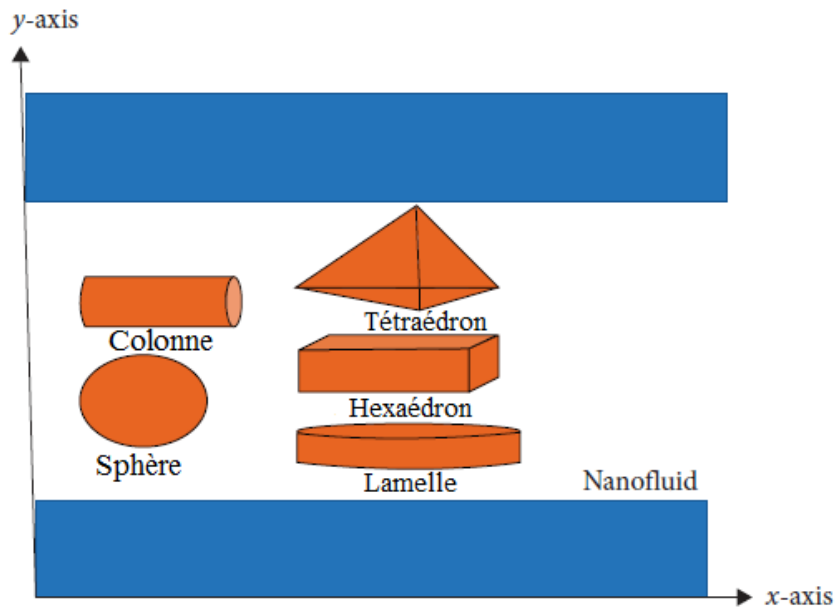


Figure (I.12) : Modèle schématique du nanofluide d'écrasement [43].

Les effets de divers paramètres tels que la fraction volumique solide, le rayonnement thermique, le nombre de Reynolds, le champ magnétique, le nombre d'Eckert, le paramètre d'aspiration et le facteur de forme sur les profils de vitesse et de

température ont été représenté sous forme de graphiques pour différentes valeurs des paramètres concernés, ainsi que le nombre de Nusselt est calculé et présenté sous forme de graphique par les auteurs. Les résultats obtenus démontrent que le flux de transfert de chaleur est maximal pour les nanoparticules de forme lamelle et que la forme sphérique des nanoparticules a joué un rôle considérable dans la distribution de la température par rapport aux autres formes de nanoparticules.

De nos jours, en raison de la nouvelle efficacité thermique, une nouvelle classe de fluide, appelée "nanofluide hybride", est utilisée. Elle a des applications importantes dans les domaines domestiques et industriels. Himanshu Upreti et al. [44] sont intéressés à la génération d'entropie et le transfert de chaleur dans un écoulement instable de nanofluide hybride magnétique entre des plaques parallèles en considérant la source/puits de chaleur et le rayonnement thermique (Figure (I.13)).

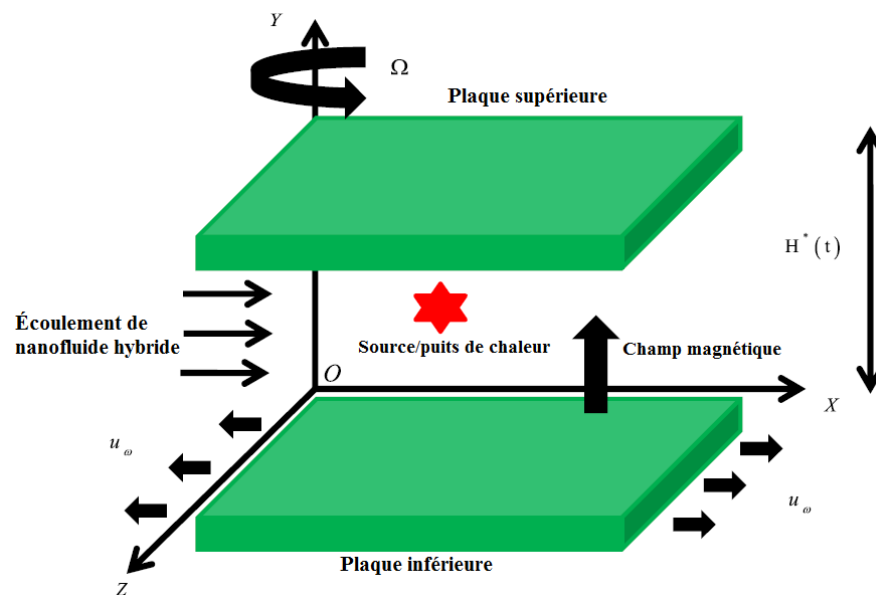


Figure (I.13) : Le modèle d'écoulement physique et sa géométrie [44].

Dans cette analyse, les nanotubes de carbone (CNT) (nanotube de carbone à paroi simple et nanotube de carbone à parois multiples) sont considérés comme des nanoparticules dispersées dans des mélanges eau-éthylène glycol (EG) (c'est-à-dire 70%W + 30%EG et 50%W + 50%EG). Pour l'analyse du comportement physique des nanofluides hybrides, de nouveaux modèles liés aux nanofluides hybrides sont incorporés. Dans cette étude, ils ont été observés que lorsque les nanofluides hybrides s'éloignent de la surface, les contours de la génération d'entropie s'accélèrent avec

une augmentation des valeurs du champ magnétique. De plus, une augmentation de la fraction volumique des CNTs, la conductivité thermique du nanofluide hybride (50%W + 50% EG + CNTs) est plus grande que celle du nanofluide hybride (70%W + 30%EG + CNTs).

I.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons donné dans un premier temps une description générale des nanofluides, et nous avons ainsi une présentation des différents modèles de leurs propriétés thermo-physiques ensuite a été décrite. Une synthèse bibliographique est consacrée à une revue des différents travaux pour mieux comprendre les caractéristiques de l'écoulement et du transfert thermique et les problèmes d'évacuation de chaleur par convection naturelle, forcée ou mixte. Les chercheurs ont mené des études analytiques, numériques et expérimentales afin de résoudre le problème de l'écoulement d'un nanofluide par écrasement entre deux plaques parallèles. L'analyse de ces travaux permet d'identifier les différents paramètres qui peuvent influencer le comportement thermique et rhéologique de cet écoulement.

Par conséquent, la compréhension du comportement des nanofluides près des parois est importante pour l'utilisation future des nanofluides pour le grand potentiel de l'amélioration du transfert de chaleur. Des modèles mathématiques du problème étudié mise en place afin d'étudier le comportement de ces écoulements avec le transfert de chaleur seront présentées et discutées dans le chapitre suivant.

Chapitre 2 : Modélisation mathématique

II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons la géométrie du modèle physique du problème à étudier avec une modélisation mathématique qui se traduit par des équations de conservation, de continuité, la quantité de mouvement et de l'énergie qui régissent l'écoulement et le transfert de chaleur au sein d'un nanofluide qui s'écoule entre deux plaques parallèles infinies horizontales. Ce système d'équations de conservation accompagné par les conditions initiales et aux limites spatio-temporelles appropriées sont sous la forme dimensionnelle qui contrôlent l'écoulement. Nous déduisons les groupements adimensionnels en fonction des paramètres de contrôle adimensionnels tels que le nombre d'Eckert et le nombre d'écrasement.

II.2 Élément mathématique de base

La formulation mathématique des phénomènes de l'écoulement avec transfert de chaleur repose sur les équations liant les différents paramètres à savoir : la vitesse, la pression et la température.

Ces équations sont obtenues à partir des lois de conservation de masse, de conservation de la quantité de mouvement (équations de Navier - Stokes), et de conservation d'énergie.

II.2.1 Equation de continuité

C'est l'équation qui exprime le principe de conservation de la masse. Elle s'exprime sous forme tensorielle comme suit, A. Bejan [25] :

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (II.1)$$

(j : indice de somme, = 1~3).

II.2.2 Equations de la quantité de mouvement

Cette équation est déduite de la deuxième loi de la dynamique, qui stipule que la variation de la quantité de mouvement d'une particule fluide est égale à la somme des forces extérieures sur cette particule. Elle s'écrit sous forme tensorielle comme suit, A. Bejan [25] :

$$\frac{\partial(\rho u_i v_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (II.2)$$

où :

$\frac{\partial(\rho u_i v_j)}{\partial x_j}$: Représente le taux net de transport de quantité de mouvement suivant la direction i, par mouvement du fluide.

ρg_i : Représente les forces de volume suivant la direction i.

$\frac{\partial p}{\partial x_i}$: Représente les forces dû à la pression.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$: Représente les forces nettes de viscosité.

(j : indice de somme, = 1~3).

(i : indice libre, = 1~3).

II.2.3 Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie est obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un fluide Newtonien incompressible, A. Bejan [45].

L'équation d'énergie est donnée comme suit :

$$\rho C_p \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q + \mu \Phi \quad (II.3)$$

où

k : La conductivité thermique.

C_p : La chaleur spécifique à pression constante.

ρ : La masse volumique.

q : La génération de chaleur par unité de volume (densité de chaleur volumétrique).

μ : Viscosité dynamique du fluide.

Φ : La dissipation visqueuse.

II.3 Hypothèses

- Fluide Newtonien visqueux et incompressible.
- Régime laminaire et instationnaire.
- Transfert de chaleur par rayonnement négligeable.

- Ecoulement bidimensionnel suivant les coordonnées cartésiennes x et y .
- Milieu continu.
- Propriétés thermo-physiques constantes sont prises en considération pour la nanofluide :

Tableau (II.1) : Propriétés thermo-physiques du fluide et des nanoparticules [46].

Propriétés	Eau (H ₂ O)	Cuivre (Cu)	Alumine (Al ₂ O ₃)	Oxyde de titane (TiO ₂)
C_p (J/kg.K)	4179	385	765	686.2
ρ (kg/m ³)	997.1	8933	3970	4250
k (W/m.K)	0.613	400	40	8.9538

- Les nanoparticules sont supposées avoir forme et taille uniforme et d'être sphérique et dans un état d'équilibre thermique avec le fluide de base, Jmai et al. [47].
- La dissipation visqueuse est négligeable ($\mu\Phi$) = 0.

II.4 Géométrie et formulation mathématique

II.4.1 Géométrie du problème physique

Nous considérons un écoulement bidimensionnel instationnaire de nanofluide écouler au milieu de deux plaques parallèles étendues à l'infini et implantées dans un système occupé par un nanofluide (l'eau comme fluide de base) contenant différents types de nanoparticules, c'est-à-dire cuivre (Cu), argent (Ag), alumine (Al₂O₃) et oxyde de titane (TiO₂). Les propriétés thermo-physiques des nanofluides sont données dans le tableau (II.1). La distance entre les deux plaques est $y_p = \pm l(1 - \alpha t)^{0.5} = \pm h(t)$, où l est la position initiale de la plaque (au temps $t = 0$) et α , une constante de dimension [T⁻¹], caractérise l'instabilité. Pour $\alpha > 0$, les deux plaques sont rapprochées jusqu'à ce qu'elles se touchent ($t = 1/\alpha$) et pour α négatif, les plaques sont séparées. Le support du modèle graphique à la présente étude est donné dans la figure (II.1). Les équations gouvernantes représentant l'écoulement sont les suivantes :

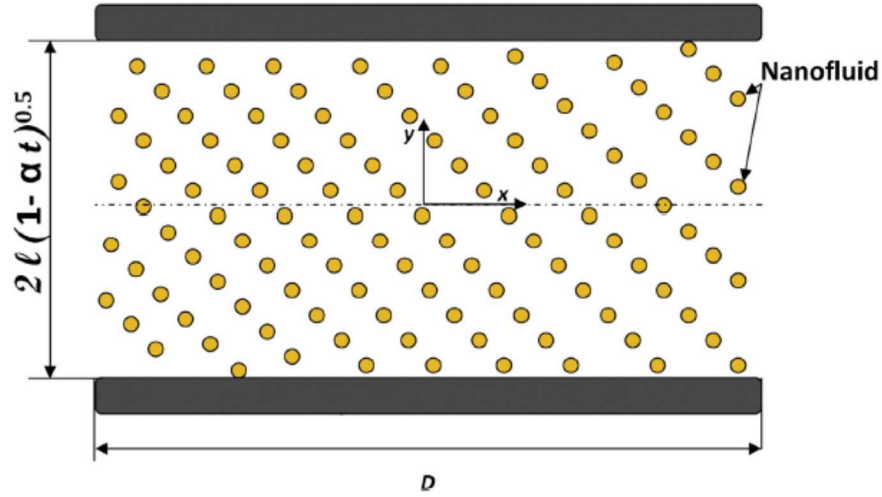


Figure (II.1) : Géométrie du problème, A. Dib et al. [8].

II.4.2 Modèle mathématique et équations dimensionnelles

En prenant compte de toutes les hypothèses, les équations dimensionnelles peuvent s'écrire comme suit :

➤ Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (II.4)$$

➤ Equation de la quantité de mouvement suivant x :

$$\rho_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (II.5)$$

➤ Equation de la quantité de mouvement suivant y :

$$\rho_{nf} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (II.6)$$

➤ Equation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \\ = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (II.7)$$

où u et v sont les vitesses dans les directions x et y , séparément. La masse volumique effective ρ_{nf} , la viscosité dynamique effective μ_{nf} , la capacité thermique effective $(\rho C_p)_{nf}$ et la conductivité thermique effective k_{nf} sont définies comme suit [48] :

$$\begin{aligned}
 (\rho C_p)_{nf} &= (1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_s, \\
 \rho_{nf} &= (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s, \\
 \frac{k_{nf}}{k_f} &= \frac{k_s + 2k_f - 2\phi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + 2\phi(k_f - k_s)}, & (\text{Maxwell} - \text{Garnett}) \\
 \mu_{nf} &= \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} & (\text{Brinkman}). \tag{II.8}
 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites appropriées sont :

$$\begin{aligned}
 u = 0, v = v_w = dh/dt, T = T_H & \quad \text{à} \quad y = h(t) \\
 v = \partial u / \partial y = \partial T / \partial y = 0 & \quad \text{à} \quad y = 0 \tag{II.9}
 \end{aligned}$$

II.4.3 Adimensionnalisation des équations

La forme adimensionnelle est utilisée afin de trouver des solutions générales aux problèmes physiques indépendamment des systèmes de mesures, et pour réduire le nombre de paramètres de notre étude, elle permet aussi la simplification de la résolution des systèmes d'équations. Pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire des grandeurs de référence.

❖ Grandeurs caractéristiques

Les grandeurs caractéristiques de similitudes sont définies comme suit :

- η : Distance adimensionnelle.
- θ : Température adimensionnelle.
- f : Vitesse adimensionnelle.

❖ Variables caractéristiques

$$\begin{aligned}
 \eta = \frac{y}{h(t)} = \frac{y}{[l(1 - \alpha t)^{0.5}]}, \quad u = U_0 f'(\eta) = \frac{\alpha x}{[2(1 - \alpha t)]} f'(\eta), \\
 v = v_w f(\eta) = -\frac{\alpha l}{[2(1 - \alpha t)^{0.5}]} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T}{T_H} \tag{II.10}
 \end{aligned}$$

Les variables ci-dessus sont substituées dans les équations (II.5) et (II.6), puis le gradient de pression est éliminé des équations résultantes :

$$f^{iv} - SA_1(1 - \phi)^{2.5}(\eta f'''' + 3f'' + f'f'' - ff''') = 0 \tag{II.11}$$

Les équations (II.10), (II.4) et (II.7) nous conduisent à l'équation différentielle réduite suivante :

$$\theta'' + Pr S \left(\frac{A_2}{A_3} \right) (f - \eta) \theta' + \frac{Pr Ec}{A_3 (1 - \phi)^{2.5}} (f''^2 + 4\delta^2 f'^2) = 0 \quad (II.12)$$

Où A_1 , A_2 et A_3 sont des constantes sans dimension données par :

$$A_1 = (1 - \phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f}, A_2 = (1 - \phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}, A_3 = \frac{k_{nf}}{k_f}. \quad (II.13)$$

Il est soumis aux conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0, & f''(0) &= 0, \\ f(1) &= 1, & f'(1) &= 0, \\ \theta'(0) &= 0, & \theta(1) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (II.14)$$

Où ϕ et la fraction volumique des nanoparticules, S est le nombre d'écrasement, Pr est le nombre de Prandtl, Ec est le nombre d'Eckert, δ est la coordonnée sans dimension sont définis par [7].

$$S = \frac{\alpha l^2}{2v_f}, Pr = \frac{\mu_f (\rho C_p)_f}{\rho_f k_f}, Ec = \frac{\rho_f}{(\rho C_p)_f} \left(\frac{\alpha x}{2(1 - \alpha t)} \right)^2 \cdot \frac{1}{T_H}, \quad \delta = \frac{l}{x}. \quad (II.15)$$

Les quantités physiques d'intérêt sont le coefficient de frottement local et le nombre de Nusselt, qui sont définis par [49] :

$$C_f = A_1 (1 - \phi)^{2.5} f''(1), \quad Nu = -A_3 \theta'(1) \quad (II.16)$$

II.5 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons élaboré les hypothèses considérées dans notre travail. Le but aussi était de présenter la géométrie et la formulation mathématique nécessaire du problème. L'identification de nouvelles méthodes stochastiques optimisées basés sur l'apprentissage des réseaux de neurones par des algorithmes d'optimisation pour résoudre notre problème sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3 : Les algorithmes stochastiques optimisés

III.1 Introduction

Les méthodes stochastiques basées sur les réseaux de neurones à action direct optimisés par des algorithmes d'optimisations ont récemment été appliquées à des problèmes complexes, tels que les équations différentielles ordinaires et partielles [50-52]. A titre d'exemple, les oscillateurs non linéaires basés sur les équations de Van der Pol [53,54], les équations de Lane Emden [55], le premier transcendant de Painlevé [56], les problèmes d'écoulement des fluides [57], le problème de Troesch en physique des plasmas [58], et le modèle d'allumage du combustible en théorie de la combustion basé sur le problème de Bratu [59,60]. Cette technique a également été appliquée pour résoudre des équations différentielles linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire [61,62]. A la différence de leurs homologues déterministes, ces méthodes de recherche aléatoire permettent d'explorer des espaces de grandes dimensions, tout en évitant certains pièges, tels des puits de minima locaux en optimisation globale.

Des stratégies d'apprentissage automatique basées sur des algorithmes de recherche globale tels que les algorithmes génétiques, le recuit simulé et l'optimisation par essaims de particules (PSO), ainsi que des méthodes de recherche locale telles que l'algorithme des points intérieurs (IPA), la programmation quadratique séquentielle (SQP), les procédures du simplexe et les méthodes des ensembles actifs (ASM) ont été utilisées pour l'apprentissage des modèles des réseaux de neurones destinés à résoudre des équations différentielles non linéaires.

Il y a donc une motivation pour nous à rechercher un cadre alternatif, précis et fiable basé sur ces techniques de calcul pour résoudre les équations de l'écoulement d'un nanofluide par écrasement entre deux plaques parallèles.

III.2 Le neurone biologique et le neurone artificiel

L'origine de l'inspiration des réseaux de neurones artificiels remonte à 1890 lorsque James introduit le concept de mémoire associative. Il propose ce qui deviendra une loi de fonctionnement pour l'apprentissage des réseaux de neurones, connue plus tard sous le nom de loi de Hebb. L'idée principale des réseaux de neurones artificiels est de donner une unité simple, un neurone, qui est capable de réaliser quelques calculs élémentaires. On relie ensuite un nombre important de ces unités et on essaye de

déterminer la puissance de calcul du réseau ainsi obtenu [63]. En 1949 Culloch et Pitts montrent que des réseaux de neurones formels simples peuvent réaliser des fonctions logiques arithmétiques et symboliques complexes.

Les premiers succès de cette discipline remontent à 1957, lorsque Rosenblatt développe le modèle du Perceptron. Il construit le premier neuro-ordinateur basé sur ce modèle et l'applique au domaine de la reconnaissance des formes. En 1960, l'automaticien Widrow développe le modèle Adaline (Adaptative Linear Element). Dans sa structure, le modèle ressemble au Perceptron, cependant la loi d'apprentissage est différente.

III.2.1 Les neurones biologiques

L'élément de base du système nerveux central est le neurone. Le cerveau se compose d'environ mille milliards de neurones, avec 1000 à 10000 synapses (connexions) par neurone.

Le neurone est une cellule composée d'un corps cellulaire et d'un noyau. Le corps cellulaire se ramifie pour former ce que l'on nomme les dendrites. Celles-ci sont parfois si nombreuses que l'on parle alors de chevelure dendritique ou d'arborisation dendritique. C'est par les dendrites que l'information est acheminée de l'extérieur vers le soma, corps du neurone.

L'information traitée par le neurone est acheminée ensuite le long de l'axone (unique) pour être transmise aux autres neurones. La transmission entre deux neurones n'est pas directe. En fait, il existe un espace intercellulaire de quelques dizaines d'Angströms entre l'axone du neurone afférent et les dendrites du neurone afférent. La jonction entre deux neurones est appelée la synapse (Figure (III.1)). En fait, suivant le type de la synapse, l'activité d'un neurone peut renforcer ou diminuer l'activité de ses voisins. On parle ainsi de synapse excitatrice ou inhibitrice [63].

Le neurone formel que nous allons étudier par la suite rappelle beaucoup le neurone biologique que nous venons de présenter. Pour cette raison, le vocabulaire utilisé dans la littérature pour décrire un neurone formel est largement emprunté à la biologie. Le formalisme mathématique du réseau de neurones artificiels, se trouve une inspiration biologique de plus en plus présente dans les méthodes d'apprentissage [64].

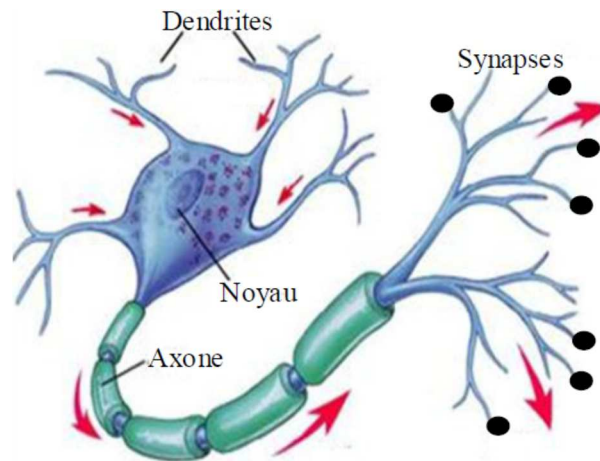


Figure (III.1) : Le neurone biologique [63].

III.2.2 Le neurone artificiel

III.2.2.1 Le modèle mathématique

Les réseaux de neurones biologiques réalisent facilement un certain nombre d'applications telles que la reconnaissance des formes, le traitement du signal, l'apprentissage par l'exemple, la mémorisation et la généralisation. C'est à partir de l'hypothèse que le comportement intelligent émerge de la structure et du comportement des éléments de base du cerveau, que les réseaux de neurones artificiels se sont développés. La figure (III.2) montre la structure d'un neurone artificiel. Chaque neurone artificiel est un processeur élémentaire. Il reçoit un nombre variable d'entrées en provenance de neurones amont. A chacune de ces entrées est associée un poids w , abréviation de weight (poids en anglais), représentatif de la force de la connexion.

Chaque processeur élémentaire est doté d'une sortie unique, qui se ramifie ensuite pour alimenter un nombre variable de neurones aval. A chaque connexion est associé un poids [65].

Le modèle général du neurone artificiel est composé des éléments suivants :

- Une ou plusieurs entrées pondérées,
- Un sommateur,
- Une fonction de transfert,
- Une sortie.

Avec :

- x_i est l'entrée i ,
- w_{ij} est la valeur du poids synaptique reliant l'entrée i au neurone j ,
- \sum est la somme pondérée des entrées x_i ,
- $f(x)$ est la fonction de transfert,
- y est la sortie du neurone.

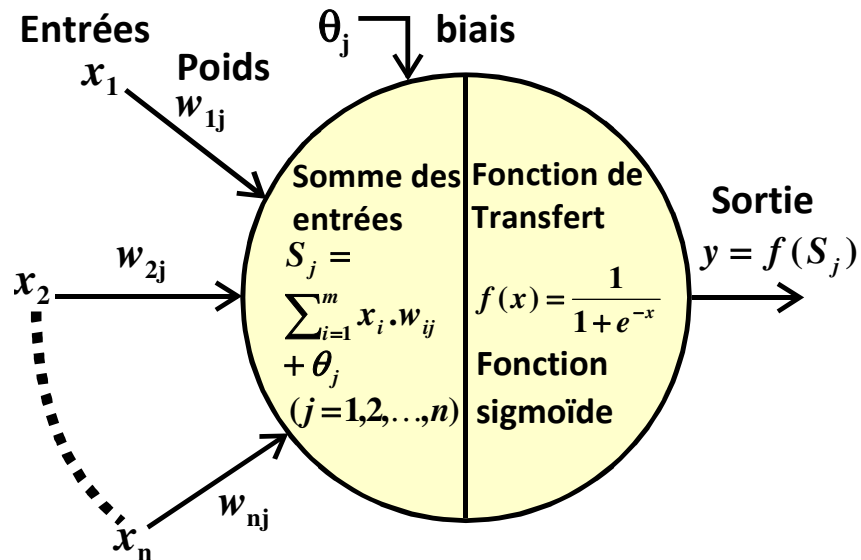


Figure (III.2) : Le neurone artificiel.

On peut représenter mathématiquement le traitement que fait le neurone élémentaire par les équations suivantes :

$$S_j = \sum_{i=1}^n x_i * w_{ij} + \theta_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{III. 1})$$

$$y = f(S_j) \quad (\text{III. 2})$$

où

i : L'ensemble des neurones envoyant une connexion vers le neurone j .

w_{ij} : Les poids de la connexion entre le neurone i et le neurone j .

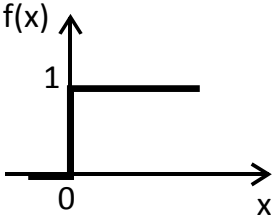
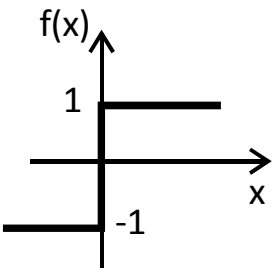
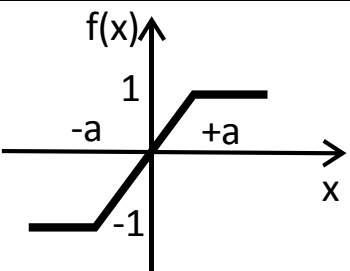
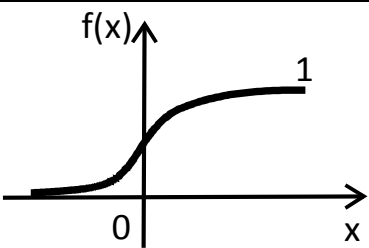
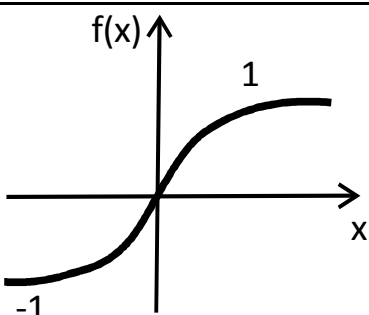
θ_j : Un paramètre optionnel appelé biais (valeur de seuil).

Les poids w_{ij} , et θ_j constituent les paramètres libres du système et doivent être ajustés.

III.2.2.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert joue un rôle important dans un réseau de neurones, le tableau (III.1) présente les différents types des fonctions de transfert avec la relation entre l'entrée et la sortie de neurone :

Tableau (III.1) : Les modèles de fonctions d'activation.

Nom de la fonction	Relation d'entrée/sortie	Icône
Fonction de Heaviside	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Fonction à seuils binaire	$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	
Fonction linéaire à seuil	$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a \\ -1 & \text{si } x < -a \\ x & \text{si } x \in [-a, a] \end{cases}$	
Fonction sigmoïde 1	$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$	
Fonction sigmoïde 2	$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$	

III.3 Réseaux de neurones artificiels (ANN)

Un réseau de neurones consiste en un ensemble de neurones reliés entre eux par des connexions pondérées. Il se caractérise principalement par le type des unités utilisées et par sa topologie. On distingue souvent deux types de neurones particuliers dans un réseau : les neurones d'entrée recevant les données du monde extérieur, et les neurones de sortie fournissant le résultat du traitement effectué. Les autres unités sont généralement qualifiées de cachées. Cette distinction n'est toutefois pas obligatoire et tous les neurones peuvent très bien communiquer dans les deux sens avec l'extérieur. Il est fréquent de différencier les réseaux suivant la présence ou non de cycles dans le graphe orienté des connexions entre les neurones [66]. On parle dans le cas positif de réseaux récurrents. Il est à noter que ces connexions cycliques, dont les valeurs dépendent des activations passées des unités du réseau, permettent de mieux traiter des problèmes comportant un aspect temporel. L'apprentissage est cependant généralement assez complexe dans ces réseaux, et leurs propriétés sont souvent moins bien connues que celles des réseaux non récurrents.

Une autre distinction importante est généralement faite entre codage local de l'information d'entrée et codage distribué. Dans les réseaux réalisant un codage local, chaque unité est spécialisée dans le traitement d'une petite partie de l'espace d'entrée, alors que dans les réseaux réalisant un codage distribué tout traitement fait intervenir l'ensemble des neurones. L'un des principaux attraits des réseaux de neurones artificiels (ANN) concerne les capacités d'apprentissage que possèdent certains modèles. On entend généralement par apprentissage la modification automatique des poids des connexions ou plus rarement du nombre et de l'organisation des neurones, afin d'adapter le traitement effectué par le réseau à une tâche particulière.

Selon la topologie de connexion des neurones, on peut en classe en deux grandes catégories : Réseaux non bouclés (statique ou feed-forward) (Figure (III.3)) et réseaux bouclés (dynamique feed-back ou récurrent) (Figure (III.4)).

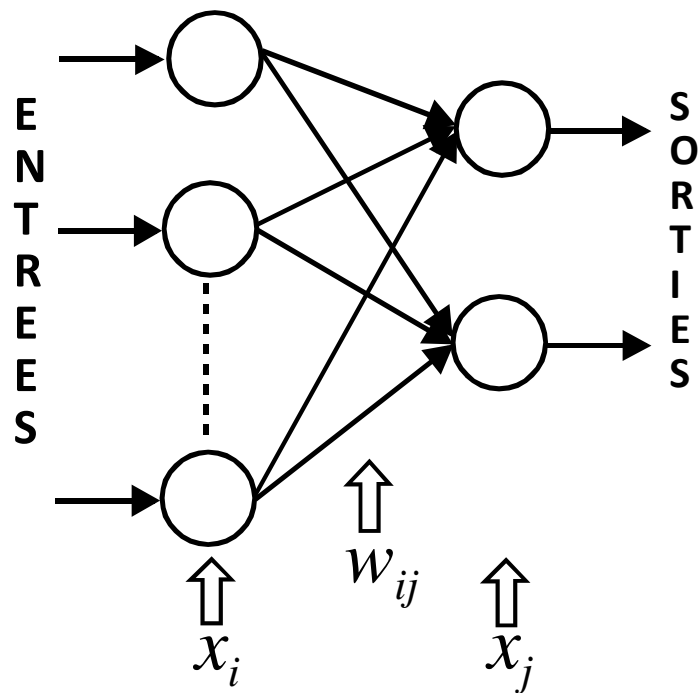


Figure (III.3) : Les réseaux à action directe (feed-forward).

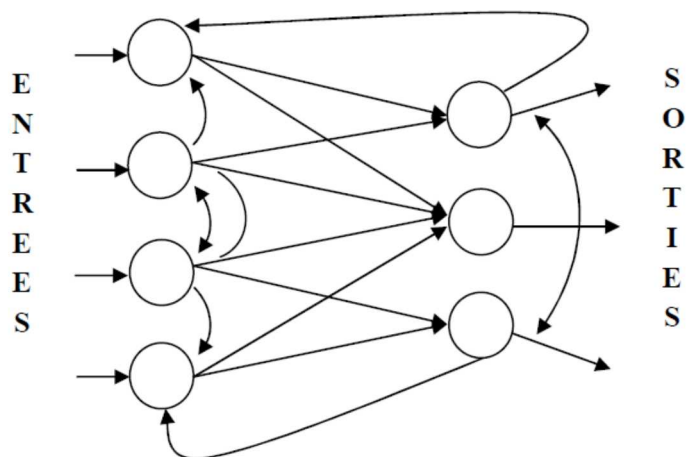


Figure (III.4) : Réseau à connexions récurrentes ou contre réaction (feed-back).

III.4 Architecture des réseaux de neurones à perceptron multicouche (MLP)

C'est le réseau de neurones statique le plus utilisé. Les neurones sont avancés par couche, les neurones de la première couche reçoivent le vecteur d'entrée, sa taille est directement déterminée par le nombre de variables d'entrées, il calcule leurs sortie qui sont transmises aux neurones de la seconde couche qui calculent eux même leur sortie et ainsi de suit de couche en couche jusqu'à celle de sortie. Chaque neurone dans la couche cachée est connecté à tout le neurone de la couche précédant et de la

couche suivant, et il n'y a pas de connexion entre les cellules d'une même couche [67]. Dans cette architecture, comme montrée dans la figure (III.5), les données sont traitées successivement par les couches cachées, dans un réseau nous pouvons avoir une couche cachée ou plusieurs. En plaçant ensuite bout à bout plusieurs couches et en connectant complètement les neurones de deux couches adjacentes. Nous notons que si les fonctions de transfert sont linéaires alors, toutes les couches cachées, nous considérons, comme une seule couche. Or les fonctions d'activations sont en général non linéaires sur cette couche, mais il n'y a pas de règle à respecter. Le choix de sa taille n'est pas implicite et doit être ajusté. En général, nous pouvons commencer par une taille moyenne des couches d'entrée et de sortie, mais ce n'est pas toujours le meilleur choix. Il sera souvent préférable pour obtenir de bons résultats, d'essayer le plus de tailles possible.

La troisième couche est appelée couche de sortie. Elle donne le résultat obtenu après compilation par le réseau des données entrée dans la première couche. Sa taille est directement déterminée par le nombre de variables que nous voulons en sortie.

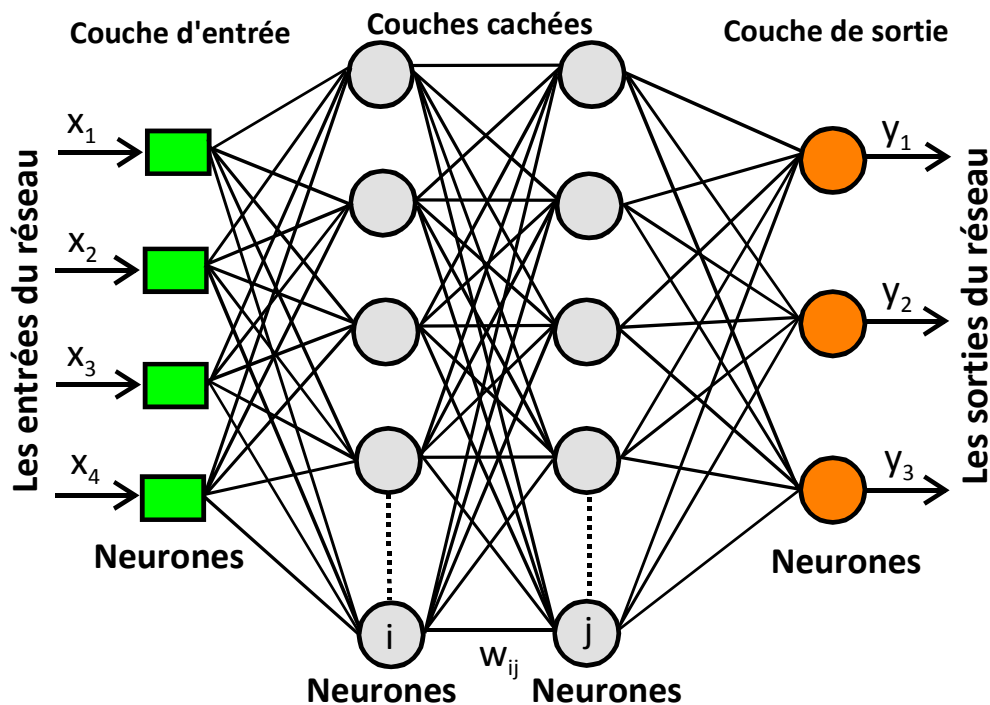


Figure (III.5) : Architecture simple d'un réseau de neurones.

Le comportement collectif ainsi obtenu permet de réaliser des fonctions d'ordre supérieur par rapport à la fonction élémentaire réalisée par un neurone [68]. Dans un

tel réseau, les entrées d'un neurone sont, soient les entrées du réseau globale, soient les sorties d'autres neurones. Les valeurs des poids du réseau sont, en général, déterminées par une opération dite : l'apprentissage.

Nous présentons ici une des architectures de réseaux les plus utilisées. Elle correspond à une organisation des neurones en n couches successives ($n \geq 3$). Les seules connexions présentées dans ce type de réseau relient chaque neurone avec l'ensemble de ceux de la couche suivante comme illustré dans la figure (III.6), la propagation de l'information se déroule ainsi en sens unique depuis la couche d'entrée vers la couche de sortie [69].

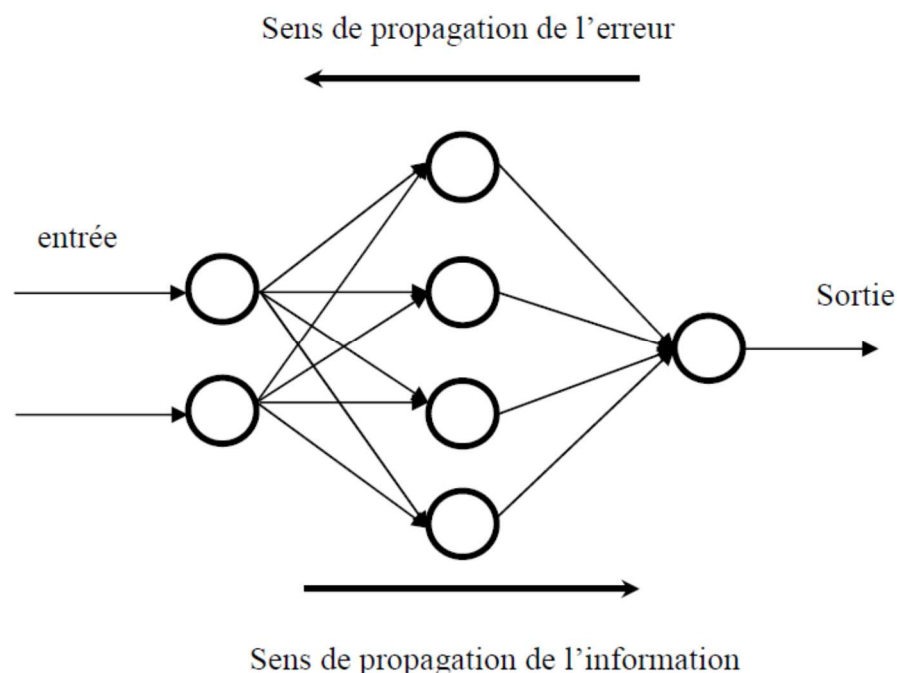


Figure (III.6) : Réseau multi-couches à action directe comportant 2 neurones d'entrée, 4 neurones cachés et un neurone de sortie [70].

Une fois que l'architecture est déterminée, on passe à l'étape de l'apprentissage. Au cours de cette phase est utilisé un algorithme pour assurer l'ajustement des poids synaptiques, afin de conférer au réseau le comportement entrée-sortie désiré. L'apprentissage des réseaux multicouches est assuré généralement par des algorithmes tels que (Rétro-propagation du gradient, Gauss Newton, Levenberg Marquardt,...) [71].

III.5 L'apprentissage des réseaux de neurones

L'apprentissage est vraisemblablement la propriété la plus intéressante des réseaux de neurones. Il est une phase du développement d'un réseau de neurones durant laquelle le comportement du réseau est modifié jusqu'à l'obtention du comportement désiré. Dans le cas des réseaux de neurones artificiels, on ajoute souvent à la description du modèle, l'algorithme d'apprentissage. Dans la majorité des algorithmes actuels, les variables modifiées, pendant l'apprentissage, sont les poids des connexions, afin d'obtenir des valeurs optimales appropriées à ces poids. A la fin de cette opération, on converge vers un fonctionnement de réseau, le plus possible adapté au problème qu'on désire résoudre, tout en fournissant des exemples d'apprentissage. Ces derniers doivent être suffisamment représentatifs, autrement dit : il faudra qu'ils couvrent aussi complètement que possible le domaine de fonctionnement désiré pour le réseau. Au niveau des algorithmes d'apprentissage, il a été défini deux grandes classes selon que l'apprentissage est dit supervisé ou non supervisé. Cette distinction repose sur la forme des exemples d'apprentissage.

III.5.1 L'apprentissage supervisé

Dans ce cas, un superviseur (ou expert humain) fournit une valeur ou un vecteur de sortie (appelé cible ou sortie désirée), que le réseau de neurones doit associer à un vecteur d'entrée. L'apprentissage consiste dans ce cas à ajuster les paramètres du réseau afin de minimiser l'erreur entre la sortie désirée et la sortie réelle du réseau.

III.5.2 L'apprentissage non supervisé

Dans cet apprentissage, les données ne contiennent pas d'information sur la sortie désirée. Il n'y a pas de superviseur. La tâche du réseau consiste, par exemple dans ce cas, à créer des regroupements de données selon des propriétés communes (classification). L'apprentissage non supervisé est bien adapté à la modélisation des données complexes (images, sons,...), dont les règles qui gouvernent le comportement du système à modéliser par les réseaux de neurones sont moins précises.

III.6 Notions général sur l'optimisation

Mathématiquement parlant, l'optimisation est la minimisation ou la maximisation d'une fonction soumise à des contraintes sur ses variables. Nous utilisons la notation suivante :

- \mathbf{x} est le vecteur des variables, également appelé inconnues ou paramètres ;
- f est la fonction objective, une fonction (scalaire) de \mathbf{x} que nous voulons maximiser ou minimiser ;
- c_i sont les fonctions de contrainte, qui sont des fonctions scalaires de \mathbf{x} qui définissent certaines équations et inégalités que le vecteur inconnu \mathbf{x} doit satisfaire.

En utilisant cette notation, le problème d'optimisation est écrit comme suit :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{array}{l} c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ c_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i \in \mathcal{Z} \end{array} \quad (III.3)$$

où, \mathcal{E} et \mathcal{Z} sont des ensembles d'indices pour les contraintes d'égalité et d'inégalité, respectivement.

III.6.1 Optimisation globale et locale

De nombreux algorithmes pour les problèmes d'optimisation non linéaire ne recherchent qu'une solution locale, c'est-à-dire un point où la fonction objectif est plus petite qu'en tous les autres points proches réalisables. Ils ne trouvent pas toujours la solution globale, qui est le point où la valeur de la fonction est la plus faible parmi tous les points réalisables. Les solutions globales sont nécessaires dans certaines applications, mais pour de nombreux problèmes, elles sont difficiles à reconnaître et encore plus difficiles à localiser. Pour les problèmes de programmation convexe, et plus particulièrement pour les programmes linéaires, les solutions locales sont également des solutions globales. Les problèmes non linéaires généraux, avec ou sans contraintes, peuvent posséder des solutions locales qui ne sont pas des solutions globales.

III.6.2 Convexité

Le concept de convexité est fondamental en optimisation. De nombreux problèmes pratiques possèdent cette propriété, ce qui les rend généralement plus faciles à résoudre, tant en théorie qu'en pratique.

Le terme "convexe" peut s'appliquer à la fois aux ensembles et aux fonctions. Un ensemble $S \in R^n$ est un ensemble convexe si le segment de droite reliant deux points quelconques de S est entièrement situé à l'intérieur de S . La fonction f est une fonction convexe si son domaine S est un ensemble convexe. On dit qu'une fonction f est concave si $-f$ est convexe. Si la fonction objectif du problème d'optimisation (III.3) et la région réalisable sont toutes deux convexes, alors toute solution locale du problème est en fait une solution globale.

III.6.3 La méthode des points intérieurs dans l'optimisation

On peut affirmer sans se tromper que le domaine de l'optimisation continue a connu une révolution depuis 1984 au sens de la première définition et que la deuxième définition s'applique au sens philosophique : comme la présence du point intérieur dans l'optimisation est aujourd'hui omniprésente, il est facile de perdre de vue l'ampleur et la profondeur des changements qui se sont produits au cours des vingt dernières années. En s'appuyant sur la métaphore politique implicite de notre titre, les révolutions réussies finissent par devenir le statu quo.

La révolution du point intérieur, comme beaucoup d'autres révolutions, comprend des idées anciennes qui sont redécouvertes ou vues sous un jour différent, ainsi que des idées véritablement nouvelles. L'interaction stimulante de l'ancien et du nouveau continue de conduire à une meilleure compréhension ainsi qu'à un ensemble toujours plus grand de techniques pour un éventail toujours plus grand de problèmes, familiers ou encore inexplorés.

III.6.4 Programmation linéaire et non linéaire

Avant 1984, il n'y avait, à première vue, aucun lien entre la programmation linéaire et la programmation non linéaire. Pour des raisons historiques qui semblent rétrospectivement déroutantes, ces sujets, l'un étant un sous-ensemble strict de

l'autre, ont évolué le long de deux voies essentiellement disjointes. De manière encore plus remarquable, cette séparation était une partie totalement acceptée de la culture de l'optimisation, en fait, elle était considérée par certains comme inhérente et inévitable. Afin de refléter fidèlement ce point de vue qui prévalait auparavant, nous traitons séparément la programmation linéaire et la programmation non linéaire.

III.6.4.1 Programmation linéaire

Le problème de la programmation linéaire (PL) implique la minimisation d'une fonction linéaire (affine) soumise à des contraintes linéaires, et peut être représenté de diverses manières mathématiquement équivalentes. Les deux formes qui nous intéressent ici sont la forme tout-venant :

$$\min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (\text{III.4})$$

Sous les contraintes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$,

où \mathbf{A} est une matrice de rang $(m \times n)$ et \mathbf{b} est un vecteur de rang n .

Dans le problème de forme standard (III.4), les seules inégalités sont les simples contraintes de limites $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, ce qui conduit à la propriété cruciale (et parfois négligée) que \mathbf{x} joue deux rôles distincts, en tant que variables et valeurs des contraintes. Il est habituel dans les problèmes de forme standard de supposer que \mathbf{A} a un rang complet.

Un point est réalisable s'il satisfait les contraintes du problème. Le point réalisable \mathbf{x}^* est une solution de la forme standard LP de l'équation (III.4) si et seulement si, pour un m -vecteur \mathbf{y}^* et un n -vecteur \mathbf{z}^* :

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}^* + \mathbf{z}^*, \quad \mathbf{z}^* \geq \mathbf{0}, \quad \text{et } z_i^* x_i^* = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n, \quad (\text{III.5})$$

où \mathbf{z}^* est le multiplicateur de Lagrange pour les contraintes de liaison et \mathbf{y}^* est le multiplicateur de Lagrange pour les contraintes d'égalité $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

III.6.4.2 Méthode de points intérieurs pour la programmation linéaire

La méthode du simplexe de Dantzig et ses variantes partent d'une solution de point extrême dans la région réalisable et, à chaque itération, se déplacent vers un point extrême adjacent dont la valeur objective est améliorée, en se déplaçant toujours le

long de la frontière de la région réalisable. La figure (III.7) illustre la séquence de points après chaque itération (représentée par des "points") par la méthode du simplexe, où les flèches le long de la frontière indiquent le chemin. Le fait de n'examiner que les solutions adjacentes réduit l'effort de calcul à chaque itération, puisqu'il est limité par le nombre d'arêtes menant à des sommets adjacents. Cependant, le nombre d'itérations peut être très important car, pour un LP sous forme standard, la région réalisable pourrait avoir jusqu'à $C(n, m) = n! / (m! (n - m)!)$ points extrêmes.

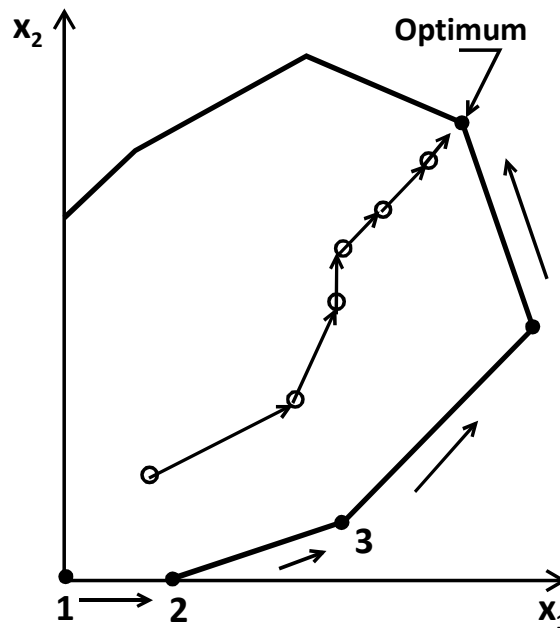


Figure (III.7) : Différence entre les méthodes de points extérieurs et intérieurs.

Contrairement à la méthode du simplexe, la méthode de points intérieurs, plus connue sous le nom d'algorithme de Karmarkar, traverse l'intérieur de la région réalisable, comme le montre la figure (III.7). La séquence de points après chaque itération est représentée par des "cercles". Le problème majeur des méthodes de points intérieurs est la nécessité d'identifier la meilleure parmi toutes les directions réalisables à une solution donnée. L'idée de base est de réduire le nombre d'itérations, même si chaque itération peut impliquer un énorme effort de calcul.

En 1984, Narendra Karmarkar [72], un chercheur de AT&T, a mis au point un algorithme de points intérieurs, appelé l'algorithme d'échelle projective. Au moment de son introduction, on prétendait que l'algorithme de Karmarkar était 50 fois plus

rapide que la méthode du simplexe ! En 1990, les travaux précurseurs de Karmarkar avaient donné lieu à des centaines d'articles et à une vaste classe de méthodes en points intérieurs. Il est apparu clairement que, même si les affirmations initiales étaient quelque peu exagérées, les méthodes de points intérieurs deviennent compétitives pour les très "gros" problèmes et pour certaines classes spéciales de problèmes qui ont toujours été particulièrement difficiles pour la méthode du simplexe.

III.6.4.2.1 L'algorithme de Karmarkar et ses variantes

L'algorithme de mise à l'échelle projective de Karmarkar part d'une solution intérieure, transforme la région réalisable de sorte que la solution actuelle se trouve au centre de la région réalisable transformée, puis se déplace dans la direction de la descente la plus raide avec une longueur de pas qui s'arrête avant la limite de la région réalisable transformée. Ensuite, une transformation inverse est appliquée pour ramener la solution améliorée dans la région réalisable d'origine. Le processus est répété jusqu'à ce qu'un optimum soit obtenu avec la précision souhaitée.

L'algorithme de Karmarkar est conçu pour les problèmes LP exprimés sous une forme non standard ($\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ soumis à $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\sum x_j = 1$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, et la valeur optimale de la fonction objectif est nulle) et implique une transformation projective complexe à chaque itération. Les premières mises en œuvre ont révélé des difficultés à convertir un problème LP standard en structure de Karmarkar, ce qui rendait la matrice \mathbf{A} deux fois plus grande. Une classe importante d'algorithmes de points intérieurs, appelés algorithmes de mise à l'échelle affine - des variantes de l'algorithme de Karmarkar - résolve ces difficultés. Les algorithmes de mise à l'échelle affine primaux résolvent les problèmes LP primaux sous forme standard, tandis que les algorithmes affines doubles résolvent les problèmes LP doubles sous forme d'inégalités. Ces deux algorithmes utilisent la transformation affine, qui est plus simple que la transformation projective. Les recherches actuelles suggèrent que les algorithmes de mise à l'échelle projective ne rivalisent pas favorablement, dans la mise en œuvre pratique, avec les algorithmes de mise à l'échelle affine et leurs variantes. Dans cette section, nous allons discuter des principes de base des méthodes

de points intérieurs pour les LP, en particulier de l'algorithme de mise à l'échelle affine primale.

III.6.4.2 Algorithme de mise à l'échelle affine primale

Considérons le problème LP sous sa forme standard :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimum} & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sous les contraintes} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{array} \quad (III.6)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (III.7)$$

où \mathbf{A} est une matrice de rang $(m \times n)$ et \mathbf{b} , \mathbf{c} et \mathbf{x} sont des vecteurs colonnes. La région réalisable est définie comme suit :

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Définition 1 :

\mathbf{x}^0 est appelé un point intérieur de \mathbf{S} si \mathbf{x}^0 appartient à \mathbf{S} et si chaque composante de \mathbf{x} est positive, c'est-à-dire $x_j > 0$ pour tous les $j = 1, 2, \dots, n$.

Tout comme la méthode du simplexe, un algorithme de point intérieur comporte les trois étapes suivantes :

Etape 1 : Trouver une solution de point intérieur pour commencer la méthode.

Etape 2 : Générer le point intérieur suivant qui sera faisable et à l'intérieur, avec une valeur de fonction objective inférieure.

Etape 3 : Testez l'optimalité du nouveau point. S'il n'est pas optimal, répétez l'étape 2 jusqu'à ce que l'optimalité soit atteinte.

Nous allons d'abord discuter de l'étape la plus importante, à savoir l'étape 2, de l'algorithme. Karmarkar, dans le développement de son algorithme, fournit deux principes importants qui sont fondamentaux pour tous les algorithmes de points intérieurs.

1. Centrage. Il est toujours avantageux de sélectionner un point intérieur au "centre" de la région réalisable, par exemple, un point intérieur qui est équidistant des "murs" de la région réalisable ou des axes de coordonnées.

2. Direction de la descente la plus raide. Étant donné que le point actuel est centré, la meilleure direction à utiliser pour diminuer la fonction objectif est la direction de la descente la plus raide.

Contexte mathématique. Pour expliquer davantage les principes de Karmarkar, nous devons introduire le concept de direction, de déplacement le long d'une direction, de direction de descente et de direction réalisable.

Définition 2 :

Un vecteur \mathbf{d} est appelé direction si toutes ses composantes ne sont pas nulles. Étant donné un point \mathbf{x}^0 et une direction \mathbf{d} , se déplacer le long d'une direction est équivalent à générer des points donnés par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{d} \tag{III.8}$$

où λ est un scalaire positif.

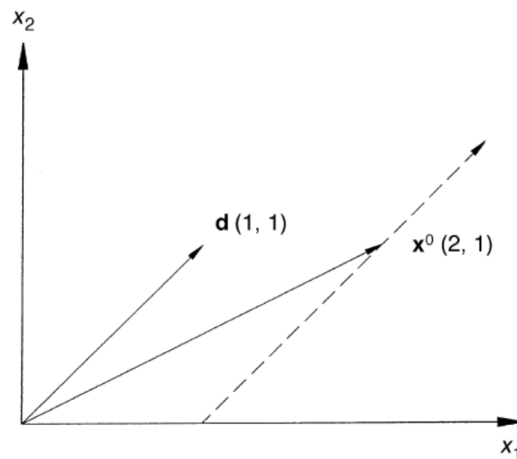


Figure (III.8) : Déplacement le long d'une direction.

Ceci est illustré à la figure (III.8). Se déplacer dans la direction \mathbf{d} à partir de \mathbf{x}^0 revient essentiellement à se déplacer parallèlement au vecteur directionnel, comme le donne l'équation suivante :

$$\mathbf{x}^T = (2,1) + \lambda(1,1) = [(2 + \lambda), (4 + \lambda)]$$

Pour $\lambda > 0$, on se déplace le long de la direction \mathbf{d} , et pour $\lambda < 0$, on se déplace contre la direction \mathbf{d} .

Définition 3 :

Une direction \mathbf{d} est une direction de descente si le déplacement le long de cette direction diminue la valeur de la fonction objective Z .

Pour que \mathbf{d} soit une direction de descente, on doit avoir :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 \quad (III.9)$$

En utilisant l'équation (III.8), cela implique que :

$$\mathbf{c}^T (\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{d}) < \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 \quad \text{ou} \quad \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$$

Puisque $\lambda > 0$, cela implique que l'on doit avoir $\mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$ pour que \mathbf{d} soit une direction de descente. Si \mathbf{c} n'est pas un vecteur nul, alors on peut choisir $\mathbf{d} = -\mathbf{c}$ auquel cas le vecteur direction est une direction décroissante puisque :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{d} = \mathbf{c}^T (-\mathbf{c}) = -\|\mathbf{c}\|^2 < 0$$

Ainsi, le négatif du vecteur objectif est toujours une direction de descente. De plus, on peut montrer que c'est en fait la direction de descente la plus ferme parmi toutes les directions de descente. S'il n'y a pas de contraintes explicites données par $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, alors on peut se déplacer dans n'importe quelle direction à partir d'un point intérieur d'une petite quantité sans violer les contraintes de non-négativité. Cependant, nous devons nous assurer que les contraintes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sont satisfaites lorsque nous nous déplaçons dans la direction \mathbf{d} .

Définition 4 :

Une direction \mathbf{d} est une direction réalisable si le déplacement le long de cette direction satisfait les contraintes LP explicites, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, c'est-à-dire,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{d}) = \mathbf{b}$$

Puisque $\mathbf{Ax}^0 = \mathbf{b}$ (\mathbf{x}^0 était une solution réalisable au départ), cela implique que :

$$\lambda \mathbf{Ad} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Ad} = \mathbf{0}$$

En d'autres termes, pour que \mathbf{d} soit une direction réalisable, elle doit satisfaire $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Bien sûr, elle doit également satisfaire $\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ pour satisfaire les restrictions de non négativité. Cependant, nous les traiterons implicitement en utilisant un test de rapport similaire à la règle du rapport minimum dans la méthode du simplexe.

En résumé, étant donné un point intérieur \mathbf{x}^0 :

(1) Une direction réalisable est un vecteur $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ qui satisfait $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$. L'ensemble de tous les \mathbf{d} qui satisfont $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ est appelé l'espace nul de la matrice \mathbf{A} .

(2) Une direction de descente est un vecteur $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ qui satisfait à $\mathbf{c}^T\mathbf{d} < 0$. La direction de descente la plus raide est donnée par $\mathbf{d} = -\mathbf{c}$.

III.6.4.2.3 Conditions d'optimalité

Nous utilisons le théorème de dualité faible pour développer les conditions d'optimalité des algorithmes de points intérieurs. Considérons les problèmes primoduaux donnés ci-dessous :

- Primal :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimum} & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sous les contraintes} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

- Double :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximum} & \mathbf{b}^T \mathbf{w} \\ \text{Sous les contraintes} & \mathbf{A}^T \mathbf{w} \leq \mathbf{c}, \quad \mathbf{w} \quad \text{sans restriction de signe} \end{array}$$

où \mathbf{w} est un vecteur colonne de dimension m de variables duales. Le théorème de dualité faible stipule que si \mathbf{x}^0 est réalisable pour le primal et \mathbf{w}^0 est réalisable pour le dual, alors $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 \geq \mathbf{b}^T \mathbf{w}^0$. De plus, lorsque les valeurs objectives sont égales, elles sont en fait des solutions optimales à leurs problèmes respectifs. La différence entre $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0$ et $\mathbf{b}^T \mathbf{w}^0$ est appelée l'écart de dualité. Lorsque l'écart de dualité est nul, nous avons la solution optimale. Ainsi, si nous pouvons obtenir une solution réalisable pour le dual à chaque itération, nous pouvons terminer l'algorithme lorsque l'écart de dualité est presque nul, c'est-à-dire :

$$|\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{w}| < \varepsilon \tag{III. 10}$$

où ε est un très petit nombre.

III.6.4.3 La programmation non linéaire

Le problème générique de la programmation non linéaire, ou optimisation non linéaire, implique la minimisation d'une fonction non linéaire soumise à des contraintes non linéaires. Des cas particuliers de programmation non linéaire apparaissent lorsque, par exemple, la fonction objectif est quadratique, les contraintes sont des bornes, ou les contraintes sont linéaires (égalités ou inégalités) [73].

III.6.4.3.1 Principes fondamentaux des algorithmes d'optimisation non linéaire sous contrainte

Dans cette partie, nous commençons notre discussion pour présenter les différents algorithmes qui résolvent le problème général d'optimisation non linéaire sous contraintes (III.1). Il n'existe pas de taxonomie standard pour ces algorithmes mais ils sont regroupés selon différentes approches comme suit :

- les algorithmes de résolution des problèmes de programmation quadratique,
- les méthodes de pénalité et de Lagrange augmenté,
- les méthodes de programmation quadratique séquentielle (SQP),
- les méthodes de points intérieurs pour la programmation non linéaire.

III.6.4.3.2 Méthodes de points intérieurs pour la programmation non linéaire

Les méthodes des points intérieurs (ou barrières) se sont avérées aussi efficaces pour l'optimisation non linéaire que pour la programmation linéaire. Le problème étudié (III.3) s'écrit comme suit :

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}) \quad (III. 11a)$$

$$\text{Sous les contraintes} \quad \mathbf{c}_E(\mathbf{x}) = 0 \quad (III. 11b)$$

$$\mathbf{c}_I(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = 0 \quad (III. 11c)$$

$$\mathbf{s} \geq 0 \quad (III. 11d)$$

Le vecteur $\mathbf{c}_I(\mathbf{x})$ est formé à partir des fonctions scalaires $c_i(\mathbf{x})$, $i \in \mathcal{Z}$, et de même pour $\mathbf{c}_E(\mathbf{x})$. Notez que nous avons transformé les inégalités $\mathbf{c}_I(\mathbf{x}) \leq 0$ en égalités par l'introduction d'un vecteur \mathbf{s} de variables souples. Nous utilisons n pour désigner le

nombre de contraintes d'égalité (c'est-à-dire la dimension du vecteur \mathbf{c}_E) et m pour désigner le nombre de contraintes d'inégalité (la dimension de \mathbf{c}_I).

La formulation des méthodes de barrière associé au problème (III.11) pour les méthodes de point intérieurs peuvent être se présenter comme suit :

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^m \ln s_i \quad (III.12a)$$

$$\text{Sous les contraintes} \quad \mathbf{c}_E(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (III.12b)$$

$$\mathbf{c}_I(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (III.12c)$$

où μ est un paramètre positif. Il n'est pas nécessaire d'inclure l'inégalité $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ dans (III.12) car la minimisation du terme barrière $-\mu \sum_{i=1}^m \ln s_i$ dans (III.11a) empêche les composantes de \mathbf{s} de devenir trop proches de zéro. (Rappelons que $(-\ln t \rightarrow \infty$ lorsque $t \downarrow 0$). L'approche par barrière consiste à trouver des solutions (approximatives) du problème par barrière (III.12) pour une séquence de paramètres de barrière $\{\mu_k\}$ positifs qui converge vers zéro.

Les conditions d'optimalité KKT "Karush–Kuhn–Tucker" pour le problème par barrière peuvent être écrites comme suit :

$$\nabla f(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_E^T(\mathbf{x})\mathbf{y} - \mathbf{A}_I^T(\mathbf{x})\mathbf{z} = \nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (III.13a)$$

$$-\mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{Z} = \mathbf{0}, \quad (III.13b)$$

$$\mathbf{c}_E(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (III.13c)$$

$$\mathbf{c}_I(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (III.13d)$$

où $\mathbf{A}_E(\mathbf{x})$ et $\mathbf{A}_I(\mathbf{x})$ sont les matrices Jacobiennes des fonctions \mathbf{c}_E et \mathbf{c}_I , respectivement, et \mathbf{y} et \mathbf{z} sont leurs multiplicateurs de Lagrange. Nous définissons \mathbf{S} et \mathbf{Z} comme étant les matrices diagonales dont les entrées diagonales sont données par les vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{z} , respectivement, L est la lagrangienne, et $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$.

La procédure consiste à résoudre (approximativement) les conditions KKT perturbées (III.12) pour une séquence de paramètres positifs $\{\mu_k\}$ qui converge vers zéro, tout en maintenant $\mathbf{s}, \mathbf{z} > \mathbf{0}$. L'espoir est que, dans la limite, nous obtiendrons un point qui satisfait les conditions KKT pour le programme non linéaire (III.11).

En appliquant la méthode de Newton au système non linéaire (III.13), par un pas sur les variables (x, s, y, z) , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 L & 0 & -A_E^T(x) & -A_I^T(x) \\ 0 & Z & 0 & S \\ A_E(x) & 0 & 0 & 0 \\ A_I(x) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_s \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) - A_E^T(x)y - A_I^T(x)z \\ Sz - \mu e \\ c_E(x) \\ c_I(x) - s \end{bmatrix} \quad (\text{III. 14})$$

où $I = \{1, \dots, m_I\}$.

Après avoir déterminé le pas (p_x, p_s, p_y, p_z) , nous effectuons une série d'itérations jusqu'à ce que les conditions KKT soient satisfaites. La condition d'arrêt est définie en termes de fonction d'erreur ε donnée par :

$$\varepsilon(x, s, y, z; \mu) = \max\{\|\nabla f(x) - A_E(x)^T y - A_I(x)^T z\|, \|SZ - \mu e\|, \|c_E(x)\|, \|c_I(x) - s\|\} \quad (\text{III. 15})$$

III.6.4.3.3 La méthode de points intérieurs à région de confiance

Nous considérons maintenant la méthode de points intérieurs qui utilise des régions de confiance pour favoriser la convergence. La formulation des régions de confiance permet une grande liberté dans le choix du Hessien $H(x)$ et fournit un mécanisme pour faire face aux singularités du Jacobien et du Hessien.

Le problème de la barrière (III.12) est un problème d'optimisation avec des contraintes d'égalité et peut être résolu en utilisant une méthode de programmation quadratique séquentielle avec des régions de confiance adaptée.

A l'itération (x, s) , et pour un paramètre de barrière donné μ , nous calculons d'abord les estimations du multiplicateur de Lagrange (y, z) , puis nous calculons un pas $p = (p_x, p_s)$ qui résolve approximativement le sous-problème :

$$\min_{p_x, p_s} \nabla f^T p_x + \frac{1}{2} p_x^T \nabla_{xx}^2 L p_x - \mu e^T S^{-1} p_s + \frac{1}{2} p_s^T \Sigma p_s \quad (\text{III. 16a})$$

$$\text{Sous les contraintes} \quad A_E(x) p_x + c_E(x) = r_E \quad (\text{III. 16b})$$

$$A_I(x) p_x - p_s + (c_I(x) - s) = r_I \quad (\text{III. 16c})$$

$$\|(p_x, S^{-1} p_s)\|_2 \leq \Delta \quad (\text{III. 16d})$$

$$p_s \geq -\tau s \quad (\text{III. 16e})$$

où $\Sigma = \mathcal{S}^{-1}\mathbf{Z}$ est la matrice primo-duale, le scalaire $\tau \in (0,1)$ est choisi proche de 1 et Δ est le rayon de la région de confiance. La condition (III.16e), appelée fraction à la règle de la limite, empêche les variables \mathbf{s} et \mathbf{z} de s'approcher trop rapidement de leur limite inférieure de 0. Nous choisissons le paramètre $\mathbf{r} = (r_E, r_I)$ par un calcul auxiliaire. La condition d'arrêt est (III.15).

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé l'architecture et les modèles des réseaux de neurones artificiels et les algorithmes de la programmation linéaire et non linéaire, une classe spéciale de problèmes d'optimisation avec des contraintes linéaires et non linéaires et des fonctions objectives linéaires et non linéaires. Les modèles de programmation linéaire (LP) sont faciles à résoudre sur le plan informatique et ont un large éventail d'applications dans divers domaines. Nous avons également développé l'algorithme du Karmarkar pour résoudre les problèmes généraux de programmation linéaire et l'on comparé avec l'algorithme simplexe. Nous avons ensuite discuté de la manière d'effectuer une analyse de post-optimalité sur les solutions LP. La possibilité d'effectuer une analyse de ce type est la principale raison du succès de la programmation linéaire dans la pratique. D'autres utilisations pratiques de la programmation linéaire consistent à résoudre des problèmes de programmation en nombres entiers et non linéaires sous la forme d'une séquence de problèmes LP.

Dans la suite de ce chapitre nous allons appliquer une méthode stochastique appropriée pour la résolution du problème de l'écoulement instationnaire d'un nanofluide par écrasement entre deux plaques parallèles.

Chapitre 4 : Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Généralement les équations mathématique définissant les problèmes de la mécanique des fluides avec transfert de chaleur sont intrinsèquement des systèmes dynamiques non linéaires et n'ont pas de solution exacte. Cependant, des solutions numériques et analytiques pour ce type de problèmes ont été largement rapportées dans la littérature, y compris la méthode de perturbation de l'homotopie (HPM) [74,75], les méthodes d'analyse de l'homotopie (HAM) [76], la méthode de décomposition adomienne [77], la méthode de transformation différentielle (DTM) [78], les méthodes d'itération variationnelle (VIM) [79], etc.

Dans cette partie de la thèse, des nouvelles techniques intelligentes sont utilisées pour résoudre les équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre 4 résultant d'un écoulement nanofluide instable par écrasement. Les fonctions d'activation utilisées pour développer les trois modèles de résolution sont la log-sigmoïde, la base radiale et la tan-sigmoïde. Le réseau de neurones à action directe de chaque modèle est optimisé avec la méthode de points intérieurs (IPM) pour trouver les poids des réseaux optimaux. Les résultats obtenus sont confrontés avec les solutions numériques et avec d'autres résultats antérieurs. Une étude paramétrique sera effectuée pour voir l'influence de quelques paramètres sur le comportement de l'écoulement. Les solutions obtenues de la vitesse et de la température sans dimensions sont tracés et commentées.

IV.2 Modélisation des réseaux de neurones

Les réseaux de neurones artificiels sont largement utilisés pour approximer la solution des équations différentielles. La solution $f(\eta)$ de l'équation différentielle adimensionnelle et sa dérivée d'ordre n , $f^{(n)}(\eta)$ peuvent être approximées par la formulation continue suivante des réseaux de neurones [80, 81] :

$$\tilde{f}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i g(\alpha_i \eta + \beta_i), \quad (IV.1)$$

et ses dérivées sont :

$$\tilde{f}^{(n)}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i g^{(n)}(\alpha_i \eta + \beta_i), \quad (IV.2)$$

où m est le nombre de neurones, g est la fonction d'activation, et (w, α, β) sont les poids.

Les fonctions d'activation utilisées dans ce travail sont la log-sigmoïde g_{LS} , la base radiale g_{RB} et la tan-sigmoïde g_{TS} et peuvent être écrites sous la forme générale suivante :

$$g_{LS}(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \quad (IV.3)$$

$$g_{RB}(t) = e^{-t^2} \quad (IV.4)$$

$$g_{TS}(t) = \frac{2}{1 + e^{-2t}} - 1 \quad (IV.5)$$

Des réseaux de neurones à équations différentielles ordinaires utilisant une fonction d'activation log-sigmoïde (DENN-LS) ont été développés pour approximer les solutions des équations (II.8) et (II.9). Dans ce cas, les solutions $f(\eta)$, $\theta(\eta)$ et leurs dérivées sont données par la formulation continue suivante :

$$\tilde{f}_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \frac{1}{1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)}} \quad (IV.6)$$

$$\tilde{f}'_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i \frac{e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^2} \quad (IV.7)$$

$$\tilde{f}''_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^2 \left(\frac{2e^{-2(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^3} - \frac{e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^2} \right) \quad (IV.8)$$

$$\tilde{f}'''_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^3 \left(\frac{6e^{-3(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^4} - \frac{6e^{-2(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^3} + \frac{e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^2} \right) \quad (IV.9)$$

$$\tilde{f}^{iv}_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^4 \left(\frac{24e^{-4(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^5} - \frac{36e^{-3(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^4} + \frac{14e^{-2(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^3} - \frac{e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)}}{(1 + e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)})^2} \right) \quad (IV.10)$$

$$\tilde{\theta}_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m \bar{w}_i \frac{1}{1 + e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)}}, \quad (IV.11)$$

$$\tilde{\theta}'_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m \bar{w}_i \bar{\alpha}_i \frac{e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)}}{(1 + e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)})^2}, \quad (IV.12)$$

$$\tilde{\theta}''_{LS}(\eta) = \sum_{i=1}^m \bar{w}_i \bar{\alpha}_i^2 \left(\frac{2e^{-2(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)}}{(1 + e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)})^3} - \frac{e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)}}{(1 + e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)})^2} \right). \quad (IV.13)$$

Dans le cas des réseaux de neurones à équations différentielles ordinaires utilisant une fonction d'activation à base radiale (DENN-RB), les solutions $f(\eta)$, $\theta(\eta)$ et leurs dérivées peuvent être approximées comme suit :

$$\tilde{f}_{RB}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} \quad (IV.14)$$

$$\tilde{f}'_{RB}(\eta) = \sum_{i=1}^m -2w_i \alpha_i (\alpha_i \eta + \beta_i) e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2}, \quad (IV.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}''_{RB}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^2 & \left(-2(\alpha_i \eta + \beta_i) e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} \right. \\ & \left. + 4(\alpha_i \eta + \beta_i)^2 e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} \right), \end{aligned} \quad (IV.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}'''_{RB}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^3 & \left(12(\alpha_i \eta + \beta_i) e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} \right. \\ & \left. - 8(\alpha_i \eta + \beta_i)^3 e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} \right), \end{aligned} \quad (IV.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}''''_{RB}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^4 & \left(12(\alpha_i \eta + \beta_i) e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} - 48(\alpha_i \eta + \beta_i)^2 e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} \right. \\ & \left. + 16(\alpha_i \eta + \beta_i)^4 e^{-(\alpha_i \eta + \beta_i)^2} \right) \end{aligned} \quad (IV.18)$$

$$\tilde{\theta}_{RB}(\eta) = \sum_{i=1}^m \bar{w}_i e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)^2}, \quad (IV.19)$$

$$\tilde{\theta}'_{RB}(\eta) = \sum_{i=1}^m -2\bar{w}_i \bar{\alpha}_i (\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i) e^{-(\bar{\alpha}_i \eta + \bar{\beta}_i)^2}, \quad (IV.20)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}''_{RB}(\eta) &= \sum_{i=1}^m -2\bar{w}_i\bar{\alpha}_i^2(\bar{\alpha}_i\eta + \bar{\beta}_i)e^{-(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)^2} \\ &\quad + 4\bar{w}_i\bar{\alpha}_i^2(\bar{\alpha}_i\eta + \bar{\beta}_i)^2 e^{-(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)^2}\end{aligned}\quad (IV.21)$$

De même, pour les réseaux de neurones à équations différentielles ordinaires utilisant la fonction d'activation tan-sigmoïde (DENN-TS), les solutions $f(\eta)$, $\theta(\eta)$ et leurs dérivées peuvent être approximées comme suit :

$$\tilde{f}_{TS}(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \left(\frac{2}{1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)}} - 1 \right) \quad (IV.22)$$

$$\tilde{f}'_{TS}(\eta) = \sum_{i=1}^m 4w_i\alpha_i \left(\frac{e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)}}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^2} \right) \quad (IV.23)$$

$$\tilde{f}''_{TS}(\eta) = \sum_{i=1}^m 8w_i\alpha_i^2 \left(\frac{2(e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^2}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^3} - \frac{e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)}}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^2} \right) \quad (IV.24)$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}'''_{TS}(\eta) &= \sum_{i=1}^m 16w_i\alpha_i^3 \left(\frac{6(e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^3}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^4} - \frac{6(e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^2}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)}}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^2} \right)\end{aligned}\quad (IV.25)$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}''''_{TS}(\eta) &= \sum_{i=1}^m 32w_i\alpha_i^4 \left(\frac{24(e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^4}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^5} - \frac{36(e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^3}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{14(e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^2}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^3} - \frac{e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)}}{(1 + e^{-2(\alpha_i\eta+\beta_i)})^2} \right)\end{aligned}\quad (IV.26)$$

$$\tilde{\theta}_{TS}(\eta) = \sum_{i=1}^m \bar{w}_i \left(\frac{2}{1 + e^{-2(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)}} - 1 \right) \quad (IV.27)$$

$$\tilde{\theta}'_{TS}(\eta) = \sum_{i=1}^m 4\bar{w}_i\bar{\alpha}_i \left(\frac{e^{-2(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)}}{(1 + e^{-2(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)})^2} \right) \quad (IV.28)$$

$$\tilde{\theta}''_{TS}(\eta) = 8\bar{w}_i\bar{\alpha}_i^2 \left(\frac{2(e^{-2(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)})^2}{(1 + e^{-2(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)})^3} - \frac{e^{-2(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)}}{(1 + e^{-2(\bar{\alpha}_i\eta+\bar{\beta}_i)})^2} \right). \quad (IV.29)$$

Les paramètres inconnus $(\bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ utilisés pour la solution de température $\tilde{\theta}(\eta)$ sont différents de (w_i, α_i, β_i) ceux utilisés pour la solution de vitesse $\tilde{f}(\eta)$. Les fonctions d'erreurs pour la vitesse et la température des équations (II.11) et (II.12) en utilisant les schémas des réseaux de neurones en définissant la somme des erreurs quadratiques moyennes sont :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{f1} + \varepsilon_{f2} \quad (IV.30)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{f\theta1} + \varepsilon_{f\theta2} \quad (IV.31)$$

où ε_{f1} et $\varepsilon_{f\theta1}$ sont les erreurs résultant des solutions approximatives des équations différentielles de la vitesse et de la température et sont donnés comme suit :

$$\varepsilon_{f1} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=0}^K \left(\tilde{f}^{iv}_k - SA_1(1-\phi)^{2.5} (\eta \tilde{f}'''_k + 3\tilde{f}''_k + \tilde{f}'_k \tilde{f}''_k - \tilde{f}_k \tilde{f}'''_k) \right)^2 \quad (IV.32)$$

$$\varepsilon_{f\theta1} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=0}^K \left(\tilde{\theta}''_k + Pr S \left(\frac{A_2}{A_3} \right) (\tilde{f}_k - \eta) \tilde{\theta}'_k + \frac{Pr Ec}{A_3(1-\phi)^{2.5}} (\tilde{f}''^2_k + 4\delta^2 \tilde{f}'^2_k) \right)^2 \quad (IV.33)$$

où $K = 1/h$, $\tilde{f}_k = \tilde{f}(\eta_k)$, $\tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}(\eta_k)$ et $\eta_k = kh$, l'intervalle $\eta \in [0, N]$ est divisé en K étapes, $\eta \in (\eta_0 = 0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_K = N)$ avec une taille de pas h .

De la même manière, les erreurs ε_{f2} et $\varepsilon_{f\theta2}$ provenant des conditions aux limites sont données comme suit :

$$\varepsilon_{f2} = \frac{1}{4} \left((\tilde{f}_0)^2 + (\tilde{f}''_0)^2 + (\tilde{f}_K - 1)^2 + (\tilde{f}'_K)^2 \right) \quad (IV.34)$$

$$\varepsilon_{f\theta2} = \frac{1}{2} \left((\tilde{\theta}'_0)^2 + (\tilde{\theta}_K - 1)^2 \right). \quad (IV.35)$$

Notre objectif est de minimiser ε_f comme fonction d'erreur pour la vitesse $\tilde{f}(\eta)$ avec w_i, α_i et β_i comme variables de décision. Lorsque la fonction de vitesse $\tilde{f}(\eta)$ est trouvée, nous minimisons la fonction d'erreur ε_θ pour la température $\tilde{\theta}(\eta)$ avec $\bar{w}_i, \bar{\alpha}_i$ et $\bar{\beta}_i$ comme variables de décision. Les architectures des réseaux de neurones pour la vitesse et la température sont représentées sur la figure (IV.2) et la figure (IV.3).

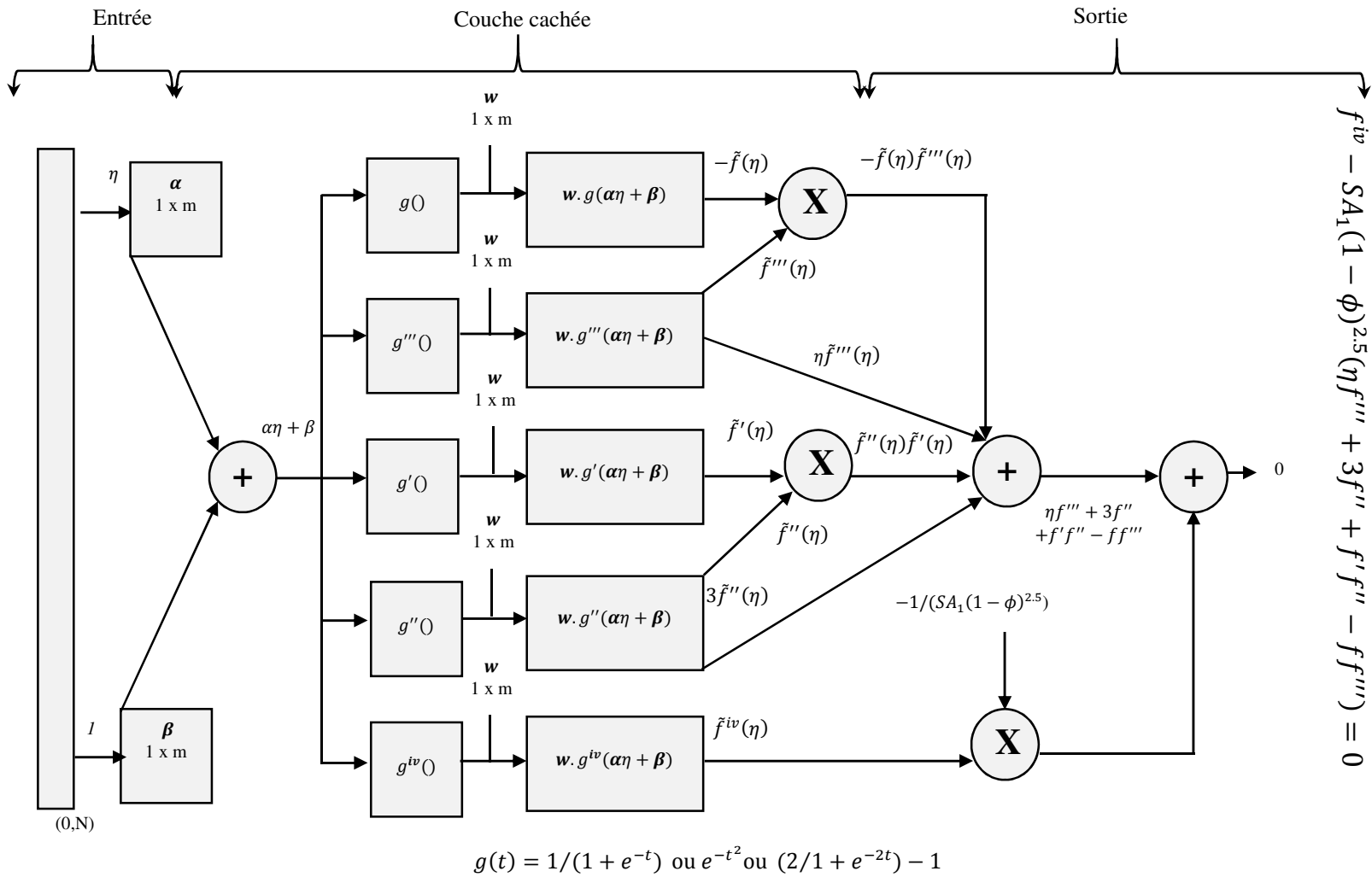


Figure (IV.1) : Schéma de réseau de neurones pour la vitesse.

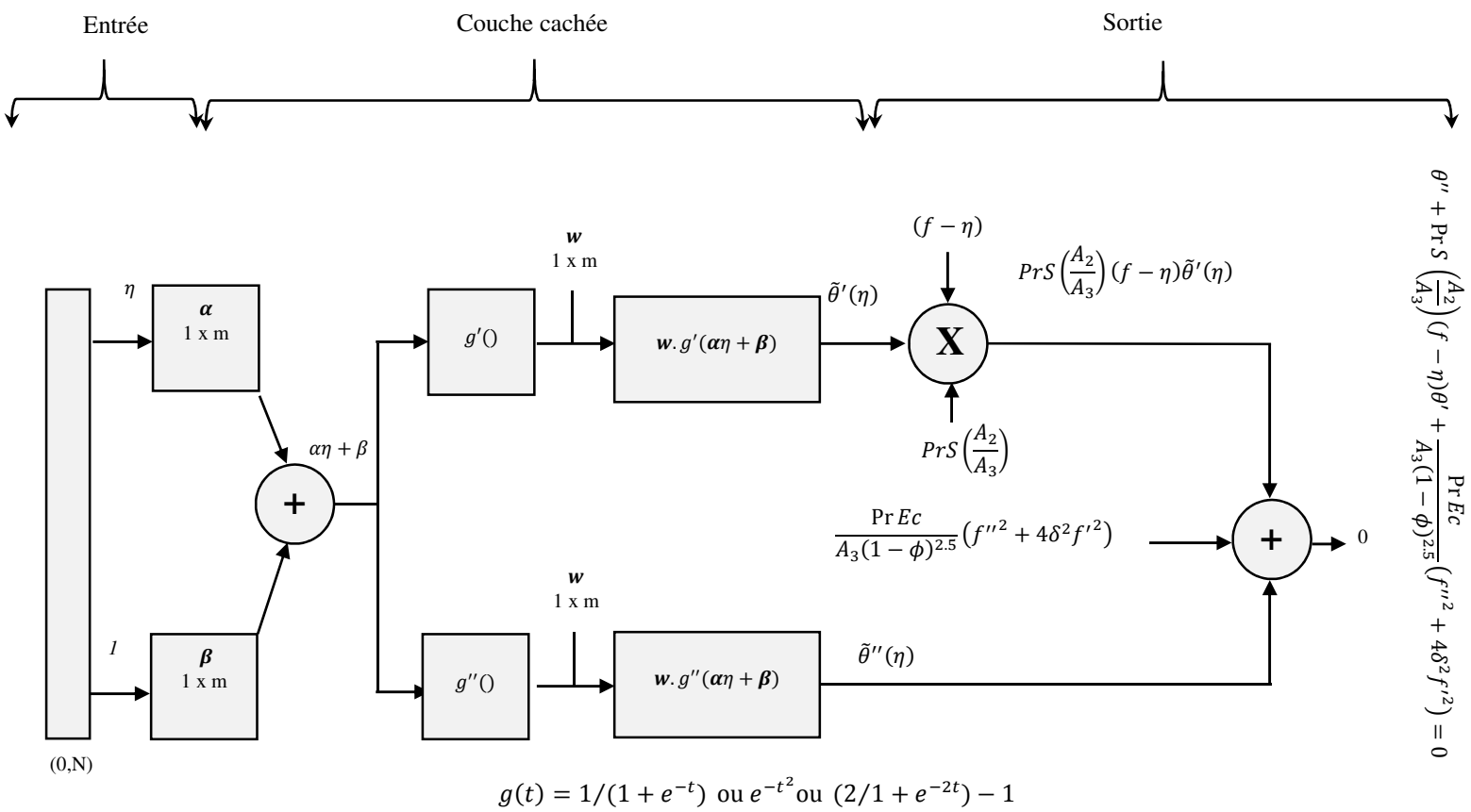


Figure (IV.2) : Schéma de réseau de neurones pour la température.

IV.3 Méthode d'optimisation

La méthode d'optimisation utilisée pour former les poids des solutions est basée sur la méthode des points intérieurs (IPM). Cette méthode utilise l'algorithme de Karmarkar, qui a été développé par Karmarkar en 1984 [72]. L'idée de base de cette méthode est de parcourir l'ensemble convexe pour trouver l'optimum en utilisant des fonctions barrières pour sécuriser la frontière du domaine [82].

Dans notre cas, la fonction objectif est ε_f pour la vitesse et ε_θ pour la température.

Nous devons trouver un vecteur \vec{Q}_v ($\vec{Q}_v = \{w_1, w_2, \dots, w_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$) pour la vitesse et \vec{Q}_θ ($\vec{Q}_\theta = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m\}$). Pour cela, le problème d'optimisation est donné comme suit :

Pour la vitesse :

$$\min_{\vec{Q}_v} \varepsilon_f(\vec{Q}_v) \quad (IV.36)$$

Sous les contraintes $h_1(\vec{Q}_v) = 0$

où les équations des contraintes sont obtenues à partir des équations (II.14).

Pour la température :

$$\min_{\vec{Q}_\theta} \varepsilon_\theta(\vec{Q}_\theta) \quad (IV.37)$$

Sous les contraintes $h_2(\vec{Q}_\theta) = 0$

où les équations des contraintes sont obtenues à partir des équations (II.14).

La méthode IPM utilise "Karush-Kuhn-Tucker (KKT)" pour les conditions d'optimalité et le gradient conjugué comme direction de descente. Le tableau (IV.1) montre les paramètres d'ajustement dans l'application d'optimisation intégrée dans "Matlab" qui sont utilisés dans les simulations pour former les poids.

Le travail à réaliser est de trouver pour chaque réseau de neurones les valeurs des poids qui minimisent l'erreur et donc la solution approximative tend vers la solution exacte. Nous commençons avec une estimation initiale arbitraire et une valeur

minimale de l'erreur comme critères d'arrêt. L'organigramme de principe global dans le cadre de ce travail est schématisé sur la figure (IV.3) (a) et (b).

Tableau (IV.1) : Paramètres utilisés dans les simulations.

Paramètres	Réglages/valeurs	Paramètres	Réglages/valeurs
Finite differences	Central differences	x- tolerance	10^{-20}
Hessian	BFGS	Function tolerance	10^{-30}
Min. perturbation	10^{-10}	Constraint tolerance	10^{-30}
Max. iterations	2000	Evaluate in parallel	yes
Max. function evaluations	25000	Scaling	Objective and constraints

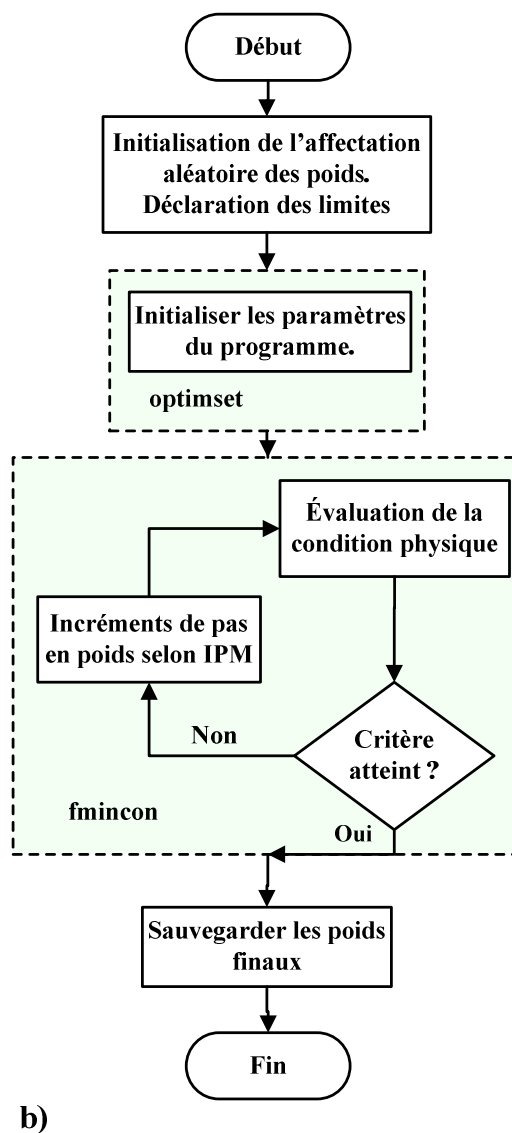
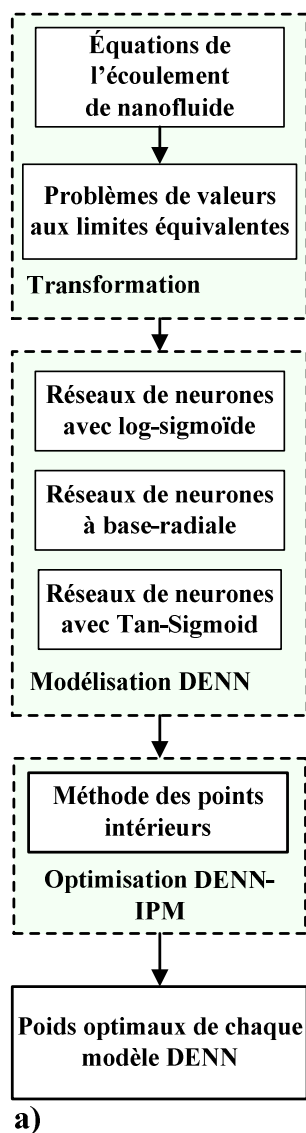


Figure (IV.3) : Processus de recherche des poids optimaux des réseaux de neurones (a) Procédure globale (b) Optimisation avec IPM [14].

IV.4 Validation des modèles

Les modèles de réseaux de neurones proposés, optimisés avec la méthode des points intérieurs, sont évalués pour le cas d'un écoulement de naofluide par écrasement entre deux plaques parallèles. Les paramètres de notre écoulement sont $S = 1$, $Pr = 6.2$, $Ec = 0.01$, $\phi = 0.02$ (Cu-eau) et $\delta = 0.01$.

Nous appliquons les trois modèles de réseaux de neurones avec 10 neurones chacun pour résoudre ce problème. Dans chaque modèle, il y a un total de 30 paramètres ajustables inconnus ou poids (w, α, β) pour la vitesse et 30 pour la température. Afin d'optimiser les fonctions d'erreurs ε_f et ε_θ pour l'intervalle d'entrée de $\eta \in [0,1]$ avec un pas de 0,1. Les résultats sont présentés ici, ainsi qu'une analyse comparative avec la solution numérique standard et les résultats publiés précédemment.

Les poids trouvés par nos simulations sont donnés dans le tableau (IV.2) pour la vitesse et le tableau (IV.3) pour la température. Les représentations graphiques des poids optimisés avec l'algorithme DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM sont illustrées dans les figures (IV.4-IV.6), séparément. L'ensemble particulier de poids (profil de vitesse) à utiliser dans les équations (IV.6), (IV.14) et (IV.22) correspond aux valeurs des erreurs de $\varepsilon_f = 1,74 \times 10^{-10}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 2,31 \times 10^{-9}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 2,67 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM. L'ensemble particulier de poids (profil de température) à utiliser dans les équations (IV.11), (IV.19) et (IV.27) correspond aux valeurs des erreurs de $\varepsilon_\theta = 7.27 \times 10^{-10}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 3.93 \times 10^{-9}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 2.56 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM.

Tableau (IV.2) : Poids formés pour le profil de vitesse en utilisant les algorithmes DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM, et DENN-TS-IPM.

Poids	DENN-LS-IPM	DENN-RB-IPM	DENN-TS-IPM
w_1	9,85903578	-1,18861977	0,96854305
w_2	14,02157311	-3,04081045	-0,36153017
w_3	8,87524782	0,23691255	3,79512370
w_4	2,27000046	1,33369782	1,43529641
w_5	-2,29071474	5,45036297	-0,99793847
w_6	-8,81033255	-0,37207350	0,41396013
w_7	-6,42407413	0,46235793	0,09542334
w_8	-5,21618007	-0,30841519	-2,99202998
w_9	0,05150755	-6,14445842	-0,08261071
w_{10}	-13,2927419	-6,67564541	3,40798585
α_1	-3,59536147	0,95101756	-2,04475228
α_2	0,68099666	0,33809230	5,27474355
α_3	-2,15890077	1,13303757	0,86825039
α_4	1,51790619	-0,38769443	-1,05576889
α_5	0,85645079	0,62739312	-0,15042543
α_6	0,16133873	-0,56760987	-0,41285403
α_7	0,65093636	-2,32786872	1,77011216
α_8	0,93334086	-0,13531110	0,47842141
α_9	-2,50548363	0,79834330	1,37042738
α_{10}	3,306992649	1,29656876	-0,90168172
β_1	8,47859346	1,19603483	3,53196727
β_2	-0,24526973	-1,15992956	-9,10943499
β_3	4,59760784	-0,52557450	-0,33289826
β_4	1,28353848	-1,58914896	0,41375521
β_5	1,16814941	-1,36505461	5,77293064
β_6	-1,93904300	-2,99797991	0,08781148
β_7	2,04837113	-4,34952418	0,72692909
β_8	2,44208038	-1,74352127	5,96186740
β_9	6,33206488	-2,23791087	6,32841910
β_{10}	7,27296762	-3,81668156	2,08922558

Tableau (IV.3) : Poids formés pour le profil de température en utilisant les algorithmes DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM, et DENN-TS-IPM.

Poids	DENN-LS-IPM	DENN-RB-IPM	DENN-TS-IPM
\bar{w}_1	-6,40023559	1,14738952	-3,73547658
\bar{w}_2	0,44425139	-2,71234764	-1,90521967
\bar{w}_3	3,36466506	2,16715452	2,69135058
\bar{w}_4	-0,95178803	0,56871773	2,37952807
\bar{w}_5	-5,45517060	-0,25653662	0,67820441
\bar{w}_6	-1,27618122	-0,74141417	0,75507655
\bar{w}_7	2,41946366	0,84840335	0,38359132
\bar{w}_8	2,89725867	0,69725028	-2,30633733
\bar{w}_9	3,72707092	0,54311432	-1,69240740
\bar{w}_{10}	-4,82441864	-1,61491364	-3,80248921
$\bar{\alpha}_1$	4,07941778	-0,66406357	-0,02546664
$\bar{\alpha}_2$	-1,94344991	1,92462185	1,53932170
$\bar{\alpha}_3$	0,72733824	-0,52621666	0,91177224
$\bar{\alpha}_4$	-1,62472079	-0,89569983	-0,93633246
$\bar{\alpha}_5$	0,83036827	-1,12821514	-0,89083771
$\bar{\alpha}_6$	1,21978719	-2,16354603	-0,61114168
$\bar{\alpha}_7$	-1,68956274	-0,62515826	0,18360579
$\bar{\alpha}_8$	4,39558371	0,38911955	-1,22247005
$\bar{\alpha}_9$	-0,85661985	0,14594337	-1,35565086
$\bar{\alpha}_{10}$	-1,64282680	-0,72541857	2,92497652
$\bar{\beta}_1$	-7,10532977	0,35500443	0,15528804
$\bar{\beta}_2$	-0,48406944	-4,44388457	-2,25043973
$\bar{\beta}_3$	-0,60666862	3,94280035	0,01160845
$\bar{\beta}_4$	0,03736437	-0,67476793	-0,05259650
$\bar{\beta}_5$	-1,54761966	0,92179707	1,33835141
$\bar{\beta}_6$	-0,95560756	-3,88298344	0,43813327
$\bar{\beta}_7$	2,66266482	0,10215804	0,15209834
$\bar{\beta}_8$	-6,91455558	0,56481060	2,02379109
$\bar{\beta}_9$	5,63894221	2,01669566	2,40587089
$\bar{\beta}_{10}$	2,63429493	-0,13393288	-5,30185244

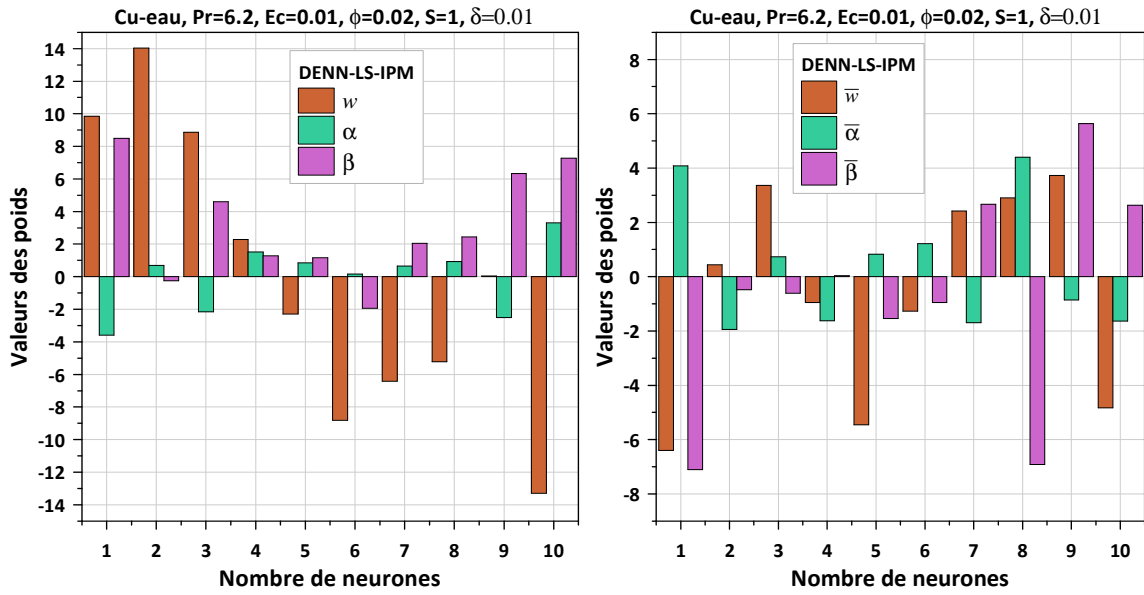


Figure (IV.4) : Les poids obtenus des réseaux de neurones optimisés avec IPM pour le schéma DENN-LS.

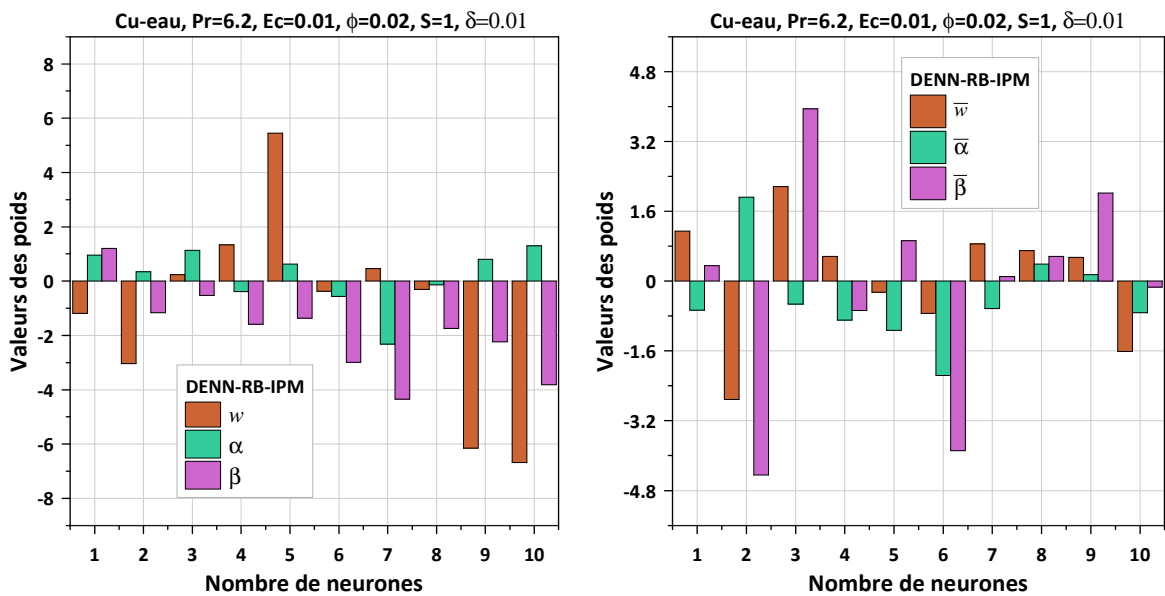


Figure (IV.5) : Les poids des réseaux de neurones optimisés avec IPM pour le schéma DENN-RB.

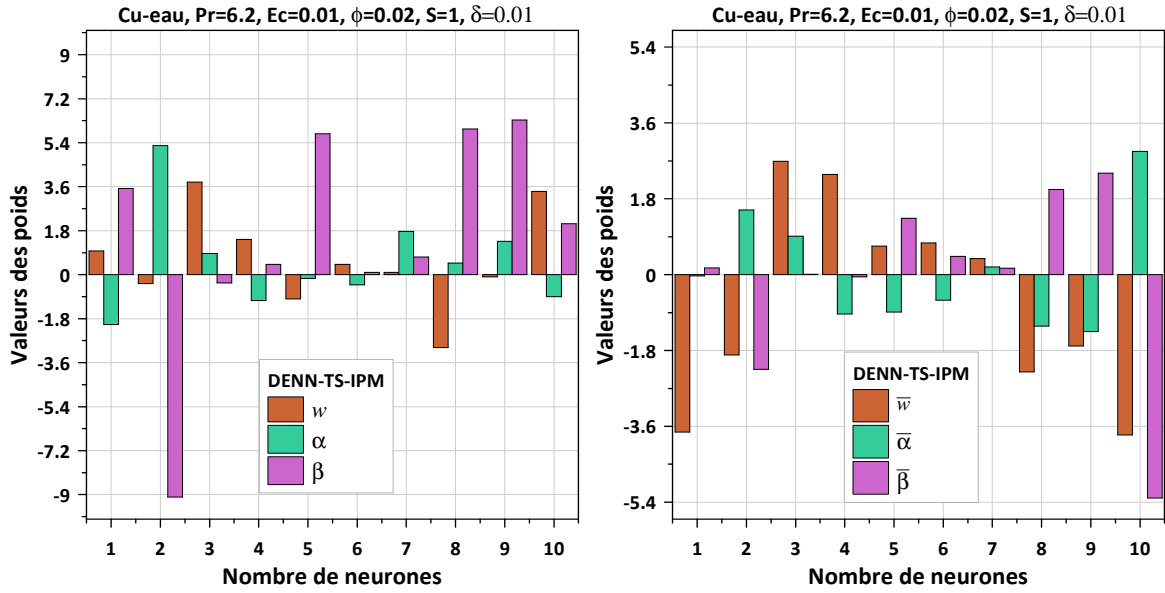


Figure (IV.6) : Les poids obtenus des réseaux de neurones optimisés avec IPM pour le schéma DENN-TS.

En utilisant les équations (IV.19, IV-11) et en substituant les valeurs des poids obtenus $\{w_1, w_2, \dots, w_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ du tableau (IV.2) et du tableau (IV.3) les poids $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m\}$, la vitesse et la température pour le schéma DENN-LS-IPM peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{LS}(\eta) \\ &= \frac{9.859}{1 + e^{-(-3.595\eta + 8.479)}} + \frac{14.022}{1 + e^{-(0.681\eta - 0.245)}} + \frac{8.875}{1 + e^{-(-2.159\eta + 4.598)}} \\ &+ \frac{2.270}{1 + e^{-(1.518\eta + 1.283)}} - \frac{2.291}{1 + e^{-(0.856\eta - 1.168)}} - \frac{8.810}{1 + e^{-(0.161\eta - 1.939)}} \\ &- \frac{6.424}{1 + e^{-(0.651\eta + 2.048)}} - \frac{5.216}{1 + e^{-(0.933\eta + 2.442)}} + \frac{0.052}{1 + e^{-(-2.505\eta + 6.332)}} \\ &- \frac{13.293}{1 + e^{-(3.307\eta + 7.273)}} \end{aligned} \quad (IV.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) &= -\frac{6.400}{1 + e^{-(4.079\eta - 7.105)}} + \frac{0.444}{1 + e^{-(-1.943\eta - 0.484)}} + \frac{3.364}{1 + e^{-(0.727\eta - 0.606)}} \\ &- \frac{0.951}{1 + e^{-(-1.624\eta + 0.037)}} - \frac{5.455}{1 + e^{-(0.830\eta - 1.547)}} - \frac{1.276}{1 + e^{-(1.219\eta - 0.955)}} \\ &+ \frac{2.419}{1 + e^{-(-1.689\eta + 2.662)}} + \frac{2.897}{1 + e^{-(4.395\eta - 6.914)}} + \frac{3.727}{1 + e^{-(-0.856\eta + 5.638)}} \\ &- \frac{4.824}{1 + e^{-(-1.642\eta + 2.634)}} \end{aligned} \quad (IV.39)$$

De même, en utilisant les équations (IV.14, IV-19), la vitesse et la température pour le schéma DENN-RB-IPM sont données :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) &= -1.189e^{-(0.951\eta+1.196)^2} - 3.041e^{-(0.338\eta-1.159)^2} + 0.237e^{-(1.133\eta-0.526)^2} \\ &+ 1.334e^{-(0.388\eta-1.589)^2} + 5.450e^{-(0.627\eta-1.365)^2} - 0.372e^{-(0.568\eta-2.998)^2} \\ &+ 0.462e^{-(2.328\eta-4.349)^2} - 0.308e^{-(0.135\eta-1.743)^2} - 6.144e^{-(0.798\eta-2.238)^2} \\ &- 6.676e^{-(1.296\eta-3.817)^2} \end{aligned} \quad (IV.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{RB}(\eta) &= 1.147e^{-(0.664\eta+0.355)^2} - 2.712e^{-(1.924\eta-4.443)^2} \\ &+ 2.167e^{-(0.526\eta+3.942)^2} + 0.568e^{-(0.895\eta-0.674)^2} \\ &- 0.256e^{-(1.128\eta+0.921)^2} - 0.741e^{-(2.163\eta-3.882)^2} \\ &+ 0.848e^{-(0.625\eta+0.102)^2} + 0.697e^{-(0.389\eta+0.564)^2} \\ &+ 0.543e^{-(0.145\eta+2.016)^2} - 1.614e^{-(0.725\eta-0.133)^2} \end{aligned} \quad (IV.41)$$

De la même manière, en utilisant les équations (IV.22, IV-27), le profil de vitesse et le profil de température pour DENN-TS-IPM sont les suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{TS}(\eta) &= \frac{1.937}{1 + e^{-2(-2.045\eta+3.532)}} - \frac{0.723}{1 + e^{-2(5.275\eta-9.109)}} + \frac{7.590}{1 + e^{-2(0.868\eta-0.333)}} \\ &+ \frac{2.870}{1 + e^{-2(-1.056\eta+0.4137)}} - \frac{1.996}{1 + e^{-2(-0.150\eta+5.773)}} \\ &+ \frac{0.828}{1 + e^{-2(-0.413\eta+0.0878)}} + \frac{0.191}{1 + e^{-2(1.770\eta+0.727)}} - \frac{5.984}{1 + e^{-2(0.478\eta+5.962)}} \\ &- \frac{0.165}{1 + e^{-2(1.370+6.328)}} + \frac{6.814}{1 + e^{-2(-0.901+2.089)}} - 5.682 \end{aligned} \quad (IV.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{TS}(\eta) &= -\frac{3.735}{1 + e^{-2(-0.025\eta+0.155)}} - \frac{1.905}{1 + e^{-2(1.539\eta-2.250)}} + \frac{2.691}{1 + e^{-2(0.911\eta+0.011)}} \\ &+ \frac{2.379}{1 + e^{-2(-0.936\eta-0.052)}} + \frac{0.678}{1 + e^{-2(-0.890\eta+1.338)}} + \frac{0.755}{1 + e^{-2(-0.611\eta+0.438)}} \\ &+ \frac{0.383}{1 + e^{-2(0.183\eta+0.152)}} - \frac{2.306}{1 + e^{-2(-1.222\eta+2.023)}} - \frac{1.692}{1 + e^{-2(-1.355\eta+2.405)}} \\ &- \frac{3.802}{1 + e^{-2(2.924\eta-5.301)}} + 3.277 \end{aligned} \quad (IV.43)$$

Les solutions exactes de ces équations nous sont plus disponibles, nous calculons donc la solution numérique par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 en utilisant la formulation intégrée de MATHEMATICA pour le même intervalle d'entrée. Ces résultats seront utilisés comme référence pour la comparaison.

La comparaison des résultats des schémas DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM avec la méthode numérique est donnée dans les tableaux (IV.4-IV.6).

Tableau (IV.4) : Comparaison entre les résultats de DENN-LS-IPM et de la méthode numérique.

η	$Cu - eau, Pr = 6.2, Ec = 0.01, \phi = 0.02, \delta = 0.01$					
	RK4	DENN-LS-IPM	Erreur	RK4	DENN-LS-IPM	Erreur
	$f(\eta)$	$\tilde{f}(\eta)$	$ f - \tilde{f} $	$\theta(\eta)$	$\tilde{\theta}(\eta)$	$ \theta - \tilde{\theta} $
0	0	0,0012462	0,0012462	1,03207	1,03205	0,0000211762
0,1	0,141359	0,142688	0,00132975	1,03206	1,03199	0,0000792505
0,2	0,280666	0,282076	0,00141024	1,03203	1,03189	0,000140818
0,3	0,415781	0,417269	0,00148789	1,03189	1,03169	0,000205796
0,4	0,544379	0,545942	0,00156313	1,03151	1,03123	0,000274175
0,5	0,663857	0,665494	0,00163659	1,03066	1,03032	0,000345529
0,6	0,771229	0,772938	0,00170911	1,02904	1,02862	0,000419403
0,7	0,863016	0,864798	0,00178182	1,02615	1,02566	0,000495898
0,8	0,93512	0,936976	0,00185614	1,02126	1,02068	0,000574951
0,9	0,982695	0,984629	0,00193384	1,01319	1,01253	0,000655172
1	1	1,00202	0,00201724	1	0,999264	0,000736494

Tableau (IV.5) : Comparaison entre les résultats de DENN-RB-IPM et de la méthode numérique.

η	$Cu - eau, Pr = 6.2, Ec = 0.01, \phi = 0.02, \delta = 0.01$					
	RK4	DENN-RB-IPM	Erreur	RK4	DENN-RB-IPM	Erreur
	$f(\eta)$	$\tilde{f}(\eta)$	$ f - \tilde{f} $	$\theta(\eta)$	$\tilde{\theta}(\eta)$	$ \theta - \tilde{\theta} $
0	0	-0,001730	0,0017300	1,03207	1,03214	0,0000761564
0,1	0,141359	0,139499	0,00185991	1,03206	1,03201	0,0000540171
0,2	0,280666	0,278667	0,0019992	1,03203	1,03185	0,00018687
0,3	0,415781	0,413635	0,00214601	1,03189	1,03157	0,00031808
0,4	0,544379	0,542082	0,00229702	1,03151	1,03107	0,000441782
0,5	0,663857	0,66141	0,00244704	1,03066	1,03011	0,000551137
0,6	0,771229	0,768641	0,00258852	1,02904	1,0284	0,000642141
0,7	0,863016	0,860304	0,00271133	1,02615	1,02544	0,000714607
0,8	0,93512	0,932317	0,00280275	1,02126	1,02049	0,000768143
0,9	0,982695	0,979848	0,00284717	1,01319	1,01239	0,000800518
1	1	0,997174	0,00282577	1	0,999184	0,000816449

Tableau (IV.6) : Comparaison entre les résultats de DENN-TS-IPM et de la méthode numérique.

η	$Cu - eau, Pr = 6.2, Ec = 0.01, \phi = 0.02, \delta = 0.01$					
	RK4	DENN-TS-IPM	Erreur	RK4	DENN-TS-IPM	Erreur
	$f(\eta)$	$\tilde{f}(\eta)$	$ f - \tilde{f} $	$\theta(\eta)$	$\tilde{\theta}(\eta)$	$ \theta - \tilde{\theta} $
0	0	-0,001434	0,0014348	1,03207	1,03237	0,00030628
0,1	0,141359	0,139819	0,0015396	1,03206	1,03223	0,000164704
0,2	0,280666	0,27902	0,00164626	1,03203	1,03206	0,000031029
0,3	0,415781	0,414035	0,00174558	1,03189	1,0318	0,0000913895
0,4	0,544379	0,542551	0,00182822	1,03151	1,03131	0,000200331
0,5	0,663857	0,661972	0,00188496	1,03066	1,03037	0,000294468
0,6	0,771229	0,769322	0,00190729	1,02904	1,02867	0,000373317
0,7	0,863016	0,861127	0,00188846	1,02615	1,02571	0,000437689
0,8	0,93512	0,933296	0,00182375	1,02126	1,02077	0,000489431
0,9	0,982695	0,980985	0,00171023	1,01319	1,01266	0,000530128
1	1	0,998453	0,00154707	1	0,999438	0,000561569

La comparaison de notre solution hybride obtenue par tous les schémas nous donne un bon accord avec la solution numérique calculée en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 entièrement explicite pour l'intervalle $\eta \in [0,1]$ avec un pas de 0,1 et celles trouvées par Sheikholeslami et al. [83] (Tableau (IV.7-IV.9)).

Tableau (IV.7) : Comparaison entre les résultats de DENN-LS-IPM et de Sheikholeslami et al. [83] pour $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$.

η	$Cu - eau, Pr = 6.2, Ec = 0.01, \phi = 0.02, \delta = 0.01$					
	Sheikholeslami et al. [84]	DENN-LS-IPM	Erreur	Sheikholeslami et al. [84]	DENN-LS-IPM	Erreur
	$f(\eta)$	$\tilde{f}(\eta)$	$ f - \tilde{f} $	$\theta(\eta)$	$\tilde{\theta}(\eta)$	$ \theta - \tilde{\theta} $
0	0	0,0012462	0,0012462	1,032066589	1,03205	1,6589E-05
0,1	0,141359	0,142688	0,001329	1,032064281	1,03199	7,4281E-05
0,2	0,280666	0,282076	0,00141	1,032032236	1,03189	0,000142236
0,3	0,415781	0,417269	0,001488	1,031892848	1,03169	0,000202848
0,4	0,544379	0,545942	0,001563	1,031508324	1,03123	0,000278324
0,5	0,663857	0,665494	0,001637	1,030664437	1,03032	0,000344437
0,6	0,771229	0,772938	0,001709	1,029040022	1,02862	0,000420022
0,7	0,863015	0,864798	0,001783	1,026152219	1,02566	0,000492219
0,8	0,93512	0,936976	0,001856	1,0212593	1,02068	0,0005793
0,9	0,982695	0,984629	0,001934	1,013186166	1,01253	0,000656166
1	1	1,00202	0,00202	1	0,999264	0,000736

Tableau (IV.8) : Comparaison entre les résultats de DENN-RB-IPM et de Sheikholeslami et al. [83] pour $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$.

η	$Cu - eau, Pr = 6.2, Ec = 0.01, \phi = 0.02, \delta = 0.01$					
	Sheikholeslami et al. [84]	DENN-RB-IPM	Erreur	Sheikholeslami et al. [84]	DENN-RB-IPM	Erreur
	$f(\eta)$	$\tilde{f}(\eta)$	$ f - \tilde{f} $	$\theta(\eta)$	$\tilde{\theta}(\eta)$	$ \theta - \tilde{\theta} $
0	0	-0,001730	0,001730	1,032066589	1,03214	7,3411E-05
0,1	0,141359	0,139499	0,00186	1,032064281	1,03201	5,4281E-05
0,2	0,280666	0,278667	0,001999	1,032032236	1,03185	0,000182236
0,3	0,415781	0,413635	0,002146	1,031892848	1,03157	0,000322848
0,4	0,544379	0,542082	0,002297	1,031508324	1,03107	0,000438324
0,5	0,663857	0,66141	0,002447	1,030664437	1,03011	0,000554437
0,6	0,771229	0,768641	0,002588	1,029040022	1,0284	0,000640022
0,7	0,863015	0,860304	0,002711	1,026152219	1,02544	0,000712219
0,8	0,93512	0,932317	0,002803	1,0212593	1,02049	0,0007693
0,9	0,982695	0,979848	0,002847	1,013186166	1,01239	0,000796166
1	1	0,997174	0,002826	1	0,999184	0,000816

Tableau (IV.9) : Comparaison entre les résultats de DENN-TS-IPM et de Sheikholeslami et al. [83] pour $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$.

η	$Cu - eau, Pr = 6.2, Ec = 0.01, \phi = 0.02, \delta = 0.01$					
	Sheikholeslami et al. [84]	DENN-TS-IPM	Erreur	Sheikholeslami et al. [84]	DENN-TS-IPM	Erreur
	$f(\eta)$	$\tilde{f}(\eta)$	$ f - \tilde{f} $	$\theta(\eta)$	$\tilde{\theta}(\eta)$	$ \theta - \tilde{\theta} $
0	0	-0,001434	0,001434	1,032066589	1,03237	0,000303411
0,1	0,141359	0,139819	0,00154	1,032064281	1,03223	0,000165719
0,2	0,280666	0,27902	0,001646	1,032032236	1,03206	2,7764E-05
0,3	0,415781	0,414035	0,001746	1,031892848	1,0318	9,2848E-05
0,4	0,544379	0,542551	0,001828	1,031508324	1,03131	0,000198324
0,5	0,663857	0,661972	0,001885	1,030664437	1,03037	0,000294437
0,6	0,771229	0,769322	0,001907	1,029040022	1,02867	0,000370022
0,7	0,863015	0,861127	0,001888	1,026152219	1,02571	0,000442219
0,8	0,93512	0,933296	0,001824	1,0212593	1,02077	0,0004893
0,9	0,982695	0,980985	0,00171	1,013186166	1,01266	0,000526166
1	1	0,998453	0,001547	1,	0,999438	0,000562

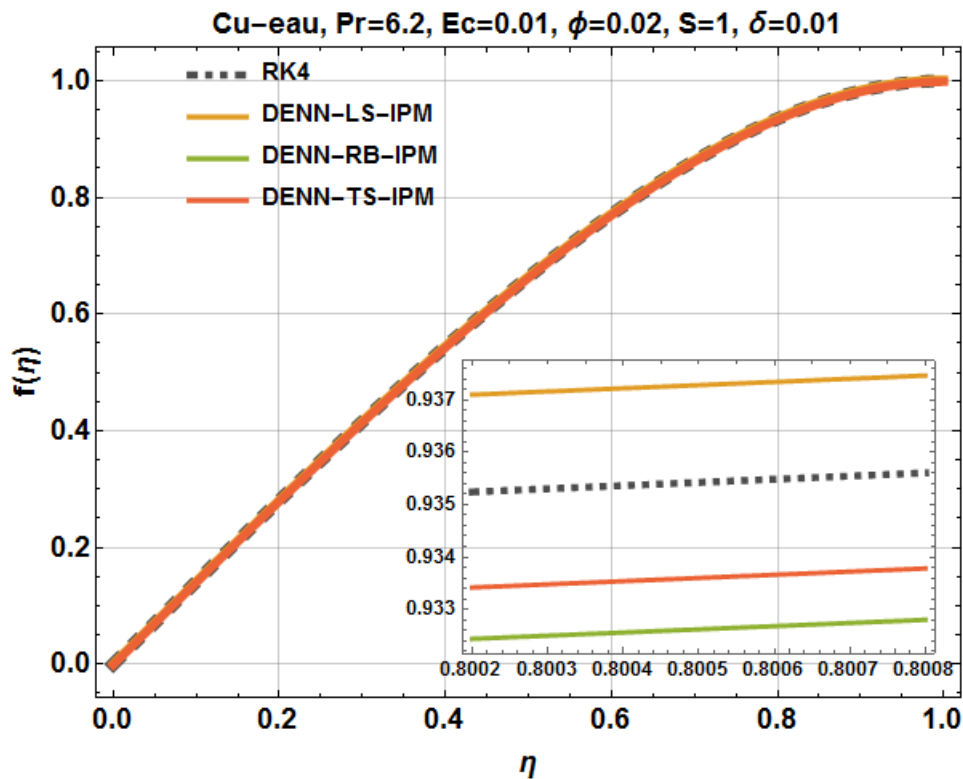


Figure (IV.7) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas avec la méthode numérique.

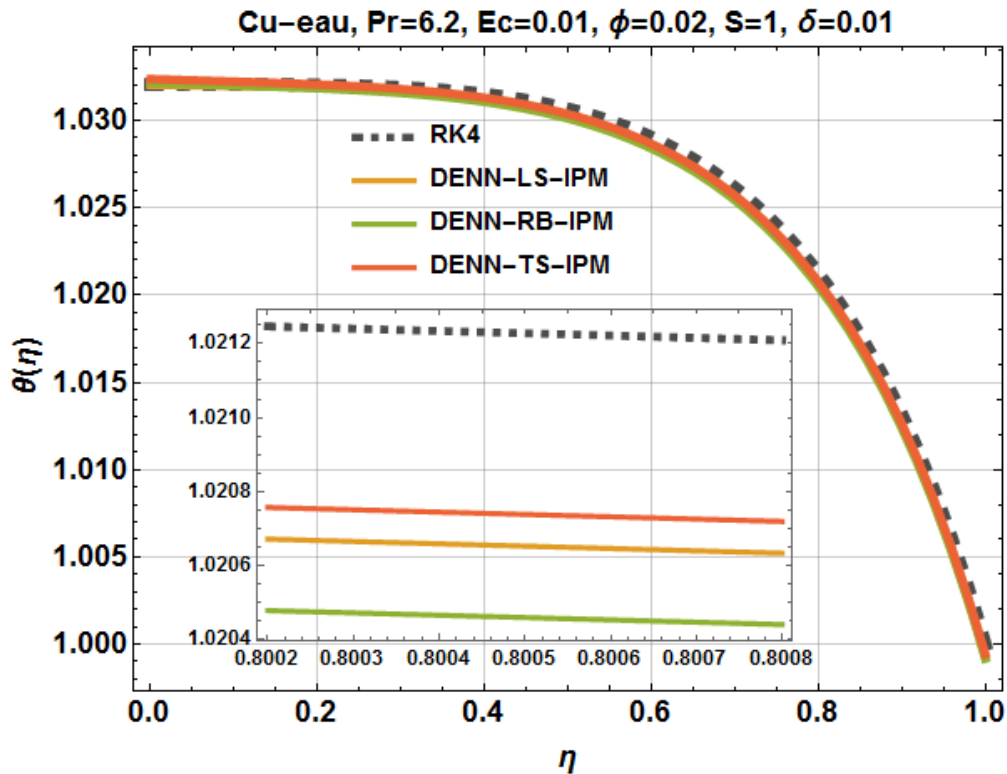


Figure (IV.8) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas avec la méthode numérique.

La solution exacte de ce problème n'étant pas disponible, nous avons utilisé une solution numérique (Runge-Kutta 4) pour valider les solutions obtenues. L'exécution des simulations à paramètres fixes pour ces équations nous a permis d'observer les performances de chaque réseau de neurones. Les équations (IV.38), (IV.40) et (IV.42) nous ont permis de tracer le profil de vitesse de ce problème ensemble avec la solution numérique. Pour tracer le profil de température, nous avons utilisé les équations (IV.39), (IV.41) et (IV.43) avec la solution numérique. Le profil de vitesse pour les schémas DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM est représenté sur la figure (IV.7). Le profil de température pour les schémas DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM est illustré à la figure (IV.8). En général, tous les réseaux de neurones proposés optimisés avec la méthode des points intérieurs (IPM) correspondent étroitement à la solution numérique. Le schéma qui utilise la fonction d'activation log-sigmoïde (DENN-LS-IPM) présente des résultats relativement plus précis pour la vitesse que les autres schémas.

IV.5 Etude paramétrique de l'écoulement nanofluidique par écrasement entre deux plaques parallèles en utilisant les trois schémas de solution

Les schémas des réseaux de neurones proposés, optimisés avec la méthode des points intérieurs, sont évalués sur quatre variantes de l'écoulement instationnaire d'un nanofluide par écrasement entre deux plaques parallèles en faisant varier la coordonnée sans dimension δ , la fraction volumique des nanoparticules ϕ , les types de nanoparticules, et le nombre d'écrasement S .

Nous appliquons les trois schémas de réseaux de neurones pour résoudre ces problèmes. Dans chaque schéma, il y a un total de 30 paramètres ajustables inconnus ou poids $W(w, \alpha, \beta)$ pour la vitesse. La procédure à suivre est de trouver les poids pour chaque réseau de telle sorte que la valeur de la fonction d'erreur $\varepsilon_f = 0$, et donc la solution approximative se rapproche de la solution exacte, c'est-à-dire $\tilde{f} \rightarrow f$. L'apprentissage des poids pour chaque réseau est effectué avec la méthode des points intérieure pour l'intervalle d'entrée de $\eta \in [0,1]$ avec un pas de 0,1. Nous commençons avec une estimation initiale et une valeur minimale de l'erreur comme critères d'arrêt. Ensuite nous injectons les poids ajustés de la vitesse dans la fonction d'erreur de température et nous appliquons la même procédure pour trouver les poids optimisés $\bar{W}(\bar{w}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Les résultats obtenus de nos schémas sont présentés sous forme des équations et des courbes, ainsi qu'une analyse comparative sera effectuée.

IV.5.1 Effet de la coordonnée sans dimension δ sur les profils de vitesse et de température

Dans cette partie, deux cas de l'écoulement de nanfluide ont été prise en utilisant deux valeurs de la coordonnée sans dimension δ , mais sans changement des autres paramètres :

IV.5.1.1 Cas $\delta = 0.01$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.01$, $\phi = 0.02$ (Cu-H₂O), et $S = 1$

Dans ce cas, les solutions obtenues avec un ensemble particulier de poids (profil de vitesse) correspond aux valeurs de la fonction d'erreur $\varepsilon_f = 1.74 \times 10^{-10}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 2.31 \times 10^{-9}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 2.67 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, ainsi que l'ensemble particulier de poids (profil de température) correspond aux valeurs de la fonction d'erreur de $\varepsilon_\theta = 7.27 \times 10^{-10}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 1.65 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 1.47 \times 10^{-10}$ pour DENN-TS-IPM, sont données sous forme d'expressions suivants :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{LS}(\eta) \\ &= \frac{9.859}{1 + e^{-(-3.595\eta + 8.479)}} + \frac{14.022}{1 + e^{-(0.681\eta - 0.245)}} + \frac{8.875}{1 + e^{-(-2.159\eta + 4.598)}} \\ &+ \frac{2.270}{1 + e^{-(1.518\eta + 1.283)}} - \frac{2.291}{1 + e^{-(0.856\eta + 1.168)}} - \frac{8.810}{1 + e^{-(0.161\eta - 1.939)}} \\ &- \frac{6.424}{1 + e^{-(0.651\eta + 2.048)}} - \frac{5.216}{1 + e^{-(0.933\eta + 2.442)}} + \frac{0.052}{1 + e^{-(-2.505\eta + 6.332)}} \\ &- \frac{13.293}{1 + e^{-(3.307\eta + 7.273)}} \end{aligned} \tag{IV.44}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}_{LS}(\eta) \\ &= -\frac{6.400}{1 + e^{-(4.079\eta - 7.105)}} + \frac{0.444}{1 + e^{-(-1.943\eta - 0.484)}} + \frac{3.364}{1 + e^{-(0.727\eta - 0.606)}} \\ &- \frac{0.951}{1 + e^{-(-1.624\eta + 0.037)}} - \frac{5.455}{1 + e^{-(0.830\eta - 1.547)}} - \frac{1.276}{1 + e^{-(1.219\eta - 0.955)}} \\ &+ \frac{2.419}{1 + e^{-(-1.689\eta + 2.662)}} + \frac{2.897}{1 + e^{-(4.395\eta - 6.914)}} + \frac{3.727}{1 + e^{-(-0.856\eta + 5.638)}} \\ &- \frac{4.824}{1 + e^{-(-1.642\eta + 2.634)}} \end{aligned} \tag{IV.45}$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{RB}(\eta) &= -1.189e^{-(0.951\eta+1.196)^2} - 3.041e^{-(0.338\eta-1.159)^2} + 0.237e^{-(1.133\eta-0.526)^2} \\
 &+ 1.334e^{-(0.388\eta-1.589)^2} + 5.450e^{-(0.627\eta-1.365)^2} - 0.372e^{-(0.568\eta-2.998)^2} \\
 &+ 0.462e^{-(2.328\eta-4.349)^2} - 0.308e^{-(0.135\eta-1.743)^2} - 6.144e^{-(0.798\eta-2.238)^2} \\
 &- 6.676e^{-(1.296\eta-3.817)^2} \tag{IV.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) &= 1.147e^{-(0.664\eta+0.355)^2} - 2.712e^{-(1.924\eta-4.443)^2} \\
 &+ 2.167e^{-(0.526\eta+3.942)^2} + 0.568e^{-(0.895\eta-0.674)^2} \\
 &- 0.256e^{-(1.128\eta+0.921)^2} - 0.741e^{-(2.163\eta-3.882)^2} \\
 &+ 0.848e^{-(0.625\eta+0.102)^2} + 0.697e^{-(0.389\eta+0.564)^2} \\
 &+ 0.543e^{-(0.145\eta+2.016)^2} - 1.614e^{-(0.725\eta-0.133)^2} \tag{IV.47}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) &= \frac{1.937}{1 + e^{-2(-2.045\eta+3.532)}} - \frac{0.723}{1 + e^{-2(5.275\eta-9.109)}} + \frac{7.590}{1 + e^{-2(0.868\eta-0.333)}} \\
 &+ \frac{2.870}{1 + e^{-2(-1.056\eta+0.4137)}} - \frac{1.996}{1 + e^{-2(-0.150\eta+5.773)}} \\
 &+ \frac{0.828}{1 + e^{-2(-0.413\eta+0.0878)}} + \frac{0.191}{1 + e^{-2(1.770\eta+0.727)}} \\
 &- \frac{5.984}{1 + e^{-2(0.478\eta+5.962)}} - \frac{0.165}{1 + e^{-2(1.370\eta+6.328)}} \\
 &+ \frac{6.814}{1 + e^{-2(-0.901\eta+2.089)}} - 5.681 \tag{IV.48}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) &= -\frac{3.735}{1 + e^{-2(-0.025\eta+0.155)}} - \frac{1.905}{1 + e^{-2(1.539\eta-2.250)}} + \frac{2.691}{1 + e^{-2(0.911\eta+0.011)}} \\
 &+ \frac{2.379}{1 + e^{-2(-0.936\eta-0.052)}} + \frac{0.678}{1 + e^{-2(-0.890\eta+1.338)}} \\
 &+ \frac{0.755}{1 + e^{-2(-0.611\eta+0.438)}} + \frac{0.383}{1 + e^{-2(0.183\eta+0.152)}} - \frac{2.306}{1 + e^{-2(-1.222\eta+2.023)}} \\
 &- \frac{1.692}{1 + e^{-2(-1.355\eta+2.405)}} - \frac{3.802}{1 + e^{-2(2.924\eta-5.301)}} + 3.277 \tag{IV.49}
 \end{aligned}$$

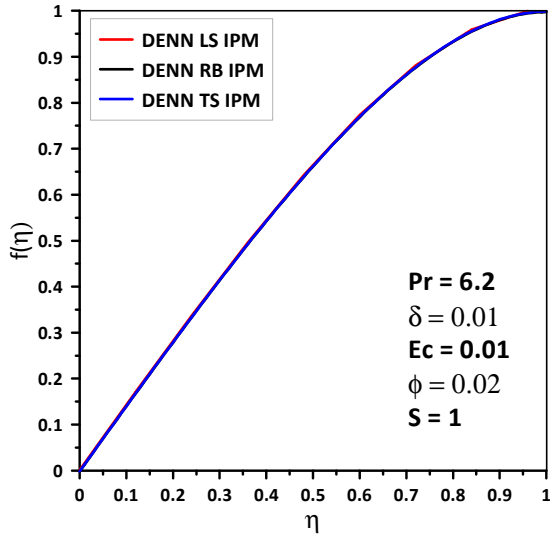


Figure (IV.9) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas de solution.

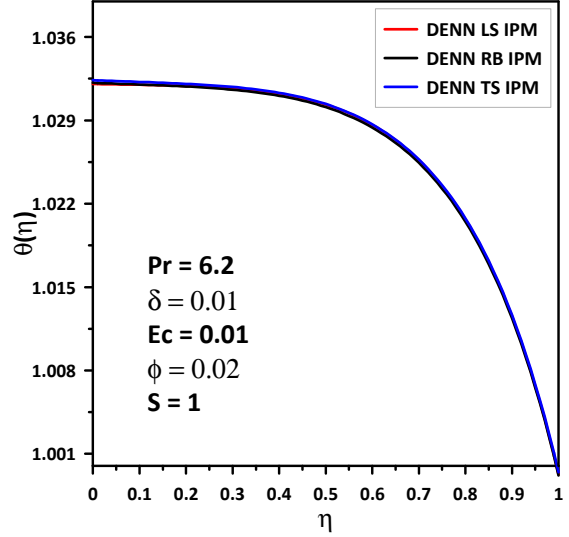


Figure (IV.10) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas de solution.

Il ressort des figures (IV.9) et (IV.10) que les solutions obtenues par les trois schémas sont quasiment identiques, notamment pour le profil de la vitesse avec une légère différence pour le profil de la température, et cela peut être dû principalement à la sélection optimale du vecteur initial. Cela indique l'efficacité des schémas utilisés.

IV.5.1.2 Cas $\delta = 0.1$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.01$, $\phi = 0.02$ (Cu-H₂O), et $S = 1$

Un ensemble de poids formés pour DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM avec des valeurs des fonctions d'erreurs pour la vitesse et la température respectives de $(1.37 \times 10^{-9}, 3.82 \times 10^{-10})$, $(5.76 \times 10^{-9}, 1.33 \times 10^{-9})$ et $(4.52 \times 10^{-9}, 1.72 \times 10^{-9})$ pour ce cas, est les solutions sont présentés sous forme des équations :

► Schéma de solution DENN-LS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & -\frac{1.347}{1 + e^{-(2.377\eta - 3.772)}} - \frac{19.339}{1 + e^{-(2.767\eta - 6.720)}} + \frac{3.535}{1 + e^{-(1.501\eta - 1.641)}} \\ & + \frac{1.270}{1 + e^{-(0.461\eta - 3.536)}} + \frac{1.685}{1 + e^{-(3.528\eta - 4.553)}} - \frac{1.953}{1 + e^{-(0.996\eta - 5.294)}} \\ & + \frac{0.534}{1 + e^{-(2.116\eta + 2.099)}} - \frac{6.723}{1 + e^{-(1.735\eta - 7.925)}} \\ & - \frac{2.231}{1 + e^{-(1.513\eta - 0.350)}} - \frac{9.462}{1 + e^{-(1.342\eta - 4.396)}} \end{aligned} \quad (IV.50)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{0.657}{1 + e^{-(2.518\eta+2.021)}} + \frac{4.561}{1 + e^{-(2.279\eta-3.819)}} - \frac{3.899}{1 + e^{-(1.010\eta-1.921)}} \\
 & + \frac{2.197}{1 + e^{-(1.402\eta+1.546)}} + \frac{0.540}{1 + e^{-(-3.548\eta+4.256)}} - \frac{0.377}{1 + e^{-(1.392\eta-2.707)}} \\
 & - \frac{6.343}{1 + e^{-(4.257\eta-8.319)}} - \frac{1.498}{1 + e^{-(0.481\eta-2.413)}} - \frac{0.843}{1 + e^{-(0.1862\eta-2.347)}} \\
 & - \frac{0.144}{1 + e^{-(-2.793\eta+1.091)}} \tag{IV.51}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{RB}(\eta) & = 0.320e^{-(1.167\eta-0.507)^2} - 3.537e^{-(0.381\eta-2.153)^2} - 2.930e^{-(0.735\eta+1.183)^2} \\
 & + 4.633e^{-(0.888\eta-1.522)^2} + 1.265e^{-(-0.409\eta-2.439)^2} - 0.828e^{-(-0.244\eta-5.176)^2} \\
 & + 9.829e^{-(-0.390\eta-1.796)^2} - 6.581e^{-(-1.414\eta+4.196)^2} - 0.262e^{-(-1.345\eta+1.880)^2} \\
 & - 6.903e^{-(-0.619\eta+1.741)^2} \tag{IV.52}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) & = 0.679e^{-(0.221\eta+1.022)^2} - 4.266e^{-(-1.976\eta+4.713)^2} \\
 & + 0.471e^{-(1.1198\eta-2.119)^2} + 0.645e^{-(-0.771\eta+1.013)^2} \\
 & - 1.190e^{-(0.714\eta-2.720)^2} - 0.624e^{-(0.503\eta-1.708)^2} \\
 & + 0.743e^{-(0.459\eta+0.188)^2} + 0.880e^{-(1.710\eta+4.630)^2} \\
 & - 1.325e^{-(-0.230\eta+1.495)^2} + 0.924e^{-(-0.068\eta+2.002)^2} \tag{IV.53}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) & = \frac{2.663}{1 + e^{-2(0.663\eta+0.363)}} - \frac{0.014}{1 + e^{-2(0.285\eta-0.859)}} + \frac{6.251}{1 + e^{-2(-1.216\eta+2.353)}} \\
 & + \frac{6.814}{1 + e^{-2(0.500\eta-1.788)}} + \frac{1.793}{1 + e^{-2(0.556\eta+0.066)}} \\
 & + \frac{4.907}{1 + e^{-2(-1.524\eta-2.735)}} + \frac{1.751}{1 + e^{-2(0.740\eta-0.542)}} \\
 & - \frac{3.990}{1 + e^{-2(-0.375\eta+1.415)}} - \frac{6.392}{1 + e^{-2(2.056\eta-4.429)}} \\
 & - \frac{5.172}{1 + e^{-2(0.224\eta-0.439)}} - 4.306 \tag{IV.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & -\frac{4.859}{1 + e^{-2(0.533\eta+2.383)}} - \frac{4.092}{1 + e^{-2(0.017\eta-0.368)}} - \frac{4.799}{1 + e^{-2(0.435\eta+5.395)}} \\
 & + \frac{4.659}{1 + e^{-2(-1.135\eta-2.227)}} - \frac{2.224}{1 + e^{-2(-1.351\eta-2.048)}} \\
 & - \frac{3.026}{1 + e^{-2(-0.505\eta-5.462)}} - \frac{16.541}{1 + e^{-2(0.276\eta+2.246)}} \\
 & + \frac{10.370}{1 + e^{-2(-0.507\eta+5.927)}} - \frac{8.031}{1 + e^{-2(-2.318\eta+3.886)}} \\
 & - \frac{11.802}{1 + e^{-2(2.293\eta-4.002)}} - 14.00
 \end{aligned} \tag{IV.55}$$

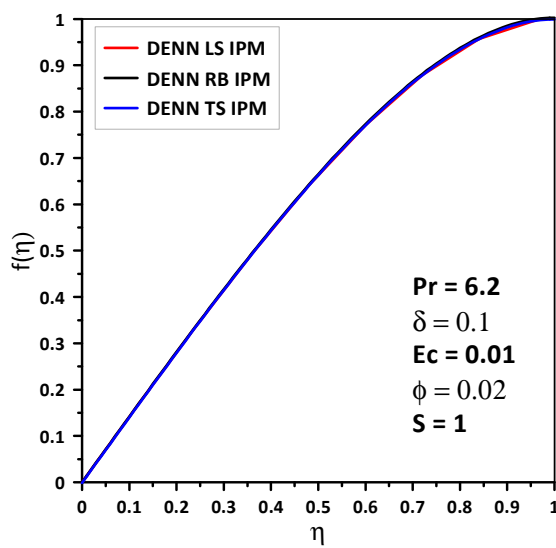


Figure (IV.11) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas de solution.

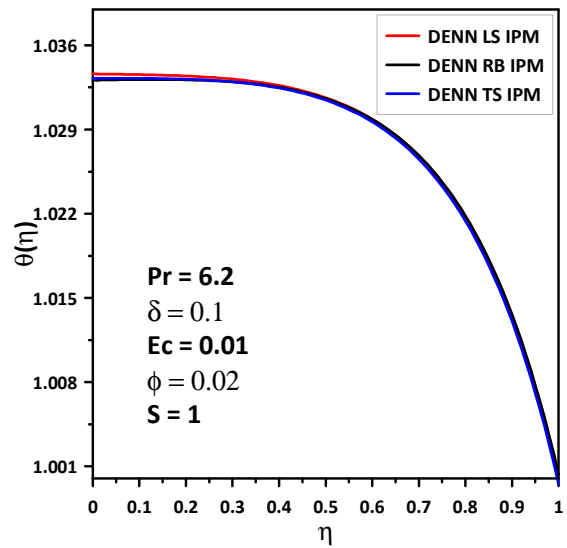


Figure (IV.12) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas de solution.

La même remarque est accordée concernant la comparaison des courbes tracés à partir des solutions trouvez pour ce cas représentés dans les figures (IV.11) et (IV.12) comme celle observée pour le 1^{er} cas en termes de cohérence et efficacité.

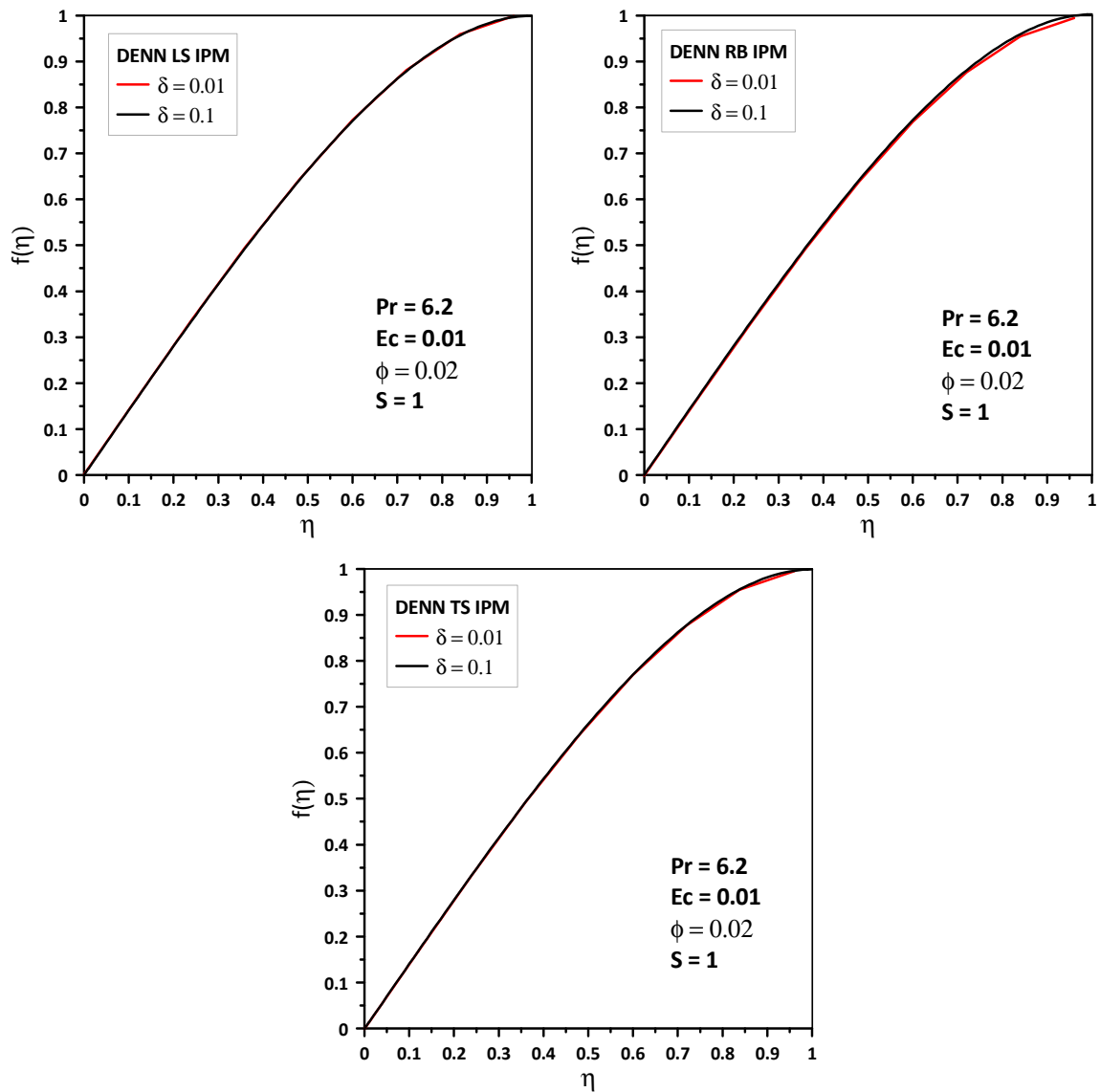


Figure (IV.13) : Comparaison de la variation du profil de vitesse en fonction de la coordonnée sans dimension (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.

Les solutions obtenues des profils de vitesse et de température pour les deux cas sont tracés ensemble dans les figures (IV.13) et (IV.14). Il est observé que l'augmentation de la coordonnée sans dimension δ avec un faible nombre d'Eckert entraîne une légère augmentation de la température, alors qu'il n'a pas d'effet significatif sur le profil de la vitesse.

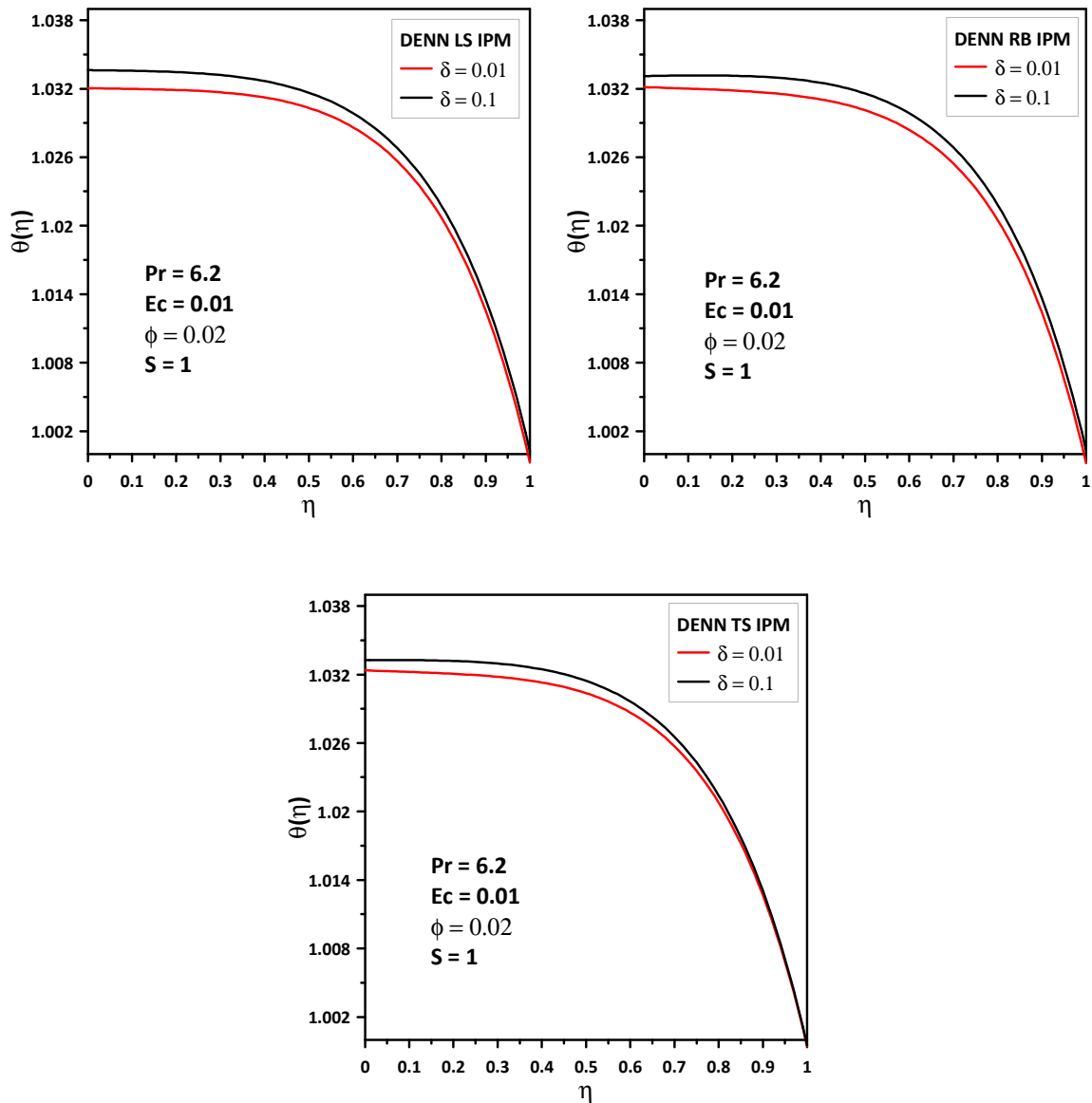


Figure (IV.14) : Comparaison de la variation du profil de température en fonction de la coordonnée sans dimension (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.

IV.5.2 Effet de la fraction volumique des nanoparticules sur les profils de vitesse et de température

Les résultats de l'influence de la fraction volumique des nanoparticules sur le comportement de l'écoulement et du transfert de chaleur local sont présentés et discutés dans cette partie. Pour cela nous allons varier ϕ de manière ascendante en quatre cas :

IV.5.2.1 Cas $\phi = 0$ (H₂O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$

Dans ce cas, les solutions obtenues à partir de l'ensemble des poids optimisés (profil de vitesse) correspond aux valeurs de la fonction d'erreur $\varepsilon_f = 1.50 \times 10^{-9}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 5.08 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 3.52 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, ainsi que l'ensemble des poids ajustés (profil de température) correspond aux valeurs de la fonction d'erreur de $\varepsilon_\theta = 5.77 \times 10^{-8}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 2.68 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 7.52 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, sont présentés sous forme d'expressions comme suit :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & -\frac{2.346}{1 + e^{-(-1.927\eta - 1.402)}} - \frac{2.839}{1 + e^{-(-1.295\eta + 0.652)}} + \frac{12.682}{1 + e^{-(-3.210\eta + 7.569)}} \\ & + \frac{0.206}{1 + e^{-(-2.681\eta - 1.154)}} - \frac{1.855}{1 + e^{-(-2.426\eta - 4.318)}} - \frac{4.179}{1 + e^{-(-2.000\eta + 3.212)}} \\ & - \frac{0.915}{1 + e^{-(-0.865\eta + 0.823)}} + \frac{2.533}{1 + e^{-(-1.937\eta + 4.142)}} \\ & - \frac{2.727}{1 + e^{-(-0.550\eta + 0.941)}} - \frac{9.976}{1 + e^{-(-0.010\eta + 0.516)}} \end{aligned} \quad (IV.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{27.150}{1 + e^{-(-7.750\eta - 11.584)}} - \frac{3.519}{1 + e^{-(-4.980\eta - 5.950)}} + \frac{13.326}{1 + e^{-(-7.835\eta + 19.195)}} \\ & + \frac{1.662}{1 + e^{-(-0.782\eta - 2.023)}} - \frac{1.056}{1 + e^{-(-2.994\eta - 2.742)}} \\ & + \frac{0.588}{1 + e^{-(-1.911\eta - 1.437)}} - \frac{4.284}{1 + e^{-(-2.206\eta - 1.690)}} + \frac{3.477}{1 + e^{-(-2.548\eta - 1.393)}} \\ & - \frac{10.856}{1 + e^{-(-1.781\eta + 9.643)}} - \frac{0.013}{1 + e^{-(-13.403\eta + -2.964)}} \end{aligned} \quad (IV.57)$$

► **Schéma de solution DENN-RB-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) & = 2.555e^{-(-1.408\eta + 3.472)^2} - 11.315e^{-(-1.182\eta + 3.317)^2} + 0.316e^{-(-2.198\eta + 3.365)^2} \\ & + 1.263e^{-(-0.808\eta - 1.042)^2} + 0.441e^{-(-0.802\eta - 0.139)^2} - 1.070e^{-(-0.682\eta - 2.296)^2} \\ & - 3.389e^{-(-3.626\eta - 4.377)^2} - 1.599e^{-(-0.626\eta + 0.787)^2} + 1.485e^{-(-1.101\eta - 4.382)^2} \\ & + 2.5216e^{-(-0.816\eta + 2.423)^2} \end{aligned} \quad (IV.58)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) = & -6.001e^{-(0.974\eta+0.142)^2} + 1.832e^{-(2.495\eta-2.815)^2} \\
 & - 7.250e^{-(-3.638\eta+5.813)^2} - 0.509e^{-(2.867\eta-2.910)^2} \\
 & + 0.799e^{-(1.242\eta-5.177)^2} - 7.270e^{-(1.741\eta-2.757)^2} \\
 & - 0.781e^{-(-0.344\eta-3.131)^2} + 1.730e^{-(0.851\eta-0.922)^2} \\
 & + 8.186e^{-(0.889\eta+0.197)^2} + 3.356e^{-(1.878\eta+6.291)^2} \tag{IV.59}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) = & -\frac{9.151}{1 + e^{-2(1.157\eta-2.430)}} + \frac{5.870}{1 + e^{-2(-1.376\eta-2.583)}} - \frac{0.473}{1 + e^{-2(-0.824\eta+0.690)}} \\
 & + \frac{4.717}{1 + e^{-2(-2.133\eta+4.653)}} - \frac{3.513}{1 + e^{-2(-0.526\eta+0.173)}} \\
 & + \frac{1.353}{1 + e^{-2(0.034\eta-0.600)}} - \frac{0.008}{1 + e^{-2(-1.389\eta-0.789)}} \\
 & + \frac{2.031}{1 + e^{-2(0.622\eta-2.020)}} - \frac{1.895}{1 + e^{-2(-0.651\eta-0.405)}} \\
 & + \frac{5.226}{1 + e^{-2(0.462\eta-2.131)}} - 2.078 \tag{IV.60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & -\frac{9.091}{1 + e^{-2(2.515\eta-3.336)}} + \frac{5.393}{1 + e^{-2(-0.139\eta-2.498)}} + \frac{3.793}{1 + e^{-2(-1.618\eta-0.025)}} \\
 & + \frac{9.896}{1 + e^{-2(-5.011\eta+6.918)}} - \frac{6.658}{1 + e^{-2(-0.718\eta+2.589)}} \\
 & - \frac{0.633}{1 + e^{-2(-2.128\eta+0.088)}} - \frac{4.70}{1 + e^{-2(-1.174\eta-0.009)}} \\
 & + \frac{2.890}{1 + e^{-2(-0.366\eta-1.389)}} - \frac{0.087}{1 + e^{-2(0.700\eta-0.458)}} \\
 & + \frac{1.166}{1 + e^{-2(-1.492\eta+1.341)}} - 0.981 \tag{IV.61}
 \end{aligned}$$

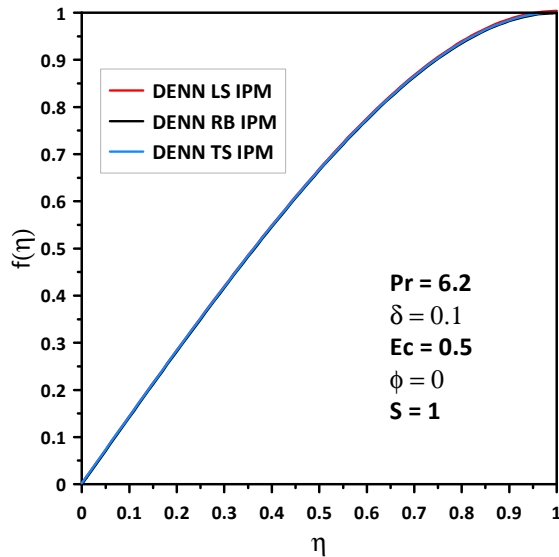


Figure (IV.15) : Comparaison du profil de vitesse pour les trois schémas de solution.

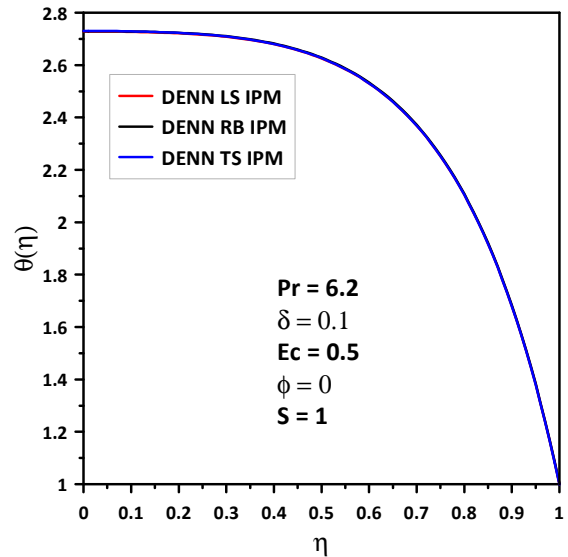


Figure (IV.16) : Comparaison du profil de température pour les trois schémas de solution.

Les figures (IV.15) et (IV.16) représentent une comparaison entre les trois modèles de solution pour le profil de vitesse et le profil de température, on remarque qu'il y a une coïncidence presque parfaite en ce qui concerne les profils de vitesse et la même chose pour les profils de la température, et ceci n'est qu'une preuve de la stabilité des trois méthodes de solution.

IV.5.2.2 Cas $\phi = 0.02$ (Cu-H₂O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$

En appliquant les trois schémas de solution pour ce cas, est lorsque les critères d'arrêts atteintes aux valeurs des fonctions d'erreurs pour la vitesse et la température consécutivement, $\varepsilon_f = 1.37 \times 10^{-9}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 5.76 \times 10^{-9}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 4.52 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, est $\varepsilon_\theta = 3.66 \times 10^{-8}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 1.19 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 5.79 \times 10^{-8}$ pour DENN-TS-IPM, nous prenons les valeurs des poids et les mettons dans les équations formons les solutions suivantes :

► Schéma de solution DENN-LS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & -\frac{1.347}{1 + e^{-(2.377\eta-3.772)}} - \frac{19.339}{1 + e^{-(2.767\eta-6.720)}} + \frac{3.535}{1 + e^{-(1.501\eta-1.641)}} \\ & + \frac{1.270}{1 + e^{-(0.461\eta-3.536)}} + \frac{1.685}{1 + e^{-(3.528\eta-4.553)}} - \frac{1.953}{1 + e^{-(0.996\eta-5.294)}} \\ & + \frac{0.534}{1 + e^{-(2.116\eta+2.099)}} - \frac{6.723}{1 + e^{-(1.735\eta-7.925)}} \\ & - \frac{2.231}{1 + e^{-(1.513\eta-0.350)}} - \frac{9.462}{1 + e^{-(1.342\eta-4.396)}} \end{aligned} \quad (IV.62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{4.141}{1 + e^{-(4.562\eta+4.968)}} - \frac{12.663}{1 + e^{-(5.163\eta-6.516)}} + \frac{0.130}{1 + e^{-(9.206\eta+2.602)}} \\ & - \frac{6.404}{1 + e^{-(5.686\eta-8.931)}} - \frac{5.852}{1 + e^{-(6.308\eta+7.076)}} - \frac{0.791}{1 + e^{-(1.695\eta-3.464)}} \\ & - \frac{0.804}{1 + e^{-(2.335\eta+2.085)}} + \frac{7.136}{1 + e^{-(8.109\eta+11.311)}} \\ & - \frac{0.507}{1 + e^{-(8.142\eta-8.130)}} + \frac{6.144}{1 + e^{-(4.771\eta+6.874)}} \end{aligned} \quad (IV.63)$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) & = 0.320e^{-(1.167\eta-0.507)^2} - 3.537e^{-(0.381\eta-2.153)^2} - 2.930e^{-(0.735\eta+1.183)^2} \\ & + 4.633e^{-(0.888\eta-1.522)^2} + 1.265e^{-(0.409\eta-2.439)^2} - 0.828e^{-(0.244\eta-5.176)^2} \\ & + 9.829e^{-(0.390\eta-1.796)^2} - 6.581e^{-(1.414\eta+4.196)^2} - 0.262e^{-(1.345\eta+1.880)^2} \\ & - 6.903e^{-(0.619\eta+1.741)^2} \end{aligned} \quad (IV.64)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{RB}(\eta) & = 1.273e^{-(1.114\eta-0.973)^2} - 3.101e^{-(0.578\eta-1.854)^2} \\ & - 3.289e^{-(1.054\eta+1.852)^2} + 2.639e^{-(2.620\eta-3.617)^2} \\ & + 1.752e^{-(0.273\eta-2.108)^2} - 0.394e^{-(0.047\eta-5.366)^2} \\ & + 9.843e^{-(0.220\eta-1.193)^2} - 8.467e^{-(3.637\eta+5.976)^2} \\ & - 2.956e^{-(1.282\eta+3.364)^2} - 8.842e^{-(2.267\eta+3.512)^2} \end{aligned} \quad (IV.65)$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{TS}(\eta) = & \frac{2.663}{1 + e^{-2(0.663\eta+0.363)}} - \frac{0.014}{1 + e^{-2(0.285\eta-0.859)}} + \frac{6.251}{1 + e^{-2(-1.216\eta+2.353)}} \\ & + \frac{6.814}{1 + e^{-2(0.500\eta-1.788)}} + \frac{1.793}{1 + e^{-2(0.556\eta+0.066)}} \\ & + \frac{4.907}{1 + e^{-2(-1.524\eta-2.735)}} + \frac{1.751}{1 + e^{-2(0.740\eta-0.542)}} \\ & - \frac{3.990}{1 + e^{-2(-0.375\eta+1.415)}} - \frac{6.392}{1 + e^{-2(2.056\eta-4.429)}} \\ & - \frac{5.172}{1 + e^{-2(0.224\eta-0.439)}} - 4.306 \end{aligned} \quad (IV.66)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & - \frac{7.259}{1 + e^{-2(2.409\eta-3.192)}} - \frac{2.839}{1 + e^{-2(-1.560\eta+0.307)}} + \frac{13.822}{1 + e^{-2(-4.606\eta+6.566)}} \\ & + \frac{9.684}{1 + e^{-2(-2.646\eta-4.300)}} + \frac{2.053}{1 + e^{-2(-1.666\eta+0.296)}} \\ & + \frac{8.689}{1 + e^{-2(-1.486\eta-3.746)}} + \frac{1.872}{1 + e^{-2(2.040\eta-4.711)}} \\ & - \frac{0.461}{1 + e^{-2(-3.548\eta-1.974)}} - \frac{6.296}{1 + e^{-2(2.127\eta-3.789)}} \\ & - \frac{5.498}{1 + e^{-2(0.172\eta+0.371)}} - 6.883 \end{aligned} \quad (IV.67)$$

IV.5.2.3 Cas $\phi = 0.04$ (Cu-H₂O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$

La même chose est effectuée dans ce cas, en variant le paramètre de concentration volumique des nanoparticules dans les trois modèles de solution, est voir la réponse en ce qui concerne l'évolution de la fonction d'erreur et les poids finaux correspondants, où étaient les valeurs des fonctions d'erreurs pour DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM respectives, 6.01×10^{-10} , 2.09×10^{-8} et 2.01×10^{-8} pour la vitesse, est 1.94×10^{-9} , 3.83×10^{-8} et 9.98×10^{-10} pour la température. Ainsi que les solutions sont données comme suit :

► Schéma de solution DENN-LS-IPM :

$$\begin{aligned}
 & \tilde{f}_{LS}(\eta) \\
 = & -\frac{6.193}{1 + e^{-(-0.905\eta - 0.686)}} + \frac{9.378}{1 + e^{-(-3.327\eta - 3.455)}} - \frac{1.553}{1 + e^{-(-1.495\eta + 1.870)}} \\
 & - \frac{13.957}{1 + e^{-(-3.631\eta - 7.090)}} + \frac{3.757}{1 + e^{-(-4.095\eta + 9.179)}} - \frac{9.531}{1 + e^{-(-2.830\eta - 6.972)}} \\
 & - \frac{0.419}{1 + e^{-(-1.702\eta + 0.857)}} - \frac{5.480}{1 + e^{-(-2.231\eta - 4.558)}} - \frac{6.345}{1 + e^{-(-3.430\eta - 3.322)}} \\
 & - \frac{1.720}{1 + e^{-(-1.625\eta - 3.999)}} \tag{IV.68}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{2.852}{1 + e^{-(-0.225\eta - 5.124)}} + \frac{1.181}{1 + e^{-(-3.278\eta - 1.194)}} - \frac{1.222}{1 + e^{-(-3.309\eta - 7.866)}} \\
 & + \frac{1.001}{1 + e^{-(-2.171\eta + 2.703)}} + \frac{5.889}{1 + e^{-(-5.746\eta + 7.315)}} \\
 & - \frac{7.853}{1 + e^{-(-10.610\eta - 14.310)}} - \frac{2.655}{1 + e^{-(-2.599\eta + 1.859)}} \\
 & - \frac{2.468}{1 + e^{-(-2.183\eta - 1.665)}} - \frac{1.980}{1 + e^{-(-0.852\eta + 0.154)}} \\
 & - \frac{7.130}{1 + e^{-(-1.748\eta - 2.219)}} \tag{IV.69}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned}
 & \tilde{f}_{RB}(\eta) \\
 = & 0.339e^{-(1.152\eta - 0.514)^2} - 3.510e^{-(0.504\eta - 2.147)^2} - 3.129e^{-(0.716\eta + 1.267)^2} \\
 & + 4.559e^{-(0.964\eta - 1.659)^2} + 1.258e^{-(-0.371\eta - 2.387)^2} - 0.812e^{-(-0.241\eta - 5.163)^2} \\
 & + 9.671e^{-(-0.498\eta - 1.927)^2} - 6.691e^{-(-1.453\eta + 4.329)^2} - 0.995e^{-(-1.219\eta + 1.846)^2} \\
 & - 6.845e^{-(-0.712\eta + 2.066)^2} \tag{IV.70}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) = & 1.632e^{-(1.074\eta - 1.004)^2} - 3.751e^{-(0.362\eta - 1.004)^2} \\
 & - 3.209e^{-(0.945\eta + 1.764)^2} + 2.397e^{-(2.705\eta - 3.713)^2} \\
 & + 0.896e^{-(-0.070\eta - 2.257)^2} - 0.556e^{-(-0.747\eta - 5.220)^2} \\
 & + 9.881e^{-(-0.106\eta - 1.013)^2} - 8.519e^{-(-3.689\eta + 6.054)^2} \\
 & - 1.457e^{-(-1.327\eta + 2.943)^2} - 8.296e^{-(-2.335\eta + 3.595)^2} \tag{IV.71}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{TS}(\eta) = & -\frac{4.907}{1 + e^{-2(-0.070\eta+0.247)}} + \frac{8.220}{1 + e^{-2(-0.367\eta-2.694)}} - \frac{9.547}{1 + e^{-2(-0.222\eta+0.651)}} \\ & + \frac{16.242}{1 + e^{-2(-1.104\eta+2.569)}} + \frac{9.724}{1 + e^{-2(0.408\eta+0.066)}} \\ & + \frac{0.733}{1 + e^{-2(0.008\eta-1.605)}} - \frac{4.052}{1 + e^{-2(0.514\eta+0.009)}} - \frac{3.192}{1 + e^{-2(2.251\eta-4.866)}} \\ & + \frac{5.091}{1 + e^{-2(-0.019\eta+0.801)}} + \frac{7.872}{1 + e^{-2(-1.266\eta-2.475)}} - 13.091 \quad (IV.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & -\frac{1.195}{1 + e^{-2(-3.202\eta-2.777)}} + \frac{6.209}{1 + e^{-2(-0.140\eta-3.057)}} \\ & - \frac{5.291}{1 + e^{-2(-0.264\eta+0.038)}} + \frac{6.278}{1 + e^{-2(-2.946\eta+3.908)}} \\ & - \frac{6.565}{1 + e^{-2(-0.477\eta+2.406)}} + \frac{6.466}{1 + e^{-2(-1.699\eta+2.431)}} \\ & + \frac{0.362}{1 + e^{-2(1.091\eta+2.632)}} - \frac{9.971}{1 + e^{-2(5.274\eta-7.355)}} - \frac{1.259}{1 + e^{-2(1.184\eta+0.351)}} \\ & + \frac{6.043}{1 + e^{-2(0.159\eta-1.672)}} - 0.539 \quad (IV.73) \end{aligned}$$

IV.5.2.4 Cas $\phi = 0.06$ (Cu-H₂O) lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$

En fin de cette partie, nous fixons le paramètre ϕ et nous attendons jusqu'aux les simulations se convergent aux valeurs des fonctions d'erreurs, $\varepsilon_f = 9.14 \times 10^{-9}$ et $\varepsilon_\theta = 1.45 \times 10^{-8}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 7.76 \times 10^{-9}$ et $\varepsilon_\theta = 1.15 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM, $\varepsilon_f = 3.15 \times 10^{-9}$ et $\varepsilon_\theta = 1.37 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, ensuite on prend les valeurs des poids et on les met en place pour former les solutions appropriées :

► Schéma de solution DENN-LS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & \frac{0.574}{1 + e^{-(1.576\eta+0.084)}} - \frac{7.634}{1 + e^{-(0.321\eta-3.579)}} - \frac{3.457}{1 + e^{-(-1.267\eta-1.539)}} \\ & + \frac{6.589}{1 + e^{-(-2.128\eta+4.593)}} - \frac{4.597}{1 + e^{-(-1.151\eta+1.237)}} \\ & - \frac{2.011}{1 + e^{-(1.088\eta-6.238)}} - \frac{11.058}{1 + e^{-(2.891\eta-7.548)}} - \frac{10.840}{1 + e^{-(-3.138\eta-8.021)}} \\ & - \frac{2.489}{1 + e^{-(0.574\eta+5.899)}} + \frac{6.455}{1 + e^{-(-2.561\eta-4.765)}} \quad (IV.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & \frac{0.835}{1 + e^{-(0.863\eta+2.727)}} - \frac{7.329}{1 + e^{-(5.140\eta-6.333)}} - \frac{8.283}{1 + e^{-(4.976\eta-6.743)}} \\
 & + \frac{7.799}{1 + e^{-(8.467\eta+10.895)}} - \frac{8.677}{1 + e^{-(0.811\eta-1.679)}} \\
 & + \frac{3.888}{1 + e^{-(22.267\eta-13.078)}} + \frac{3.407}{1 + e^{-(1.923\eta-1.240)}} \\
 & - \frac{17.866}{1 + e^{-(9.073\eta-13.271)}} - \frac{5.172}{1 + e^{-(0.121\eta+5.372)}} \\
 & - \frac{3.197}{1 + e^{-(1.267\eta-2.556)}} \tag{IV.75}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{RB}(\eta) & = 0.325e^{-(1.174\eta-0.509)^2} - 3.502e^{-(0.552\eta-2.075)^2} - 3.212e^{-(0.722\eta+1.221)^2} \\
 & + 4.358e^{-(0.941\eta-1.591)^2} + 1.208e^{-(0.307\eta-2.335)^2} - 0.810e^{-(0.280\eta-5.207)^2} \\
 & + 9.688e^{-(0.432\eta-1.807)^2} - 6.713e^{-(1.444\eta+4.277)^2} - 0.625e^{-(1.266\eta+1.849)^2} \\
 & - 6.786e^{-(0.608\eta+1.904)^2} \tag{IV.76}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) & = 1.757e^{-(0.907\eta-1.041)^2} - 3.529e^{-(0.703\eta-1.781)^2} \\
 & - 3.343e^{-(1.119\eta+2.077)^2} + 2.475e^{-(2.447\eta-3.586)^2} \\
 & + 1.083e^{-(0.331\eta-2.477)^2} - 0.795e^{-(0.212\eta-5.202)^2} \\
 & + 9.643e^{-(0.179\eta-1.219)^2} - 8.219e^{-(3.557\eta+5.918)^2} \\
 & - 2.603e^{-(2.118\eta+3.205)^2} - 8.743e^{-(2.283\eta+3.820)^2} \tag{IV.77}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) & = \frac{11.604}{1 + e^{-2(-1.744\eta-6.395)}} + \frac{13.246}{1 + e^{-2(0.368\eta-0.927)}} + \frac{2.149}{1 + e^{-2(-1.109\eta-4.894)}} \\
 & - \frac{9.943}{1 + e^{-2(2.656\eta+6.685)}} + \frac{15.480}{1 + e^{-2(-0.621\eta-4.737)}} \\
 & + \frac{0.002}{1 + e^{-2(-4.082\eta-2.242)}} + \frac{11.442}{1 + e^{-2(-1.056\eta-2.265)}} \\
 & + \frac{49.552}{1 + e^{-2(-0.997\eta+2.899)}} + \frac{6.501}{1 + e^{-2(0.483\eta+0.847)}} \\
 & + \frac{6.303}{1 + e^{-2(-1.732\eta+4.708)}} - 53.170 \tag{IV.78}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & \frac{6.074}{1 + e^{-2(0.843\eta - 2.684)}} + \frac{7.416}{1 + e^{-2(-1.287\eta - 6.143)}} + \frac{8.973}{1 + e^{-2(-1.882\eta + 2.686)}} \\ & - \frac{9.482}{1 + e^{-2(0.620\eta + 1.367)}} + \frac{9.674}{1 + e^{-2(-1.792\eta - 3.485)}} \\ & - \frac{25.006}{1 + e^{-2(3.499\eta - 5.321)}} + \frac{9.129}{1 + e^{-2(0.277\eta - 0.882)}} + \frac{7.038}{1 + e^{-2(2.703\eta + 9.518)}} \\ & + \frac{0.049}{1 + e^{-2(-10.724\eta + 12.133)}} + \frac{2.142}{1 + e^{-2(2.228\eta + 1.949)}} - 8.005 \quad (IV.79) \end{aligned}$$

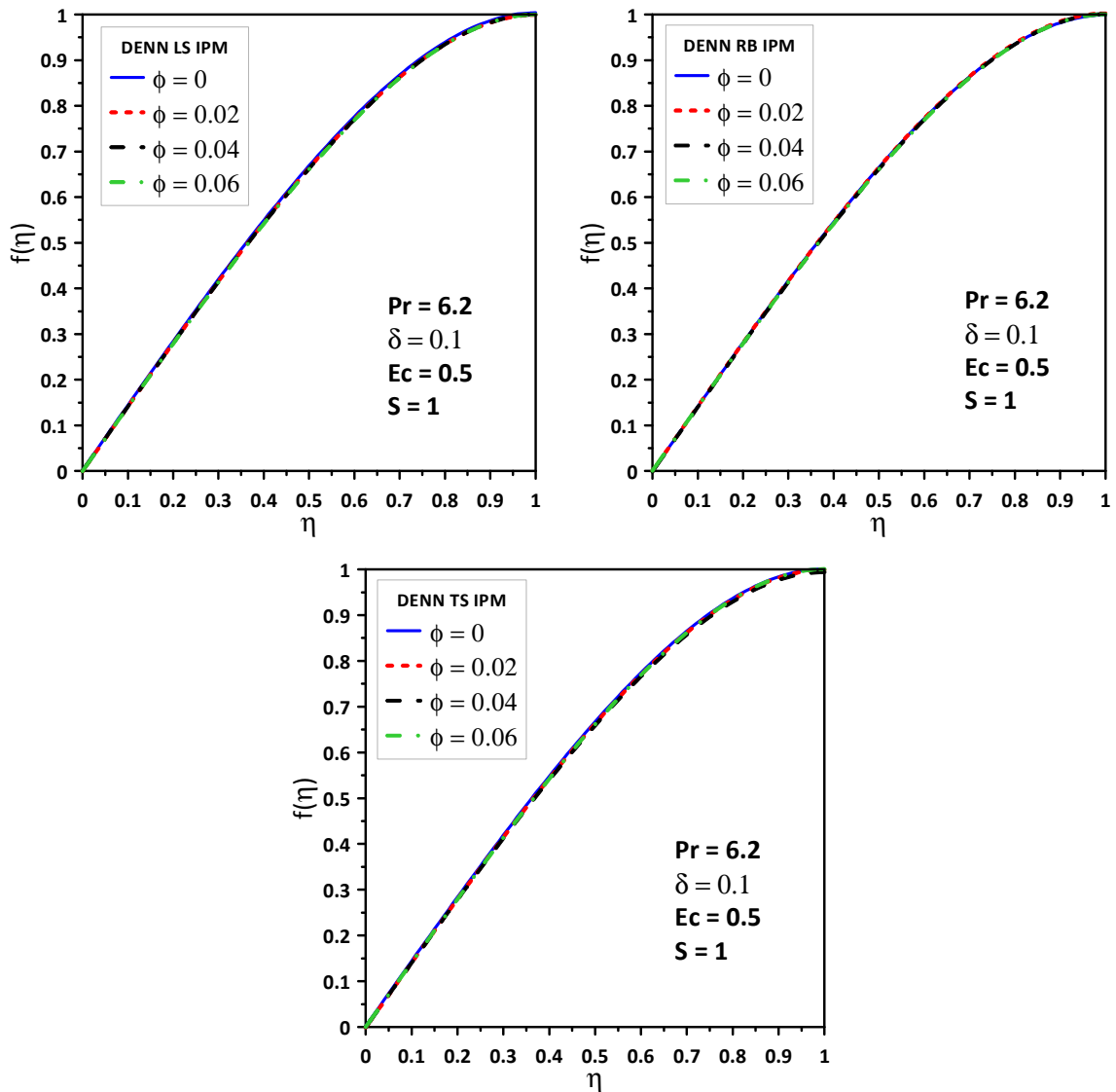


Figure (IV.17) : Comparaison de la variation du profil de vitesse en fonction de la fraction volumique des nanoparticules (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.

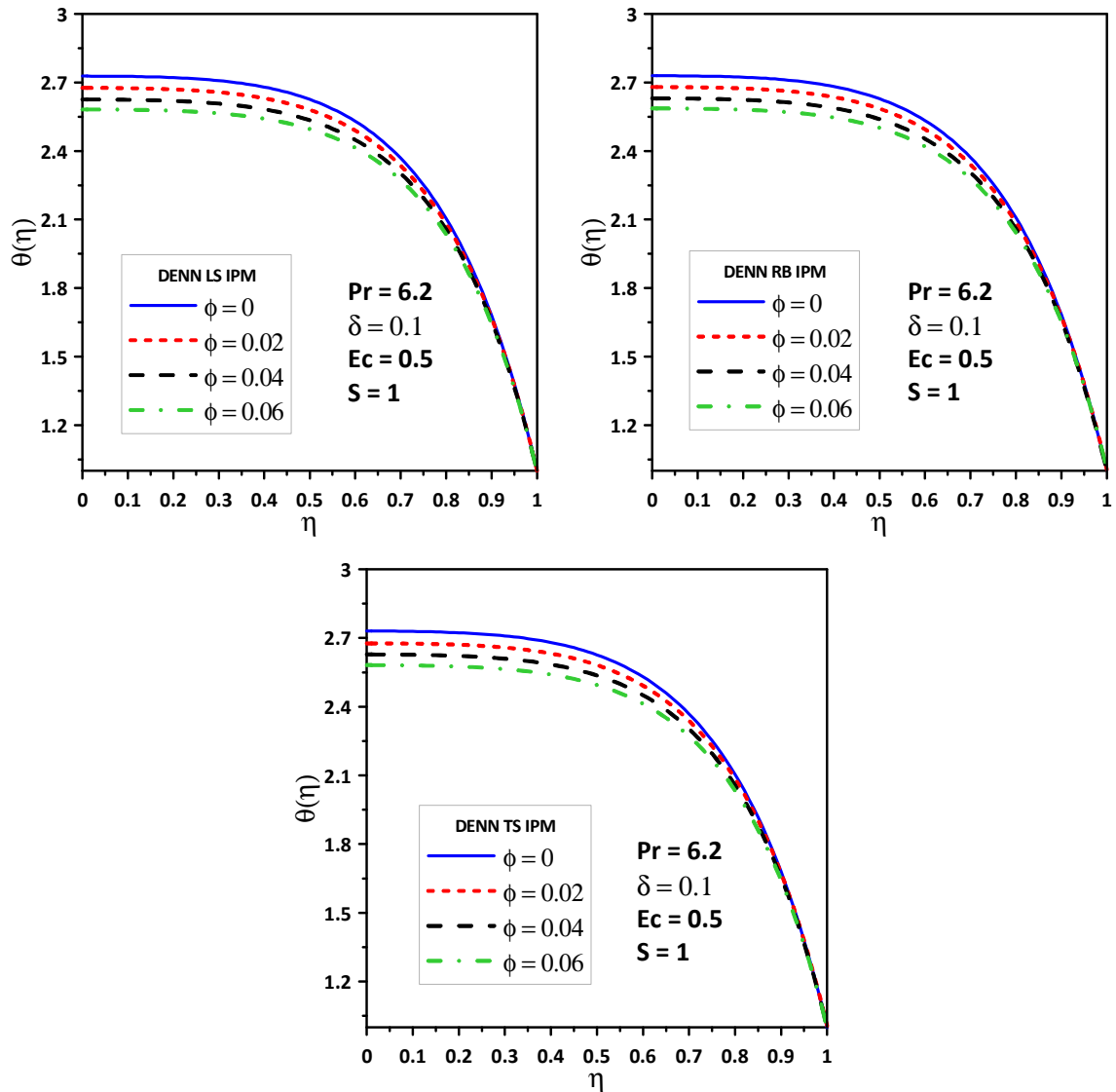


Figure (IV.18) : Comparaison de la variation du profil de température en fonction de la fraction volumique des nanoparticules (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.

L'effet de la fraction volumique des nanoparticules sur les profils de vitesse et de température est montré dans les figures (IV.17) et (IV.18). L'augmentation de nanoparticules dans le fluide de base entraîne une augmentation de l'épaisseur de la couche limite thermique alors qu'il n'a pas d'effet significatif sur l'épaisseur de la couche limite de vitesse. Il est évident que lorsque les nanoparticules ont été augmentées dans le fluide de base, le transfert de chaleur dans le nanofluide augmente en raison de leur conductivité thermique élevée, de sorte que les profils de température diminuent.

IV.5.3 Variations des profils de vitesse et de température pour différents types de nanoparticules

Changer le type de nanoparticule dans la base fluide entraînera inévitablement des changements sur les profils de vitesse et de température, donc à ce stade, nous allons choisir trois types de nanoparticules et les mettre leurs propriétés thermo-physiques dans les trois schémas de solution proposées et voir ce que nous obtenons :

IV.5.3.1 Cas cuivre-eau, $\phi = 0.06$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$

Dans ce cas, les solutions obtenues avec un ensemble particulier de poids (profil de vitesse) correspond aux valeurs de la fonction d'erreur $\varepsilon_f = 9.14 \times 10^{-9}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 7.67 \times 10^{-9}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 3.15 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, ainsi que l'ensemble particulier de poids (profil de température) correspond aux valeurs de la fonction d'erreur de $\varepsilon_\theta = 1.45 \times 10^{-8}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 1.15 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 1.37 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, sont données sous forme d'expressions comme suit :

► Schéma de solution DENN-LS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & \frac{0.574}{1 + e^{-(1.576\eta+0.084)}} - \frac{7.634}{1 + e^{-(0.321\eta-3.579)}} - \frac{3.457}{1 + e^{-(-1.267\eta-1.539)}} \\ & + \frac{6.589}{1 + e^{-(-2.128\eta+4.593)}} - \frac{4.597}{1 + e^{-(-1.151\eta+1.237)}} \\ & - \frac{2.011}{1 + e^{-(1.088\eta-6.238)}} - \frac{11.058}{1 + e^{-(2.891\eta-7.548)}} - \frac{10.840}{1 + e^{-(-3.138\eta-8.021)}} \\ & - \frac{2.489}{1 + e^{-(0.574\eta+5.899)}} + \frac{6.455}{1 + e^{-(-2.561\eta-4.765)}} \end{aligned} \quad (IV.80)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & \frac{0.835}{1 + e^{-(0.863\eta+2.727)}} - \frac{7.329}{1 + e^{-(-5.140\eta-6.333)}} - \frac{8.283}{1 + e^{-(-4.976\eta-6.743)}} \\ & + \frac{7.799}{1 + e^{-(8.467\eta+10.895)}} - \frac{8.677}{1 + e^{-(-0.811\eta-1.679)}} \\ & + \frac{3.888}{1 + e^{-(-22.267\eta-13.078)}} + \frac{3.407}{1 + e^{-(-1.923\eta-1.240)}} \\ & - \frac{17.866}{1 + e^{-(9.073\eta-13.271)}} - \frac{5.172}{1 + e^{-(-0.121\eta+5.372)}} \\ & - \frac{3.197}{1 + e^{-(1.267\eta-2.556)}} \end{aligned} \quad (IV.81)$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{RB}(\eta) &= 0.325e^{-(1.174\eta-0.509)^2} - 3.502e^{-(0.552\eta-2.075)^2} - 3.212e^{-(0.722\eta+1.221)^2} \\
 &+ 4.358e^{-(0.941\eta-1.591)^2} + 1.208e^{-(-0.307\eta-2.335)^2} - 0.810e^{-(-0.280\eta-5.207)^2} \\
 &+ 9.688e^{-(-0.432\eta-1.807)^2} - 6.713e^{-(-1.444\eta+4.277)^2} - 0.625e^{-(-1.266\eta+1.849)^2} \\
 &- 6.786e^{-(-0.608\eta+1.904)^2} \tag{IV.82}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) &= 1.757e^{-(0.907\eta-1.041)^2} - 3.529e^{-(0.703\eta-1.781)^2} \\
 &- 3.343e^{-(1.119\eta+2.077)^2} + 2.475e^{-(2.447\eta-3.586)^2} \\
 &+ 1.083e^{-(-0.331\eta-2.477)^2} - 0.795e^{-(-0.212\eta-5.202)^2} \\
 &+ 9.643e^{-(-0.179\eta-1.219)^2} - 8.219e^{-(-3.557\eta+5.918)^2} \\
 &- 2.603e^{-(-2.118\eta+3.205)^2} - 8.743e^{-(-2.283\eta+3.820)^2} \tag{IV.83}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) &= \frac{11.604}{1 + e^{-2(-1.744\eta-6.395)}} + \frac{13.246}{1 + e^{-2(0.368\eta-0.927)}} + \frac{2.149}{1 + e^{-2(-1.109\eta-4.894)}} \\
 &- \frac{9.943}{1 + e^{-2(2.656\eta+6.685)}} + \frac{15.480}{1 + e^{-2(-0.621\eta-4.737)}} \\
 &+ \frac{0.002}{1 + e^{-2(-4.082\eta-2.242)}} + \frac{11.442}{1 + e^{-2(-1.056\eta-2.265)}} \\
 &+ \frac{49.552}{1 + e^{-2(-0.997\eta+2.899)}} + \frac{6.501}{1 + e^{-2(0.483\eta+0.847)}} \\
 &+ \frac{6.303}{1 + e^{-2(-1.732\eta+4.708)}} - 53.170 \tag{IV.84}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) &= \frac{6.074}{1 + e^{-2(0.843\eta-2.684)}} + \frac{7.416}{1 + e^{-2(-1.287\eta-6.143)}} + \frac{8.973}{1 + e^{-2(-1.882\eta+2.686)}} \\
 &- \frac{9.482}{1 + e^{-2(0.620\eta+1.367)}} + \frac{9.674}{1 + e^{-2(-1.792\eta-3.485)}} \\
 &- \frac{25.006}{1 + e^{-2(3.499\eta-5.321)}} + \frac{9.129}{1 + e^{-2(0.277\eta-0.882)}} + \frac{7.038}{1 + e^{-2(2.703\eta+9.518)}} \\
 &+ \frac{0.049}{1 + e^{-2(-10.724\eta+12.133)}} + \frac{2.142}{1 + e^{-2(2.228\eta+1.949)}} - 8.005 \tag{IV.85}
 \end{aligned}$$

IV.5.3.2 Cas alumine-eau, $\phi = 0.06$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$

Un ensemble de poids formés pour les solutions DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM avec des valeurs des fonctions d'erreurs pour la vitesse et la température respectives de $(4.44 \times 10^{-9}, 1.68 \times 10^{-8})$, $(6.90 \times 10^{-9}, 7.46 \times 10^{-9})$ et $(4.06 \times 10^{-8}, 3.21 \times 10^{-8})$ dans ce cas, où notre choix s'est porté sur l'alumine comme nanoparticule, est les solutions sont présentés sous forme des équations :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & \frac{0.438}{1 + e^{-(1.787\eta-1.182)}} - \frac{1.097}{1 + e^{-(-0.863\eta-2.768)}} - \frac{5.276}{1 + e^{-(-0.703\eta+1.992)}} \\ & + \frac{2.942}{1 + e^{-(-1.102\eta+0.588)}} - \frac{0.003}{1 + e^{-(-0.318\eta-1.547)}} \\ & - \frac{1.298}{1 + e^{-(-0.627\eta-5.977)}} + \frac{12.719}{1 + e^{-(-3.222\eta+7.453)}} \\ & - \frac{9.616}{1 + e^{-(2.556\eta+5.293)}} + \frac{3.260}{1 + e^{-(-2.331\eta+4.154)}} \\ & - \frac{7.428}{1 + e^{-(-0.992\eta-0.041)}} \end{aligned} \quad (IV.86)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{1.765}{1 + e^{-(3.442\eta-3.893)}} - \frac{1.240}{1 + e^{-(-4.679\eta-3.232)}} - \frac{4.856}{1 + e^{-(-1.222\eta-0.164)}} \\ & + \frac{17.349}{1 + e^{-(-9.113\eta+13.458)}} + \frac{5.867}{1 + e^{-(-1.586\eta-1.348)}} - \frac{0.572}{1 + e^{-(0.326\eta-5.940)}} \\ & + \frac{6.892}{1 + e^{-(-5.050\eta-13.632)}} - \frac{10.198}{1 + e^{-(-9.294\eta+10.791)}} \\ & + \frac{8.522}{1 + e^{-(-5.122\eta+6.956)}} - \frac{11.915}{1 + e^{-(-0.231\eta+8.482)}} \end{aligned} \quad (IV.87)$$

► **Schéma de solution DENN-RB-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) & = 0.311e^{-(1.157\eta-0.475)^2} - 3.484e^{-(0.354\eta-2.242)^2} - 3.146e^{-(0.710\eta+1.239)^2} \\ & + 4.546e^{-(0.950\eta-1.603)^2} + 1.277e^{-(-0.427\eta-2.309)^2} - 0.733e^{-(-0.170\eta-5.201)^2} \\ & + 9.659e^{-(-0.468\eta-1.880)^2} - 6.663e^{-(-1.405\eta+4.230)^2} - 0.940e^{-(-1.208\eta+1.793)^2} \\ & - 6.603e^{-(-0.698\eta+1.955)^2} \end{aligned} \quad (IV.88)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) = & 2.065e^{-(0.882\eta-0.898)^2} - 3.625e^{-(0.370\eta-1.298)^2} \\
 & - 3.510e^{-(1.236\eta+2.139)^2} + 1.708e^{-(2.410\eta-3.495)^2} \\
 & + 1.045e^{-(0.475\eta-2.856)^2} - 0.584e^{-(0.469\eta-6.019)^2} \\
 & + 9.602e^{-(0.175\eta-1.171)^2} - 8.469e^{-(3.414\eta+5.801)^2} \\
 & - 2.591e^{-(1.819\eta+2.995)^2} - 9.195e^{-(2.068\eta+3.576)^2}
 \end{aligned} \tag{IV.89}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) = & \frac{1.219}{1 + e^{-2(-0.029\eta-0.057)}} - \frac{1.430}{1 + e^{-2(-0.635\eta+0.629)}} + \frac{6.601}{1 + e^{-2(-1.104\eta+2.227)}} \\
 & + \frac{6.855}{1 + e^{-2(0.040\eta-2.094)}} + \frac{3.026}{1 + e^{-2(-0.036\eta-0.158)}} \\
 & + \frac{5.156}{1 + e^{-2(-1.308\eta-2.316)}} + \frac{0.901}{1 + e^{-2(0.165\eta-1.062)}} \\
 & - \frac{2.649}{1 + e^{-2(-0.333\eta+1.768)}} - \frac{8.503}{1 + e^{-2(1.812\eta-4.136)}} \\
 & - \frac{7.183}{1 + e^{-2(-0.402\eta-0.184)}} - 1.997
 \end{aligned} \tag{IV.90}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & -\frac{3.240}{1 + e^{-2(-2.314\eta-2.822)}} + \frac{0.043}{1 + e^{-2(2.839\eta-0.456)}} + \frac{16.575}{1 + e^{-2(-4.029\eta+5.857)}} \\
 & + \frac{11.793}{1 + e^{-2(1.129\eta-2.703)}} + \frac{7.247}{1 + e^{-2(0.647\eta-5.470)}} \\
 & + \frac{10.160}{1 + e^{-2(-0.131\eta-2.960)}} + \frac{16.285}{1 + e^{-2(-1.440\eta+1.962)}} \\
 & + \frac{1.072}{1 + e^{-2(1.813\eta-0.945)}} - \frac{2.247}{1 + e^{-2(1.555\eta-5.054)}} + \frac{2.664}{1 + e^{-2(2.032\eta-1.892)}} \\
 & - 30.176
 \end{aligned} \tag{IV.91}$$

IV.5.3.3 Cas oxyde de titane-eau, $\phi = 0.06$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\delta = 0.1$, et $S = 1$

L'oxyde de titane a été choisie comme nanoparticule dans ce cas, et par conséquent, les fonctions d'erreurs résultant de ce choix pour les trois solutions proposées en ce qui concerne les fonctions de vitesse sont $\varepsilon_f = 1.16 \times 10^{-8}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 1.65 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 1.77 \times 10^{-10}$ pour DENN-TS-IPM, et en ce qui concerne la température, elles sont $\varepsilon_\theta = 2.91 \times 10^{-9}$ DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 2.17 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 3.93 \times 10^{-8}$ pour DENN-TS-IPM, et les poids correspondants constituent les solutions souhaitées suivants :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & -\frac{6.234}{1 + e^{-(2.586\eta-5.780)}} - \frac{5.079}{1 + e^{-(1.992\eta-4.611)}} - \frac{1.994}{1 + e^{-(0.334\eta-3.206)}} \\ & + \frac{0.123}{1 + e^{-(3.977\eta+1.960)}} - \frac{1.762}{1 + e^{-(0.569\eta-0.716)}} - \frac{0.266}{1 + e^{-(2.425\eta+0.761)}} \\ & - \frac{3.957}{1 + e^{-(1.496\eta+1.272)}} + \frac{3.424}{1 + e^{-(0.206\eta+2.178)}} - \frac{5.659}{1 + e^{-(4.071\eta-9.608)}} \\ & + \frac{1.276}{1 + e^{-(2.294\eta+0.569)}} \end{aligned} \quad (IV.92)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & \frac{3.038}{1 + e^{-(1.252\eta-7.951)}} - \frac{20.581}{1 + e^{-(12.968\eta-19.655)}} + \frac{3.305}{1 + e^{-(2.528\eta-1.324)}} \\ & - \frac{1.255}{1 + e^{-(1.970\eta+4.564)}} + \frac{1.989}{1 + e^{-(1.559\eta-1.224)}} \\ & - \frac{6.682}{1 + e^{-(1.972\eta-2.013)}} + \frac{6.845}{1 + e^{-(3.434\eta+4.680)}} \\ & - \frac{3.807}{1 + e^{-(1.040\eta+1.501)}} - \frac{17.326}{1 + e^{-(6.261\eta-9.241)}} \\ & - \frac{4.888}{1 + e^{-(1.962\eta-3.985)}} \end{aligned} \quad (IV.93)$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) &= -1.011e^{-(0.777\eta+1.092)^2} - 0.544e^{-(-1.053\eta-3.062)^2} - 4.706e^{-(-0.311\eta+0.992)^2} \\ &+ 5.201e^{-(0.524 \eta-0.953)^2} + 2.508e^{-(-1.149\eta-2.887)^2} - 1.278e^{-(-0.376 \eta-6.058)^2} \\ &+ 11.117e^{-(-0.457\eta-2.696)^2} - 6.946e^{-(-1.283\eta+14.116)^2} - 0.939e^{-(-0.564\eta+1.781)^2} \\ &- 7.730e^{-(-0.947\eta+2.985)^2} \end{aligned} \quad (IV.94)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{RB}(\eta) &= -4.866e^{-(0.522 \eta-1.119)^2} + 2.013e^{-(0.850\eta+0.120)^2} \\ &- 8.712e^{-(-3.346\eta+5.532)^2} - 1.303e^{-(1.662\eta-1.537)^2} \\ &+ 0.097e^{-(3.346\eta-3.691)^2} - 6.484e^{-(1.798\eta-3.059)^2} \\ &- 1.325e^{-(-1.922\eta-3.742)^2} + 2.185e^{-(0.023\eta+ 0.676)^2} \\ &+ 4.946e^{-(-1.211 \eta+1.331)^2} + 2.597e^{-(1.045\eta+5.194)^2} \end{aligned} \quad (IV.95)$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{TS}(\eta) &= \frac{1.016}{1 + e^{-2(0.167\eta+0.150)}} - \frac{1.129}{1 + e^{-2(-0.783\eta+0.676)}} + \frac{5.532}{1 + e^{-2(-1.198\eta+2.349)}} \\ &+ \frac{6.886}{1 + e^{-2(-0.016\eta-1.859)}} + \frac{3.058}{1 + e^{-2(-0.273\eta+0.349)}} \\ &+ \frac{4.550}{1 + e^{-2(-1.407\eta-2.459)}} + \frac{1.968}{1 + e^{-2(-0.132\eta-0.328)}} \\ &- \frac{3.480}{1 + e^{-2(-0.379\eta+1.525)}} - \frac{7.896}{1 + e^{-2(1.913\eta-4.309)}} \\ &- \frac{6.781}{1 + e^{-2(-0.495\eta-0.147)}} - 1.862 \end{aligned} \quad (IV.96)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{TS}(\eta) &= -\frac{7.722}{1 + e^{-2(2.288\eta-3.009)}} + \frac{1.989}{1 + e^{-2(-1.850\eta-0.648)}} + \frac{14.864}{1 + e^{-2(-4.306\eta+6.216)}} \\ &+ \frac{10.089}{1 + e^{-2(-0.284\eta-3.851)}} + \frac{2.113}{1 + e^{-2(-4.175\eta-5.276)}} \\ &+ \frac{9.078}{1 + e^{-2(-0.617\eta-3.027)}} + \frac{4.066}{1 + e^{-2(-1.343\eta-3.446)}} \\ &- \frac{2.733}{1 + e^{-2(-1.615\eta-0.752)}} - \frac{7.604}{1 + e^{-2(3.387\eta-5.994)}} \\ &+ \frac{0.109}{1 + e^{-2(2.138\eta-0.931)}} - 12.124 \end{aligned} \quad (IV.97)$$

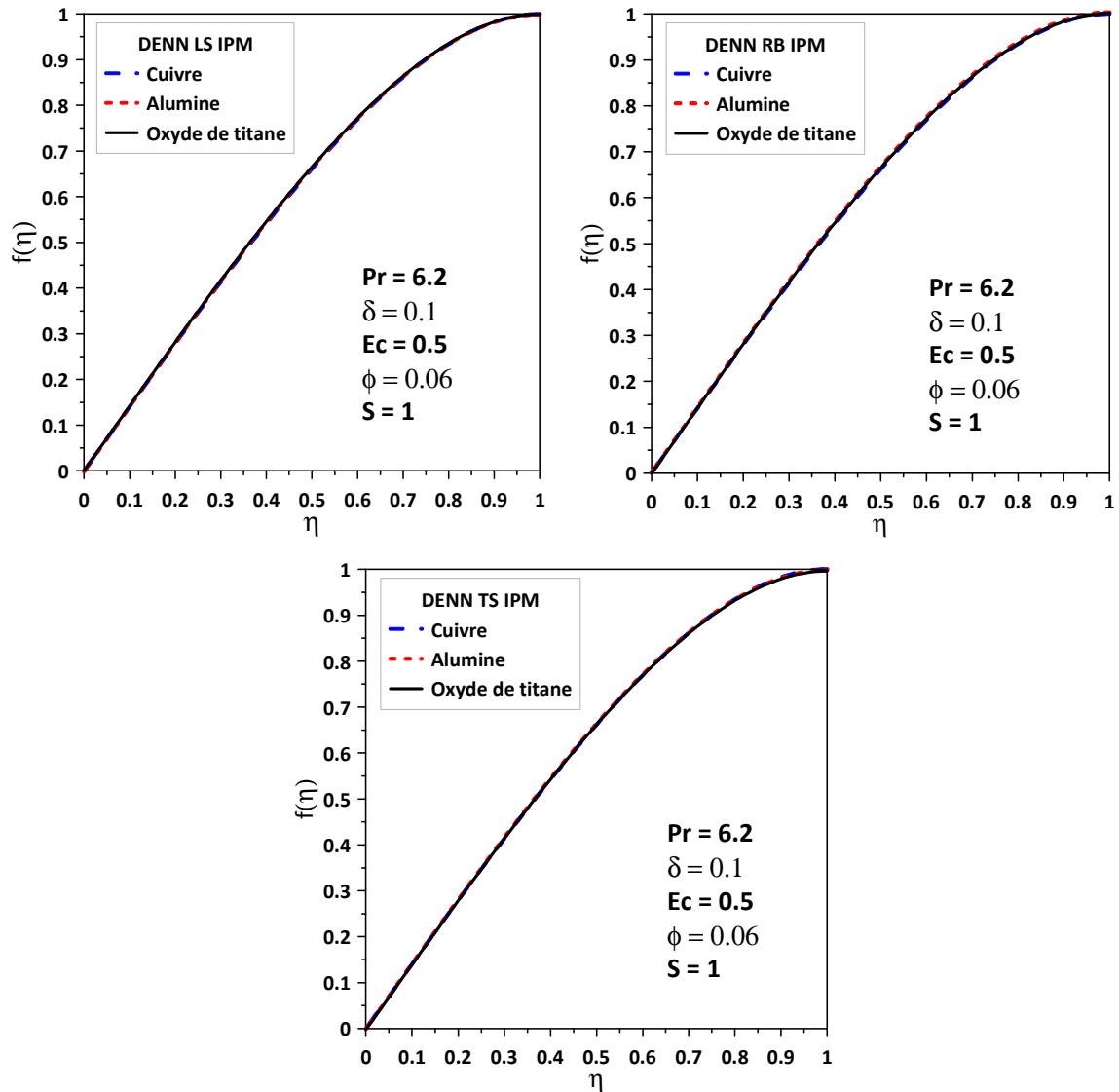


Figure (IV.19) : Comparaison de la variation des profils de vitesse en fonction de différents types de nanoparticules pour les trois schémas de solution.

Le type de nanofluide est un facteur clé pour l'amélioration du transfert de chaleur. Ainsi, une comparaison entre les différents types de nanoparticules est faite pour trouver la sélection qui conduit à la meilleure performance de refroidissement pour ce problème. L'effet de différents types de nanoparticules lorsque le fluide de base est l'eau sur les profils de vitesse et de température est montrée dans les figures (IV.19) et (IV.20), respectivement.

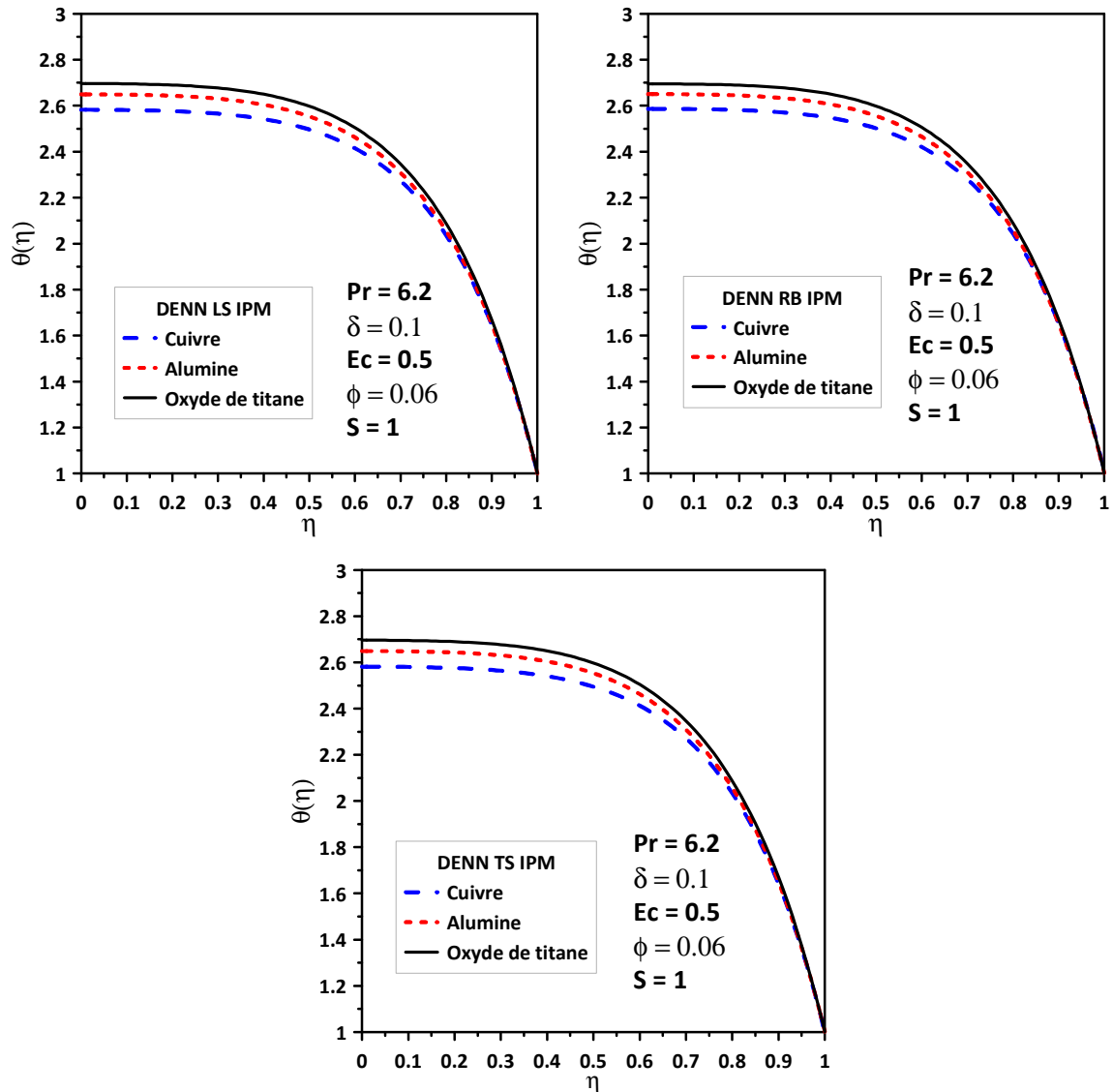


Figure (IV.20) : Comparaison de la variation des profils de température en fonction de différents types de nanoparticules pour les trois schémas de solution.

Les figures ci-dessus montrent qu'en utilisant différents types de nanoparticules, pratiquement n'importe aucun changement dans le profil de vitesse. Mais par contre il y a un changement dans le profil de température. Ainsi, le choix de cuivre comme nanoparticule conduit au profil minimal de $\theta(\eta)$, tandis que le choix de l'oxyde de titane conduit à obtenir le profil maximal.

IV.5.4 Effet du nombre d'écrasement sur les profils de vitesse et de température

Cette étude est complétée par la représentation des effets du nombre d'écrasement (S) sur les profils de vitesse et de température. Il est important de noter que le nombre d'écrasement (S) décrit le mouvement des plaques ($S > 0$) correspond aux plaques qui s'écartent, tandis que ($S < 0$) correspond aux plaques qui se rapprochent (l'écoulement dit d'écrasement). Pour cela en va varier ce nombre dans les processus de solution est voir leur influence :

IV.5.4.1 Cas $S = -1$ lorsque $Pr = 6.2$, $Ec = 0.5$, $\phi = 0.06$ (Cu-H₂O), et $\delta = 0.1$

Dans ce cas, les solutions obtenues à partir de l'ensemble des poids optimisés (profil de vitesse) correspond aux valeurs des fonctions d'erreurs $\varepsilon_f = 1.35 \times 10^{-10}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 1.36 \times 10^{-9}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 1.41 \times 10^{-10}$ pour DENN-TS-IPM, ainsi que l'ensemble des poids optimisés (profil de température) correspond aux valeurs des fonctions d'erreurs de $\varepsilon_\theta = 3.56 \times 10^{-9}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 3.62 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 2.32 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, sont présentés sous forme d'expressions comme suit :

► Schéma de solution DENN-LS-IPM :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & \frac{2.708}{1 + e^{-(1.869\eta + 0.258)}} - \frac{1.171}{1 + e^{-(-0.104\eta - 0.295)}} + \frac{4.914}{1 + e^{-(-1.574\eta + 2.048)}} \\ & + \frac{3.215}{1 + e^{-(1.383\eta - 3.888)}} - \frac{1.033}{1 + e^{-(-0.548\eta + 0.276)}} + \frac{1.820}{1 + e^{-(-2.298\eta - 2.712)}} \\ & - \frac{0.985}{1 + e^{-(0.268\eta - 0.339)}} - \frac{3.308}{1 + e^{-(-1.750\eta + 0.559)}} - \frac{0.468}{1 + e^{-(-0.694\eta - 2.469)}} \\ & - \frac{3.786}{1 + e^{-(-0.189\eta + 0.570)}} \end{aligned} \quad (IV.98)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{2.950}{1 + e^{-(1.317\eta + 1.894)}} - \frac{2.345}{1 + e^{-(4.300\eta - 3.703)}} + \frac{10.528}{1 + e^{-(0.621\eta + 8.925)}} \\ & + \frac{0.407}{1 + e^{-(-2.157\eta - 1.804)}} - \frac{4.228}{1 + e^{-(-3.247\eta + 1.181)}} \\ & + \frac{3.251}{1 + e^{-(-2.123\eta - 1.698)}} + \frac{1.348}{1 + e^{-(-3.160\eta + 1.292)}} - \frac{0.856}{1 + e^{-(-4.356\eta + 3.657)}} \\ & - \frac{11.185}{1 + e^{-(4.043\eta - 4.588)}} - \frac{2.758}{1 + e^{-(-6.189\eta - 3.506)}} \end{aligned} \quad (IV.99)$$

► Schéma de solution DENN-RB-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{RB}(\eta) &= 0.759e^{-(-0.012\eta-0.039)^2} + 2.371e^{-(0.750\eta-0.503)^2} + 1.107e^{-(-0.210\eta+0.752)^2} \\
 &+ 1.219e^{-(-0.849\eta+0.118)^2} - 1.201e^{-(-0.167\eta-0.578)^2} - 0.763e^{-(-0.710\eta-0.725)^2} \\
 &- 2.630e^{-(-0.774\eta-0.089)^2} - 1.627e^{-(-0.555\eta+0.722)^2} + 0.393e^{-(-0.966\eta-0.300)^2} \\
 &+ 0.363e^{-(0.799\eta+1.152)^2} \tag{IV.100}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) &= 1.388e^{-(1.570\eta-0.742)^2} - 1.190e^{-(-0.939\eta-1.653)^2} \\
 &- 4.359e^{-(1.711\eta+2.059)^2} + 4.187e^{-(1.596\eta-1.673)^2} \\
 &+ 0.015e^{-(-0.532\eta-1.760)^2} - 0.104e^{-(-0.280\eta-4.796)^2} \\
 &+ 9.772e^{-(-0.392\eta-0.882)^2} - 5.726e^{-(-2.631\eta+5.433)^2} \\
 &- 0.864e^{-(-1.633\eta+2.662)^2} - 7.242e^{-(-1.465\eta+1.994)^2} \tag{IV.101}
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) &= \frac{3.922}{1 + e^{-2(0.792\eta-0.198)}} - \frac{2.211}{1 + e^{-2(-0.222\eta-0.535)}} + \frac{11.006}{1 + e^{-2(-0.701\eta+0.893)}} \\
 &+ \frac{3.345}{1 + e^{-2(-0.873\eta-0.959)}} + \frac{1.340}{1 + e^{-2(0.327\eta-0.836)}} \\
 &+ \frac{1.633}{1 + e^{-2(-0.839\eta-1.339)}} - \frac{2.900}{1 + e^{-2(-0.824\eta-0.153)}} \\
 &- \frac{5.012}{1 + e^{-2(-0.427\eta+0.503)}} - \frac{2.734}{1 + e^{-2(-0.207\eta-1.912)}} \\
 &- \frac{5.690}{1 + e^{-2(-0.389\eta+0.895)}} - 1.348 \tag{IV.102}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) &= \frac{2.728}{1 + e^{-2(1.771\eta-0.703)}} - \frac{2.376}{1 + e^{-2(-0.844\eta-0.674)}} + \frac{7.745}{1 + e^{-2(-2.157\eta+2.523)}} \\
 &+ \frac{3.852}{1 + e^{-2(0.082\eta-1.581)}} + \frac{2.300}{1 + e^{-2(-2.146\eta-0.490)}} \\
 &+ \frac{1.646}{1 + e^{-2(-0.682\eta-2.657)}} + \frac{1.209}{1 + e^{-2(-1.478\eta+0.414)}} \\
 &- \frac{4.583}{1 + e^{-2(-1.205\eta-0.703)}} - \frac{4.665}{1 + e^{-2(2.061\eta-1.915)}} \\
 &- \frac{2.337}{1 + e^{-2(1.022\eta-0.860)}} - 2.760 \tag{IV.103}
 \end{aligned}$$

IV.5.4.2 Cas S = -0.5 lorsque Pr = 6.2, Ec = 0.5, $\phi = 0.06$ (Cu-H₂O), et $\delta = 0.1$

En appliquant les trois schémas de solution pour ce cas, est lorsque les critères d'arrêts atteintes aux valeurs des fonctions d'erreurs pour la vitesse et la température consécutivement, $\varepsilon_f = 3.49 \times 10^{-10}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 2.11 \times 10^{-9}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_f = 8.28 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, est $\varepsilon_\theta = 2.72 \times 10^{-9}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_\theta = 1.36 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM et $\varepsilon_\theta = 1.12 \times 10^{-8}$ pour DENN-TS-IPM, nous prenons les valeurs des poids et les mettons dans les équations formons les solutions suivantes :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & -\frac{4.638}{1 + e^{-(-1.600\eta-0.302)}} - \frac{4.443}{1 + e^{-(1.258\eta-4.431)}} + \frac{0.124}{1 + e^{-(-0.749\eta-0.811)}} \\ & + \frac{2.750}{1 + e^{-(-0.700\eta+1.441)}} + \frac{3.531}{1 + e^{-(-1.923\eta-3.375)}} - \frac{0.094}{1 + e^{-(0.242\eta+1.878)}} \\ & - \frac{1.297}{1 + e^{-(-1.848\eta+0.613)}} + \frac{0.965}{1 + e^{-(-0.450\eta+2.416)}} - \frac{5.578}{1 + e^{-(1.074\eta-2.009)}} \\ & + \frac{1.658}{1 + e^{-(1.720\eta-1.346)}} \end{aligned} \quad (IV.104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{2.928}{1 + e^{-(-2.884\eta+1.290)}} - \frac{5.911}{1 + e^{-(4.360\eta-6.215)}} + \frac{0.367}{1 + e^{-(-0.330\eta-1.209)}} \\ & + \frac{3.414}{1 + e^{-(-1.641\eta+2.269)}} + \frac{0.992}{1 + e^{-(0.443\eta-3.482)}} + \frac{0.214}{1 + e^{-(0.078\eta+0.660)}} \\ & + \frac{2.820}{1 + e^{-(-3.214\eta-1.427)}} + \frac{2.854}{1 + e^{-(4.281\eta+3.060)}} - \frac{7.959}{1 + e^{-(3.508\eta-3.992)}} \\ & - \frac{2.484}{1 + e^{-(-2.160\eta-2.174)}} \end{aligned} \quad (IV.105)$$

► **Schéma de solution DENN-RB-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) & = 0.874e^{-(0.500\eta-1.171)^2} + 2.545e^{-(0.500\eta-1.106)^2} + 3.255e^{-(0.490\eta+0.365)^2} \\ & + 2.084e^{-(0.732\eta-1.467)^2} + 0.877e^{-(0.735\eta+0.235)^2} + 1.221e^{-(1.042\eta-2.535)^2} \\ & + 0.397e^{-(0.847\eta+0.951)^2} - 3.563e^{-(0.069\eta+0.469)^2} - 1.203e^{-(0.014\eta-0.294)^2} \\ & - 2.479e^{-(0.182\eta+0.905)^2} \end{aligned} \quad (IV.106)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) = & 2.712e^{-(-1.229\eta+1.210)^2} + 2.709e^{-(-1.378\eta-0.879)^2} \\
 & - 0.548e^{-(-5.957\eta-3.331)^2} + 0.635e^{-(-0.410\eta-2.893)^2} \\
 & + 0.736e^{-(-0.892\eta+0.577)^2} + 0.782e^{-(-0.817\eta-2.542)^2} \\
 & + 1.617e^{-(-1.334\eta+0.206)^2} - 1.137e^{-(2.781\eta+3.448)^2} \\
 & - 8.874e^{-(1.264\eta-2.334)^2} - 1.232e^{-(-0.907\eta+2.925)^2} \quad (IV.107)
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) = & -\frac{1.800}{1+e^{-2(0.320\eta+0.349)}} + \frac{3.995}{1+e^{-2(-0.923\eta-1.925)}} - \frac{3.469}{1+e^{-2(-0.746\eta+0.493)}} \\
 & + \frac{6.583}{1+e^{-2(-0.610\eta+1.745)}} - \frac{2.365}{1+e^{-2(0.153\eta+0.775)}} \\
 & - \frac{2.376}{1+e^{-2(-0.830\eta-0.030)}} - \frac{0.787}{1+e^{-2(-1.010\eta-0.485)}} \\
 & - \frac{3.965}{1+e^{-2(0.645\eta-0.909)}} - \frac{1.652}{1+e^{-2(-0.805\eta+0.109)}} \\
 & + \frac{2.074}{1+e^{-2(-0.197\eta-1.21)}} + 1.881 \quad (IV.108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & -\frac{1.965}{1+e^{-2(1.872\eta+0.508)}} + \frac{11.342}{1+e^{-2(0.187\eta-2.722)}} + \frac{2.438}{1+e^{-2(-0.736\eta+0.567)}} \\
 & + \frac{19.287}{1+e^{-2(-1.027\eta+1.509)}} - \frac{1.154}{1+e^{-2(-0.352\eta+0.071)}} \\
 & - \frac{0.030}{1+e^{-2(2.801\eta-2.622)}} + \frac{6.258}{1+e^{-2(0.958\eta-2.109)}} \\
 & - \frac{7.049}{1+e^{-2(1.774\eta-2.292)}} + \frac{5.408}{1+e^{-2(1.167\eta+0.953)}} + \frac{5.583}{1+e^{-2(1.369\eta-0.746)}} \\
 & - 20.059 \quad (IV.109)
 \end{aligned}$$

IV.5.4.3 Cas S = 0 lorsque Pr = 6.2, Ec = 0.5, $\phi = 0.06$ (Cu-H₂O), et $\delta = 0.1$

La même chose est effectuée dans ce cas, en variant le nombre d'écrasement dans les trois modèles de solution, est voir la réponse en ce qui concerne l'évolution de la fonction d'erreur et les poids finaux correspondants, où étaient les valeurs des fonctions d'erreurs pour DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM respectives, 4.27×10^{-9} , 8.73×10^{-10} et 1.64×10^{-9} pour la vitesse, est 3.16×10^{-10} , 1.12×10^{-9} et 5.10×10^{-9} pour la température. Ainsi que les solutions sont données comme suit :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & -\frac{10.431}{1 + e^{-(1.488\eta - 3.517)}} - \frac{7.568}{1 + e^{-(-1.057\eta + 0.246)}} + \frac{5.545}{1 + e^{-(-2.712\eta + 7.319)}} \\ & + \frac{1.576}{1 + e^{-(-1.839\eta - 2.014)}} - \frac{5.388}{1 + e^{-(-0.667\eta - 5.831)}} \\ & - \frac{3.302}{1 + e^{-(-1.196\eta - 2.120)}} + \frac{2.623}{1 + e^{-(-0.491\eta + 1.872)}} + \frac{2.532}{1 + e^{-(-0.084\eta + 7.720)}} \\ & - \frac{5.572}{1 + e^{-(2.348\eta + 4.241)}} - \frac{0.844}{1 + e^{-(0.766\eta - 1.785)}} \end{aligned} \quad (IV.110)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & -\frac{1.748}{1 + e^{-(-5.208\eta - 3.717)}} - \frac{1.092}{1 + e^{-(-3.019\eta + 0.997)}} + \frac{2.252}{1 + e^{-(-4.248\eta + 3.950)}} \\ & + \frac{1.640}{1 + e^{-(-2.051\eta - 1.362)}} + \frac{1.537}{1 + e^{-(-5.902\eta + 6.343)}} - \frac{1.003}{1 + e^{-(-0.029\eta - 1.839)}} \\ & + \frac{0.735}{1 + e^{-(-0.843\eta - 2.792)}} + \frac{1.245}{1 + e^{-(-1.066\eta - 2.828)}} \\ & + \frac{0.183}{1 + e^{-(-0.359\eta - 2.411)}} - \frac{9.409}{1 + e^{-(-6.451\eta - 8.922)}} \end{aligned} \quad (IV.111)$$

► **Schéma de solution DENN-RB-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) & = -0.099e^{-(-0.371\eta - 0.695)^2} - 0.450e^{-(-0.614\eta - 3.579)^2} - 5.596e^{-(-0.434\eta + 0.462)^2} \\ & + 4.476e^{-(-0.316\eta + 0.023)^2} + 0.399e^{-(-0.233\eta - 1.095)^2} - 1.252e^{-(-0.307\eta - 6.013)^2} \\ & + 11.168e^{-(-0.589\eta - 2.424)^2} - 6.203e^{-(-0.961\eta + 3.817)^2} - 0.514e^{-(-0.766\eta + 1.659)^2} \\ & - 8.312e^{-(-0.697\eta + 2.526)^2} \end{aligned} \quad (IV.112)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) = & 0.787e^{-(0.425\eta-1.052)^2} - 0.745e^{-(-1.422\eta-2.925)^2} \\
 & - 3.708e^{-(1.561\eta+2.301)^2} + 1.774e^{-(1.164\eta-1.355)^2} \\
 & + 0.255e^{-(0.957\eta-0.515)^2} - 1.242e^{-(-0.280\eta-6.001)^2} \\
 & + 11.847e^{-(-0.162\eta-1.231)^2} - 8.814e^{-(-2.262\eta+4.549)^2} \\
 & - 2.018e^{-(-2.016\eta+3.429)^2} - 10.921e^{-(-1.022\eta+2.184)^2} \quad (IV.113)
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) = & \frac{0.505}{1 + e^{-2(1.158\eta-0.520)}} + \frac{8.792}{1 + e^{-2(0.005\eta-2.608)}} - \frac{1.937}{1 + e^{-2(-0.950\eta-0.672)}} \\
 & + \frac{15.750}{1 + e^{-2(-0.889\eta+2.474)}} - \frac{4.087}{1 + e^{-2(0.273\eta+0.198)}} \\
 & - \frac{1.161}{1 + e^{-2(-0.928\eta-0.522)}} + \frac{0.611}{1 + e^{-2(-1.033\eta-1.412)}} \\
 & + \frac{1.738}{1 + e^{-2(0.959\eta-0.825)}} - \frac{1.663}{1 + e^{-2(-1.037\eta+0.028)}} \\
 & + \frac{6.114}{1 + e^{-2(-0.662\eta-1.689)}} - 12.331 \quad (IV.114)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & \frac{4.049}{1 + e^{-2(1.363\eta-6.462)}} + \frac{4.932}{1 + e^{-2(-0.691\eta-3.173)}} + \frac{6.105}{1 + e^{-2(-0.492\eta-0.882)}} \\
 & + \frac{25.752}{1 + e^{-2(-2.035\eta+3.394)}} + \frac{5.868}{1 + e^{-2(-0.973\eta+1.111)}} \\
 & - \frac{1.263}{1 + e^{-2(-2.893\eta-1.832)}} - \frac{3.849}{1 + e^{-2(-1.264\eta+0.628)}} \\
 & - \frac{5.521}{1 + e^{-2(0.000\eta+1.732)}} + \frac{5.975}{1 + e^{-2(0.486\eta-2.139)}} - \frac{1.290}{1 + e^{-2(2.126\eta-2.354)}} \\
 & - 20.379 \quad (IV.115)
 \end{aligned}$$

IV.5.4.4 Cas S = 0.5 lorsque Pr = 6.2, Ec = 0.5, $\phi = 0.06$ (Cu-H₂O), et $\delta = 0.1$

Dans ce cas, nous avons changé à nouveau la valeur du nombre d'écrasement dans les trois schémas de résolution proposées, puis le processus de simulation a été lancé pour atteindre les solutions souhaitées. Les résultats obtenus concernaient les valeurs des fonctions d'erreurs pour la vitesse sont $\varepsilon_f = 2.00 \times 10^{-9}$, $\varepsilon_f = 3.65 \times 10^{-10}$ et $\varepsilon_f = 2.41 \times 10^{-9}$, et pour la température sont $\varepsilon_\theta = 1.11 \times 10^{-10}$, $\varepsilon_\theta = 1.05 \times 10^{-8}$ et $\varepsilon_\theta = 1.32 \times 10^{-8}$, tandis que les valeurs des poids étaient placées à leur place dans les équations, les solutions étaient les suivants :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & \frac{1.350}{1 + e^{-(-2.662\eta-8.079)}} - \frac{4.862}{1 + e^{-(3.682\eta-8.565)}} - \frac{0.207}{1 + e^{-(-3.834\eta-2.006)}} \\ & - \frac{1.138}{1 + e^{-(-2.263\eta+2.538)}} + \frac{1.054}{1 + e^{-(2.412\eta-4.324)}} - \frac{1.508}{1 + e^{-(-2.140\eta+1.382)}} \\ & - \frac{0.807}{1 + e^{-(-2.687\eta-0.679)}} + \frac{2.406}{1 + e^{-(-1.458\eta+1.989)}} - \frac{7.145}{1 + e^{-(-2.320\eta-4.947)}} \\ & + \frac{1.175}{1 + e^{-(2.282\eta-0.380)}} \end{aligned} \quad (IV.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & - \frac{2.168}{1 + e^{-(-2.353\eta+0.996)}} - \frac{13.605}{1 + e^{-(10.088\eta-15.271)}} + \frac{1.053}{1 + e^{-(-0.271\eta-2.214)}} \\ & + \frac{3.312}{1 + e^{-(-3.933\eta+4.615)}} + \frac{0.705}{1 + e^{-(0.980\eta-5.144)}} - \frac{1.175}{1 + e^{-(-0.813\eta-0.488)}} \\ & + \frac{2.654}{1 + e^{-(-1.133\eta+0.207)}} + \frac{0.044}{1 + e^{-(0.350\eta+1.946)}} - \frac{8.574}{1 + e^{-(-5.793\eta-7.957)}} \\ & - \frac{2.349}{1 + e^{-(-4.944\eta-4.487)}} \end{aligned} \quad (IV.117)$$

► **Schéma de solution DENN-RB-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) & = 0.143e^{-(1.219\eta-1.096)^2} - 1.352e^{-(-0.283\eta-1.245)^2} - 3.733e^{-(0.744\eta+0.872)^2} \\ & + 3.813e^{-(0.867\eta-1.750)^2} + 0.469e^{-(-1.099\eta-0.982)^2} - 0.935e^{-(-0.544\eta-5.436)^2} \\ & + 9.726e^{-(-0.163\eta-1.285)^2} - 5.746e^{-(-1.286\eta+4.035)^2} - 1.231e^{-(-0.360\eta+1.615)^2} \\ & - 6.997e^{-(-0.713\eta+1.975)^2} \end{aligned} \quad (IV.118)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) = & 1.056e^{-(1.175\eta-1.211)^2} - 0.924e^{-(-1.850\eta-2.193)^2} \\
 & - 6.104e^{-(-0.456\eta+1.096)^2} + 0.845e^{-(2.251\eta-3.119)^2} \\
 & + 0.614e^{-(-1.210\eta-1.443)^2} - 1.242e^{-(-0.280\eta-6.001)^2} \\
 & + 10.286e^{-(0.218\eta-0.907)^2} - 10.907e^{-(-2.842\eta+5.223)^2} \\
 & - 1.658e^{-(-0.881\eta+1.527)^2} - 12.154e^{-(-1.639\eta+3.048)^2} \quad (IV.119)
 \end{aligned}$$

► Schéma de solution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) = & \frac{1.999}{1 + e^{-2(-0.859\eta+1.270)}} + \frac{2.976}{1 + e^{-2(-1.291\eta+2.308)}} + \frac{2.479}{1 + e^{-2(-0.211\eta-2.052)}} \\
 & + \frac{5.163}{1 + e^{-2(-1.948\eta+4.163)}} + \frac{4.304}{1 + e^{-2(-1.382\eta-2.448)}} \\
 & - \frac{0.132}{1 + e^{-2(0.219\eta+2.591)}} + \frac{1.926}{1 + e^{-2(-0.503\eta+2.907)}} \\
 & + \frac{2.619}{1 + e^{-2(0.685\eta+0.283)}} - \frac{3.332}{1 + e^{-2(-0.195\eta+3.654)}} \\
 & + \frac{4.645}{1 + e^{-2(0.597\eta-0.550)}} - 11.325 \quad (IV.120)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & \frac{6.357}{1 + e^{-2(-0.273\eta-2.714)}} + \frac{4.096}{1 + e^{-2(0.572\eta-4.713)}} - \frac{8.500}{1 + e^{-2(0.159\eta+0.412)}} \\
 & + \frac{8.128}{1 + e^{-2(-3.636\eta+5.047)}} - \frac{0.380}{1 + e^{-2(1.658\eta-0.453)}} \\
 & - \frac{1.837}{1 + e^{-2(-3.815\eta+4.801)}} + \frac{0.480}{1 + e^{-2(3.233\eta+1.769)}} \\
 & - \frac{17.457}{1 + e^{-2(2.002\eta-3.066)}} - \frac{1.658}{1 + e^{-2(-1.392\eta+0.509)}} \\
 & + \frac{4.335}{1 + e^{-2(0.078\eta-1.855)}} + 3.218 \quad (IV.121)
 \end{aligned}$$

IV.5.4.5 Cas S = 1 lorsque Pr = 6.2, Ec = 0.5, $\phi = 0.06$ (Cu-H₂O), et $\delta = 0.1$

En fin de cette partie, nous fixons le nombre S et nous attendons jusqu'aux les simulations se convergent aux valeurs minimales des fonctions d'erreurs $\varepsilon_f = 9.14 \times 10^{-9}$ et $\varepsilon_\theta = 1.45 \times 10^{-8}$ pour DENN-LS-IPM, $\varepsilon_f = 7.67 \times 10^{-9}$ et $\varepsilon_\theta = 1.15 \times 10^{-8}$ pour DENN-RB-IPM, $\varepsilon_f = 3.15 \times 10^{-9}$ et $\varepsilon_\theta = 1.37 \times 10^{-9}$ pour DENN-TS-IPM, ensuite on prend les valeurs des poids et on les met en place pour former les solutions appropriées :

► **Schéma de solution DENN-LS-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{LS}(\eta) = & \frac{0.574}{1 + e^{-(1.576\eta+0.084)}} - \frac{7.634}{1 + e^{-(0.321\eta-3.579)}} - \frac{3.457}{1 + e^{-(1.267\eta-1.539)}} \\ & + \frac{6.589}{1 + e^{-(2.128\eta+4.593)}} - \frac{4.597}{1 + e^{-(1.151\eta+1.237)}} \\ & - \frac{2.011}{1 + e^{-(1.088\eta-6.238)}} - \frac{11.058}{1 + e^{-(2.891\eta-7.548)}} - \frac{10.840}{1 + e^{-(3.138\eta-8.021)}} \\ & - \frac{2.489}{1 + e^{-(0.574\eta+5.899)}} + \frac{6.455}{1 + e^{-(2.561\eta-4.765)}} \end{aligned} \quad (IV.122)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{LS}(\eta) = & \frac{0.835}{1 + e^{-(0.863\eta+2.727)}} - \frac{7.329}{1 + e^{-(5.140\eta-6.333)}} - \frac{8.283}{1 + e^{-(4.976\eta-6.743)}} \\ & + \frac{7.799}{1 + e^{-(8.467\eta+10.895)}} - \frac{8.677}{1 + e^{-(0.811\eta-1.679)}} + \frac{3.888}{1 + e^{-(22.267\eta-13.078)}} \\ & + \frac{3.407}{1 + e^{-(1.923\eta-1.240)}} - \frac{17.866}{1 + e^{-(9.073\eta-13.271)}} - \frac{5.172}{1 + e^{-(0.121\eta+5.372)}} \\ & - \frac{3.197}{1 + e^{-(1.267\eta-2.556)}} \end{aligned} \quad (IV.123)$$

► **Schéma de résolution DENN-RB-IPM :**

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{RB}(\eta) = & 0.325e^{-(1.174\eta-0.509)^2} - 3.502e^{-(0.552\eta-2.075)^2} - 3.212e^{-(0.722\eta+1.221)^2} \\ & + 4.358e^{-(0.941\eta-1.591)^2} + 1.208e^{-(0.307\eta-2.335)^2} - 0.810e^{-(0.280\eta-5.207)^2} \\ & + 9.688e^{-(0.432\eta-1.807)^2} - 6.713e^{-(1.444\eta+4.277)^2} - 0.625e^{-(1.266\eta+1.849)^2} \\ & - 6.786e^{-(0.608\eta+1.904)^2} \end{aligned} \quad (IV.124)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{RB}(\eta) = & 1.757e^{-(0.907\eta-1.041)^2} - 3.529e^{-(0.703\eta-1.781)^2} \\
 & - 3.343e^{-(1.119\eta+2.077)^2} + 2.475e^{-(2.447\eta-3.586)^2} \\
 & + 1.083e^{-(0.331\eta-2.477)^2} - 0.795e^{-(0.212\eta-5.202)^2} \\
 & + 9.643e^{-(0.179\eta-1.219)^2} - 8.219e^{-(3.557\eta+5.918)^2} \\
 & - 2.603e^{-(2.118\eta+3.205)^2} - 8.743e^{-(2.283\eta+3.820)^2} \quad (IV.125)
 \end{aligned}$$

► Schéma de résolution DENN-TS-IPM :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{TS}(\eta) = & \frac{11.604}{1 + e^{-2(-1.744\eta-6.395)}} + \frac{13.246}{1 + e^{-2(0.368\eta-0.927)}} + \frac{2.149}{1 + e^{-2(-1.109\eta-4.894)}} \\
 & - \frac{9.943}{1 + e^{-2(2.656\eta+6.685)}} + \frac{15.480}{1 + e^{-2(-0.621\eta-4.737)}} \\
 & + \frac{0.002}{1 + e^{-2(-4.082\eta-2.242)}} + \frac{11.442}{1 + e^{-2(-1.056\eta-2.265)}} \\
 & + \frac{49.552}{1 + e^{-2(-0.997\eta+2.899)}} + \frac{6.501}{1 + e^{-2(0.483\eta+0.847)}} \\
 & + \frac{6.303}{1 + e^{-2(-1.732\eta+4.708)}} - 53.170 \quad (IV.126)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{TS}(\eta) = & \frac{6.074}{1 + e^{-2(0.843\eta-2.684)}} + \frac{7.416}{1 + e^{-2(-1.287\eta-6.143)}} + \frac{8.973}{1 + e^{-2(-1.882\eta+2.686)}} \\
 & - \frac{9.482}{1 + e^{-2(0.620\eta+1.367)}} + \frac{9.674}{1 + e^{-2(-1.792\eta-3.485)}} \\
 & - \frac{25.006}{1 + e^{-2(3.499\eta-5.321)}} + \frac{9.129}{1 + e^{-2(0.277\eta-0.882)}} + \frac{7.038}{1 + e^{-2(2.703\eta+9.518)}} \\
 & + \frac{0.049}{1 + e^{-2(-10.724\eta+12.133)}} + \frac{2.142}{1 + e^{-2(2.228\eta+1.949)}} - 8.005 \quad (IV.127)
 \end{aligned}$$

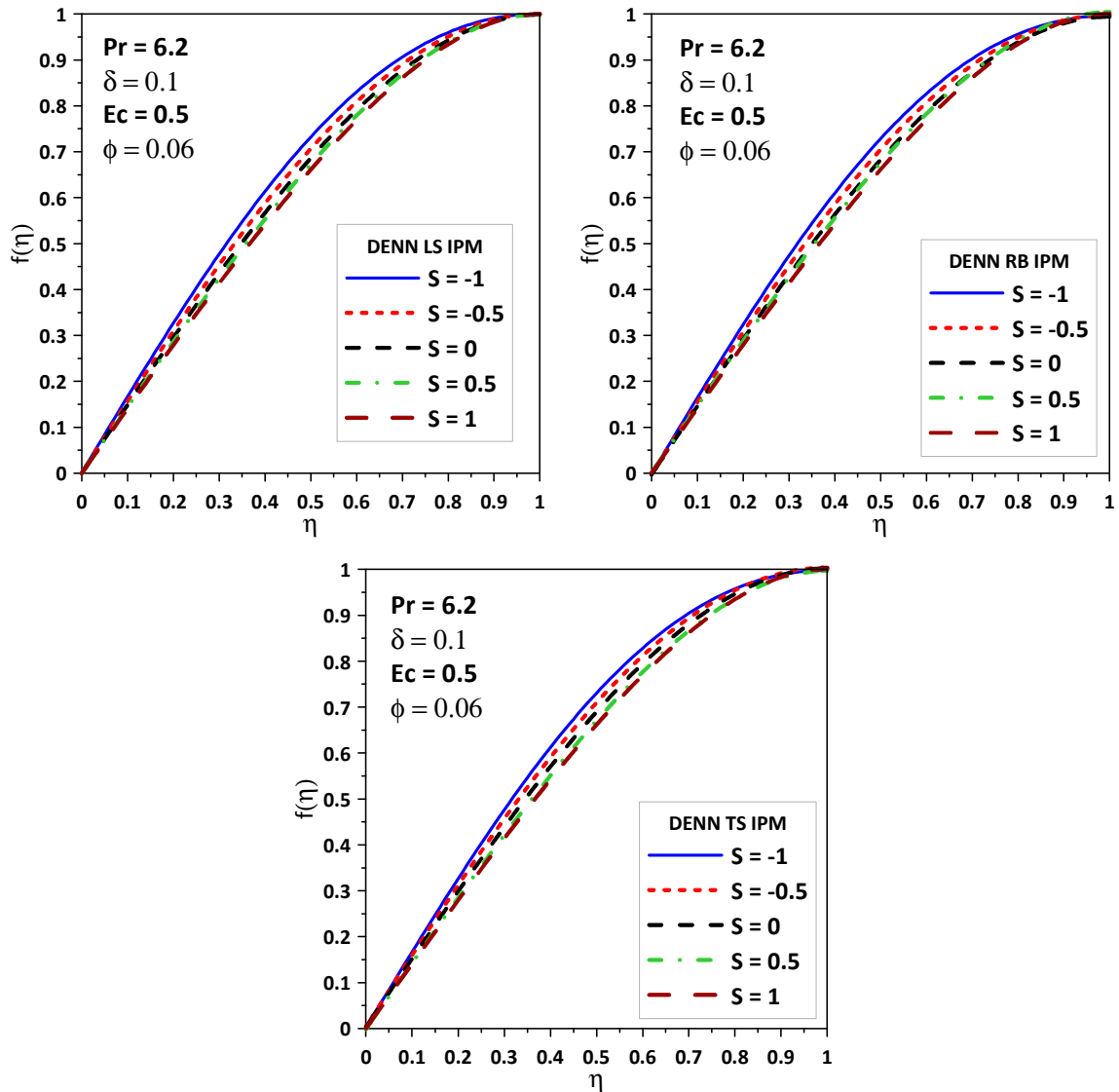


Figure (IV.21) : Comparaison de la variation des profils de vitesse en fonction du nombre d'écrasement (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.

La figure (IV.21) montre l'effet sur le profil de vitesse $f(\eta)$ de l'eau contenant des nanoparticules de cuivre pour différents nombres d'écrasement positif et négatif. Il est important de noter que le nombre d'écrasement décrit les mouvements des plaques. On constate que, la vitesse $f(\eta)$ augmente de $\eta = 0$ à $\eta = 1$, la vitesse diminue légèrement lorsque le nombre d'écrasement augmente.

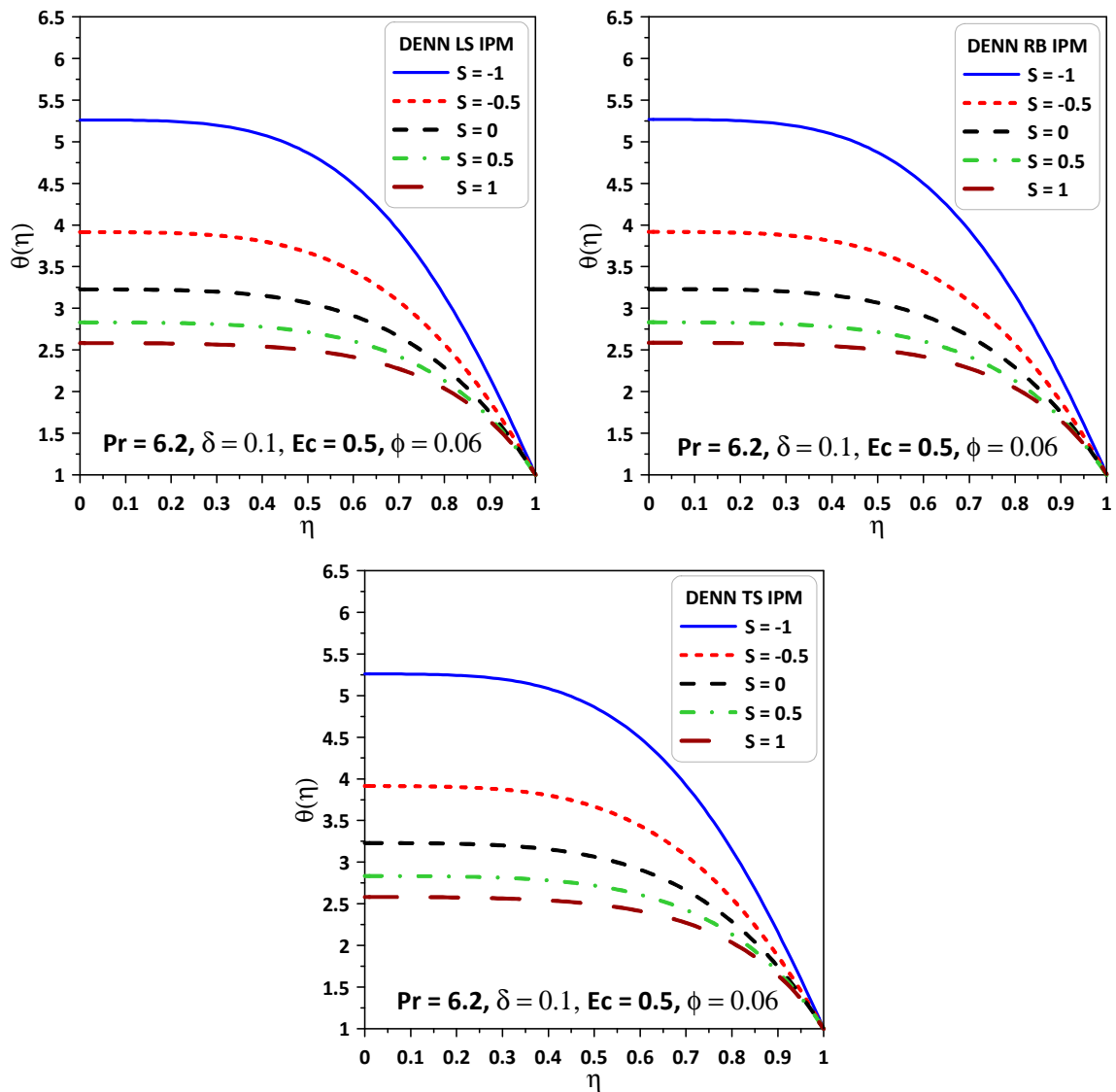


Figure (IV.22) : Comparaison de la variation des profils de température en fonction du nombre d'écrasement (cuivre-eau) pour les trois schémas de solution.

L'effet du nombre d'écrasement sur le profil de température $\theta(\eta)$ est décrit dans la figure (IV.22). Nous pouvons noter que la diminution des profils de température est observée avec l'augmentation des valeurs de S , puisque toute augmentation de S peut être liée à l'augmentation de la distance entre les deux plaques, l'accroissement du mouvement des plaques et la diminution de la viscosité cinématique. Il est évident que l'épaisseur de la couche limite thermique est relativement élevée lorsque les plaques se rapprochent l'une de l'autre.

IV.6 Conclusion

Les schémas de solution basés sur des modèles de réseaux des neurones utilisant des fonctions d'activation log-sigmoïde, à base-radiale et tan-sigmoïde, optimisés avec une méthode de points intérieurs peuvent fournir des solutions fiables pour les équations différentielles non linéaire transformé des équations de l'écoulement instationnaire par écrasement d'un nonfluide entre deux plaques parallèles.

L'étude comparative des résultats des trois schémas proposés montre que les solutions dans le cas DENN-LS-IPM, DENN-RB-IPM et DENN-TS-IPM correspondent avec un grand pourcentage de précision.

Une analyse statistique basée sur un pas de simulation fixe pour chaque schéma proposé montre que les valeurs des erreurs n'ont aucune différence significative pour DENN-LS-IPM et DENN-TS-IPM. En général, les résultats les plus précis sont obtenus par le DENN-TS-IPM, les solutions les plus convergentes sont obtenues avec le DENN-LS-IPM, et la méthode la plus efficace en termes de calcul est le DENN-RB-IPM. En remarque que les résultats présentés ici sont meilleurs en termes de précision que ceux rapportés dans la littérature pour des solveurs bien connus, par exemple HPM et la solution numérique par la méthode de Range-Kutta de quatrième ordre pour tous les cas étudiés dans cette thèse.

Ainsi que, les effets du paramètre sans dimension, de la fraction volumique des nanoparticules, du type de nanofluide et du nombre d'écrasement sur la vitesse et le profil de température ont été considérés. Les résultats montrent que l'augmentation du paramètre sans dimension n'a pas d'effet significatif sur l'épaisseur de la couche limite de vitesse et le profil de température. On constate également que l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules n'a pas d'effet significatif sur l'épaisseur de la couche limite de vitesse, mais provoque une légère diminution de profil de température. De plus, on constate que le type de nanofluide est un facteur important pour l'amélioration du transfert de chaleur. Enfin, les résultats montrent que l'augmentation de la valeur du nombre d'écrasement S a un effet opposé sur la vitesse $f(\eta)$ et la température $\theta(\eta)$ dans ce type d'écoulement.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de cette thèse était d'étudier le comportement dynamique et thermique des écoulements des nanofluides dans des cas complexes par des nouvelles méthodes stochastiques. Pour comprendre les subtilités de ces écoulements, nous avons considéré un écoulement nanofluide instable par écrasement, un modèle mathématique est mis en place basé sur les principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie donnent des équations différentielles non linéaires à ordre élevés nécessitent leur solution. Pour cela des techniques intelligentes ont été développées et nous ont permis d'obtenir de nombreux résultats. Les interprétations qui ont accompagné ces derniers nous permettent d'avancer des conclusions intéressantes.

Cette étude a d'abord souligné le rôle déterminant joué par le domaine de la nanotechnologie qui est un domaine d'études récent et très délicat développé depuis les années 90 et qui connaît un grand essor ces dernières années, le transport des nanoparticules s'intègre essentiellement dans ces microsystèmes par les écoulements des nanofluides, alors le comportement thermo-physique de ces fluides a été développé. Ainsi qu'une recherche bibliographique pour des travaux antérieurs sur ce domaine a été présentée.

Nous avons ensuite mis en place un modèle mathématique de notre problème d'intérêt sur la base des hypothèses bien définies. Nous avons considéré un écrasement bidimensionnel d'un nanofluide à propriétés physiques constantes entre deux plaques infinies. Ce problème physique est modélisé dans un repère des coordonnées cartésiennes par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de la masse, des trois équations de quantités de mouvement et de l'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites. Ensuite, la forme adimensionnelle est utilisée afin de trouver des solutions générales au problème physique indépendamment du système de mesure, et pour réduire le nombre de paramètres de notre étude, elle permet aussi la simplification de la résolution des systèmes d'équations.

Différentes approches et différentes méthodes peuvent être utilisées pour résoudre numériquement ou semi-numériquement ces équations différentielles non linéaires. L'exploration bibliographique de ce problème a permis de dégager deux classes d'approches et méthodes : les méthodes numériques classiques telles que la méthode du volume fini et méthode de Runge-Kutta et l'approche d'optimisation stochastique. Plusieurs méthodes stochastiques ont été proposées pour ces problèmes, basée sur un réseau des neurones non supervisé et optimisé avec les algorithmes PSO, ASM ou PSO-ASM.

Nous avons choisi les solveurs basés sur des modèles de réseaux des neurones utilisant des fonctions d'activation log-sigmoïde, base-radiale et tan-sigmoïde, optimisés avec une méthode de point intérieur pour la recherche d'une solution semi-numérique des équations différentielles non linéaires obtenues. Notre choix nous a fourni des solutions fiables pour le problème transformé non linéaire des équations de l'écoulement nanofluides.

Les schémas proposés présentent certains avantages par rapport aux autres techniques numériques ou semi-numériques : les solutions sont facilement disponibles pour toute entrée continue dans tout l'intervalle souhaité, alors que les autres solveurs numériques donnent des résultats uniquement sur une grille prédéfinie avec des entrées discrètes. De même, les solveurs analytiques de pointe tels que, ADM, VIM, HPM et HAM ne donnent des résultats précis que dans un voisinage proche de l'estimation initiale ; à mesure que la plage d'entrée s'étend, ils commencent à accumuler des erreurs. Les modèles de réseaux des neurones proposés, en revanche, sont moins susceptibles à ces effets. La simplicité du concept, la facilité de mise en œuvre et l'élargissement des domaines d'application sont d'autres avantages du système proposé.

Enfin, l'étude paramétrique de cet écoulement, montrent l'effet positif ou négatif de nombreux paramètres qui caractérisent ce type d'écoulement.

Les perspectives de cette étude sont nombreuses. Elles portent autant sur l'étude d'autres techniques d'intelligence artificielle basées sur des modèles de réseaux de neurones, optimisées avec des algorithmes de recherche globale et locale, telles que l'optimisation des colonies de fourmis/abeilles, la programmation

génétique, l'évolution différentielle, la méthode de l'ensemble actif, etc. De plus, on peut envisager d'étendre ces méthodologies pour résoudre des équations différentielles rigides, hautement non linéaires avec des singularités et nécessitant des solutions convergentes sur des domaines plus vastes. Ainsi que, il est conseillé d'envisager de faire la partie expérimentale de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. U. S. Choi, Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticle, *ASME FED231* (1995) 99–105.
- [2] J. Buongiorno, Convective transport in nanofluids, *ASME J. Heat Transf.* 128 (2006) 240–250.
- [3] W. Daungthongsuk, S. Wongwises, A critical review of convective heat transfer nanofluids, *Renew. Sust. Energ. Rev.* 11 (2007) 797–817.
- [4] X. Q. Wang, A. S. Mujumdar, A review on nanofluids—part I: theoretical and numerical investigations, *Braz. J. Chem. Eng.* 25 (2008) 613–630.
- [5] X. Q. Wang, A. S. Mujumdar, A review on nanofluids—part II: experiments and applications, *Braz. J. Chem. Eng.* 25 (2008) 631–648.
- [6] S. Kakaç, A. Pramuanjaroenkij, Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids, *Int. J. Heat Mass Tran.* 52 (2009) 3187–3196.
- [7] M. Sheikholeslami, D. D. Ganji, Nanofluid flow and heat transfer between parallel plates considering Brownian motion using DTM, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 283 (2015) 651–663.
- [8] A. Dib, A. Haihem, B. Bou-said, Approximate analytical solution of squeezing unsteady nanofluid flow, *Powder Tech.* 269 (2015) 193–199.
- [9] M. Turkyilmazoglu, Natural Convective Flow of Nanofluids Past a Radiative and Impulsive Vertical Plate, *J. Aerosp. Eng.*, 10.1061/(ASCE) AS.1943-5525.0000643.
- [10] T. Hayat, M. Khan, T. Muhammad, A. Alsaedi, A useful model for squeezing flow of nanofluid, *J. Mol. Liq.* 237 (2017) 447–454.
- [11] S. H. Seyedi, B.N. Saray, A. Ramazani, On the multiscale simulation of squeezing nanofluid flow by a high precision scheme, *Powder Tech.* 340 (2018) 264–273.
- [12] M. I. Khan, M.U. Hafeez, T. Hayat, M.I. Khan, A. Alsaedi, Magneto rotating flow of hybrid nanofluid with entropy generation, *Comput. Meth. Prog. Biomed.* 183 (2020) 105093.

- [13] M. Turkyilmazoglu, Nanoliquid film flow due to a moving substrate and heat transfer. *Eur. Phys. J. Plus* 135, 781 (2020).
- [14] M. A. Z. Raja, R. Samar, Numerical treatment for nonlinear MHD Jeffery–Hamel problem using neural networks optimized with interior point algorithm, *Neurocomputing* 124 (2014) 178-193.
- [15] M. H. Esfe, S. M. S. Tilebon, Statistical and artificial based optimization on thermo-physical properties of an oil based hybrid nanofluid using NSGA-II and RSM, *Physica A* 537 (2020) 122126.
- [16] S. A. Bagherzadeh, M. T. Sulgani, V. Nikkhah, M. Bahrami, A. Karimipour, Y. Jiang, Minimize pressure drop and maximize heat transfer coefficient by the new proposed multi-objective optimization/statistical model composed of ‘‘ANN+Genetic Algorithm’’ based on empirical data of CuO/paraffin nanofluid in a pipe, *Physica A* 527 (2019) 121056.
- [17] A. Jafarian, S. M. Nia, A. K. Golmankhaneh, D. Baleanu, On artificial neural networks approach with new cost functions, *Appl. Math. Comput.* 339 (2018) 546–555.
- [18] Z. Sabir, H. Abdul Wahab, M. Umar, F. Erdogan, Stochastic numerical approach for solving second order nonlinear singular functional differential equation, *Appl. Math. Comput.* 363 (2019) 124605.
- [19] M. Ghazvini, H. Maddah, R. Peymanfar, M. H. Ahmadi, R. Kumar, Experimental evaluation and artificial neural network modeling of thermal conductivity of water based nanofluid containing magnetic copper nanoparticles, *Physica A* 551 (2020) 124127.
- [20] M. Hojjat, Nanofluids as coolant in a shell and tube heat exchanger: ANN modeling and multi-objective optimization, *Appl. Math. Comput.* 365 (2020) 124710.
- [21] J. P. Ribeiro, J. A. Gruss, *Nanofluides pour les applications thermiques, technique de l’ingénieur*, (2009), 2e édition.
- [22] I. C. Bang, S. H. Chang, boiling heat transfer performance and phenomena of Al₂O₃- Water nanofluids from a plan surface in a pool, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (2005), vol. 48, pp. 2407-2419.

- [23] B. C. Pak, Y. I. Cho, Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles, *Experimental Heat Transfer*, (1998), vol. 11, pp. 151–170.
- [24] Y. Xuan, W. Roetzel, Conception for heat transfer correlation of nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (2000), vol. 43, pp. 3701-3707.
- [25] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, 3rd Edition, (2004), Wiley, New-York.
- [26] J. Kim, Y. T. Kang, C. K. Choi, Analysis of convective instability and heat transfer characteristics of nanofluids, *Physics of Fluids*, (2004), vol. 16, pp. 2395-2401.
- [27] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, U.K. (1881).
- [28] R. L. Hamilton, O. K. Crosser, Thermal conductivity of heterogeneous two component systems, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, (1962), vol. 1, pp. 187- 191.
- [29] W. Yu, U. S. Choi, The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: a renovated Maxwell model, *Journal of Nanoparticles Research*, (2003), vol. 5, pp. 167- 71.
- [30] D. A. G. Bruggeman, Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen, I. Dielektrizitätskonstanten und leitfähigkeiten der mischkörper aus isotropen substanzen, *Ann. Phys. Leipzig*, (1935), vol. 24, pp. 636–664.
- [31] Einstein, Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen, *Ann. Phys. Leipzig*, (1906), vol. 19, pp 289–306.
- [32] H. C. Brinkman, The Viscosity of Concentrated Suspensions and Solutions, *J. Chemical Physics*, (1952), vol. 20, pp. 571.
- [33] G. K. Batchelor, Brownian Diffusion of particles with Hydrodynamic Interaction, *Journal of Fluid Mechanics*, (1976), vol. 74, pp. 1-29.
- [34] S. Maiga, S. J. Palm, C. T. Nguyen, G. N. Roy, Galanis, Heat Transfer Enhancement by Using Nanofluids in Forced Convection Flows, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, (2005), vol. 26, pp.530–546.

- [35] Ammarah Raees et al., Analytic Investigation of Bioconvection in an Unsteady Squeezing Flow of Nanofluid between Parallel Plates, Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2014.
- [36] O. Pourmehran et al., Analytical investigation of squeezing unsteady nanofluid flow between parallel plates by LSM and CM, Alexandria Engineering Journal (2015) 54, 17–26.
- [37] A. K. Gupta, S. Saha Ray, Numerical treatment for investigation of squeezing unsteady nanofluid flow between two parallel plates, Powder Technology, S0032-5910 (2015) 00292-2.
- [38] R. C. Mittal, Sapna Pandit, Numerical simulation of unsteady squeezing nanofluid and heat flow between two parallel plates using wavelets, International Journal of Thermal Sciences 118 (2017) 410-422.
- [39] A. G. Madaki, Analytical and numerical solutions of squeezing unsteady Cu and TiO₂-nanofluid flow in the presence of thermal radiation and heat generation/absorption, Alexandria Engineering Journal, 2017.
- [40] Abdul-Sattar, J. Al-Saif Assma, J. Harfash, Perturbation-Iteration Algorithm for Solving Heat and Mass Transfer in the Unsteady Squeezing Flow between Parallel Plates, J. Appl. Comput. Mech., 5(4) (2019) 804-815.
- [41] Sihem Lahmar et al., Heat transfer of squeezing unsteady nanofluid flow under the effects of an inclined magnetic field and variable thermal conductivity, Journal Pre-proof, S0378-4371 (2019) 31768-6.
- [42] A. El harfouf, Analytical resolution on Squeezing Unsteady nanofluid flow problem between two parallel plates a solution by using a Semianalytical Method: The Homotopy Perturbation Method (HPM), Appl. J. Envir. Eng. Sci. 6 N°3(2020) 325-337.
- [43] Umair Rashid et al., The Shape Effect of Gold Nanoparticles on Squeezing Nanofluid Flow and Heat Transfer between Parallel Plates, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2020, Article ID 9584854.
- [44] Himanshu Upreti et al., Unsteady squeezing flow of magnetic hybrid nanofluids within parallel plates and entropy generation, Heat Transfer Wiley, 2020;1–21.

- [45] A. Bejan, *Heat Transfer*, (1993 Chichester), John Wiley, New-York.
- [46] H. F. Oztop, E. Abu-Nada, Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids, *Int. J. Heat Fluid Flow* 29 (2008) 1326–1336.
- [47] R. Jmai et al., Heat transfer and fluid flow of nanofluid-filled enclosure with two partially heated side walls and different nanoparticles, *Superlattices and Microstructures*, (2013), 53(1): 130-154.
- [48] G. Domairry, A. Aziz, Approximate analysis of MHD squeeze flow between two parallel disks with suction or injection by homotopy perturbation method, *Math. Probl. Eng.* 2009 (2009) 603916.
- [49] G. Domairry, M. Hatami, Squeezing Cu–water nanofluid flow analysis between parallel plates by DTM–Padé method, *J. Mol. Liq.* 193 (2014) 37–44.
- [50] J. A. Khan, M. A. Z. Raja, I. M. Qureshi, Stochastic computational approach for complex nonlinear ordinary differential equations, *Chin Phys Lett* 2011;28(2):020206.
- [51] H. S. Yazdi, R. Pourreza, Unsupervised adaptive neural-fuzzy inference system for solving differential equations, *Appl Soft Comput* 2010;10(1):267–75.
- [52] R. S. A. Beidokhti, A. Malek, Solving initial-boundary value problems for systems of partial differential equations using neural networks and optimization techniques, *J. Franklin Inst* 2009;346(9):898–913.
- [53] J. A. Khan, S. A. K. Tanoli, M. A. Z. Raja, A novel hybrid swarm intelligence (PSO-AS) approach for non-linear Van der Pol oscillator, *Sci World J* 2013 [in press].
- [54] J. A. Khan, M. A. Z. Raja, I. M. Qureshi, Novel approach for van der Pol oscillator on the continuous time domain, *Chin Phys Lett* 2011;28(11):110205. <http://dx.doi.org/10.1088/0256-307X/28/11/110205>.
- [55] J. A. Khan, M. A. Z. Raja, I. M. Qureshi, Numerical treatment of nonlinear Emden–Fowler equation using stochastic technique, *Ann Math Artif Intell* 2011;63(2):185–207.
- [56] M. A. Z. Raja, J. A. Khan, S. I. Ahmad, I. M. Qureshi, Numerical treatment of Painleve equation I using neural networks and stochastic solvers, In: *Innovations in intelligent machines-3*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2013. p. 103–17.

- [57] M. A. Z. Raja, R. Samar, Numerical treatment for nonlinear MHD Jeffery–Hamel problem using neural networks optimized with interior point algorithm, *Neurocomputing* 2013. <http://dx.doi.org/10.1016/j.neucom.2013.07.01> [29.08.13].
- [58] M. A. Z. Raja, Unsupervised neural networks for solving Troesch’s Problem. *Chin Phys B*, IOP Sci 2013 [in press].
- [59] M. A. Z. Raja, S. I. Ahmad, R. Samar, Neural network optimized with evolutionary computing technique for solving the 2-dimensional Bratu problem, *Neural Comput Appl* 2012. <http://dx.doi.org/10.1007/s00521-012-1170-4>.
- [60] M. A. Z. Raja, S. I. Ahmad, Numerical treatment for solving one-dimensional Bratu problem using neural networks, *Neural Comput Appl* 2012. <http://dx.doi.org/10.1007/s00521-012-1261-2>.
- [61] M. A. Z. Raja, J. A. Khan, IM. Qureshi, A new stochastic approach for solution of Riccati differential equation of fractional order, *Ann Math Artif Intell* 2010;60(3–4):229–50.
- [62] M. A. Z. Raja, J. A. Khan, I. M. Qureshi, Solution of fractional order system of Bagley–Torvik equation using evolutionary computational intelligence, *Math Probl Eng* 2011. Article ID 675075, 18 p.
- [63] K. Hornik, M. Stinchcomb, H. White and P. Aver, “Degree Of Approximation Results For Feedforward Networks Approximating Unknown Mapping And Their Derivatives”, *neural computation*, vol. 6, pp. 1262-1275, 1994.
- [64] A. Aussem, «Théorie et Application des Réseaux de Neurones Récurrents et Dynamiques à la Prédiction, à la Modélisation et au Contrôle Adaptatif des Processus Dynamiques », Thèse de Doctorat, Université René Descartes, Paris V, juin 1995.
- [65] C. Touzet, "Les réseaux de neurones artificiels, introduction au connexionnisme, cours, exercices et travaux pratiques", préface de Jeanny Hérault, EC2 éd. 150 pages, Paris, 1992.
- [66] B. Orsier, «Etude et application de systèmes hybrides neuro-symboliques », Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble, 1995.
- [67] M. Nouverssadat, « Etude performances des réseaux de neurone dynamique à représenter des systèmes réels, une approche dans l’espace d’état », Mémoire de Magister, Université Ferhat Abbas, Sétif, janvier, 2009.

- [68] D. E. Rumelhart, "Learning Representation By Back-Propagation Errors", The MIT Press, Cambridge, vol. 1, 1986.
- [69] D. E. Rumelhart and J. L. McClelland, "Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition", volume 1. M.I.T. Press, 1986.
- [70] A. Abdelaziz, Contribution à l'Etude des Structures Microruban Cylindriques par la Méthode Neuro-Spectrale, thèse de DOCTORAT en SCIENCES, Université de Batna 2, année 2016.
- [71] L. Baghli, «Contribution à la commande de la machine asynchrone, utilisation de la logique floue, des réseaux de neurones et des algorithmes génétiques », Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy-I, 14 janvier 1999.
- [72] N. Karmarkar, A New, Polynomial time algorithm for linear programming, *Combinatorica* 4 (1984) 373–395.
- [73] A. V. Fiacco and G. P. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley & Sons, New York, N. Y., 1968. Reprinted by SIAM Publications, 1990.
- [74] M. Jalaal, D. D. Ganji, On unsteady rolling motion of spheres in inclined tubes filled with incompressible Newtonian fluids, *Advanced Powder Technology* 22 (1) (2011) 58–67, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ap.2010.03.011>.
- [75] D. D. Ganji, A. Sadighi, Application of He's homotopy-perturbation method to nonlinear coupled systems of reaction-diffusion equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 7 (4) (2011) 411–418, <http://dx.doi.org/10.1515/IJNSNS.2006.7.4.411>. (May).
- [76] G. Domairry, A. Mohsenzadeh, M. Famouri, The application of Homotopy analysis method to solve nonlinear differential equation governing Jeffery-Hamel flow, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14 (2008) 85–95.
- [77] Q. Esmaili, A. Ramiar, E. Alizadeh, D. D. Ganji, An approximation of the analytical solution of the Jeffery-Hamel flow by decomposition method, *Physics Letters A* 372 (2008) 3434–3439.
- [78] R. Hosseini, S. Poozesh, S. Dinarvand, MHD flow of an incompressible viscous fluid through convergent or divergent channels in presence of a high magnetic

field, *Journal of Applied Mathematics* (2012), <http://dx.doi.org/10.1155/2012/157067>. (Article ID 157067, 12pages).

[79] J. H. He, A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *International Journal of Non-linear Mechanics* 35 (2000)37–43.

[80] R. S. Beidokhti, A. Malek, Solving initial-boundary value problems for systems of partial differential equations using neural networks and optimization techniques, *J. Franklin Inst.* 346(9) (2009)898–913.

[81] D. R. Parisi, M.C. Mariani, M.A. Laborde, Solving differential equations with unsupervised neural networks, *Chem. Eng. Process.* 42(8–9) (2003) 715–721.

[82] W. Yan, L. Wen, W. Li, C.Y. Chung, K.P. Wong, Decomposition–coordination interior point method and its application to multi-area optimal reactive power flow, *Int. J. Elec. Power* 33(1) (2011) 55–60.

[83] M. Sheikholeslami, D. D. Ganji, H. R. Ashorynejad, Investigation of squeezing unsteady nanofluid flow using ADM, *Powder Tech.* 239 (2013) 259–265.