Université Badji-Mokhtar Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

ÉTUDE D'UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION NON LOCALE ET RÉGULARISATION D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE MAL POSÉ

Encadreur : Prof. REBBANI Faouzia

Jury :

1.	L. CHORFI	**Président**	**Prof.**	**U.B.M. ANNABA**
2.	F.REBBANI	**Rapporteur**	**Prof.**	**U.B.M. ANNABA**
3.	A.AIBECHE	**Examinateur**	**Prof.**	**U. DE SETIF**
4.	A.NOUAR	**Examinateur**	**M.C.A**	**U. DE SKIKDA**
5.	F.ZOUYED	**Examinateur**	**M.C.A**	**U.B.M. ANNABA**

Résumé

Dans le présent travail on étudie deux classes de problèmes d'évolution. La première classe est consacrée à l'étude d'un problème aux limites avec des conditions non locales. On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution forte et sa dépendance continue par rapport aux données, les démonstrations sont basées sur la méthode des inégalités énergétiques et la densité de l'image de l'opérateur généré par le problème considéré. Dans la deuxième classe on étudie un problème de Cauchy mal posé de type elliptique, le but de cette partie est de présenter quelques extentions de la méthode de quasi-réversibilité. Le point clé dans notre analyse est l'utilisation d'une nouvelle méthode d'approximation pour construire une famille d'opérateurs régularisante pour le problème considéré, on montre la convergence de cette méthode, et on montre des estimations d'erreur sous des hypothèses de régularité sur les données du problème.

2000 Mathematics subject classification :

Mots clés : inégalité énergétique, équation ultra-hyperbolique, conditions non locales, problème de Cauchy mal posé, méthode de quasi-réversibilité, méthode de convexité logarithmique, semigroupes, régularisation, famille d'opérateurs régularisants.

Abstract

In this work we study two classes of evolution problems. The first class, is devoted to study a non-local problem with initial conditions. We establish the existence and uniqueness of the strong solution and its dependence continue on the data, the proofs are based on energy inequality and on the density of the range of the operator generated by the considered problem. In the second class, we investigate an ill posed Cauchy problem of elliptic type, the goal of this part is to present some extensions of the method of quasi-reversibility. The key point to our proof is the use of the new approximation method to construct a family of regularizing operators for the considered problem. We show the convergence of this method, and we estimate the convergence rate under a priori regularity assumptions on the problem data.

2000 Mathematics subject classification :

Key words : a priori estimate, ultrahyperbolic equation, nonlocal conditions, ill-posed Cauchy problem, quasi-reversibility method, logarithmic convexity method, semigroup, regularization, family of regularizing operators.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse le professeur *REBBANI F*aouzia, qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements m'a permis de mener à bien ce travail.

J'adresse l'expression de ma gratitude à mon enseignant le professeur *CHORFI L*ahcene, qui me fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner ma thèse.

Ainsi qu'aux docteurs :
*AIBECHE A*issa professeur à l'université *F*erhat *A*bbas-*S*etif,
*NOUAR A*hmed maître de conférences à l'université 20 *A*oût 1955-*S*kikda,
*ZOUYED F*ayrouz maître de conférences à l'université *B*adji *M*okhtar-*A*nnaba,
qui ont accepté d'examiner ma thèse et faire partie de ce jury.

Je souhaite aussi vivement remercier toute l'équipe : *Problèmes Inverses et Problèmes Mal Posés* de U.B.M.A. En particulier *BOUSSETILA Nadjib*, pour son sérieux et sa compétence qui m'ont été très utiles pour mener à bien ce travail, et mon ami *HAMIDA Salim* pour leur aide et leur soutien moral.

Je remercier également tous les membres du département de Mathématiques, pour toute l'aide qui m'a été accordée. Au cours de ces années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées L.M.A (Annaba) pour mener à bien ce projet.

Je remercier ausssi tous les membres du laboratoire J.A Dieudonné, université de Nice Sophia-Antipolis, pour leur accueil et leur aide, durant mon séjour réalisé dans le cadre du programme IMAGEEN.

Merci, à tous mes collègues de L'universté 08 Mai 45-Guelma pour leur soutien moral.

Enfin, et ce seront mes derniers mots, un grand merci à ma famille, en particulier mes parents, pour m'avoir toujours soutenue et conseillée et pour tous les bons moments passés avec eux.

Dédicace

Je voudrais remercier mes parents à qui je dois mon goût pour la science et la recherche depuis mon plus jeune âge. Mais surtout, ma pensée la plus tendre va à celle qui s'est tenue à mes côtés durant les longues heures de préparation de cette thèse, rendant ainsi ces années différemment agréables.
Je dédie ce travail à mon père, que Dieu l'accueil dans son vaste paradis.

Notations générales

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

T un réel strictement positif.

$Im(Z)$: partie imaginaire du nombre complexe z.

$Re(Z)$: partie réelle du nombre complexe z.

A : opérateur linéaire.

$\mathscr{D}(A)$: domaine de définition de l'opérateur A.

$\overline{A}$: fermeture de l'opérateur A.

A^{-1} inverse de A.

$\mathbf{G}(A)$: graphe de l'opérateur A.

$\mathbf{R}(A)$: image de l'opérateur A.

$\mathbf{N}(A)$: noyau de l'opérateur A.

$A(t)$ opérateur linéaire dépendant de t.

$\mathscr{D}_A$: domaine de définition de $A(t)$.

$M^{\perp}$: orthogonal de l'ensemble M.

$\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$: des espaces de Banach de normes respectives $||.||_{\mathscr{X}}$, $||.||_{\mathscr{Y}}$.

$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$: espace des opérateurs linéaires continus de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{Y}$, cet espace est muni de la norme $||B||_{\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})} = \sup\limits_{u\neq 0} \dfrac{||Bu||_{\mathscr{Y}}}{||u||_{\mathscr{X}}}$.

$\mathscr{H}$: espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|$, $(.,.)$.

$\mathscr{L}(\mathscr{H})$: espace des opérateurs linéaires continus dans $\mathscr{H}$.

$\mathscr{K}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$: espace des opérateurs compacts de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{Y}$.

$\rho(A)$: ensemble résolvant de l'opérateur A.

$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$: spectre de l'opérateur A.

$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$: famille spectrale.

$\langle .,. \rangle_{D'}$: crochet de dualité.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert bourné, $\overline{\Omega}$ fermeture de Ω.

$\mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{X})$: espace des fonctions v telles que $t \mapsto ||v(t)||_{\mathscr{X}}$ est une fonction de $\mathscr{L}_2(\Omega)$.
$\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{X})$: espace des fonctions telles que $\sup ||v(t)||_{\mathscr{X}}$ est finie.
$\mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{L}(\mathscr{H}))$: espace des fonctions $B(t)$ telles que $t \mapsto ||B(t)||_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}$ est une fonction de $\mathscr{L}_2(\Omega)$.
$\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{L}(\mathscr{H}))$: espace des fonctions $B(t)$ telles que $\sup ||B(t)||_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}$ est finie.

Table des matières

§ Introduction

0.1 Problématique

Dans cette thèse on s'intéresse à deux problématiques liées.

0.1.1 Équations d'évolution multi-temporelles

Beaucoup de problèmes de la physique-mathématique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Dans les (EDP) classiques dépendant du temps(problèmes d'évolution), la variable spatiale peut être multidimensionnelle, mais le temps est resté unidimensionnel jusqu'à 1932. L'adjectif *multi-temps*(en anglais, multi-time) a été introduit pour la première fois par le physicien Dirac (1932) dans l'étude de fonctions d'ondes multi-temporelles via une équation d'évolution a m variables temporelles. Plus tard le terme *multi-temps* a été utilisé en mathématiques par [22], [37], [121], [156]-[160], [161], [162], [128], ext. Remarquons que la coordonnée spatiale est simplement un indice de numérotation avec un degré de liberté, et le temps est la coordonnée usuelle qui représente le temps physique réel pour lequel les systèmes évoluent. Cependant, dans quelques problèmes physique on utilise le temps en deux variables $t=(t_1,t_2)$, où t_1 signifie le temps intrinsèque et t_2 est le temps observateur.

Pour illustrer cette notion de multi-temps citons l'exemple donné dans [159] pour un problème d'oscilations en ingénierie et en communications. Soit l'équation d'onde à une variable temporelle suivante :

$$y(t)=\sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right),$$

$T_1=0.02s$, $T_2=1s$, où $f_1=\dfrac{1}{T_1}=50Hz$ et $f_2=\dfrac{1}{T_2}=1Hz$. sont les fréquences qui correspondent à T_1 et T_2.

Ici la variation sinusoidale de période T_1 est 50 fois plus rapide que la variation sinusoidale lente de période T_2. On construit alors une représentation de $y(t)$ en deux variables temporelles obtenue par la règle suivante : pour la partie de `variation rapide` de $y(t)$, le temps est remplacé par la nouvelle variable t_1, pour la partie de `variation lente` de $y(t)$, le temps est remplacé par t_2. Donc on obtient une nouvelle fonction périodique à deux variables temporelles,

$$\widehat{y}(t) = \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T_1}\right)\sin\left(\frac{2\pi t_2}{T_2}\right).$$

Les équations d'évolution multi-temporelles interviennent, par exemple dans la théorie du mouvement Brownien ([49], [25], [92] la théorie du transport [3], en biologie [88], la théorie des ondes et les équations de maxwell [18], [83], en mecanique, physique et cosmologie ([139], [163]), ainsi que dans d'autre phénomènes physiques à échelles multiples. Dans les années cinquante, la théorie de ce type d'équations a commencé a se développer, dans les travaux fondamentaux de V.P. Mikhailov ([118], [119], 1957).

Des résultats nouveaux sur l'existence et l'unicité de solution de quelques problèmes ultraparaboliques (les problèmes paraboliques dans le cas multi-temporel) on été établis par A. Friedmann ([69], [68]) 1962), pour le problème à deux variables suivant :

$$u_{t_1,t_2} - Lu = F(x,t), \quad u\,|_{t_1=0} = u\,|_{t_2=0} = u\,|_{x\in\partial D},$$

où L est un opérateur différentiel de second ordre, elliptique et auto-adjoint, et par T.G. Genchev ([72], 1963), A.M. Il'in ([91], 1964), V.S. Vladimirov et Yu. N. Drozhzhinov ([168], 1967), S.G. Gindikin ([74], 1967), R. Volevič et S.G. Gindikin ([170], 1969), N.I. Brish et N.I. Yurchuk ([33], 1970), V.M. Filipov ([66], 1986), W. Wolfgan ([171], 1986), S.G. Pyatkov ([133], 1990), D.R. Akhmetov et al ([4], 2003), G. Avalishvili et al ([17], [77], 2005) et d'autres auteurs.

Pour le cas ultra-hyperbolique (les problèmes hyperboliques dans le cas multi-temporel) avec des conditions classiques, les principaux résultats ont été établis dans la série des travaux de N.I Brish et N.I. Yurchuk ([173], [174], [175]) et H.O. Fattorini [65]. Des problèmes à conditions non locales associées aux équations ultra-hyperboliques ont été étudiées par F. Rebbani et al. [24], [135], [136], [178], [78]. Le cas ulta-parabolique d'ordre supérieur est traité par G.A. Anastassiou [10].

Il est important de noter qu'il n'existe pas encore, pour ce type d'équations, une théorie générale. Ceci est dû à la relative nouveauté de cette démarche et à la complexité des questions qu'elle soulève. Chaque problème nécessite donc un traitement spécifique. Ce qui souligne l'actualité du sujet que nous traitons dans notre thèse.

0.1.2 Problèmes inverses

Il s'agit généralement de situations où on est dans l'ignorance au moins partielle du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...) ne sont pas connues. En compensation, il faut disposer (en plus des entrées) d'informations, éventuellement partielles, sur la sortie afin de reconstruire au mieux l'information manquante. Le terme inverse rappelle qu'on utilise l'information concernant le modèle physique (à l'envers) connaissant (partiellement) les sorties, on cherche à remonter à certaines caractéristiques, habituellement internes et échappant à la mesure directe.

Traditionnellement, les problèmes inverses sont classés en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas possible en pratique. Par exemple les hautes températures et la difficulté d'accès dans la chambre de combustion d'un moteur automobile (B. Delattre et al. [50], 2001 ; A. Constantinescu et al. [46], 2004), dans une enceinte contenant un feu (M. Raynaud et J. Bransier,[134] 1986) ou sur les faces actives d'outils d'usinage (C.H. Huang et Y.L. Tsai,[86] 2005, C.H. Huang et H.C. Lo, [87] 2005) sont des cas où le recours à des méthodes inverses est nécessaire. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer, à partir d'une connaissance partielle du champ de température, des paramètres de modèle inconnus. Il est possible par exemple de déterminer la conductivité d'un matériau à partir de mesures transitoires (C.Y. Yang,[172] 1999, P. Kügler,[105] 2003 ; V. Plana et al.,[129] 2006, H.T.) ou d'utiliser cette méthode pour la détection non intrusive de défauts de géométrie internes (R. Chapko et al.,[39] 1998, R. Chapko et P. Kugler,[38] 2004, N.S. Mera et al.,[117] 2005). Les problèmes inverses d'identification de paramètres se rencontrent dans de nombreux autres domaines allant de la géomécanique (B. Lecampion et al.,[111] 2002, B. Lecampion et A. Constantinescu,[110] 2005) aux mathématiques financières.

Les problèmes inverses mal posés constituent l'un des sujets où le lien entre la théorie mathématique et l'application est le plus fort. Dans la pratique, les méthodes de résolution des problèmes inverses se répartissent selon Z. Nashed [153] en trois catégories principales :

1. Les méthodes relevant de l'analyse mathématique et la théorie des fonctions se proposent de transformer un problème mal posé en un problème bien posé en agissant sur le choix des espaces, qui servent à décrire les variables, et de leurs topologies, qui formalisent les notions d'écart ou d'erreur. Elles proposent également d'introduire des contraintes globales sur les classes de solutions. Les « bons » espaces ou les « bonnes » contraintes ne sont pas dictés par les mathématiques mais traduisent des considérations physiques.
2. La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à A.N. Tikhonov [155], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée,. .), de façon que la (solution régularisée) obtenue par (inversion régularisée) dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (en supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre "problème approximant" bien posé.
3. L'inversion stochastique développée par A. Tarantola [151].

Ces trois approches ont comme préoccupation commune de fournir un cadre permettant de neutraliser le caractère mal posé.

0.1.3 Problèmes bien et mal posés

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé (H.W. Engl et al.,[57] 1994). Un problème est bien posé au sens de J. Hadamard [80] s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour toute donnée admissible, une solution existe.
2. Pour toute donnée admissible, la solution est unique.
3. La solution dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent. Ces trois conditions semblent très naturelles. En fait, généralement les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voir les trois ensembles.

- Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.
- Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématique).
- La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires(information a priori).
- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique. En particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données (réelles). Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit mal posé (ill-posed en anglais).

0.1.4 Conditions nonlocales

Durant les dernières années, parmis les problèmes aux limites non classiques pour les équations différentielles aux dérivées partielles une place importante est occupée par les problèmes avec des conditions non locales, en particulier les conditions qui relient les valeurs des solutions et leurs dérivées en deux ou plusieurs points intérieurs ou frontières du domaine considéré. Une définition générale de ces conditions et leur classification ont été données, en particulier, par A.M. Nakhushev dans [122].

Dans [53] A.A. Dezin a montré pour la première fois que pour certaines équations aux dérivées partielles dans certains domaines, le problème aux limites n'est correctement posé que seulement si les conditions utilisées sont non locales. Ce type de conditions non standard reflète une certaine réalité dans la modélisation mathématique de quelques problèmes naturels dans plusieurs domaines comme la biotechnologie [141] et la biologie [122]. Ces conditions ont été associées à des problèmes paraboliques et hyperboliques ([14], [35], [41],[42], [19], [40], [43], [44], [75], [81], [95], [98], [114], [142]) et ont été étudiées par plusieurs auteurs. Les principaux résultats dans l'étude des problèmes non locaux de type :

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,t)=\sum_{j=1}^{n}P_j(D_x,t)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}(x,t)+f(x,t),\qquad (x,t)\in\Omega\times[0,T],$$

$$\mathrm{A}(D_x)\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\,|_{t=0}+\mathrm{B}(D_x)\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\,|_{t=T}=\varphi_j(x),\quad j=0,1,\ldots,n-1,\ x\in\Omega,$$

ont été établis par B.I. Ptashnyk [89], [130], [131], L.V. Fardigola [27], [62], [64], V.I. Chesalin [41], [42]. Quant aux problèmes engendrés par des équations multi-temporelles à conditions aux limites non locales, ils ont été traités par F. Rebbani et al. [78], [135], [136], [178], [24].

0.2 Organisation du manuscrit

La présente thèse est composée d'une introduction et de trois chapitres, un chapitre rappel et deux chapitres essentiels.

Dans l'introduction on présente un état d'art sur les problèmes d'évolution multitemporels, les problèmes bien et mal posés, les problèmes inverses et les conditions nonlocales.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle (éléments de la théorie des opérateurs et des semigroupes) ainsi que les outils mathématiques nécessaires pour l'étude des problèmes mal posés.

Dans le chapitre 2 nous présentons une analyse complète de notre méthode pour un problème aux limites avec des conditions initiales non-locales. L'analyse est basée sur ce qu'on appelle la méthode des inégalités énergétiques (dite aussi, méthode des estimations a priori).

Soit $\Omega=(0,T_1)\times(0,T_2)=\mathscr{Q}_1\times\mathscr{Q}_2$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$, où T_1 et T_2 sont deux réels strictement positifs. On considère l'équation suivante :

$$\mathscr{L}u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}+B\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right]+A(t)u=f(t),\quad t\in\Omega,\tag{E}$$

avec les conditions initiales non locales :

$$\begin{aligned}\ell_{\lambda_1}u\equiv u\Big|_{t_1=0}-\lambda_1 u\Big|_{t_1=T_1}&=\varphi(t_2),\quad t_2\in\mathscr{Q}_2,\\ \ell_{\lambda_2}u\equiv u\Big|_{t_2=0}-\lambda_2 u\Big|_{t_2=T_2}&=\psi(t_1),\quad t_1\in\mathscr{Q}_1,\end{aligned}\tag{CNL}$$

où u et f sont des fonctions de variable $t=(t_1,t_2)\in\Omega$ et à valeurs dans H, $A(t)$ est un opérateur linéaire dans H dépend de t, non borné à domaine de définition $\mathscr{D}(A)$, indépendant de t et partout dense dans H, φ (resp. ψ) est une fonction définie de $\mathscr{Q}_2$ (resp. $\mathscr{Q}_1$) à valeurs dans H.

Pour notre problème on établit des théorèmes d'existence, d'unicité de la solution forte généralisée, sa dépendance continue par rapport aux données (f,φ,ψ), ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres. Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des estimations a priori qui est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique basée sur la technique des multiplicateurs. Cette méthode résulte des idées introduites par J.Leray [112], L. Garding [70], I.G. Petrovsky [127] dans leurs travaux, et de celles développées dans l'ouvrage de A.A. Dezin [53], et dans les travaux de N.I. Yurchuk [173], [174], [175] et V.I. Korzyuk [101]. Elle est caractérisée de la manière suivante :

• D'abord écrire le problème posé sous forme opérationnelle :

$$Lu=\mathscr{F},\ u\in\mathscr{D}(L), \tag{0.2.1}$$

où l'opérateur $L=(\mathscr{L},\ell_{\lambda_1},\ell_{\lambda_2})$ est engendré par l'équation (E) et les conditions (CNL) et est considéré de l'espace de Banach $\mathbb{E}$ dans l'espace de Hilbert $\mathbb{F}$.

• Établir ensuite les estimations a priori pour l'opérateur L.

• Démontrer ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace $\mathbb{F}$.

Plus précisément, on suivra le schema suivant : On établit l'estimation a priori du type :

$$|||u|||_{\mathbb{E}}\le c|||Lu|||_{\mathbb{F}}. \tag{0.2.2}$$

Cette estimation est obtenue en général en multipliant scalairement l'équation par u ou ses dérivées et une fonction poids, et en faisant des intégrations par parties.

On montre ensuite que l'opérateur L dans $\mathbb{E}$ admet une fermeture $\overline{L}$. La solution de l'équation opérationnelle

$$\overline{L}u=\mathscr{F}, \tag{0.2.3}$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré.

Par passage à la limite, l'estimations (0.2.2) est prolongée aux solutions fortes généralisées, i.e., on a

$$|||u|||_{\mathbb{E}}\le c|||\overline{L}u|||_{\mathbb{F}}. \tag{0.2.4}$$

A partir de là, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (0.2.3), l'égalité des ensembles $\mathscr{R}(\overline{L})$ et $\overline{\mathscr{R}(L)}$, et l'inversibilité de $\overline{L}$. L'inverse $(\overline{L})^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs de l'opérateur $\overline{L}$.

La dernière étape, consiste à établir la densité de l'ensemble $\mathscr{R}(L)$ dans $\mathbb{F}$ et donc l'existence d'une solution forte généralisée du problème (0.2.1).

Commentaire. La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique. Elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode, on est confronté à difficultés, parmi lesquelles on cite :
• *Le choix de l'espace des solutions.*
• *Le choix du multiplicateur.*
• *Le choix de l'opérateur de régularisation.*

N.B. *Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans le journal BJGA : Balkan Journal of Geometry and its applications,* [24].

Quant au troisième chapitre, il est consacré à un problème mal-posés de type elliptique. Le problème modèle est le suivant : Soit $T > 0$, déterminer $u(t)$ solution du problème

$$\mathfrak{L}u \equiv u''(t) - Au(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = \varphi,\ u'(0) = 0, \tag{0.2.5}$$

où φ est une fonction H-vectorielle donnée et A un opérateur non borné dans l'espace considéré.
Il est bien connu dans la littérature mathématique que ce problème est fortement mal-posé au sens de Hadamard.

Le problème de Cauchy en particulier pour l'équation de Laplace, et pour les équations elliptique en général apparaît dans un certain nombre de phénomènes physiques, comme : contrôle non destructif(CND), problème inverse de la conductivité thermique, electro-cardiologie, prospection electrique, geophysique et autres processus industriels pratiques voir : Lavrent′ev, Romanov et Šišatskiĭ [109], Isakov [93], L. E. Payne [125], Alexander A. Samarskii, Peter N. Vabishchevich [164], N.N. Tarkhanov [153] et l'étude récente écrite par Giovanni Alessandrini, Luca Rondi, Edi Rosset,et Sergio Vessella [9].)

Le problème (0.2.5) à été traité par plusieurs chercheurs et par plusieurs approches :
▶ **La régularisation par les conditions non locales (Q.B.V. method)**
Cette méthode à été utilisée pour un problème de Cauchy de type elliptique par plusieurs chercheurs comme L. Abdulkeromov [1], P.N. Vabishchevich et ces collaborateurs [164]-[166], et I.V. Melnikova et ces collaborateurs [94], [115], [116], D. N. Hào [55], dans le cas parabolique par R.E. Showalter ([148], 1982) , G.W. Clark ([45], 1994) et V.K. Ivanov ([94], 1995) [cadre hilbertien] :

$$\gamma(u) = u(T) \curvearrowright \gamma_\alpha(u) = u(T) + \alpha u(0), \quad \alpha > 0.$$

K.A. Ames ([7], 2005) :

$$\gamma(u) = u(T) \frown \theta \int_0^T e^{-\theta(T-s)} u(s) ds, \quad \theta > 0.$$

▶ **La procédure iterative de Kozlo v (M.I.)**

L'idée de l'algorithme proposé par V.A. Kozlov et V.G. Maz'ya ([102], 1991) (voir aussi, J. Baumeister et A. Leitao [21], 2001) consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés, où l'équation originale est préservée. Dans la première itération, $u_0(t)$ s'obtient a partir de la résolution du problème :

$$u_0''(t) - Au_0(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad u_0(T) = \varphi, \; u_0'(0) = 0,$$

où φ est un élément arbitraire dans H. Une fois que nous avons construit u_k, l'approximation u_{k+1} est la solution du problème

$$u_{k+1}''(t) - Au_{k+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad u_{k+1}(T) = u_k(T) - \gamma(u_k(0) - \varphi), \; u_{k+1}'(0) = 0,$$

où γ est un parametère réel.

La convergence de cette méthode est basée sur la théorie des opérateurs non-expansifs dans le cadre hilbertien.

▶ **La méthode de la convexité logarithmique.**

Cette méthode a été appliquée à un problème mal posé par C. Pucci ([132], 1955), F. John ([96],[97], 1955,1960), M.M. Lavrentiev ([108], 1956) et L.E. Payne ([124], 1960), elle s'applique aux problèmes qui sont conditionnellement stables, c'est-à-dire, des problèmes qu'on peut rendre stables sous certaines contraintes sur la solution voir [2], [36], [97], [104], [100], [113].

Une condition suffisante pour q'une fonction $f(t)$ soit convexe sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ est que $f''(t) \geq 0$, $\forall t \in [t_1, t_2]$. Si $f'' \geq 0$, alors f' est une fonction croissante et donc

$$\int_{t_1}^{t} f'(s) ds \leq f'(t)(t - t_1),$$

de même,

$$f'(t)(t_2 - t) \leq \int_{t}^{t_2} f'(s) ds,$$

pour $t \in [t_1, t_2]$. On elimine $f'(t)$ dans les deux inégalités précédentes, on obtient le résultat suivant :

$$f(t) \leq \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right) f(t_1) + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) f(t_2) \tag{0.2.6}$$

Si $f(t) = \ln(F(t))$, on dit que la fonction $F(t)$ est log-convexe. On peut cependant montrer que $\ln(F(t))$ est convexe sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ en démontrant que

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln(F(t)) = \frac{F(t)F''(t) - (F'(t))^2}{F^2(t)} \geq 0,$$

puisque $F(t)>0\ \forall t\in[t_1,t_2]$, et que $F(t)$ satisfait l'inégalité

$$FF''-(F')^2\geq 0.$$

Donc, quand on interprète (0.2.6) en termes de $F(t)$ on trouve que $F(t)$ satisfait

$$F(t)\leq[F(t_1)]^{(t_2-t)/(t_2-t_1)}\,[F(t_2)]^{(t-t_1)/(t_2-t_1)},\ \forall t\in[t_1,t_2]. \tag{0.2.7}$$

Cette inégalité est utile pour établir des estimations de stabilité pour les problèmes mal posés.

▶ **La méthode de quasi-réversibilité (M.Q.R.)**

Proposée par Lions et Lattes [107], qui a été développée dans les travaux de L.E. Payne [125], [124], R. Showalter [146], [147], [148], K. Miller [120] et d'autres [15], [16], [47], [177], [176]. Cette méthode consiste à remplacer le problème (0.2.5) par une suite de problèmes $\mathfrak{L}_\alpha\equiv\dfrac{d^2}{dt^2}-f_\alpha(A)$ proches et bien posés au sens d'Hadamard et à rechercher des quasi-solutions stables vis-à-vis des faibles variations des données.

Dans le cas d'un problème parabolique $\mathfrak{L}\equiv\dfrac{d}{dt}+A$, la méthode de quasi-réversibilité a été utilisée par :

▪ R. Lattès et J.-L. Lions ([107], 1967) [cadre hilbertien] :

$$\mathfrak{L}=\partial_t+A\frown\mathfrak{L}_\alpha=\partial_t+A-\alpha A^\star A,\quad \alpha>0.$$

▪ I.V. Melnikova ([115], 2001) [cadre banachique] :

$$\mathfrak{L}=\partial_t+A\frown\mathfrak{L}_\alpha=\partial_t+A-\alpha A^2,\quad \alpha>0.$$

▪ A.V. Glushak ([79], 2003) [cadre banachique] :

$$\mathfrak{L}=\partial_t+A\frown\mathfrak{L}_\alpha=\partial_t+A+(-1)^{m+1}\alpha A^m,\quad m\geq 2,\ \alpha>0.$$

▪ Y. Huang et Q. Zheng ([84], 2004) [cadre banachique] :

$$\mathfrak{L}=\partial_t+A\frown\mathfrak{L}_\alpha=\partial_t+A-\alpha A^p,\quad p>1,\ \alpha>0.$$

▪ Y. Huang et Q. Zheng ([85], 2005) [cadre banachique] :

$$\mathfrak{L}=\partial_t+A\frown\mathfrak{L}_\alpha=\partial_t+A(I+\alpha A)^{-1},\quad \alpha>0.$$

• On note ici que dans le cadre Banachique, nous n'avons que des résultats de convergence, mais l'estimation de l'erreur reste encore une question ouverte.

▪ N. Boussetila et F. Rebbani ([28], 2007) [cadre hilbertien] : ont proposé une $M.Q.R$ modifiée de type

$$\mathfrak{L}=\partial_t+A\frown\mathfrak{L}_\alpha=\partial_t-\frac{1}{pT}\ln\left(\alpha+e^{-pTA}\right),\quad p\geq 1,\ \alpha>0.$$

▪ K. Ames [8] a proposé en 2005 une méthode de quasi-réversibilité plus générale qui consiste à remplacer l'opérateur $\mathfrak{L}$ par $\mathfrak{L} \equiv \dfrac{d}{dt} - f(A)$ où f est une foction de Borel donnée, ce qui lui a permis de construire une régularisation et de neutraliser le caractère mal posé. Dans notre thèse, on adapte la perturbation de K. Ames à un problème elliptique mal posé.

Le choix d'une étude intensive des problèmes inverses est dicté par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique (motivation physique et technologique).

Chapitre 1 ✍

Rappels et notations

Ce chapitre rappelle quelques notions de bases et les principaux resultats mathématiques de l'analyse fontionnel qui seront utilisés tout le long de ce travail.
On désigne ici par : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ des espaces de Banach.
$\mathscr{X}^*$ (resp. $\mathscr{Y}^*$) le dual topologique de $\mathscr{X}$ (resp. $\mathscr{Y}$).
$\langle .,. \rangle$ le crochet de dualité.
$\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ muni de la norme $|.|$ et le produit scalaire $(.,.)$

1.1 Opérateurs linéaires bornés

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $A : \mathscr{D}(A) \subseteq \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ linéaire, où $\mathscr{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{X}$, que l'on suppose en général dense dans $\mathscr{X}$. L'opérateur $A : \mathscr{D}(A) = \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ est dit borné si l'image de la boule d'unite $(A(B_{\mathscr{X}}(0,1)))$ de $\mathscr{X}$ est bornée dans $\mathscr{Y}$.
Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ défini par $\mathbf{G}(A) = \left\{(v, Av), \quad v \in \mathscr{D}(A)\right\}$.
Pout tout opérateur linéaire $A : \mathscr{D}(A) \subseteq \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$, on note par :

$$\mathscr{N}(A) = \left\{h \in \mathscr{D}(A),\ Ah = 0\right\} \text{ (noyau de } A\text{)},$$

$$\mathscr{R}(A) = \left\{h_2 = Ah_1,\ h_1 \in \mathscr{D}(A)\right\} \text{ (image de } A\text{)}.$$

On note $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ (resp. $\mathscr{L}(\mathscr{X})$) l'espace vectoriel des ***opérateurs linéaires continus*** de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{Y}$ (resp. des ***endomorphismes continus*** de $\mathscr{X}$) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}), \quad ||B||_{\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})} = \sup_{u \in \mathscr{X} \setminus \{0\}} \frac{||Bu||_{\mathscr{Y}}}{||u||_{\mathscr{X}}}.$$

Théorème 1.1.1. [***Banach-Steinhaus***] *Soient $(B_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continues de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{Y}$. On suppose que*

$$\forall x \in \mathscr{X}, \quad \sup_{i\in I} ||B_i x||_{\mathscr{Y}} < \infty. \tag{e_1}$$

Alors (e_1) a lieu uniformément sur la boule unité de $\mathscr{X}$, i.e.,

$$\sup_{i\in I} ||B_i||_{\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})} < \infty. \tag{e_2}$$

• L'application de ce théorème apparaît bien dans les opérateurs dépendant d'un paramètre t, où le paramètre t joue le rôle de l'indice i.

Définition 1.1.1. On dit qu'une application linéaire continue $B \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ est ***inversible*** *ssi* il existe une application $B' \in \mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$ telle que

$$B' \circ B = I_{\mathscr{X}}, \quad B \circ B' = I_{\mathscr{Y}}.$$

L'application B' si elle existe est unique. On notera $B' = B^{-1}$.

Théorème 1.1.2. *Toute bijection linéaire continue $B \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ est inversible.*

Théorème 1.1.3. *Soit $B : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ une application linéaire. Alors B est continu si et seulement si le graphe de B est fermé dans $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, c'est-à-dire : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{X}$ vérifiant $(x_n \to x,\ n \to \infty)$ dans $\mathscr{X}$ et $(Bx_n \to y,\ n \to \infty)$ dans $\mathscr{Y}$, on a $y = Bx$.*

Théorème 1.1.4. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach unitaire d'élément unité e. Si $|v| < 1$, alors $e+v$ est inversible et on a $(e+v)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k v^k$.*

• Comme application de ce théorème on prend $\mathscr{A} = \mathscr{L}(\mathscr{X})$ ou $\mathscr{A} = \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

1.2 Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.2.1. On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $\mathbf{G}(A)$ est fermé dans $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathscr{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathscr{X}$ et $Au_n \longrightarrow v$ dans $\mathscr{Y}$, alors $u \in \mathscr{D}(A)$ et $v = Au$.

• L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathscr{D}(A)$ muni de la norme du graphe $(||u||_{\mathrm{G}} := ||u||_{\mathscr{X}} + ||Au||_{\mathscr{Y}})$ dans $\mathscr{X}$.

Définition 1.2.2. On dit qu'un opérateur A est fermable dans $\mathscr{X}$ s'il admet un prolongement fermé. Autrement dit A est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset \mathscr{D}(A)$ telle que $u_n \to 0$ et $Au_n \to v$, alors $v = 0$. L'opérateur fermé $\overline{A}$ dont le graphe $\mathbf{G}(\overline{A}) = \overline{\mathbf{G}(A)}$ est appelé fermeture de A.

Théorème 1.2.1. ***[Théorème du graphe fermé].*** *Si l'opérateur fermé A est définit sur tout l'espace $\mathscr{X}$, alors A est borné*

$$(A \text{ fermé et } \mathscr{D}(A)=\mathscr{X} \Longrightarrow A \text{ borné}).$$

Définition 1.2.3. Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A, comme suit :

$$A^* : \mathscr{D}(A^*) \subset \mathscr{Y}^* \longrightarrow \mathscr{X}^*$$

$$\mathscr{D}(A^*) = \left\{ v \in \mathscr{Y}^* : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au\rangle| \leq c\,|u|_{\mathscr{X}}, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A) \right\}.$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \longmapsto g(u) = \langle v, Au\rangle$ elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : \mathscr{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c\,|u|_{\mathscr{X}}, \quad \forall u \in \mathscr{X}$. Par suite $f \in \mathscr{X}^*$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v, Au\rangle_{\mathscr{Y}^* \times \mathscr{Y}} = \langle A^* v, u\rangle_{\mathscr{X}^* \times \mathscr{X}}, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A), \forall v \in \mathscr{D}(A^*).$$

Proposition 1.2.1. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ un opérateur non-borné à domaine dense. Alors A^* est fermé.*

Définition 1.2.4. L'opérateur $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e., $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A^*)$ et $(v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathscr{D}(A)$.

- L'adjoint d'un opérateur borné $B \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ existe toujour et on a de plus $||B||_{\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})} = ||B^*||_{\mathscr{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)}$.
- Si $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$, avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = \mathscr{H}$, alors $\overline{A^*} = A^*$. Si de plus, $\mathscr{D}(A^*)$ est dense, alors $A^{**} = (A^*)^* = \overline{A}$.

Proposition 1.2.2. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{X}$. L'opérateur A^{-1} existe et est borné sur $\mathscr{R}(A)$, si et seulement si pour tout $u \in \mathscr{D}(A)$ on a $|Au| \geq m\,|u|$, où m est une constante positive indépendante de u.*

Théorème 1.2.2. ***[Caractérisation des opérateurs à image fermé].***
Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$.
Les propriétés suivantes sont equivalentes :
(i) $\mathscr{R}(A)$ est fermé,
(ii) $\mathscr{R}(A^*)$ est fermé,
(iii) $\mathscr{R}(A) = \mathscr{N}(A^*)^{\perp}$,
(iv) $\mathscr{R}(A^*) = \mathscr{N}(A)^{\perp}$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.2.3. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = \mathscr{X}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(p_1) A est surjectif, i.e., $\mathscr{R}(A) = \mathscr{Y}$,
(p_2) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^* v|, \quad \forall v \in \mathscr{D}(A^*),$$

(p_3) $\mathscr{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathscr{R}(A^*)$ est fermé.

• En pratique si l'on cherche à établir qu'un opérateur A est surjectif, on utilise l'implication $((p_2) \Longrightarrow (p_1))$ de la manière suivante. On considère l'équation $A^* v = f$ avec $f \in \mathscr{Y}^*$ et on montre que $||v|| \leq k||f||$ avec k indépendante de f. Cette technique s'appelle la méthode des *estimations a priori* : on ne se préocupe pas de savoir si l'équation $A^* v = f$ possède une solution de cette équation, et on cherche à estimer sa norme.

Théorème 1.2.4. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = \mathscr{X}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(p_1) A^* est surjectif, i.e., $\mathscr{R}(A^*) = \mathscr{X}^*$,
(p_2) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|Av|, \quad \forall v \in \mathscr{D}(A),$$

(p_3) $\mathscr{N}(A) = \{0\}$ et $\mathscr{R}(A)$ est fermé.

Corollaire 1.2.1. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{X}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = \mathscr{X}$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur $\mathscr{X}$ si et seulement s'il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que*

$$|u| \leq m_1 |Au|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A),$$

$$|v| \leq m_2 |A^* v|, \quad \forall v \in \mathscr{D}(A^*).$$

1.3 Continuité et différentiabilité d'opérateurs dépendant d'un paramètre

Définition 1.3.1. la fonction $t \in [0, T] \rightarrow A(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ est simplement (resp fortement) continue en $t_0 \in [0, T]$ si, pour tout $x \in \mathscr{X}$ la fonction $y(t) = A(t)x$ est continue en t_0 , i.e., $\forall x \in \mathscr{X}$ la fonction $|y(t) - y(t_0)|_{\mathscr{Y}} = |A(t)x - A(t_0)x|_{\mathscr{Y}} \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow t_0$ (resp $||A(t) - A(t_0)||_{\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})} \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow t_0$). Et simplement (resp fortement) continue sur $[0, T]$ si elle l'est en tout point de $[0, T]$.

Lemme 1.3.1. *Si l'opérateur $A(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ est simplement continu sur $[0, T]$. Alors il est uniformément borné par rapport à t.*

Ceci est une conséquence immédiate du théorème de la borne uniforme.

Définition 1.3.2. L'opérateur $A(t)$ est simplement dérivable en t_0 si, pour tout $x \in \mathscr{X}$ la fonction $y(t) = A(t)x \in \mathscr{Y}$ est dérivable ent_0, et simplement dérivable sur $[0, T]$ si elle l'est en tout point de $[0, T]$.

Remarque 1.3.1. Les notions de continuité et dérivabilité dans le cas où $A(t)$ est un opérateur non-borné, fermé, à domaine de définition dense, indépendant de t, sont analogues à celles du cas borné.

Lemme 1.3.2. *On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathscr{D}(A)$, et $B(t)$ est un opérateur linéaire borné, simplement continûment dérivable.*
Alors l'opérateur $C(t) = B(t)A(t)$ défini sur $\mathscr{D}(A)$, est simplement continûment dérivable, et on a $C^{'}(t)u = B^{'}(t)A(t)u + B(t)A^{'}(t)u$, $u \in \mathscr{D}(A)$, $t \in [0, T]$.

Lemme 1.3.3. *On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathscr{D}(A)$, et admet un inverse borné. Alors $A(t)^{-1}$ est simplement continûment dérivable, et on a*

$$(A(t)^{-1})^{'} = -A(t)^{-1}A(t)^{'}A(t)^{-1}$$

Pour la démonstration de ces lemmes voir [38] Chap II, page 176-188 et [60] Chap I, page 15.

Théorème 1.3.1. *Soit $A(t)$ un opérateur auto-adjoint défini positif, à domaine de définition $\mathscr{D}(A)$ indépendant de t, et simplement continûment dérivable sur $\mathscr{D}(A)$. Alors l'opérateur $A^{\alpha}(t)$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathscr{D}(A^{\alpha})$.*

Pour les opérateurs fractionnaires dépendant d'un paramètre t $(A^{\alpha}(t), 0 \leq \alpha \leq 1)$ on peut consulter les travaux [38] Chap II, page 176-188 et [60] Chap 2, page 19-20 et Chap 4, page 108-113.

1.3.1 Opérateurs de régularisation

Les opérateurs de régularisation sont un outil qui permet de faire correspondre à un élément d'un espace fonctionnel donné son régularisé qui est un élément qui possède des propriétés de régularité plus importante et qui lui est en même temps proche par rapport à la norme considérée.

Définition 1.3.3. Soit $A(t) : \mathscr{D}(A(t)) = \mathscr{D}_A \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un opérateur non-borné, fermé, pour cet opérateur on définit la famille d'opérateurs $\{R_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ayant les propriétés suivantes
(1) l'opérateur R_ε est fortement continu en t, borné uniformément en ε dans $]0, +\infty[$,
(2) pour chaque ε l'opérateur R_ε applique $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{D}_A$,
(3) l'opérateur R_ε commute avec A,
(4) l'opérateur R_ε converge fortement vers I quand $\varepsilon \to 0$, i.e., $||R_\varepsilon - I||_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \to 0$, quand $\varepsilon \to 0$.

• Si $A(t) = A(t)^*$ et $(A(t)u, u) \geq c_0|u|^2$, $\forall u \in \mathscr{D}(A(t))$, $c_0 > 0$, on définit l'approximation de Yosida :

$$R_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$$

On montre que la famille d'opérateurs $R_\varepsilon(t)$ vérifie les propriétés $(1) - (4)$. (voir [28], proposition VII.2, page 102).

1.3.2 Prolongement par continuité

La Méthode du prolongement par rapport au paramètre est une variente simplifiée de la méthode connue de schauder qui est largement employée en théorie du problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielle de type elliptique.

Thèoème 9. Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach. Soient L_0 et L_1 deux opérateurs linéaires bornés de l'espace B_1 dans B_2. Posons

$$L_\lambda = (1 - \lambda)L_0 + \lambda L_1, \quad \lambda \in [0, 1],$$

Et supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$||x||_{B_1} \leq c\, ||L_\lambda x||_{B_2}, \text{ pour tout } \lambda \in [0, 1].$$

Alors L_1 est un isomorphisme si, et seulement si L_0 est un isomorphisme.(voir [20], p 75, th. 5.2).

1.4 Eléments de la théorie spectrale

Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé [1] [2] [3] et à domaine dense.

Définition 1.4.1. On appelle *ensemble résolvant* de A, l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

• On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Cet opérateur est appelé la *résolvante* de A.

• L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1; A) R(\lambda_2; A).$$

1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
2. Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
3. Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

• Le spectre de A est donc un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus prés la structure du spectre.

• Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A, il lui correspond un $0 \neq \vartheta \in \mathscr{D}(A)$ tel que $A_\lambda \vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand $\mathscr{X}$ est un espace de fonctions) correspondant à λ.

• Si $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :

- Si $\mathscr{R}(A_\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre *résiduel* de A.
- Si $\mathscr{R}(A_\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre *continu* de A.

Définition 1.4.2. On appelle ***rayon spectral*** (noté spr(A)) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\operatorname{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A, il lui correspond un $0 \neq h \in \mathscr{H}$ tel que $Ah = \lambda h$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ.

Définition 1.4.3. On dit qu'un opérateur $K \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ est ***compact*** si $K(B_{\mathscr{X}}(0,1))$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $\mathscr{K}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{Y}$ et on pose $\mathscr{K}(\mathscr{X}, \mathscr{X}) = \mathscr{K}(\mathscr{X})$.

La compacité d'un opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathscr{K}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \Longleftrightarrow \forall (x_n) \subset \mathscr{X}, x_n \rightharpoonup 0 \text{ (faiblement)} \Longrightarrow T x_n \longrightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

► Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathscr{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathscr{K}(F, G)$ (resp. $S_1 \in \mathscr{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathscr{L}(F, G)$), alors $S_2 S_1 \in \mathscr{K}(E, G)$.

► [Théorème de Shauder] Si K est compact, alors K^* est compact. Et réciproquement.

Théorème 1.4.1. *Soit $K \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ avec* $\dim(\mathscr{H}) = \infty$. *Alors on a :*

(a) $0 \in \sigma(K)$,

(b) $\sigma(K) \backslash \{0\} = \sigma_p(K) \backslash \{0\}$,

(c) l'une des situations suivantes :

- *ou bien* $\sigma(K) = \{0\}$,
- *ou bien* $\sigma(K) \backslash \{0\}$ *est fini,*
- *ou bien* $\sigma(K) \backslash \{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

1.4.1 Famille spectrale et résolution de l'identité

Théorème 1.4.2. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ un opérateur auto-adjoint. Alors*
(1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,
(2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,
(3) $A \geq 0 \Longleftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty[$.

Définition 1.4.4. Une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projections orthogonales dans $\mathscr{H}$ est appelée *famille spectrale* [4] [5] ou encore *résolution de l'identité* si elle satisfait aux conditions :

$$\begin{cases} (i) \quad E_\lambda E_\mu = E_{\inf(\lambda, \mu)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I, \\ \text{où } E_{-\infty} h = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda h, \ E_{+\infty} h = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda h, \quad h \in \mathscr{H}, \\ (iii) \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda \ \text{où } E_{\lambda+0} h = \lim\limits_{\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0} E_{\lambda+\varepsilon} h, \quad h \in \mathscr{H}. \end{cases}$$

Les limites sont prises au sens de la norme de $\mathscr{H}$.

Théorème 1.4.3. *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint dans $\mathscr{H}$. Alors il existe une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que*

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d(E_\lambda x, y), \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda x.$$

On note symboliquement $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda$.

Théorème 1.4.4. *Soit $\lambda \longmapsto f(\lambda)$ une fonction continnue à valeurs réelles. Soit $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ défini par :*

$$\mathscr{D} = \left\{ h \in \mathscr{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d|E_\lambda h|^2 < \infty \right\}.$$

Alors $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{H}$ et on définit un opérateur auto-adjoint S dans $\mathscr{H}$ par :

$$(Sx, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d(E_\lambda x, y), \quad x \in \mathscr{D}, \ y \in \mathscr{H},$$

de domaine $\mathscr{D}(S) = \mathscr{D}$. On a

$$SE_\lambda \supset E_\lambda S \ \text{ c'est-à-dire, } \ SE_\lambda \text{ est un prolongement de } E_\lambda S.$$

4. Pour une bonne compréhension de la théorie des opérateurs auto-adjoints, on cite le joli livre de DENISE HUET : Décomposition spectrale et opérateurs, PUF, (1976).
5. Le livre de R. DAUTRAY & J.-L. LIONS, Analyse mathématique et calcul numérique. Tome **5** (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].

1.4.2 Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$, $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda$, $\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$, sa décomposition spectrale. On définit :

- Les puissances de A.

$$\begin{cases} A^r = \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r \, dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}, \\ h \in \mathscr{D}(A^r) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} \, d|E_\lambda h|^2 < \infty. \end{cases}$$

On note ici, que pour tout $r \leq 0$, $A^r \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, et si $r = 0$, $A^0 = I$.
Pour tout $r \geq 0$ et pour tout $h \in \mathscr{D}(A^r)$, on a $(A^r h, h) \geq \lambda_0^r |h|^2$.
Pour tout $r \geq 0$, $\mathscr{D}(A^r)$ muni de la norme $|h|_r^2 = |A^r h|^2$, $\quad h \in \mathscr{D}(A^r)$, est un espace de Hilbert.
Si $0 \leq r_1 \leq r_2$, $\mathscr{D}(A^{r_2}) \hookrightarrow \mathscr{D}(A^{r_1})$ et $\mathscr{D}(A^{r_2})$ est dense dans $\mathscr{D}(A^{r_1})$.

- $f(A)$ pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(A) = \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) \, dE_\lambda,, \\ h \in \mathscr{D}(f(A)) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d|E_\lambda h|^2 < \infty. \end{cases}$$

Théorème 1.4.5. *On suppose que $\mathscr{H}$ est séparable. Soit $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors $\mathscr{H}$ admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :*

$$\forall x \in \mathscr{H}, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad Ax = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k,$$

où $x_0 \in \mathscr{N}(A)$.

Définition 1.4.5. Soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathscr{K}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T, le réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $\mathbf{T} = T^* T$: $\mathscr{Y} \longrightarrow \mathscr{Y}$.

1.5 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Définition 1.5.1. On appelle semi-groupe fortement continu à un paramètre une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés sur $\mathscr{X}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $S(0) = I$,
- $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t \geq 0,\ s \geq 0$,
- $\lim\limits_{t\to 0} ||S(t)u - u|| = 0, \ \forall u \in \mathscr{X}$.

On associe à tout semi-groupe son générateur $-A$ défini par :

$$-Au = \lim_{t\to 0} \left(\frac{S(t)u - u}{t} \right), \tag{s1}$$

pour tout u tel que la limite $(s1)$ existe dans la topologie de la norme de $\mathscr{X}$, ce qui définit le sous espace $\mathscr{D}(A)$, domaine de l'opérateur A.

Les premières propriétés des semi-groupes sont rassemblées dans la proposition suivante :

Proposition 1.5.1. *(W. Rudin [165], théorème 13.35) Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs sur $\mathscr{X}$, et $-A$ son générateur. Alors :*

1. *$t \mapsto S(t)$ est une fonction fortement continue de $[0,1[$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{X})$.*
2. *Il existe des constantes $C_A \geq 1$ et $\gamma_A \in \mathbb{R}$ telles que*

$$||S(t)|| \leq C_A e^{\gamma_A t}. \tag{s2}$$

3. *A est un opérateur fermé et son domaine $\mathscr{D}(A)$ est dense dans $\mathscr{X}$.*
4. *Pour tout $u \in \mathscr{D}(A)$, $S(t)u$ est dérivable au sens de la norme de $\mathscr{X}$ et*

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = -AS(t)u = -S(t)Au. \tag{s3}$$

5. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Re\,\lambda > \gamma_A$, alors $-\lambda$ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, et la résolvante $R(\lambda, A) = (A+\lambda)^{-1}$ de A a l'expression suivante :*

$$R(\lambda, A) = (A+\lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt. \tag{s4}$$

L'intégrale $(s4)$ est définie au sens fort sur tout intervalle borné $[0,T]$, et converge en norme d'opérateur lorsque $T \longrightarrow \infty$. De plus par l'inégalité $(s2)$ on a

$$||(A+\lambda)^{-1}|| \leq \frac{C_A}{Re\,\lambda - \gamma_A}. \tag{s5}$$

En fonction des valeurs des constantes C_A et γ_A, on distingue plusieurs classes de semigroupes :

- Si $\gamma_A \leq 0$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe borné.
- Si $\gamma_A \leq 0$ et $C_A = 1$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe contractant.

Théorème 1.5.1. *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathscr{X}$ est le générateur d'un semi-groupe si et seulement si il existe des constantes C_A et γ_A telles que tout réel $\lambda > \gamma_A$ soit dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ et que*

$$\|(\lambda + A)^m\| \leq \frac{C_A}{(\lambda - \gamma_A)^m},$$

pour tout $\lambda > \gamma_A$ et tout entier $m \geq 1$. On alors l'estimation

$$\|S(t)\| = \|e^{-tA}\| \leq C_A e^{\gamma_A t}.$$

Corollaire 1.5.1. *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathscr{X}$ est le générateur d'un semi-groupe contractant si et seulement si $]0, +\infty[\subseteq \rho(-A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a l'inégalité $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.*

Théorème 1.5.2 (Lumer-Phillips)**.** . *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathscr{X}$ est le générateur d'un semi-groupe si et seulement si A est accrétif*[6] *et l'image $R(\lambda I + A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. Ou encore, de manière équivalente, A est fermé à domaine dense et A et A^* sont accrétifs.*

- Si $A = A^* \geq 0$, alors $-A$ est générateur d'un semi-groupe contractant.

Théorème 1.5.3. *On suppose que $-A$ engendre un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, alors $\{S(t)^*\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de générateur $-A^*$.*

- Si $A = A^*$ et $-A$ engendre un semi-goupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est auto-adjoint.

1.6 Equations linéaires abstraites

Beaucoup de problèmes de la physique mathématique conduisent à la résolution des équations linéaires vectorielles de la forme :

$$\mathrm{L} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y},\ x \mapsto y = \mathrm{L}x. \tag{e}$$

Pour mieux comprendre les difficultés de la résolution de ce type d'équations, on rappelle quelques notions et résultats liés à cette problématique.

Définition 1.6.1. L'équation (e) est dite :

1. normalement résoluble si $\mathscr{R}(\mathrm{L}) = \overline{\mathscr{R}(\mathrm{L})}$,
2. fortement résoluble ou admet une solution forte si $\overline{\mathscr{R}(\mathrm{L})} = \mathscr{Y}$,

6. A est dit accrétif si pour tout $(x,y) \in \Gamma_A$, on a $Re\langle y, x\rangle_{\mathscr{X}^*\times\mathscr{X}} \geq 0$.
Avec, $\Gamma_A = \{(x,y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}^* : x \in \mathscr{D}(A),\ \|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ \text{et} \langle y, x\rangle_{\mathscr{X}^*\times\mathscr{X}} = 1\}$

3. partout résoluble si $\mathscr{R}(\mathrm{L}) = \mathscr{Y}$,
4. correctement résoluble sur $\mathscr{R}(\mathrm{L})$ si $||x||_{\mathscr{X}} \leq k||\mathrm{L}x||_{\mathscr{Y}}$, $\forall x \in \mathscr{D}(\mathrm{L})$, où k est une constante positive indépendante de x.

Dans l'étude des équations de la forme (e), quand $\mathscr{X} = \mathscr{H}_1$, $\mathscr{Y} = \mathscr{H}_2$, la fermeture de $\mathscr{R}(\mathrm{L})$ joue un rôle important, pour que l'inverse de L soit borné. Les théorèmes suivants caractérisent les opérateurs à image fermée.

Théorème 1.6.1. *(T. Kato [99], p. 231). Soit* $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathscr{R}(\mathrm{L})$ *est fermé,*
(ii) $\omega(\mathrm{L}) = \inf\left\{||\mathrm{L}h||,\ h \in \mathscr{N}(\mathrm{L})^{\perp},\ ||h|| = 1\right\} > 0.$

Théorème 1.6.2. *[106] **[Caractérisation spectrale des oérateurs à image fermée].**[7]*
Soit Soit $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathscr{R}(\mathrm{L})$ *est fermé dans* $\mathscr{H}_2$,
(ii) 0 *n'est pas un point d'accumulation de* $\sigma(\mathrm{L}^*\mathrm{L})$,
(iii) *il existe* $\gamma > 0$ *tel que* $\sigma(\mathrm{L}^*\mathrm{L}\,|_{\mathscr{N}(\mathrm{L})}) \subseteq [\gamma, ||\mathrm{L}||^2]$.

On donne ici un théorème fendamental qui caractérise les conditions de résolubilité des équations linéaires :

Théorème 1.6.3 (Théorème de Picard). *Soit* $\mathrm{K} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ *un opérateur compact, et* $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), n \in \mathbb{N}$ *son système singulier. Alors l'équation :* $\mathrm{K}f = g$ *est résoluble si et seulement si* $g \in \mathscr{N}(\mathrm{K}^*)^{\perp} = \overline{\mathscr{R}(\mathrm{K})}$ *et si la condition de **Picard** est satisfaite :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} |\langle g, \psi_n \rangle| \varphi$$

1.7 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall et ses variantes jouent un grand rôle dans les estimations des termes intégrodifférentiels.

7. Ce résulat est démontré par S.H. Kulkarni et M.T. Nair en 2000, voir [106].

Lemme 1.7.1. *(VG1) Soit $w(t)$ et $g(t)$ des fonctions non négatives et intégrables sur $D =]0, T[$, et telle que la fonction $g(t)$ soit non-décroissante. Alors de l'inégalité*

$$w(t) \leq M \int_0^t w(s)ds + g(t),$$

découle l'inégalité

$$w(t) \leq \exp(Mt)g(t).$$

(VG2) Soit $w(t)$ et $f(t)$ des fonctions non négatives et intégrables sur $D =]0, T[$, et telle que la fonction $f(t)$ soit non-croissante. Alors de l'inégalité

$$w(t) \leq M \int_t^T w(s)ds + f(t),$$

découle l'inégalité

$$w(t) \leq \exp(M(T-t))g(t).$$

D'autres notions et inégalités seront utilisées telle que l'ϵ-inégalité

$$2|Re(a,b)| \leq \epsilon|a|^2 + \epsilon^{-1}|b|^2, \epsilon > 0.$$

Chapitre 2 ✍

Étude d'une équation d'évolution multitemporelle avec des conditions initiales nonlocales

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 1, on donne la position du problème, et les hypothèses nécessaire pour l'étude du problème, la section 2 est consacrée à l'introduction des fonctions non classiques qui seront utilisées dans la suite et quelques inégalités auxiliaires, dans la section 3, on montre un résultat d'unicité et de dépendance continue. Finalement on démontre l'existence de la solution forte généralisée dans la section 4 et la continuité de la solution par rapport aux paramètres sera traitée dans la section 5.

2.1 Position du problème et hypothèses

Dans la suite du chapitre, H représente un espace de Hilbert complexe, muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $|.|$, et $\mathscr{L}(H)$ est un algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans H. Soit T_1, $T_2>0$, $\Omega=]0,T_1[\times]0,T_2[=\mathscr{Q}_1\times\mathscr{Q}_2$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$. On considère le problème suivant : Donné f,φ, ψ et H, trouver la fonction $u(t_1,t_2)$ vérifiant l'équation d'évolution multitemps

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B\left[\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right] + A(t)u = f(t), \quad t\in\Omega, \tag{2.1.1}$$

$$\begin{aligned} \ell_{\lambda_1}u &\equiv u\Big|_{t_1=0} - \lambda_1 u\Big|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \quad t_2\in\mathscr{Q}_2, \\ \ell_{\lambda_2}u &\equiv u\Big|_{t_2=0} - \lambda_2 u\Big|_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \quad t_1\in\mathscr{Q}_1, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

où u et f sont des fonctions de variable $t=(t_1,t_2)\in\Omega$ et à valeurs dans H, $A(t)$ est un opérateur linéaire dans H dépend de t, non borné à domaine de définition $\mathscr{D}(A)$, indépendant de t et partout dense dans H, φ (resp. ψ) est une fonction définie de $\mathscr{Q}_2$ (resp. $\mathscr{Q}_1$) à valeurs dans H et vérifient la condition de compatibilité suivante

$$\varphi(0)-\lambda_2\varphi(T_2)=\psi(0)-\lambda_1\psi(T_1), \tag{2.1.3}$$

λ_1 et λ_2 sont deux paramètres complexes, et $B \in \mathscr{L}(H)$.

1. l'opérateur $A(t)$ est auto-adjoint pour tout $t \in \overline{\Omega}$ et vérifie les conditions suivantes

$$(A(t)u, u) \geq c_0 |u|^2, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A), \tag{2.1.4}$$

$$A(0, t_2) = A(T_1, t_2), \quad t_2 \in \mathscr{Q}_2, \tag{2.1.5}$$

$$A(t_1, 0) = A(t_1, T_2), \quad t_1 \in \mathscr{Q}_1. \tag{2.1.6}$$

où c_0 est une constante positive indépendante de u et t.

2. $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ telle que,

$$\alpha_i = |\lambda_i|^2 \exp(3C(T_1 + T_2)) < 1, \tag{2.1.7}$$

où C est une constante positive dépende de B, $A(t)$ et ces dérivées et qui sera calculée par la suite.

Le présent chapitre est une extention dans la même direction des travaux [135], [136] et [178]. On montre l'existence et l'unicité de la solution forte généralisée du problème ($\mathscr{P} = (2.1.1 - 2.1.2)$).

2.2 Espaces fonctionnels et quelques inégalités auxiliaires

Tout d'abord introduisons certains espaces fonctionnelle nécessaires pour l'étude du problème considéré. On définit sur l'ensemble $\mathscr{D}(A)$ la norme hermetienne suivante

$$|u|_1 = |A(0)u|, \tag{2.2.1}$$

on obtient l'espace de Hilbert W^1.

De manière analogue, on définit sur l'ensemble $\mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}})$ la norme

$$|u|_{\frac{1}{2}} = \left|A^{\frac{1}{2}}(0)u\right|, \tag{2.2.2}$$

on obtient ainsi l'espace de Hilbert $W^{\frac{1}{2}}$.

Remarques

- Les opérateurs $A(0)$ et $A^{\frac{1}{2}}(0)$ sont bornés de W^1et $W^{\frac{1}{2}}$ respectivement dans H.
- D'aprés les propriétés de l'opérateur A on a les inclusions topologiques suivantes

$$W^1 \subset W^{\frac{1}{2}} \subset H. \tag{2.2.3}$$

- W^1 est partout dense dans $W^{\frac{1}{2}}$ et dans H.
- De plus, par définition de $\mathscr{L}_2$, on a les inclusions topologiques suivantes

$$\mathscr{L}_2(\Omega, W^1) \subset \mathscr{L}_2(\Omega, W^{\frac{1}{2}}) \subset \mathscr{L}_2(\Omega, H). \tag{2.2.4}$$

Proposition 2.2.1. *L'opérateur $A^{-1}(t)$ (resp. $A^{-\frac{1}{2}}(t)$) est borné de H dans H.*

Démonstration. A partir de l'inégalité (2.1.4) on a

$$c_0|u|^2 \leq (Au, u) \leq |Au||u|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A), \tag{2.2.5}$$

et

$$\sqrt{c_0}|u|^2 \leq \left(A^{\frac{1}{2}}, u\right) \leq \left|A^{\frac{1}{2}}u\right||u|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}}). \tag{2.2.6}$$

D'où on déduit.

$$|Au| \geq c_0|u|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A), \tag{2.2.7}$$

et

$$\left|A^{\frac{1}{2}}u\right| \geq \sqrt{c_0}|u|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}}). \tag{2.2.8}$$

L'opérateur A (resp. $A^{\frac{1}{2}}$) étant auto-adjoint, on à alors

$$|A^*u| = |Au| \geq c_0|u|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A), \tag{2.2.9}$$

et

$$\left|(A^{\frac{1}{2}})^*u\right| = \left|A^{\frac{1}{2}}u\right| \geq \sqrt{c_0}|u|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}}). \tag{2.2.10}$$

On conclut que $A(t)$ (resp $A^{\frac{1}{2}}(t)$) admet un inverse $A^{-1}(t)$ (resp. $A^{-\frac{1}{2}}(t)$) borné de H dans H □

Proposition 2.2.2. *L'opérateur $A(t)$ (resp. $A^{\frac{1}{2}}(t)$) est borné de W^1 (resp. $W^{\frac{1}{2}}$) dans H*

Démonstration. Posons

$$B(t) = A(t)A^{-1}(0) \text{ et } C(t) = A^{\frac{1}{2}}(t)A^{-\frac{1}{2}}(0). \tag{2.2.11}$$

D'aprés la proposition 2.2.1 et le théorème du graphe fermé on a $B(t) \in \mathscr{L}(H)$ car $B(t)$ est le produit d'un opérateur fermé et un opérateur borné.
Pour chaque $t \in \overline{\Omega}$, on peut écrire

$$|A(t)u| = \left|A(t)A^{-1}(0)A(0)u\right| = |B(t)A(0)u| \leq ||B(t)||_{\mathfrak{L}(H)} \times |A(0)u| \leq ||B(t)||_{\mathfrak{L}(H)} \times |u|_1. \tag{2.2.12}$$

Ce qui permet d'afirmer que $A(t) \in \mathscr{L}(W^1, H)$.
De manière analogue on démontre aussi que $A^{\frac{1}{2}}(t) \in \mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}}, H)$ □

Proposition 2.2.3. *[34] Si la fonction $\overline{\Omega} \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1; H)$ est continue par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1; H)$, alors il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que*

$$c_1 |u|_1 \leq |A(t)u| \leq c_2 |u|_1, \quad \forall u \in W^1, \tag{2.2.13}$$

$$\sqrt{c_1}\, |u|_{\frac{1}{2}} \leq |A^{\frac{1}{2}}(t)u| \leq \sqrt{c_2}\, |u|_{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in W^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.14}$$

Démonstration. D'aprés le théorème de la borne uniforme, il existe une constante positive M indépendante de u telle que.

$$\|A(t)u\|_{\mathscr{L}(W^1,H)} \leq M, \quad \forall t \in \overline{\Omega}. \tag{2.2.15}$$

Considérons l'ensemble des fonctions

$$\Delta = \left\{ |A(t)u|,\ t \in \overline{\Omega} \right\}. \tag{2.2.16}$$

Pour $u, v \in W^1$, on a

$$|A(t)u - A(t)v| = |A(t)(u-v)| \leq \|A(t)\|_{\mathscr{L}(W^1,H)} \times |u-v|_1 \leq M\, |u-v|_1. \tag{2.2.17}$$

A partir de cette inégalité on remarque que l'ensemble Δ est equicontinue, de plus on a

$$\begin{aligned} \big| |A(t)u| - |A(t')u| \big| &\leq \left| A(t)u - A(t')u \right| = \left| \left(A(t) - A(t') \right) u \right| \\ &\leq \left\| A(t) - A(t') \right\|_{\mathscr{L}(W^1,H)} \times |u|_1. \end{aligned}$$

Alors on peut choisir des fonctions $c_1(t)$ et $c_2(t)$ continue comme borne sup et inf respectivement de l'ensemble Δ, tel que

$$c_1(t)\, |u|_1 \leq |A(t)u| \leq c_2(t)\, |u|_1. \tag{2.2.18}$$

Comme les fonctions $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont continues sur le rectangle Ω, posons

$$c_1 = \sup_{t \in \overline{\Omega}} c_1(t) > 0 \ \text{ et } \ c_2 = \inf_{t \in \overline{\Omega}} c_2(t) > 0. \tag{2.2.19}$$

Ce qui donne directement (2.2.13).
Pour démontrer l'inégalité (2.2.14), on utilise l'inégalité

$$\left\| A^{\frac{1}{2}}(t) A^{\frac{-1}{2}}(0) \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq \left\| A(t) A^{-1}(0) \right\|_{\mathscr{L}(H)}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.20}$$

En effet, pour tout $t \in \overline{\Omega}$, on peut écrire.

$$\begin{aligned}
\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right| &= \left|A^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{-1}{2}}(0)A^{\frac{1}{2}}(0)u\right| \\
&\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{-1}{2}}(0)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \times \left|A^{\frac{1}{2}}(0)u\right| \\
&\leq \left\|A(t)A^{-1}(0)\right\|_{\mathscr{L}(H)}^{\frac{1}{2}} \times |u|_{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|A(t)\|_{\mathscr{L}(W^1,H)}^{\frac{1}{2}} \times |u|_{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{c_2} \times |u|_{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'ou

$$\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right| \leq \sqrt{c_2} \times |u|_{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.21}$$

D'autr part

$$\begin{aligned}
\left|A^{\frac{1}{2}}(0)u\right| &= \left|A^{\frac{1}{2}}(0)A^{\frac{-1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)u\right| \\
&\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}(0)A^{\frac{-1}{2}}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \times \left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right| \\
&\leq \left\|A(t)A^{-1}(0)\right\|_{\mathscr{L}(H)}^{\frac{1}{2}} \times \left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right| \\
&\leq \left\|A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(W^1,H)}^{\frac{1}{2}} \left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{c_1}\, |u|_{\frac{1}{2}} \leq \left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|. \tag{2.2.22}$$

En regroupant les deux dernières inégalités, on trouve

$$\sqrt{c_1}\, |u|_{\frac{1}{2}} \leq \left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right| \leq \sqrt{c_2}\, |u|_{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.23}$$

Lemme 2.2.1. *Si la fonction $\overline{\Omega} \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1;H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2 par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1;H)$, alors on a les estimations*

$$\left\|\frac{\partial A(t)^{\frac{1}{2}}}{\partial t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq \delta \left\|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i} A(t)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)}, \ (i = 1,2), \tag{2.2.24}$$

où $\delta = \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{(1+s)^2} ds$. (voir [103], Lemme 1.9, p. 186).

Proposition 2.2.4. *Les opérateurs* $\dfrac{\partial A(t)}{\partial t_i}A(t)^{-1}$, $\dfrac{\partial A(t)^{\frac{1}{2}}}{\partial t_i}A(t)^{-\frac{1}{2}}$ *sont uniformément bornés, i.e.,* $\dfrac{\partial A(t)}{\partial t_i}A(t)^{-1}$, $\dfrac{\partial A(t)^{\frac{1}{2}}}{\partial t_i}A(t)^{-\frac{1}{2}} \in L_\infty(\Omega;\mathscr{L}(H))$, $(i=1,2)$.

Démonstration. Montrons que les quantités

$$\sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i}A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \text{ et } \sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}A^{-\frac{1}{2}}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}, (i=1,2), \tag{2.2.25}$$

sont finies.
D'aprés le théorème de la borne uniforme on a l'estimation

$$\sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i}\right\|_{\mathscr{L}(W,H)} \leq C_i^*,\ (i=1,2). \tag{2.2.26}$$

On utilise l'estimation (2.2.26) et (2.2.13), on obtient

$$\left|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i}u\right| \leq C_i^*|u|_1 \leq C_i^*c_1^{-1}|A(t)u|,\ (i=1,2). \tag{2.2.27}$$

En remplaçant u par $A^{-1}(t)v$ dans (2.2.27), on obtient

$$\left|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i}A^{-1}(t)v\right| \leq C_i^*|u|_1 \leq C_i^*c_1^{-1}|v|, \forall v\in H,\ (i=1,2). \tag{2.2.28}$$

Ce qui implique que

$$\left\|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i}A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C_i^*c_1^{-1},\ \forall t\in\Omega,\ (i=1,2). \tag{2.2.29}$$

D'où

$$\sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i}A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C_i^*c_1^{-1} = p_i < +\infty,\ (i=1,2). \tag{2.2.30}$$

La fonction $\Omega \ni t \to A^{\frac{1}{2}}(t) \in \mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}},H)$ admet aussi des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2, et on a l'estimation

$$\sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}\right\|_{\mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}},H)} \leq b_i^*,\ (i=1,2). \tag{2.2.31}$$

Pour démontrer cela, on utilise l'estimation, (2.2.24) les inégalités (2.2.13) et (2.2.30), on obtient

$$\left|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}A^{\frac{-1}{2}}(t)u\right| \leq \delta\left\|\frac{\partial A(t)}{\partial t_i}A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \times |u| \leq \delta\times p_i\times|u|,\ (i=1,2). \tag{2.2.32}$$

Pour $u = A^{\frac{1}{2}}(t)v$ alors (2.2.32) devient

$$\left|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}v\right| \leq \delta \times p_i \left|A^{\frac{1}{2}}(t)v\right| \leq \delta \times p_i \times \sqrt{c_2}\,|v|_{\frac{1}{2}},\ \forall v \in W^{\frac{1}{2}},\ (i=1,2), \tag{2.2.33}$$

i.e.,

$$\left\|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}\right\|_{\mathscr{L}(W^1;H)} \leq b_i^* = \delta \times p_i \times \sqrt{c_2},\ \forall t \in \Omega,\ (i=1,2). \tag{2.2.34}$$

Donc

$$\sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}\right\|_{\mathscr{L}(W^1;H)} \leq b_i^* \leq +\infty,\ (i=1,2). \tag{2.2.35}$$

Il reste a vérifier maintenant que

$$\sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}A^{\frac{-1}{2}}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \text{, est finie },(i=1,2). \tag{2.2.36}$$

On a

$$\left|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}u\right| \leq b_i^*\,|u|_{\frac{1}{2}},\ (i=1,2). \tag{2.2.37}$$

En utilisant l'estimation (2.2.13) et (2.2.37), on obtient

$$\left|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}u\right| \leq b_i^* \times c_1^{-\frac{1}{2}}\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|,\ (i=1,2). \tag{2.2.38}$$

En remplaçant u par $A^{\frac{-1}{2}}(t)v$ dans (2.2.38), on obtient

$$\left|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}A^{\frac{-1}{2}}(t)v\right| \leq b_i^* \times c_1^{-\frac{1}{2}}\,|v|,\ \forall v \in H,\ \forall t \in \Omega,\ (i=1,2). \tag{2.2.39}$$

Ce qui entraîne

$$\left\|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}A^{\frac{-1}{2}}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq b_i^* \times c_1^{-\frac{1}{2}},\ \forall t \in \Omega,\ (i=1,2), \tag{2.2.40}$$

i.e.,

$$\sup_{t\in\Omega}\left\|\frac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t)}{\partial t_i}A^{\frac{-1}{2}}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq b_i^* \times c_1^{-\frac{1}{2}},\ (i=1,2). \tag{2.2.41}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition □

Pour montrer l'estimation (0.2.2) on introduit les espaces suivants
$H^{1,1}(\Omega; W^1)$ est l'espace obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}; W^1)$ par rapport a la norme

$$||u||_{1,1}^2 = \int\limits_\Omega \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|_1^2 + |u|_1^2 \right) dt.$$

Soit $H^1(\mathscr{Q}_i; W^{\frac{1}{2}})$ le complété de $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{Q}_i; W^{\frac{1}{2}})$, $(i = 1, 2)$ par rapport à la norme

$$||\varphi||_1^2 = \int\limits_0^{T_2} \left(\left|\varphi'\right|^2 + |\varphi|_{\frac{1}{2}}^2 \right) dt_2, \quad ||\psi||_1^2 = \int\limits_0^{T_1} \left(\left|\psi'\right|^2 + |\psi|_{\frac{1}{2}}^2 \right) dt_1.$$

On désigne par $\mathbb{E}$ le complété de léspace $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}; W^1)$ par rapport à la norme

$$||u||_{\mathbb{E}}^2 \quad = \quad (J(\lambda))^2 \sup_{\tau \in \Omega} \left(||u(\tau_1, .)||_1^2 + ||u(., \tau_2)||_1^2 \right),$$

où $J(\lambda) = \dfrac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}$.

Notons par $\mathbb{F}$ l'espace de Hilbert

$$\mathscr{L}_2(\Omega; H) \times \mathscr{V}^1(\mathscr{Q}_2; W^{\frac{1}{2}}) \times \mathscr{V}^1(\mathscr{Q}_1; W^{\frac{1}{2}}),$$

composé des éléments $\mathscr{F} = (f, \varphi, \psi)$ telle que la norme

$$||\mathscr{F}||_{\mathbb{F}}^2 = ||f||^2 + ||\varphi||_1^2 + ||\psi||_1^2, \tag{2.2.42}$$

est finie. Où $\mathscr{L}_2(\Omega, H)$ est l'espace des fonctions définies sur Ω à valeurs dans H et à carrée intégrable, muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle = \int_\Omega (., .)\, dt$ et de la norme correspondante $||.||^2 = \int_\Omega |.|^2\, dt$.
Le produit scalaire associe est

$$(\mathscr{F}, V)_{\mathbb{F}} = (f, v)_{\mathscr{L}_2(\Omega; H)} + (\varphi, v_1)_{\mathscr{V}^1(\mathscr{Q}_2; W^{\frac{1}{2}})} + (\psi, v_2)_{\mathscr{V}^1(\mathscr{Q}_1; W^{\frac{1}{2}})}, \tag{2.2.43}$$

où $V = (v, v_1, v_2)$.
$\mathscr{V}^1(\mathscr{Q}_2; W^{\frac{1}{2}}) \times \mathscr{V}^1(\mathscr{Q}_1; W^{\frac{1}{2}})$ est le sous-espace fermé de $H^1(\mathscr{Q}_2; W^{\frac{1}{2}}) \times H^1(\mathscr{Q}_1; W^{\frac{1}{2}})$ composé des éléments (φ, ψ) vérifiant la condition de compatibilité (2.1.3).

Pour montrer l'existence de la solution forte généralisée, on définit la structure hilbertienne suivante
Soit $H^{1,1}(\Omega; H)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}; H)$ par rapport à la norme

$$||u||_{1,1}^2 = \int\limits_\Omega \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + |u|^2 \right) dt. \tag{2.2.44}$$

Soit $H^1(\mathcal{Q}_2;H)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant l'espace $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{Q}_2;H)$ par rapport à la norme

$$||\varphi||_1^2 = ||\varphi||^2 + ||\varphi'||^2.$$

On construit $H^1(\mathcal{Q}_1;H)$ de la même manière.
Notons par $\mathscr{E}$ l'espace de Hilbert

$$\mathscr{L}_2(\Omega;H) \times \mathscr{V}^1(\mathcal{Q}_2;H) \times \mathscr{V}^1(\mathcal{Q}_1;H),$$

composés des éléments $\mathscr{F} = (f, \varphi, \psi)$ tels que la norme

$$||\mathscr{F}||_{\mathscr{E}}^2 = ||f||^2 + ||\varphi||_1^2 + ||\psi||_1^2 \text{ est finie,}$$

où $\mathscr{V}^1(\mathcal{Q}_2;H) \times \mathscr{V}^1(\mathcal{Q}_1;H)$ est le sous-espace fermé de $H^1(\mathcal{Q}_2;H) \times H^1(\mathcal{Q}_1;H)$ composé des éléments (φ, ψ) tels que

$$\overline{\lambda}_2\varphi(0) - \varphi(T_2) = \overline{\lambda}_1\psi(0) - \psi(T_1).$$

On note par $H_0^{1,1}(\Omega; W^1)$ le sous-espace fermé de $H^{1,1}(\Omega; W^1)$ défini par

$$H_0^{1,1}(\Omega; W^1) = \left\{ u \in H^{1,1}(\Omega; W^1) : \ell_{\lambda_1} u = 0,\ \ell_{\lambda_2} u = 0 \right\}.$$

$H_0^{1,1}(\Omega;H)$ est le sous-espace fermé de $H^{1,1}(\Omega;H)$ défini par

$$H_0^{1,1}(\Omega;H) = \left\{ u \in H^{1,1}(\Omega;H) : \ell_{\lambda_1} u = 0,\ \ell_{\lambda_2} u = 0 \right\}.$$

$\overline{H}_0^{1,1}(\Omega;H)$ est le sous-espace fermé de $H^{1,1}(\Omega,H)$ défini par

$$\overline{H}_0^{1,1}(\Omega;H) = \left\{ u \in H^{1,1}(\Omega;H) :\ \overline{\lambda}_1 u \,|_{t_1=0} - u \,|_{t_1=T_1} = 0,\ \overline{\lambda}_2 u \,|_{t_2=0} - u \,|_{t_2=T_2} = 0 \right\}.$$

Soit

$$\mathscr{M} = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 :\ \lambda_i \neq 0 \, and\ \alpha_i < 1,\ (i = 1, 2) \right\}.$$

2.3 Unicité et dépendance continue

Nous somme on position de donner et preuver le théorème principal de cette section pour l'opérator $L = (\mathscr{L}, \ell_{\lambda_1}, \ell_{\lambda_2})$ agissant de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ et à domaine de définition $\mathscr{D}(L) = H^{1,1}(\Omega; W^1) \subset \mathbb{E}$, pour lequel on établit le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *[Estimation a priori]. Si la fonction $\Omega \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1;H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2 par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1;H)$ et si les conditions*(2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) *et* (2.1.7) *sont vérifiées. Alors on a l'estimation*

$$||u||_{\mathbb{E}}^2 \leq S||Lu||_{\mathbb{F}}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(\Omega; W^1), \tag{2.3.1}$$

où S est une constante positive indépendante de λ_1, λ_2 et u.

Pour montrer le théorème (2.3.1), introduisons les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. (Lemme de Gronwall généralisé)

(GV1) Soit $v(t_1, t_2)$ et $F(t_1, t_2)$ deux fonctions non négatives et intégrable sur Ω et telle que la fonction $F(t_1, t_2)$ soit non-décroissante par rapport à t_1 et t_2. Alors de l'inégalité

$$v(t_1, t_2) \leq c_3 \left\{ \int_0^{t_1} v(\tau_1, t_2) d\tau_1 + \int_0^{t_2} v(t_1, \tau_2) d\tau_2 \right\} + F(t_1, t_2), \quad (c_3 \geq 0), \tag{2.3.2}$$

découle l'inégalité

$$v(t_1, t_2) \leq \exp\Big(2c_3(t_1 + t_2)\Big) F(t_1, t_2). \tag{2.3.3}$$

(GV2) Soit $v(t_1, t_2)$ et $G(t_1, t_2)$ deux fonctions non négatives et intégrable sur Ω et telle que la fonction $G(t_1, t_2)$ soit non-décroissante par rapport à t_1 et t_2. Alors de l'inégalité

$$v(t_1, t_2) \leq c_4 \left\{ \int_{t_1}^{T_1} v(\tau_1, t_2) d\tau_1 + \int_{t_2}^{T_2} v(t_1, \tau_2) d\tau_2 \right\} + G(t_1, t_2), \quad (c_4 \geq 0), \tag{2.3.4}$$

on obtient

$$v(t_1, t_2) \leq \exp\Big(2c_4(T_1 + T_2 - t_1 - t_2)\Big) G(t_1, t_2). \tag{2.3.5}$$

Démonstration. Réecrivant l'inégalitè (2.3.2) sous la forme

$$V \leq CIV + F, \tag{2.3.6}$$

où I est un opérateur intégrale donné par

$$IV = \int_0^{t_1} V(s_1, t_2) ds_1 + \int_0^{t_2} V(t_1, s_2) ds_2.$$

En remarquant que l'opérateur I conserve l'inégalitè, on l'applique à (2.3.6) et on multiplie le résultat par la constante C on obtient.

$$CIV \leq C^2 I^2 V + CIF.$$

D'où

$$V \leq C^2 I^2 V + CIF + F.$$

Par des itérations successives, on obtient

$$V \leq C^{n+1} I^{n+1} V + \sum_{K=0}^{K=n} C^K I^K F. \tag{2.3.7}$$

En faisant des calculs, on trouve

$$C^{n+1} I^{n+1} V \leq \frac{C^{n+1} 2^{n+1} (t_1 + t_2)^{n+1}}{(n+1)!} \sup V. \tag{2.3.8}$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, le membre droit de l'inégalité (2.3.8) tend vers zéro, et l'inégalité (2.3.7) devient alors

$$V(t_1, t_2) \leq \exp(2C(t_1 + t_2)) \times F(t_1, t_2)$$

Ce qui achève la démonstration du lemme (2.3.1)

Lemme 2.3.2. *Soit* $|.|_m$ *la norme de* W^m $(m = \frac{1}{2}, 1)$, g *une fonction de variable* $t \in [0, T]$ *et à valeurs dans* W^m, *et soit*

$$h_i = g(0) - \lambda_i g(T), \ (i = 1, 2). \tag{$eq1$}$$

Alors, si la condition (2.1.7) *est vérifiée, on a*

$$\theta_3 |g(0)|_m^2 - \frac{1}{2}(1 + \alpha_i)|g(T)|_m^2 \leq \theta_3 \frac{(1 + \alpha_i)}{(1 - \alpha_i)} |h_i|_m^2, \quad \theta_3 = \frac{\alpha_i}{|\lambda_i|^2} \ (i = 1, 2). \tag{$eq2$}$$

Démonstration. Si la condition (**3**) est vérifiée, de $(eq1)$ on a

$$|g(0)|_m^2 \leq (1 + \epsilon) |\lambda_i|^2 |g(T)|_m^2 + \left(1 + \epsilon^{-1}\right) |h_i|_m^2 .$$

Il suffit de prendre $\epsilon = \dfrac{(1 - \alpha_i)}{2\alpha_i}$, $(i = 1, 2)$, on obtient l'inégalité $(eq2)$. □

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.3.1.

Démonstration. Soit $A_{t_i}^{\frac{1}{2}}(t) = \dfrac{\partial A^{\frac{1}{2}}(t) u}{\partial t_i}$, $A_{t_i}(t) = \dfrac{\partial A(t) u}{\partial t_i}$, $(i = 1, 2)$ En multipliant dans H l'équation par $\mathscr{M} u = \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial t_2}$, on obtient

$$\frac{\partial F_2(t)}{\partial t_1} + \frac{\partial F_1(t)}{\partial t_2} = F(t), \tag{2.3.9}$$

où

$$F_1(t) = \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t) u \right|^2, \quad F_2(t) = \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t) u \right|^2,$$

et

$$F(t)=2Re\left[\left(A_{t_1}^{\frac{1}{2}}(t)u,A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)+\left(A_{t_2}^{\frac{1}{2}}(t)u,A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)-(B\mathscr{M}u,\mathscr{M}u)+(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)\right]$$

Appliquons des majorations en norme de H sur $F(t)$ et utilisons les estimations (2.2.14), (2.2.24), l'inégalité de Cauchy Schwartz et quelques inégalités élémentaires, on obtient

$$\begin{aligned}
|F(t)| &\leq 2\left|\left(A_{t_1}^{\frac{1}{2}}(t)u,A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)+\left(A_{t_2}^{\frac{1}{2}}(t)u,A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)\right|+2\,|(B\mathscr{M}u,\mathscr{M}u)|+2\,|(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)| \\
&\leq 2\left|\left(A_{t_1}^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{-1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)u,A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)+\left(A_{t_2}^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{-1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)u,A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)\right| \\
&+ 2\,|(B\mathscr{M}u,\mathscr{M}u)|+2\,|(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)| \\
&\leq 2\left[\sup_{t\in\Omega}\left\|A_{t_1}^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{-1}{2}}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}+\sup_{t\in\Omega}\left\|A_{t_2}^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{-1}{2}}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}\right]\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|^2 \\
&+ 2\,\|B\|_{\mathscr{L}(H)}\,|\mathscr{M}u|^2+2\,|(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)| \\
&\leq 2\delta\left[\sup_{t\in\Omega}\left\|A_{t_1}(t)A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}+\sup_{t\in\Omega}\left\|A_{t_2}(t)A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}\right]\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|^2 \\
&+ 2\,\|B\|_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+2\,|(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)|,
\end{aligned}$$

alors on a

$$|F(t)|\leq 2|(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)|+C(F_1(t)+F_2(t)), \tag{2.3.10}$$

où

$$C=2\delta\left(\sup_{t\in\Omega}\left\|A_{t_1}(t)A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}+\sup_{t\in\Omega}\left\|A_{t_2}(t)A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}\right)+4\,\|B\|_{\mathscr{L}(H)}.$$

Intégrons l'identité (2.3.9) dans le rectangle $\Omega_\tau=]0,\tau_1[\times]0,\tau_2[\subset\Omega$, et en utilisant (2.3.10) on obtient

$$\begin{aligned}
\bullet\quad &\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\leq\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,0)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(0,t_2)\,dt_2 \\
&+\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}2\,|(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)|\,dt+C\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}(F_1(t)+F_2(t))\,dt.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

En faisant des calculs similaires dans les rectangles $]\tau_1,T_1[\times]\tau_2,T_2[$, $]0,\tau_1[\times]\tau_2,T_2[$ et $]\tau_1,T_1[\times]0,\tau_2[$ respectivement, on obtient les trois inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
\bullet\quad &-\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\leq-\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,T_2)\,dt_1-\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(T_1,t_2)\,dt_2 \\
&+\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}2\,|(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)|\,dt+C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t)+F_2(t))\,dt,
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

$$\bullet \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 - \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 \le \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,t_2)\,dt_2 - \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1$$
$$+\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1} 2|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)|\,dt + C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1} (F_1(t)+F_2(t))\,dt, \tag{2.3.13}$$

$$\bullet \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 - \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 \le \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 - \int_0^{\tau_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2$$
$$+\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)|\,dt + C\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} (F_1(t)+F_2(t))\,dt. \tag{2.3.14}$$

Dans cette étape, nous étudions le cas où la condition (2.1.7) est réalisée, si on pose

$$\beta_i = \exp CT_i,\ \alpha_i = \theta_3\,|\mu_i|^2 \quad (i=1,2) \quad \theta_i = \exp iC(T_1+T_2), (i=1,2,3).$$

Par une application directe du lemme (2.3.1) à (2.3.11), on obtient

$$\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 \le$$
$$\theta_2\left[\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} 2|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)|\,dt + \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(0,t_2)\,dt_2\right]. \tag{2.3.15}$$

L'inégalité (2.3.13), peut être écrit sous la forme

$$\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 + \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1 \le \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,t_2)\,dt_2$$
$$+\int_0^{\tau_1}\int_{\tau_2}^{T_2} 2|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)|\,dt + C\int_0^{\tau_1}\int_{\tau_2}^{T_2} (F_1(t)+F_2(t))\,dt.$$

Fixons la variable τ_2 et considérons la fonction

$$Y(\tau_1,\tau_2) = \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2 + \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1,$$

comme une fonction d'une seule variable τ_1, et en utilisant la version classique du lemme de Gronwall

(GV1 du lemme (2.3.1)) on obtient l'inégalité

$$\begin{gathered}\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2-\beta_1\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1\leq-\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1+\\ \beta_1\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}2\left|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)\right|dt+C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}F_1(t)dt+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(0,t_2)\,dt_2\right].\end{gathered}\tag{2.3.16}$$

De la même manière, et à partir de (2.3.14) on trouve l'inégalité

$$\begin{gathered}\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\beta_2\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\leq-\int_0^{\tau_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2+\\ \beta_2\left[\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}2\left|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)\right|dt+C\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}F_2(t)dt+\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,0)\,dt_1\right].\end{gathered}\tag{2.3.17}$$

Comme $\beta_i\leq\theta_3\; and\; \beta_i\leq\theta_1,(i=1,2)$ alors les deux inégalités (2.3.16), (2.3.17) sont équivalentes à

$$\begin{gathered}\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2-\theta_1\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1\leq-\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1+\\ \theta_3\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}2\left|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)\right|dt+C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}F_1(t)dt+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(0,t_2)\,dt_2\right],\end{gathered}\tag{2.3.18}$$

$$\begin{gathered}\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\theta_1\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\leq-\int_0^{\tau_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2+\\ \theta_3\left[\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}2\left|(\mathcal{L}u,\mathcal{M}u)\right|dt+C\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}F_2(t)dt+\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,0)\,dt_1\right].\end{gathered}\tag{2.3.19}$$

Multiplions l'inégalité (2.3.15) par $\frac{1}{4}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$, (2.3.18) par $\frac{1}{2}(1+\alpha_2)$, (2.3.19) par $\frac{1}{2}(1+\alpha_1)$ et (2.3.12) par θ_1 et en sommant les inégalités obtenues, puis on utilise quelques estimations élémentaires, on obtient

$$\mathscr{C}(\tau_1,\tau_2)\leq(1+\alpha_1)\int_0^{T_1}\chi(t_1)dt_1+(1+\alpha_2)\int_0^{T_2}\chi(t_2)dt_2+\mathscr{H}(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{R},\tag{2.3.20}$$

où $\mathscr{C}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{4}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\int\limits_0^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int\limits_0^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2,$

$$\mathscr{H}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\theta_3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)C\left[\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\int\limits_0^{T_2} F_2(t)\,dt+\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{T_1} F_1(t)\,dt\right],$$

$$\mathscr{R}=\theta_3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\int\limits_0^{T_2}\int\limits_0^{T_1} 2(\mathscr{L}u,\mathscr{M}u)\,dt,$$

$\chi_1(t_1)=\theta_3F_1(t_1,0)-\frac{1}{2}(1+\alpha_2)F_1(t_1,T_2)$, $\chi_2(t_2)=\theta_3F_2(0,t_2)-\frac{1}{2}(1+\alpha_1)F_2(T_1,t_2)$.

D'après (2.2.14) et le lemme (2.3.2), où on pose $g(t_2)=\frac{\partial u}{\partial t_1}+A^{\frac{1}{2}}(t)u$, la quantité χ_1 peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned}
\chi_1(t_1) &\le k_1\left|\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)|_{t_2=0}-\left(\lambda_2\frac{\partial u}{\partial t_1}+\lambda_2A^{\frac{1}{2}}(t)u\right)|_{t_2=T_2}\right|^2\\
&\le 2k_1\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}|_{t_2=0}-\lambda_2\frac{\partial u}{\partial t_1}|_{t_2=T_2}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\,|_{t_2=0}-\lambda_2A^{\frac{1}{2}}(t)u\,|_{t_2=T_2}\right|^2\right)\\
&= 2k_1\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial t_1}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(t_1,0)\psi\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(0,t_2)\varphi\right|^2\right),
\end{aligned}$$

où $k_1=\frac{\theta_3(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}$.

En vertu de (2.2.14) on obtient l'inégalité suivante

$$(1+\alpha_1)\int_0^{T_1}\chi_1(t_1)\,dt_1\le k_2\|\ell_{\lambda_2}u\|_1^2, \tag{2.3.21}$$

avec la même manière χ_2 peut être estimé comme suit

$$(1+\alpha_2)\int_0^{T_2}\chi_2(t_2)\,dt_2\le k_2\|\ell_{\lambda_1}u\|_1^2, \tag{2.3.22}$$

où $k_2=\frac{k_1\max(1,c_2)(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)}$.

L'inégalité (2.3.20) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\tau_1,\tau_2)&\le k_2\left[\|\ell_{\lambda_1}u\|_1^2+\|\ell_{\lambda_2}u\|_1^2\right]+\mathscr{H}(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{R}\\&=\mathscr{N}_1+\mathscr{H}(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{R}.\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

►**Premier cas :** $0 < \alpha_i < \frac{1}{3}$ $(i = 1, 2)$.
On remarque que $\frac{1}{2}(1 + \alpha_i) \leq 2(1 - \alpha_i)$, alors
$2\theta_3 C(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \leq 8\theta_3 C(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) = 4\mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) &= (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\left[\int_0^{T_1} F_1(t_1, \tau_2)\,dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1, t_2)\,dt_2\right] \\ &\leq 4\mathcal{R} + 4\mathcal{N}_1 + C^*(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\left[\int_{\tau_1}^{T_1}\int_0^{T_2} F_2(t)dt + \int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1} F_1(t)dt\right],\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

où $C^* = 8\theta_3 C$, d'où, par le lemme ((2.3.1), $(GV2)$), il suit que

$$\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) \leq \Theta(\mathcal{R} + \mathcal{N}_1) = \mathcal{N}_2, \tag{2.3.25}$$

où $\Theta = 4\exp(2C^*(T_1 + T_2))$.
En utilisant l'ϵ-inégalité, la quantité $\mathcal{N}_2$ peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_2 \leq k_3 &\left[(\epsilon_1^{-1} + \epsilon_2^{-1})\|\mathcal{L}u\|^2 + \epsilon_1\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} F_1(t)dt + \epsilon_2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} F_2(t)dt\right] \\ &+ k_4\left[\|\ell_{1\lambda}u\|_1^2 + \|\ell_{2\lambda}u\|_1^2\right],\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

où $k_3 = \Theta\theta_3(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)$ and $k_4 = \Theta k_2$, ce qui implique

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) \leq k_3 &\left[(\epsilon_1^{-1} + \epsilon_2^{-1})\|\mathcal{L}u\|^2 + \epsilon_1\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} F_1(t)dt + \epsilon_2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} F_2(t)dt\right] \\ &+ k_4\left[\|\ell_{1\lambda}u\|_1^2 + \|\ell_{2\lambda}u\|_1^2\right].\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Prenons $\varepsilon_i = \dfrac{\max(1, c_2)}{2k_2\Theta\theta_3 T_{3-i}}$, et en intégrant (2.3.27) par rapport à τ_i de 0 a T_i $(i = 1, 2)$, et multiplions par $\dfrac{1}{T_1 T_2}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\left[T_2^{-1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \mathcal{F}_1(t)\,dt + T_1^{-1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_2} \mathcal{F}_2(t)\,dt\right] \\ &\leq \gamma_1\|\mathcal{L}u\|^2 + \gamma_2\left[\|\ell_{1\lambda}u\|_1^2 + \|\ell_{2\lambda}u\|_1^2\right],\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

où $\gamma_1 = \dfrac{2k_3^2(T_1 + T_2)}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)}, \quad \gamma_2 = \Theta\theta_3 k_2.$
En combinant (2.3.27) et (2.3.28), on en déduit que

$$\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) \leq \gamma_3\left[\|\mathcal{L}u\|^2 + \|l_{1\mu}u\|_1^2 + \|l_{2\mu}u\|_1^2\right], \tag{2.3.29}$$

où $\gamma_3 = \dfrac{4k_3^2(T_1+T_2+1)(1+\max(1,c_2))}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$.
Revenons à $\mathcal{Q}(\tau_1,\tau_2)$ et on utilise la condition (2.2.14) on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(\tau_1,\tau_2) &\geq (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + c_1|u|_{\frac{1}{2}}^2\right)|_{(t_1,\tau_2)}\,dt_1 \\
&+ (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + c_1|u|_{\frac{1}{2}}^2\right)|_{(\tau_1,t_2)}\,dt_2 \\
&\geq (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\min(1,c_1)\left[||u(.,\tau_2)||^2 + ||u(\tau_1,.)||^2\right].
\end{aligned}$$

D'après cette dernière inégalité et (2.3.29) on obtient

$$(J(\lambda))^2\left[||u(.,\tau_2)||^2 + ||u(\tau_1,.)||^2\right] \leq S_1\left[||\mathcal{L}u||^2 + ||\ell_{1\lambda}u||_1^2 + ||\ell_{2\lambda}u||_1^2\right], \tag{2.3.30}$$

où $S_1 = 4\Theta^2\theta_3^2(T_1+T_2+1)\dfrac{(1+\max(1,c_2))}{\min(1,c_1)}$.
Puisque le membre droit de (2.3.30) ne dépend pas de τ, passant au supremum par rapport à τ. Alors, l'estimation (2.3.1) est vérifie avec $S = S_1$.
►**Second cas :** $(\frac{1}{3} \leq \alpha_i < 1)$ $(i = 1,2)$.
En faisant le changement de variable suivant $\lambda \to \eta_i(\lambda) = \dfrac{(1-\alpha_i(\lambda))}{2}$ for $(i = 1,2)$,
ce qui implique que $(0 < \eta_i(\lambda) \leq \frac{1}{3})$.
On remarque que

$$\frac{(1-\eta_1)^2(1-\eta_2)^2}{(1+\eta_1)^2(1+\eta_2)^2} = \frac{(1+\alpha_1)^2(1+\alpha_2)^2}{(3-\alpha_1)^2(3-\alpha_2)^2} \geq \frac{(1-\alpha_1)^2(1-\alpha_2)^2}{4(1+\alpha_1)^2(1+\alpha_2)^2}$$

ce qui montre que pour tout $0 < \alpha_i < 1$,

$$||u||_{\mathbb{E}}^2 \leq S||Lu||_{\mathbb{F}}^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L), \tag{2.3.31}$$

où $S = 4S_1$.
La démonstration du théorème (2.3.1) est complète. □

D'après l'estimation (2.3.1), on déduit que l'opérateur L admet un inverse borné L^{-1} sur $\mathcal{R}(L)$. Cependant, puisque nous n'avons aucune information concernant $\mathcal{R}(L)$ à l'exception que $\mathcal{R}(L) \subset \mathbb{F}$. Premièrement, on montre que $L : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, avec domaine de définition $\mathcal{D}(L)$, admet une fermeture.

Proposition 2.3.1. *Sous les conditions du théorème* (2.3.1)*, alors l'opérateur L admet une fermeture $\overline{L}$ avec domaine de définition noté par* $\mathcal{D}(\overline{L})$.

Démonstration. Soit $(u_n) \subset \mathscr{D}(L)$ telle que

$$u_n \xrightarrow{\mathbb{E}} 0 \text{ et } Lu_n \xrightarrow{\mathbb{F}} \mathscr{F} \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{ avec } \mathscr{F} = (v, v_1, v_2).$$

Il faut montrer que $\mathscr{F} = (v, v_1, v_2) = (0,0,0)$.
Puisque les opérateurs $\ell_{1\lambda}$ et $\ell_{2\lambda}$ sont continues, on a alors
$\ell_{1\lambda} u_n \to 0$ et $\ell_{2\lambda} u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, on conclut que $v_1 = v_2 = 0$.
D'autre part, comme $C_0^\infty(\Omega, H)$ est dense dans $\mathscr{L}_2(\Omega, H)$, il suffit de montrer que pour tout $w \in C_0^\infty(\Omega, H)$ on a $\langle v, w\rangle = 0$.
En effet

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \int_\Omega (v, w)\, dt = \sup_{n\to\infty} \lim \int_\Omega (\mathscr{L} u_n, w)\, dt = \sup_{n\to\infty} \lim \int_\Omega (u_n, \mathscr{L}^* w)\, dt \\
&= \sup_{n\to\infty} \lim \int_\Omega \left(u_n, \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} - B^* \left(\frac{\partial w}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial t_2} \right) + Aw \right) dt = 0,
\end{aligned}$$

et par conséquent $v = 0$. ce qui achève la démonstration de la proposition (2.3.1). □

La soluton de l'équation

$$\overline{L} u = \mathscr{F}, \quad \mathscr{F} \in \mathbb{F}, \tag{2.3.32}$$

est appelée solution forte généralisée du problème ($\mathscr{P}$). Par Passage à la limite, on prolonge l'inégalité (2.3.1) et on obtient

$$\|u\|_{\mathbb{E}}^2 \leq S \left\|\overline{L} u\right\|_{\mathbb{F}}^2, \quad \forall u \in \mathscr{D}(\overline{L}), \tag{2.3.33}$$

pour laquelle on déduit

Corollaire 2.3.1. *De l'inégalité* (2.3.33) *on déduit que, la solution forte généralisée quand elle existe est unique, et dépend continûement du second membre* $\mathscr{F} = (f, \varphi, \psi)$.

Démonstration. L'unicité est dûe à l'inégalité (2.3.33), pour la dépendance continue par rapport à $\mathscr{F} \in \mathbb{F}$, on suppose qu'il existe une solution forte $u = (\overline{L})^{-1}\mathscr{F}$ de $\overline{L} u = \mathscr{F}$, et si de plus $v = (\overline{L})^{-1}\mathbf{G}$ est une autre solution du même problème avec second membre $\mathbf{G}$. On a

$$|||u - v|||_1^2 \leq S|||\overline{L}(u - v)|||^2 = S|||\mathscr{F} - \mathbf{G}|||^2.$$

Ce qui signifie qu'une faible variation du second membre $\mathscr{F}$ n'entraîne qu'une faible variation de la solution. □

Corollaire 2.3.2. *L'ensemble* $\mathscr{R}(\overline{L})$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égal à* $\overline{\mathscr{R}(L)}$ *la fermeture de* $\mathscr{R}(L)$ *et* $(\overline{L})^{-1} = \overline{L^{-1}}$ *est borné.*

Démonstration. D'après la définition de $\mathcal{R}(L)$, on a $\mathcal{R}(\overline{L}) \subset \overline{\mathcal{R}(L)}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $\mathcal{F} \in \overline{\mathcal{R}(L)}$, alors il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(L)$ telle que

$$|||Lu_n - \mathcal{F}||| \to 0, \text{ quand } n \to 0.$$

On a

$$|||u_p - u_q|||_1^2 \leq S|||Lu_p - Lu_q|||^2 \to 0, \text{ quand } p,q \to 0,$$

donc (u_n) converge vers un élément $u \in \mathbb{E}$ et $\overline{L}u = \mathcal{F}$. □

On déduit du corollaire (2.3.2) que pour démontrer l'existence de la solution forte généralisée du problème $(\mathcal{P})$, il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L)$ dans $\mathbb{F}$.

2.4 Existence de la solution forte

Pour montrer l'existence de la solution forte généralisée, supposons de plus la condition suivante

Condition $(\mathcal{H})$ $\quad \Omega \ni t \longmapsto A(t) \in \mathcal{L}(\Omega, W^1)$ admets des dérivées mixtes

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial t_2 \partial t_1} \text{ avec } \frac{\partial A}{\partial t_1 \partial t_2} A^{-1}, \frac{\partial A}{\partial t_2 \partial t_1} A^{-1} \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{L}(H)).$$

On est maintenant, en position pour prouver le résultat principal de ce chapitre i.e., établir la densité de $\mathcal{R}(L)$ dans $\mathbb{F}$, qui est équivalent à montrer que, $\mathcal{R}(L)^{\perp} = \{(0,0,0)\}$ pour cela, on est confronté à des difficultés de dérivation d'éléments non réguliers, et pour les surmonter, on introduit les opérateurs de régularisation.

Définition 2.4.1 (Opérateurs de régularisation (Approximation de Yosida)). (Brezis [31], proposition VII.2, p. 102). On pose

$$A_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A(t)), \, J_\varepsilon(t) = A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1},$$

$$R_\varepsilon(t) = A(t)(I + \varepsilon A(t))^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}(I - J_\varepsilon(t)), \quad \varepsilon > 0,$$

$R_\varepsilon(t)$ est appelé *Approximations de Yosida* de l'opérateur $A(t)$.

Quelques propriétés basic de R_ε sont listées dans la proposition suivante

Proposition 2.4.1. *On a*

1. J_ε, $R_\varepsilon \in \mathcal{L}(H)$, $||J_\varepsilon|| \leq 1$, $||R_\varepsilon|| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$;
2. $J_\varepsilon A u = A J_\varepsilon u, \quad \forall u \in W^1$.
3. $|R_\varepsilon u| \leq |u|_1, \forall \varepsilon > 0, \forall u \in W^1$;

4. $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon u = u, \quad \forall u \in H$;
5. $\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon u = Au, \quad \forall u \in W^1$.

Théorème 2.4.1. *Sous les conditions du théorème* (2.3.1) *et la condition* $(\mathscr{H})$, *l'ensemble* $\mathscr{R}(L)$ *est dense dans* $\mathbb{F}$.

Démonstration. On utilise la méthode de prolongement par continuité, où la description de cette méthode est donnée dans le livre [73]. On introduit la famille d'opérateurs

$$L_\omega = (\mathscr{L}_\omega, \ell_{\lambda_1}, \ell_{\lambda_2}),\ \omega \in [0,1],$$

où

$$\mathscr{L}_\omega = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \omega \mathscr{B} + A(t) = (1-\omega)\mathscr{L}_0 + \omega \mathscr{L}_1, \quad \mathscr{B} = B\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right].$$

Nous allons maintenant montrer le résultat dans le cas $\omega = 0$, c'est-à-dire $\mathscr{R}(L_0)^\perp = \{(0,0,0)\}$) et par la méthode de prolongement par continuité, on établit le cas général.

Etape 1 $\quad \omega = 0$.

Soit $V = (v, v_1, v_2)$ un élément orthogonal à $\mathscr{R}(L_0)$. Alors on a

$$\langle L_0 u, V\rangle_{\mathbb{F}} = \langle \mathscr{L}_0 u, v\rangle + \langle \ell_{\lambda_1} u, v_1\rangle + \langle \ell_{\lambda_2} u, v_2\rangle = 0, \quad \forall u \in H^{1,1}(\Omega, W^1). \tag{2.4.1}$$

Montrons que $V = (0,0,0)$, mais comme $\ell_{\lambda_1}, \ell_{\lambda_2}$ sont indépendants et leurs images sont dense, il suffit donc de prouver la proposition suivante

Proposition 2.4.2. *Si pour tout* $v \in \mathscr{L}_2(\Omega; H)$ *on a*

$$\langle \mathscr{L}_0 u, v\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial \mathscr{L}_2} + A(t)u, v \right\rangle = 0, \forall u \in H_0^{1,1}(\Omega; W^1) \tag{2.4.2}$$

alors $v = 0$.

Proof. Soit $w = A_\varepsilon^{-1} v$ et $h = A_\varepsilon u$, alors la relation (2.4.2) devient

$$\left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_2}(B_{1\varepsilon}^* h) - \frac{\partial}{\partial t_1}(B_{2\varepsilon}^* h) + B_{3\varepsilon}^* h, w \right\rangle = -\langle h, Aw\rangle, \tag{2.4.3}$$

ici, h est une fonction arbitraire de $H_0^{1,1}(\Omega; H)$ et $B_{i\varepsilon}^* \in \mathscr{L}(H)$, $(i = 1,2,3)$ sont donnés par

$$B_{1\varepsilon}^* = \varepsilon \frac{\partial A}{\partial t_1} A_\varepsilon^{-1} - B, \qquad B_{2\varepsilon}^* = \varepsilon \frac{\partial A}{\partial t_2} A_\varepsilon^{-1} - B,$$

$$B_{3\varepsilon}^* = \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2} A_\varepsilon^{-1} - \varepsilon B \frac{\partial A}{\partial t_1} A_\varepsilon^{-1} - \varepsilon B \frac{\partial A}{\partial t_2} A_\varepsilon^{-1},$$

$(*)$ représente le symbole de l'adjoint.
Puisque l'équation (2.4.3) est vraie pour toute fonction $h \in H_0^{1,1}(\Omega;H)$, elle reste vraie pour $h \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\Omega;H)$, ce qui donne au sens des distributions

$$\left\langle h, \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial t_2} + B_{2\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial t_1}\right\rangle_{\mathscr{D}'} = -\langle h, (A+B_{3\varepsilon})w\rangle, \quad \forall h \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\Omega;H). \tag{2.4.4}$$

On définit les opérateurs suivants

$$\begin{cases} \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}}) = \overline{H}_0^{1,1}(\Omega;H), \\ \widetilde{\mathscr{L}}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \end{cases} \tag{2.4.5}$$

et

$$\begin{cases} \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}'}) = H_0^{1,1}(\Omega;H), \\ \widetilde{\mathscr{L}'}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \dfrac{\partial}{\partial t_1}(B_{2\varepsilon}^* u) - \dfrac{\partial}{\partial t_2}(B_{1\varepsilon}^* u). \end{cases} \tag{2.4.6}$$

À partir de (2.4.3) et (2.4.4), on montre que $\widetilde{\mathscr{L}'} = (\widetilde{\mathscr{L}})^*$, en effet

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mathscr{L}'}v, u\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}(B_{2\varepsilon}^* v) - \frac{\partial}{\partial t_2}(B_{1\varepsilon}^* v), u \right\rangle \\ &= \left\langle v, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial t_1}\left\langle \frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{2\varepsilon}^* v, u\right\rangle \\ &- \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\left\langle v, \frac{\partial u}{\partial t_1}\right\rangle + \left\langle B_{1\varepsilon}^* v, u\right\rangle\right), \end{aligned}$$

mais d'après les conditions homogènes, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1}\langle \frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{2\varepsilon}^* v, u\rangle &= \int_0^{T_2}\left[(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{2\varepsilon}^* v, u) - (\lambda_1 \frac{\partial v}{\partial t_2} - \lambda_1 B_{2\varepsilon}^* v, \frac{1}{\overline{\lambda}_1} u)\right]_{t_1=T_1} dt_2 \\ &= \int_0^{T_2}\left[(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{2\varepsilon}^* v, u) - \frac{\mu_1}{\overline{\overline{\mu}}_1}(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{2\varepsilon}^* v, u)\right]_{t_1=T_1} dt_2 = 0, \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\left\langle v, \frac{\partial u}{\partial t_1}\right\rangle + \left\langle B_{1\varepsilon}^* v, u\right\rangle\right) = 0.$$

Alors

$$\langle \widetilde{\mathscr{L}'}v, u\rangle = \langle v, \widetilde{\mathscr{L}}u\rangle, \quad \forall u \in \widehat{H}_0^{1,1}(\Omega;H),\ \forall v \in H_0^{1,1}(\Omega;H),\ i.e., \widetilde{\mathscr{L}'} = (\widetilde{\mathscr{L}})^*. \tag{2.4.7}$$

Revenons à l'équation (2.4.4), et d'après la relation (2.4.7) on a, pour tout $\varepsilon \neq 0$, w est la solution faible du problème

$$\begin{cases} \widetilde{\mathscr{L}}w \equiv \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} = -(B_{3\varepsilon}A^{-1}\varepsilon + AA^{-1}\varepsilon)v, \\ \widetilde{\ell}_{\lambda_1} w \equiv \overline{\lambda}_1 w\Big|_{t_1=0} - w\Big|_{t_1=T_1} = 0, \\ \widetilde{\ell}_{\lambda_2} w \equiv \overline{\lambda}_2 w\Big|_{t_2=0} - w\Big|_{t_2=T_2} = 0, \end{cases} \tag{2.4.8}$$

où $v \in \mathscr{L}_2(\Omega; H)$, $B_{j\varepsilon} \in \mathscr{L}(H)$, $(j = 1,2,3)$.
Montrons à présent que, w est une solution au sens fort du problème (2.4.8) et qu'elle vérifie une certaine estimation à priori, d'où on peut déduire que $v = 0$.
Pour établir ces résultats, montrons que l'opérateur $\widetilde{L} = (\widetilde{\mathscr{L}}, \widetilde{l}_{1\mu}, \widetilde{l}_{2\mu})$ défini de $H^{1,1}(\Omega; H)$ à valeurs dans $\mathscr{E}$ est un isomorphisme

Proposition 2.4.3. *L'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(\Omega; H)$ dans $\mathscr{E}$.*

Démonstration. On doit démontrer que $\mathscr{R}(\widetilde{L}) = \mathscr{E}$ et

$$(i) \quad \|\widetilde{L}u\|^2_{\mathscr{E}} \leq d_1 \|u\|^2_{1,1}, \quad \forall u \in H^{1,1}(\Omega; H), \tag{2.4.9}$$

$$(ii) \quad \|u\|^2_{1,1} \leq d_2 \|\widetilde{L}u\|^2_{\mathscr{E}}, \quad \forall u \in H^{1,1}(\Omega; H), \tag{2.4.10}$$

où d_1 et d_2 sont deux constantes positives indépendantes de u.
(i) Il est facile de montrer

$$\begin{aligned} \| B_{i\varepsilon} \|_{\mathscr{L}(H)} &= \| B^*_{i\varepsilon} \|_{\mathscr{L}(H)} \leq \frac{C}{4} \left\| I - A_\varepsilon^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} + \|B\|_{\mathscr{L}(H)} \\ &\leq C,\ (i = 1,2), \end{aligned}$$

alors $\left|\widetilde{\mathscr{L}}u\right|^2$ peut être estimer comme suit

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\mathscr{L}}u\right|^2 &\leq \left\{ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \left|B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \left|B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right| \right\}^2 \\ &\leq 4\max(1, C^2) \left\{ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2 \right\}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\widetilde{\mathscr{L}}u\|^2 \leq 4\max(1, C^2)\|u\|^2_{1,1}, \quad \forall u \in H^{1,1}(\Omega; H). \tag{2.4.11}$$

En vertu de la continuité des opérateurs $\widetilde{\ell}_{\lambda_1}$, $\widetilde{\ell}_{\lambda_2}$ de $H^{1,1}(\Omega; H)$ dans $H^1(\mathscr{Q}_2; H)$, $H^1(\mathscr{Q}_1; H)$ respectivement et de l'inégalité (2.4.11), on obtient l'estimation (i).

(ii) Observons que

$$-\frac{\partial}{\partial t_2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2-\frac{\partial}{\partial t_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 \quad = \quad -2Re(\widetilde{\mathscr{L}}u,\mathscr{M}u)+G(t),$$

où $G(t)=2Re(B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1}+B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2},\mathscr{M}u)$, qui peut être estimer comme suit

$$\begin{aligned}
|G(t)| &= 2Re\left|(B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}+B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2},\mathscr{M}u)\right| \\
&\leq 3\left(||B_{1\varepsilon}||_{\mathscr{L}(H)}+||B_{2\varepsilon}||_{\mathscr{L}(H)}\right)\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right] \\
&= C_1\left[J_1(t)+J_2(t)\right],
\end{aligned}$$

où $C_1=3\left(||B_{1\varepsilon}||_{\mathscr{L}(H)}+||B_{2\varepsilon}||_{\mathscr{L}(H)}\right)$, $\quad J_i(t)=\left|\dfrac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2$ $(i=1,2)$.

Ainsi

$$-\frac{\partial J_1(t)}{\partial t_2}-\frac{\partial J_2(t)}{\partial t_1}\leq -2Re\left|(\widetilde{\mathscr{L}}u,\mathscr{M}u)\right|+C_1(J_1(t)+J_2(t)).$$

Pour cette dernière inégalité, on utilise des techniques similaires à celles utilisées pour établir l'estimation (2.3.1) du théorème (2.3.1), on obtient l'estimation (2.4.10).

D'après la continuité de l'opérateur $\widetilde{L}$ et de l'inégalité (2.4.11), on conclut que l'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(\Omega;H)$ dans le sous espace fermé $\mathscr{R}(\widetilde{L})=\widetilde{L}\left(H^{1,1}(\Omega;H)\right)$.

Il reste à montrer que $\mathscr{R}(\widetilde{L})=\mathscr{E}$, pour cela, on procède par la méthode de prolongement par rapport au paramètre, et on introduit la famille d'opérateurs $\left\{\widetilde{L}_\eta\right\}_{\eta\in[0,1]}$ définie par

$$\begin{cases}
\widetilde{L}_\eta=(\widetilde{\mathscr{L}}_\eta,\widetilde{\ell}_{\lambda_1},\widetilde{\ell}_{\lambda_2}), \quad \eta\in[0,1], \\
\widetilde{\mathscr{L}}_\eta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}+\eta B_\varepsilon u\text{ , avec } B_\varepsilon u=B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1}+B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \\
\mathscr{D}(\widetilde{L}_\eta)=H^{1,1}(\Omega,H).
\end{cases} \tag{2.4.12}$$

• (1) Nous commençons par le cas $\eta=0$, on montre que l'opérateur $\mathscr{R}(\widetilde{L}_0)=\mathscr{E}$. Maintenant, par une intégration simple, il est facile de montrer que la solution de l'équation

$$\begin{cases}
\widetilde{\mathscr{L}}_0 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}=\widetilde{f}(t), \\
\widetilde{\ell}_{\lambda_1}u\equiv\overline{\lambda}_1 u\,|_{t_1=0}-u\,|_{t_1=T_1}=\widetilde{\varphi}(t_2), \\
\widetilde{\ell}_{\lambda_2}u\equiv\overline{\lambda}_2 u\,|_{t_2=0}-u\,|_{t_2=T_2}=\widetilde{\psi}(t_1).
\end{cases} \tag{2.4.13}$$

est donnée par la formule

$$u(t_1,t_2)= \frac{1}{\overline{\lambda}_2-1}\Big(\widetilde{\psi}(t_1)+\int_0^{t_1}\int_0^{T_2}\widetilde{f}(s)ds\Big)+\frac{1}{\overline{\lambda}_1-1}\Big(\widetilde{\varphi}(t_2)+\int_0^{T_1}\int_0^{t_2}\widetilde{f}(s)ds\Big)$$
$$+\frac{1}{(\overline{\lambda}_1-1)(\overline{\lambda}_2-1)}\Big(\widetilde{\psi}(t_1)-\mu_1\widetilde{\psi}(0)+\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\widetilde{f}(s)ds\Big)+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\widetilde{f}(s)ds.$$

Cela nous permet de dire que l'opérateur $\widetilde{L}_0$ est surjectif, et donc $\mathscr{R}(\widetilde{L}_0)=\mathscr{E}$, ce qui assure que $\widetilde{L}_0$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(\Omega;H)$ dans $\mathscr{E}$.

• (2) Maintenant, on montre que $\mathscr{R}(\widetilde{L}_\eta)=\mathscr{E}$. Pour $\eta_0,\eta\in[0,1]$, on peut écrire

$$\widetilde{L}_\eta=\widetilde{L}_{\eta_0}+(\eta-\eta_0)(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0),\ \text{avec}\ (\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)=(B_\varepsilon,\widetilde{\ell}_{\lambda_1},\widetilde{\ell}_{\lambda_2}),$$

on montre directement que

$$\begin{aligned}||B_\varepsilon u||^2 &= \int_\Omega |B_\varepsilon u|^2dt=\int_\Omega\left|B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}+B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2dt\\ &\le \int_\Omega\left[||B_{2\varepsilon}||_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|+||B_{1\varepsilon}||_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right]^2dt\\ &\le 2C^2\int_\Omega\left[\left|\frac{\partial^2u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|^2\right]dt,\end{aligned}$$

donc

$$||B_\varepsilon u||^2\le 2C^2\,||u||_{1,1}^2,\quad \forall u\in H^{1,1}(\Omega;H). \tag{2.4.14}$$

En vertu de l'inégalité (2.4.14) et en tenant compte de la continuité des opérateurs $\widetilde{\ell}_{\lambda_1},\widetilde{\ell}_{\lambda_2}$, on obtient

$$\left\|(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)u\right\|_{\mathscr{E}}^2\le d_3\,||u||_{1,1}^2,\quad \forall u\in H^{1,1}(\Omega;H). \tag{2.4.15}$$

Maintenant, on montre que

$$||u||_{1,1}^2\le d_4\left\|\widetilde{L_\eta}u\right\|_{\mathscr{E}}^2,\quad \forall u\in H^{1,1}(\Omega;H), \tag{2.4.16}$$

où d_4 est une constante positive indépendante de u.

En effet, grâce à l'inégalité (2.4.10), on peut trouver $d(\eta)$, tel que

$$\forall\eta\in[0,1],\qquad ||u||_{1,1}^2\le d(\eta)\left\|\widetilde{L}_\eta u\right\|_{\mathscr{E}}^2,\quad \forall u\in H^{1,1}(\Omega;H).$$

Soit $g(\eta)=\inf\limits_{u\in H^{1,1}(\Omega;H)}\left(\|\widetilde{L}_\eta u\|_{\mathscr{E}}/\|u\|_{1,1}\right)$, et montrons que g est une fonction continue sur $[0,1]$.

Soit $\varepsilon>0$ et choisissons $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{d_3}}$. Pour $\eta_0,\eta\in[0,1]$ tel que $|\eta_0-\eta|<\delta$, on a

$$\begin{aligned}\Big|\,\|\widetilde{L}_\eta u\|_{\mathscr{E}}-\|\widetilde{L}_{\eta_0}u\|_{\mathscr{E}}\,\Big| &\le \|\widetilde{L}_\eta u-\widetilde{L}_{\eta_0}u\|_{\mathscr{E}}=|\eta_0-\eta|\,\|\widetilde{L}_1u-\widetilde{L}_0u\|_{\mathscr{E}}\\ &\le \delta\|\widetilde{L}_1u-\widetilde{L}_0u\|_{\mathscr{E}}\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{d_3}}\sqrt{d_3}\,\|u\|_{1,1}^2=\varepsilon\,\|u\|_{1,1}^2,\end{aligned}\tag{2.4.17}$$

ce qui implique

$$\left(\|\widetilde{L}_{\eta_0}u\|_{\mathscr{E}}/\|u\|_{1,1}\right)-\varepsilon\le\left(\|\widetilde{L}_\eta u\|_{\mathscr{E}}/\|u\|_{1,1}\right)\le\left(\|\widetilde{L}_{\eta_0}u\|_{\mathscr{E}}/\|u\|_{1,1}\right)+\varepsilon,\tag{2.4.18}$$

en passant à l' *inf* sur $H^{1,1}(\Omega;H)$ dan (2.4.18), on obtient $|g(\eta)-g(\eta_0)|\le\varepsilon$. Ainsi la fonction g est continue et elle admet une borne *inf*. Désignons cette borne par $\dfrac{1}{\sqrt{d_4}}$ on trouve l'inégalité (2.4.16).

En réecrivant l'équation $\widetilde{L}_\eta u=\mathscr{F}$ sous la forme

$$\widetilde{L}_\eta u=\widetilde{L}_{\eta_0}u+(\eta-\eta_0)(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)u=\mathscr{F},\tag{2.4.19}$$

qui équivalente à

$$u+(\eta-\eta_0)\left(\widetilde{L}_{\eta_0}\right)^{-1}(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)u=\left(\widetilde{L}_{\eta_0}\right)^{-1}\mathscr{F},\tag{2.4.20}$$

on suppose que $\mathscr{R}(\widetilde{L}_{\eta_0})=\mathscr{E}$, et on démontre que $\mathscr{R}(\widetilde{L}_\eta)=\mathscr{E}$ pour η proche de η_0,
en uilisant les expressions (2.4.15), (2.4.16) et les deux denières inégalités, nous arrivons à

$$\begin{aligned}\left\|\left(\widetilde{L}_{\eta_0}\right)^{-1}\mathscr{F}\right\|_{1,1}&\le\sqrt{d_4}\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{E}},\\ \left\|\left(\widetilde{L}_{\eta_0}\right)^{-1}(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)u\right\|_{1,1}&\le\sqrt{d_4}\left\|(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)u\right\|_{\mathscr{E}}\le d_5\,\|u\|_{1,1},\end{aligned}\tag{2.4.21}$$

où $d_5=\sqrt{d_4}\sqrt{d_3}$.
Si on pose $\mathscr{T}=(\eta-\eta_0)\left(\widetilde{L}_{\eta_0}\right)^{-1}(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)$, et $h=\left(\widetilde{L}_{\eta_0}\right)^{-1}\mathscr{F}$, alors l'équation (2.4.20) devienne

$$u+\mathscr{T}u=h.\tag{2.4.22}$$

Soit $\eta\in[0,1]$ tel que $|\eta_0-\eta|\le\rho<\dfrac{1}{d_5}$, donc

$$\|\mathscr{T}\|=\sup_{\|u\|_{1,1}\le1}\|\mathscr{T}u\|_{1,1}=|\eta-\eta_0|\left\|\left(\widetilde{L}_{\eta_0}\right)^{-1}(\widetilde{L}_1-\widetilde{L}_0)u\right\|_{1,1}\le|\eta-\eta_0|\,d_5<1,$$

comme l'opérateur $(I+\mathscr{T})$ est inversible, et la solution de l'équation (2.4.22) est donnée par la série de Neumann

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathscr{T}^nh,\tag{2.4.23}$$

cela prouve que $\mathscr{R}(\widetilde{L}_\eta)=\mathscr{E},\ \forall \eta : |\eta_0-\eta|\leq\rho<\dfrac{1}{d_5}$,
posons ensuite $\eta_0=0$, on obtient $\mathscr{R}(\widetilde{L}_\eta)=\mathscr{E},\ \forall\eta:0<\eta\leq\rho$.
Maintenant, si on pose $\eta_0=\rho$ et par la même procédure, on obtient $\mathscr{R}(\widetilde{L}_\eta)=\mathscr{E},\ \forall\eta:0<\eta\leq 2\rho$. On procède étape par étape de cette manière, on établit que $\mathscr{R}(\widetilde{L}_\eta)=\mathscr{E}$, pour tout $\eta\in[0,1]$. Pour le cas $\eta=1$, on a $\mathscr{R}(\widetilde{L}_1)=\mathscr{R}(\widetilde{L})=\mathscr{E}$. ce qui achève la démonstration de la proposition (2.4.3). □

Proposition 2.4.4. *L'opérateur $\widetilde{L}=\widetilde{\mathscr{L}}$ est fermé*

Démonstration. Voir la proposition (4.6) dans [178]. □

Maintenant on donne queleques propriétés basique de l'opérateur $\widetilde{L}'=\widetilde{\mathscr{L}'}$
il suit des propositions précédentes que l'opérateur $\widetilde{L}'=\widetilde{\mathscr{L}'}$ est continu de $H_0^{1,1}(\Omega;H)$ dans $\mathscr{L}_2(\Omega;H)$.
Cependant, d'après les propriétés des opérateurs à image fermée, il découle

$$\begin{aligned}\mathscr{N}(\widetilde{L}') &= \mathscr{R}(\widetilde{L})^\perp=\mathscr{L}_2(\Omega;H)^\perp=\{0\},\\ \mathscr{R}(\widetilde{L}') &= \overline{\mathscr{R}(\widetilde{L}')}=\mathscr{N}(\widetilde{L})^\perp=\{0\}^\perp=\mathscr{L}_2(\Omega;H).\end{aligned}$$

Puisque $\widetilde{L}'$ est un isomorphisme de $H_0^{1,1}(\Omega;H)$ dans $\mathscr{L}_2(\Omega;H)$ et il est fermé dans la topologie de $\mathscr{L}_2(\Omega;H)$.

Définition 2.4.2. On note par $\hat{\mathscr{L}}=\left(\widetilde{\mathscr{L}'}\right)^*$ le prolongement faible de l'opérateur $\widetilde{\mathscr{L}}$ défini par

$$\left\langle \widetilde{\mathscr{L}'}u,v\right\rangle=\left\langle u,\hat{\mathscr{L}}v\right\rangle=\langle u,f\rangle,\quad \forall u\in H_0^{1,1}(\Omega,H)\ \text{et}\ \hat{\mathscr{L}}v=f\in\mathscr{L}_2(\Omega,H) \tag{2.4.24}$$

Proposition 2.4.5. *Le prolongement faible $\hat{\mathscr{L}}$ de l'opérateur $\widetilde{\mathscr{L}}$ coincide avec le prolongement fort $\left(\hat{\mathscr{L}}\right)'=\widetilde{\mathscr{L}}$.*

Démonstration. On doit montrer que

$$\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}})=\mathscr{D}(\hat{\mathscr{L}})\,\text{et}\,\widetilde{\mathscr{L}}u=\hat{\mathscr{L}}u,\quad \forall u\in\mathfrak{D}(\hat{\mathscr{L}}).$$

Il est clair que $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}})\subset\mathscr{D}(\mathscr{L})$.
En vertu du théorème de Banach sur les opérateurs à image fermée, on déduit que l'opérateur $\left(\hat{\mathscr{L}}\right)^{-1}$ est défini sur le sous-espace fermé $\mathscr{R}(\hat{\mathscr{L}})=\mathscr{N}(\widetilde{\mathscr{L}'})^\perp$ et il est continu.
On a

$$\begin{aligned}&(i) && \mathscr{N}(\hat{\mathscr{L}})=\mathscr{R}(\widetilde{\mathscr{L}'})^\perp=\{0\},\\ &(ii) && \mathscr{N}(\widetilde{\mathscr{L}'})=\{0\},\\ &(iii) && \mathscr{R}(\hat{\mathscr{L}})=\mathscr{L}_2(\Omega,H).\end{aligned}$$

D'après (ii) pour tout $f \in \mathscr{L}_2(\Omega, H)$ il existe une solution de l'équation $\hat{\mathscr{L}} u = f$. Fixons f et soit v la solution de l'équation $\widetilde{\mathscr{L}} u = f$, et montrons que $u = v$.
En effet, d'après (2.4.24) et (2.4.7), on a

$$\left\langle z, \hat{\mathscr{L}} u \right\rangle = \left\langle \widetilde{\mathscr{L}'} z, u \right\rangle = \langle z, f \rangle, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(\Omega; H),$$
$$\left\langle z, \widetilde{\mathscr{L}} v \right\rangle = \left\langle \widetilde{\mathscr{L}'} z, v \right\rangle = \langle z, f \rangle, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(\Omega; H),$$

cependant $\left\langle \widetilde{\mathscr{L}'} z, v - u \right\rangle = 0, \forall z \in H_0^{1,1}(\Omega; H)$, ce qui signifie que $w = v - u$ est la solution faible de l'équation homogène $\widetilde{L} u = 0$. Mais d'après l'unicité de la solution faible, on obtient $u = v$. Par conséquent $u = v \in H_0^{1,1}(\Omega; H)$ et $\widetilde{\mathscr{L}} u = \hat{\mathscr{L}} u = f$. Ce qui achève la démonstration de la proposition (2.4.5). □

A partir de la proposition (2.4.5), on déduit que la solution faible du problème (2.4.8) coincide avec la solution forte. Donc $w \in H^{1,1}(\Omega; H) \cap \mathscr{L}_2(\Omega, W^1)$ est une solution du problème (2.4.8) au sens fort, i.e.,

$$\begin{cases} \mathscr{D}(\mathscr{L}) = \overline{H}_0^{1,1}(\Omega; H), \\ \mathscr{L} w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{2\varepsilon} \dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{1\varepsilon} \dfrac{\partial w}{\partial t_2} + A w = -B_{3\varepsilon} w = f. \end{cases} \tag{2.4.25}$$

Par des calculs similaires à ceux utilisés pour établir le théorème (2.3.1), on montre

Proposition 2.4.6. *Sous les hypothèses du théorème* (2.3.1) *on a l'estimation*

$$\|A^{\frac{1}{2}} w\|^2 \leq d_6 \|B_{3\varepsilon} w\|^2, \quad \forall w \in \overline{H}_0^{1,1}(\Omega; H), \tag{2.4.26}$$

d'après (2.4.26) et (3.3.8) il suit

$$\|w\|^2 \leq \frac{1}{c_0} \|A^{\frac{1}{2}} w\|^2 \leq \frac{d_6}{c_0} \|B_{3\varepsilon} w\|^2, \tag{2.4.27}$$

en remplaçant w par $A_\varepsilon^{-1} v$ dans (2.4.27), on obtient

$$\|A_\varepsilon^{-1} v\|^2 \leq \frac{d_6}{c_0} \|B_{3\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} v\|^2. \tag{2.4.28}$$

On a

$(B^*_{3\varepsilon})^* A_\varepsilon^{-1} v =$

$$\begin{aligned}
B_{3\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} v &= \left[\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2} A_\varepsilon^{-1} + (-\varepsilon B \frac{\partial A}{\partial t_1} A_\varepsilon^{-1}) + (-\varepsilon B \frac{\partial A}{\partial t_2} A_\varepsilon^{-1})\right]^* A_\varepsilon^{-1} v \\
&= (\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2} A_\varepsilon^{-1})^* A_\varepsilon^{-1} v + (-\varepsilon B \frac{\partial A}{\partial t_1} A_\varepsilon^{-1})^* A_\varepsilon^{-1} v + (-\varepsilon B \frac{\partial A}{\partial t_1} A_\varepsilon^{-1})^* A_\varepsilon^{-1} v. \\
&\leq \left\{ \left\| \left(I - A_\varepsilon^{-1}\right) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t_2 \partial t_1} A^{-1} \right)^* \left(A_\varepsilon^{-1} v - v\right) \right\| + \left\| (I - A_\varepsilon^{-1}) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2} A^{-1} \right)^* v \right\| \right. \\
&+ 2\|B\|^{\frac{1}{2}}_{\mathscr{L}(H)} \left\| \left(I - A_\varepsilon^{-1}\right) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t_2 \partial t_1} A^{-1} \right)^* \left(A_\varepsilon^{-1} v - v\right) \right\| \\
&+ \left. \left\| (I - A_\varepsilon^{-1})^* (B \frac{\partial A}{\partial t_1} A^{-1})^* v \right\| + \left\| (I - A_\varepsilon^{-1})^* (B \frac{\partial A}{\partial t_2} A^{-1})^* v \right\| \right\} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la dernière inégalité, et en passant à la limite dans (2.4.28), quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et appliquons les propriétés de A_ε^{-1}, on obtient $v = 0$. Ce qui achève la démonstration de la proposition (2.4.2). □

Revenons maintenant à (2.4.1), en vertu de la proposition (2.4.2), on obtient $\left\langle \ell_{\lambda_1} u, v_1 \right\rangle_0 + \left\langle \ell_{\lambda_2} u, v_2 \right\rangle_0 = 0$. Comme $\ell_{\lambda_1}, \ell_{\lambda_2}$ sont indépendants et leurs imagessont denses, on obtient $v_1 = v_2 = 0$. Alors $V = (0, 0, 0)$, et donc $\overline{\mathscr{R}(L_\omega)} = \mathbb{F}$ pour $\omega = 0$.

Seconde étape $\omega \neq 0$.

On est besoin du lemme suivant

Lemme 2.4.1. *L'opérateur* $(L_1 - L_0)$ *est borné, et on a*

$$\|(L_1 - L_0)u\|_{\mathscr{E}} \leq k\|u\|_{\mathbb{E}}, \tag{2.4.29}$$

où la constante k ne dépende pas de u .

Démonstration. La démonstration résulte de la continuité des opérateurs $\ell_{\lambda_1}, \ell_{\lambda_2}$ et $\mathscr{B} = B\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right)$, en effet.

L'équation $\overline{L}_\omega u = \mathscr{F}$ peut être écrit sous la forme

$$(\overline{L_{\omega_0}} + (\omega - \omega_0)\overline{(L_1 - L_0)})u = \mathscr{F},$$

qui est équivalente à l'équation

$$u + (\omega - \omega_0)(\overline{L}_{\omega_0})^{-1}\overline{(L_1 - L_0)}u = (\overline{L}_{\omega_0})^{-1}\mathscr{F}. \tag{2.4.30}$$

Il suit d'après (2.3.33) et (2.4.29) que

$$\|(\overline{L}_{\omega_0})^{-1}\mathscr{F}\|_{\mathbb{E}} \leq \sqrt{S}\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{E}},$$

et
$$||(\overline{L}_{\omega_0})^{-1}\overline{(L_1-L_0)}u||_{\mathbb{E}} \leq \sqrt{S}||\overline{(L_1-L_0)}u||_{\mathscr{E}} \leq m||u||_{\mathbb{E}},$$
où $m = k\sqrt{S}$.
Soit $|\omega-\omega_0| \leq \rho < \frac{1}{m}$. Posons $\Lambda = (\omega-\omega_0)(\overline{L}_{\omega_0})\overline{(L_1-L_0)}$ et $N = (\overline{L}_{\omega_0})^{-1}\mathscr{F}$, (2.4.30) peut s'écrire $u + \Lambda u = N$.
Observons que $||\Lambda|| = \sup\limits_{u\in\mathscr{D}(\overline{L}_\lambda)} \frac{||\Lambda u||_1}{||u||_1} < 1$. La série de Neumann $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\Lambda)^n N$ est donc une solution de l'équation (2.4.30). On a montré alors que si $\mathscr{R}(\overline{L}_{\omega_0}) = \mathbb{F}$ et $|\omega-\omega_0| \leq \rho < \frac{1}{m}$, alors $\mathscr{R}(\overline{L}_{\omega}) = \mathbb{F}$. On procède étape par étape sous cette manière on établit que $\mathscr{R}(\overline{L_{\omega}}) = \mathbb{F}$ pour tout $\omega \in [0,1]$. Pour le cas $\omega = 1$, on a $\mathscr{R}(\overline{L}) = \mathbb{F}$. La démonstration du théorème (2.4.1) est achevée. □

Théorème 2.4.2. *Pour tout élément $\mathscr{F} = (f,\varphi,\psi) \in \mathbb{F}$ il existe une unique solution forte $u = (\overline{L})^{-1}\mathscr{F} = (\overline{L^{-1}})\mathscr{F}$ du problème $(\mathscr{P})$ vérifiant l'estimation*
$$||u||^2_{\mathbb{E}} \leq S||Lu||^2_{\mathbb{F}}, \quad \forall u \in H^{1,1}(\Omega; W^1),$$
où S est une constante positive indépendante de λ_1, λ_2 et u.

2.5 Continuité de la solution par rapport aux paramètres

Soit $\lambda_n = (\lambda_{1n}, \lambda_{2n})$ une suite convergente vers $\overset{0}{\lambda} = (\overset{0}{\lambda}_1, \overset{0}{\lambda}_2)$, et L_{λ_n} est l'opérateur L quand λ est remplacé par λ_n.
$$\text{i.e.,} \begin{cases} \lambda_{1n} \to \overset{0}{\lambda}_1 \text{ et } \lambda_{2n} \to \overset{0}{\lambda}_2 \\ \text{avec } |\lambda_{in}| \neq 1 \text{ pour tout } n \text{ et } \left|\overset{0}{\lambda}_i\right| \neq 1 \qquad (i=1,2). \end{cases} \tag{2.5.1}$$
Soit E^1 le complété de l'éspace $C^\infty(\overline{\Omega}, W^1)$ par rapport a la norme
$$|||u|||^2_{E^1} = \sup_{\tau\in\Omega}\left[\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|^2_{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2_{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t_1=\tau_1} dt_2\right].$$
On définit l'éspace de Hilbert E avec le composé des éléments $F = (f,\varphi,\psi)$ telle que
$$|||F|||^2 = ||f||^2 + ||\varphi||^2_1 + ||\psi||^2_1.$$
Remarque 2.5.1. Comme la suite $\lambda_n = (\lambda_{1n}, \lambda_{2n})$ est convergente, on peut choisir une constante positive $\sigma_0 = \sigma_0(\lambda)$ tel que
$$\sigma_0|||u|||^2_{E^1} \leq |||u|||^2_1 \qquad \forall u \in \mathscr{D}(\overline{L}_{\lambda_n}).$$

On désigne par $\mathscr{L}(E,E^1)$ l'éspace des opérateurs linéaires continus de E dans E^1 muni de la topologie de la convergence simple.

Théorème 2.5.1. *Si les conditions du théorème d'existence sont vérifiées et $\lambda_n \to \overset{0}{\lambda}$ alors*

$$\left(\overline{L}_{\lambda_n}\right)^{-1} \to \left(\overline{L}_{\overset{0}{\lambda}}\right)^{-1},$$

dans $\mathscr{L}(E,E^1)$ muni de la convergence simple.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il suffit d'établir les propriétés suivantes

$$\begin{array}{l} i)\ \sup\limits_{n\geq 1}\left\|\left(\overline{L}_{\lambda_n}\right)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E,E^1)} < +\infty \\ ii)\ \left(\overline{L}_{\lambda_n}\right)^{-1} \to (\overline{L}^{-1}_{\overset{0}{\lambda}}) \text{ dans un sous-espace M dense dans } E. \end{array}.$$

En effet d'aprés l'estimation du théorème d'unicité pour l'opérateur L_{λ_n} on à l'inégalité

$$|||u|||_1^2 \leq S\left|\left|\left|\overline{L}_{\lambda_n}u\right|\right|\right|^2,\ \forall u\in\mathscr{D}(\overline{L}_{\lambda_n}). \tag{2.5.2}$$

Comme la constante S ne dépend pas de λ_n, alors a partir de (2.5.2) et la remarque précédente, on obtient

$$|||u|||_{E^1}^2 \leq M_0\left|\left|\left|\overline{L}_{\lambda_n}u\right|\right|\right|^2,\ \forall u\in\ \mathscr{D}(\overline{L}_{\lambda_n}), \tag{2.5.3}$$

où

$$M_0 = \frac{S}{\sigma_0}.$$

Posons $M = \mathscr{R}(L_{\overset{0}{\lambda}})$ (image de l'opérateur $L_{\overset{0}{\lambda}}$) qui est un sous-espace dense dans E.
Pour $F\in M$ on a

$$(\overline{L}^{-1}_{\lambda_n})F - (\overline{L}^{-1}_{\overset{0}{\lambda}})F \in \mathscr{D}(\overline{L}_{\lambda_n}),$$

de l'inégalité (2.5.3) on a

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\left(\overline{L}_{\lambda_n}\right)^{-1}F - \left(\overline{L}_{\overset{0}{\lambda}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|_{E^1}^2 &\leq M_0\left|\left|\left|L_{\lambda_n}\left(\left(\overline{L}_{\lambda_n}\right)^{-1}F - \left(\overline{L}_{\overset{0}{\lambda}}\right)^{-1}\right)F\right|\right|\right|^2 \\ &\leq M_0\left|\left|\left|F - \left(L_{\lambda_n}\right)\left(\overline{L}_{\overset{0}{\lambda}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|, \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

et posons $h = \left(\overline{L}_{\overset{0}{\lambda}}\right)^{-1}F$, alors pour n assez grand et pour tout h on a donc

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|L_{\overset{0}{\lambda}}h - L_{\lambda_n}h\right|\right|\right|^2 &= \left|\overset{0}{\lambda}_1 - \lambda_{1n}\right|^2\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial h}{\partial t_1}\right|^2 + |h|^2_{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t_2=\tau_2}dt_1 + \\ &\quad + \left|\overset{0}{\lambda}_2 - \lambda_{2n}\right|^2\int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial h}{\partial t_2}\right|^2 + |h|^2_{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t_1=\tau_1}dt_2. \end{aligned}$$

De cette dernière égalité et l'inégalité (2.5.4) on obtient

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L}_{\lambda_n}\right)^{-1}F-\left(\overline{L}_{\overset{0}{\lambda}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|_{E^1}^2 \leq \left|\overset{0}{\lambda}_1-\lambda_{1n}\right|^2\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial h}{\partial t_1}\right|^2+|h|_{\frac{1}{2}}^2\right)\Big|_{t_2=\tau_2}dt_1+$$

$$+\left|\overset{0}{\lambda}_2-\lambda_{2n}\right|^2\int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial h}{\partial t_2}\right|^2+|h|_{\frac{1}{2}}^2\right)\Big|_{t_1=\tau_1}dt_2.$$

Alors quand $\lambda_n=(\lambda_{1n},\lambda_{2n})\to\overset{0}{\lambda}=(\overset{0}{\lambda}_1,\overset{0}{\lambda}_2)$,

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L}_{\lambda_n}\right)^{-1}F-\left(\overline{L}_{\overset{0}{\lambda}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|_{E^1}\to 0.$$

Ce qui achevé la démonstration du théorème (2.5.1) □

Chapitre 3 ✍

Méthode de quasi-réversibilité pour un problème de Cauchy de type elliptique mal posé

3.1 Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $\|.\|$ et $(.,.)$

Considérons le problème de Cauchy de type elliptique suivant :

$$\mathfrak{L}u \equiv u''(z) - Au(z) = 0, \quad 0 < z < Z, \quad u(0) = \varphi,\ u'(0) = 0, \tag{3.1.1}$$

où $A : \mathscr{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire non borné auto-adjoint défini positif à domaine $\mathscr{D}(A)$ dense dans H, et φ est une fonction donnée dans H.

Il est bien connu que ce type de problèmes est fortement mal posé au sens d'Hadamard [80], c'est-à-dire : même si la solution existe et unique, elle ne dépend pas continûment de φ. Il y a plusieurs méthodes pour régulariser ce type de problème, nous recommandons les lecteurs de consulter les travaux de . F. Ben Belgacem([23]), Dinh Nho Hào([54]), V. Isakov([93]), M.M. Lavrent'ev([109]) et L. Payne([125]).

Le problème (3.1.1) est une version abstraite d'un problème de Cauchy. Ce dernier est la généralisation du problème de Cauchy pour les équations différentielles elliptique de seconde ordre dans lesquelles la géométrie et les coéfficients permettent l'utilisation de la méthode de séparation des variables.

Par exemple, soit Ω un domaine borné et suffisamment régulier dans $\mathbb{R}^n$, $u = u(x,z)$, $x \in \Omega$, $z \in [0, Z]$ avec $Z > 0$ donné. A un opérateur différentiel de second ordre défini dans $H_0^1(\Omega)$ par

$$Au := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u$$

où

$$a_{ij}, a \in L_\infty(\omega), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \le \mu \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2,$$

et $\mu > 0$ est une constante donnée et $a(x) \geq 0$.

La méthode de régularisation par des conditions nonlocales appliquée sur le problème de Cauchy pour les équations différentielles elliptiques a été utilisée par plusieurs chercheurs, comme L. Abdulkeromov([1]), P.N. Vabishchevich et ses collaborateurs ([165]-[167]), et I.V. Melnikova et ses collaborateurs ([94], [115],[116]), ext. Et récemment Dinh Nho Hào([55]) a proposé une perturbation avec des conditions nonlocales modifiée sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_{zz} = Au, \qquad 0 < z < aZ \\ u(0) + \alpha u(aZ) = \varphi, \\ u_z(0) = 0, \end{cases}$$

où a est une constante donnée telle que $a \geq 1$, et $\alpha > 0$ le paramètre de régularisation.
Comme noté ci-dessus, le travail de Dinh Nho Hào([55]) est consacré à un problème de Cauchy pour une classe d'équations elliptiques. Cependant, la méthode semble être applicable aux problèmes elliptiques plus généraux. En effet, soit A le même opérateur défini ci-dessus et soit $n \geq 2$. Supposons que la frontière de Ω est composée de deux parties Γ_1 et Γ_2 avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u = 0, \qquad x \in \Omega \\ u\,|_{\Gamma_1} = \chi_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma_1} = \chi_2. \end{cases} \qquad (\mathscr{R}_1)$$

où χ_1 et χ_2 sont deux fonctions données. n est la normale extérieur unitaire à la frontière de Ω.
P.N. Vabishchevich [165] a proposé une méthode de régularisation de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u = 0, \qquad x \in \Omega \\ u\,|_{\Gamma_1} + \alpha u\,|_{\Gamma_2} = \chi_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma_1} = \chi_2. \end{cases} \qquad (\mathscr{R}_2).$$

Parmi les stratégies d'approche de ce type de questions, on peut citer la méthode de quasir-éversibilité proposée par Lions et R. Lattès [107]. L'idée principale de cette méthode consiste à remplacer l'opérateur A dans l'équation (3.1.1) par $A_\alpha = g_\alpha(A)$.
Dans la méthode originale [107] R. Lattès et J.L. Lions proposent $g_\alpha(A) = A - \alpha A^2$, pour obtenir un problème bien -posé, et dans la méthode de quasi-réversibilité modifiée [71], H. Gajewski et K. Zaccharias

proposent $g_\alpha(A) = A(I+\alpha A)^{-1}$. Mais lorsque on utilise cette méthode, on est confronté à certaines difficultés. La première résulte du terme correcteur (αA^2) (opérateur d'ordre deux) ce qui induit une difficulté sérieuse pour l'implémentation numérique, et la seconde consiste dans le fait que le coefficient d'erreur ($e(\alpha)$) résultant d'une petite perturbation de la donnée φ est de l'ordre $e^{\frac{1}{\alpha}}$. Pour toutes ces raisons, N. Boussetila et F. Rebbani [28] proposent une modification de cette méthode, en introduisant une nouvelle perturbation :

$$A_\alpha = g_\alpha(A) = -\frac{1}{pT}\ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right), \quad \alpha > 0,\ p \geq 1.$$

✓ Le premier avantage de cette perturbation résulte du fait que ($A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$), ce qui implique une position correcte du problème perturbé dans les deux directions du temps.

✓ Le deuxième avantage réside dans la possibilité d'établir des résultats meilleurs (optimalité de la méthode) par rapport aux résultats obtenus précédemment.
K. Ames dans ([7], [8]) a obtenu des résultas de dépendance continu de type Hôlderien, pour le problème de Cauchy mal posé

$$u_t = Au, \quad u(0) = \chi,\ 0 \leq t \leq T,$$

pour certaines classes d'équations différentielles de première ordre définies sur des espaces de Hilbert, en employant la méthode de convexité logarithmique.
Puisque cette méthode est limitée aux problèmes mal posés dans le cas Hilbertien, les généralisations des résultats d'Ames ([7], [8]) aux problèmes avec des équations définies sur des espaces de Banach plus général ne peuvent pas être tirés via cette méthodologie.
Pour une synthèse générale sur le problème (solvabilité, des estimations de stabilité par différentes méthodes, des méthodes numériques, des modèles pratiques, ect) nous recommandons les monographies : M.M. Lavrent′ev, V.G. Romanov et Šišatskiĭ [109], V. Isakov [93], L. E. Payne [125], A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich [5], N.N. Tarkhanov [153] et l'étude récente écrite par Giovanni Alessandrini, Luca Rondi, Edi Rosset et Sergio Vessella [9].

Ce travail est principalement consacré aux aspects théoriques de la méthode de quasi-reversibilité du problème (3.1.1) dans le cadre abstrait en considérant des opérateurs auto-adjoint quand A est positif introduisons le cas elliptique, c'est-à-dire., admet les propriétés suivantes : pour tout $\lambda \in (-\infty, 0]$, la résolvante $R(\lambda; A) = (A-\lambda I)^{-1}$ existe et satisfait l'estimation

$$\exists M > 0 : \quad \forall \lambda \geq 0,\ \|(A+\lambda I)^{-1}\| \leq M(1+\lambda)^{-1}.$$

3.2 Préliminaire et résultats de base

Dans cette section nous présentons les notations et le cadre fonctionnel qui sera utilisé dans ce chapitre et nous préparons certains outils qui serons utilisés dans notre analyse. On note par $\mathscr{C}(H)$ l'ensemble de tous opérateurs linéaires fermés à domaine dense dans H.

Définition 3.2.1. On note par $\{H^r\}_{r\in\mathbb{R}}$ l'espace de Hilbert défini par :

$$H^0 := H,\ H^r := \mathscr{D}(A^r) \text{ où } \|u\|_r := \|A^r u\|,\ (r \geq 0),$$

$H^{-r} := (H^r)'$, i.e., H^{-r} est l'espace dual de H^r.

Proposition 3.2.1. *Soit $(H^r)_{r\in\mathbb{R}}$ l'espace défini dans (3.2.1). Soit $-\infty < r_1 \leq r_2 < \infty$. Alors l'espace H^{r_2} est dense dans H^{r_1}.*

On introduit l'espace de Lebesgue $L^2(0,T;H^s)$ des fonctions fortement mesurables $(0,T) \ni t \longrightarrow u(t) \in H^s$ avec le produit scalaire et la norme sont donnés respectivement par

$$(u,v)_{L^2(0,T;H^s)} = \int_0^T (u,v)_s\, dt, \quad \|u\|^2_{L^2(0,T;H^s)} = \int_0^T \|u\|_s^2\, dt,$$

et l'espace de Sobolev

$$W^{m,2}(0,T;H^s) := \{u \in L^2(0,T;H^s) : u^{(i)} \in L^2(0,T;H^s),\ i = 1\ldots,m\}$$

avec la norme usuelle

$$\|u\|^2_{W^{m,2}(0,T;H^s)} := \sum_{i=0}^{m} \|u^{(i)}\|^2_{L^2(0,T;H^s)}.$$

Par $\mathscr{C}([0,T];H^s)$ on note l'espace des fonctions continues $[0,T] \ni t \longrightarrow H^s$ avec la norme

$$\|u\|_{\infty,s} := \max_{t\in[0,T]} \|u\|_{H^s}.$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on note par

$$W_m(0,T;H^1,H) := \{u : u \in L^2(0,T;H^1),\ u^{(m)} \in L^2(0,T;H)\}$$

la complétion de $\mathscr{C}([0,T];H^1)$ par rapport à la norme

$$|||u|||^2_m := \|u\|^2_{L^2(0,T;H^1)} + \|u^{(m)}\|^2_{L^2(0,T;H)}.$$

Remarque 3.2.1. Noter que si $z \in W_m(0,T;H^1,H)$ alors

$$z^{(i)} \in L^2(0,T;H^{1-i/m}) \cap \mathscr{C}([0,T];H^{1-\frac{i+1/2}{m}}), \quad 0 \leq i \leq m-1.$$

ce qui assure que

$$z^{(i)}(0),\ z^{(i)}(T) \in H^{1-\frac{i+1/2}{m}}, \quad 0 \leq i \leq m-1.$$

Finalement,

$$V_0^2 := \{u \in W_2(0,T;H^1,H) : u(0) = u'(0) = 0\}$$

$$(resp.\ V_T^2 := \{u \in W_2(0,T;H^1,H) : u(T) = u'(T) = 0\},)$$

représentent les sous-espaces fermés de $W_2(0,T;H^1,H)$.

Définition 3.2.2. Une solution faible du problème (3.1.1) est une fonction $u(z)$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. $u \in \mathscr{C}([0,Z];H)$;
2. $\int\limits_0^Z (u, \mathfrak{L}v) = (\varphi, v'(0)), \quad \forall v \in V_Z^2.$

Par la théorie spectrale, pour tout opérateur auto-adjoint positif A, il existe une unique famille continue $\{E_\lambda\}_{\lambda\in[0,\infty[} : [0,\infty[\longrightarrow \mathscr{L}(H)$ d'opérateurs de projection orthogonale tel que

$$A = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda,$$

avec

$$\mathscr{D}(A) = \{v \in H : \int_0^\infty \lambda^2 d(E_\lambda v, v) < \infty\}.$$

Dans notre cas, on a

$$A = \int_\gamma^\infty \lambda dE_\lambda, \text{ puisque } A \geq \gamma I,\ \gamma > 0.$$

Théorème 3.2.1. *Soit $\{E_\lambda,\ \lambda \geq \gamma > 0\}$ la résolution de l'identité associée à l'opérateur A et soit f une fonction complexe de Borel définie sur l'axe réel. Alors $f(A)$ est un opérateur fermé à domaine dense. Cependant*

(i) $\mathscr{D}(f(A)) := \{h \in H : \int_0^\infty |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda v, v) < \infty\},$

(ii) $(f(A)h, y) = \int_0^\infty f(\lambda) d(E_\lambda h, y), \quad h \in \mathscr{D}(f(A)),\ y \in H,$

(iii) $\|f(A)h\|^2 = \int_0^\infty |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda h, h), \quad h \in \mathscr{D}(f(A)),$

(iv) $f(A)^* = \overline{f}(A)$*. En particulier, si f est une fonction réelle de Borel, alors $f(A)$ est auto-adjoint.*

Théorème 3.2.2. *Soit L un opérateur auto-djoint dans l'espace de Hilbert H et $\{E_\mu,\ \mu \in \mathbb{R}\}$ its spectral resolution of the identity. Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $Z(g) := \{t \in \mathbb{R} : g(t) = 0\}$ l'ensemble de tout les zéros de g. Supposons que $Z(g)$ est vide où contient seulement des points isolés. Alors l'équation*

$$g(L)\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) dE_\mu \xi = \zeta \tag{3.2.1}$$

est solvable dans H si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\mu)|^{-2}\, d(E_\mu\zeta,\zeta) < \infty. \tag{3.2.2}$$

Cependant, la solution est unique si et seulement si le spectre ponctuel de l'opérateur L ne contient pas des zéros de la fonction g,i.e.,

$$\mathbf{N}(g(L)) = \{0\} \Longleftrightarrow Z(g)\cap\sigma_p(L) = \emptyset. \tag{3.2.3}$$

On note par

$$C(t) := \cosh(t\sqrt{A}) = \int_\gamma^{+\infty} \cosh(t\sqrt{\lambda})\, dE_\lambda = \frac{1}{2}\int_\gamma^{+\infty} \left(e^{t\sqrt{\lambda}} + e^{-t\sqrt{\lambda}}\right) dE_\lambda, \quad t \geq 0$$

la famille des opérateurs linéaires avec domaine de définition

$$\mathscr{D}(C(t)) := \{h \in H : \int_\gamma^{+\infty} \cosh^2(t\sqrt{\lambda})\, d\|E_\lambda h\|^2 < \infty\}.$$

D'après le théorème (3.2.1) et (3.2.3), on a le théorème suivant :

Théorème 3.2.3. *Pour $t > 0$, $C(t)$ est un opérateur fermé à domaine dense. Cependant*

$$C(t) = C(t)^*, \quad \mathscr{N}(C(t)) = \{0\}, \quad \overline{\mathscr{R}(C(t))} = H$$

i.e., $C(t)$ est auto-adjoint et bejectif à image dense.

Pour $\lambda \geq \gamma$, on introduit les fonctions :

$$\lambda_\alpha = \frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}, \quad G_\alpha(z,\lambda) = \cosh\left(z\sqrt{\lambda}\right) - \cosh\left(z\sqrt{\lambda_\alpha}\right), F_\alpha(z,\lambda) = 1 - e^{\frac{-\alpha z\lambda^{\frac{3}{2}}}{2}}.$$

Par un calcul direct, on obtient

$$1 - e^{\frac{-\alpha z\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+\alpha\lambda}+1+\alpha\lambda}} \leq F_\alpha(z,\lambda). \tag{3.2.4}$$

On définit

$$\mathscr{C}_\rho(A) = \{\phi \in H : \|\varphi\|_\rho^2 = \int_\gamma^{+\infty} e^{2Z\rho\lambda}\, d\|E_\lambda\phi\|^2 < +\infty\}, \quad \rho \geq 0.$$

D'après la définition de $\mathscr{C}_\rho(A)$ on a les inclusions topologiques suivantes

$$\mathscr{C}_{\rho_2}(A) \subseteq \mathscr{C}_{\rho_1}(A), \quad \rho_2 \geq \rho_1.$$

Soit $H_\alpha(z,\lambda) = G_\alpha(z,\lambda)/\cosh\left(Z\sqrt{\lambda}\right)$, à l'aide de (3.2.4), on déduit

$$H_\alpha(z,\lambda) \leq e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}\left(1-e^{\frac{-\alpha z\lambda^{\frac{3}{2}}}{2}}\right) = e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}F_\alpha(z,\lambda). \tag{3.2.5}$$

On considère

$$I = \int_\gamma^\infty F_\alpha^2(Z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 = I_1 + I_2, \tag{3.2.6}$$

où

$$I_1 = \int_\gamma^{\lambda^*} F_\alpha^2(Z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2,$$

$$I_2 = \int_{\lambda^*}^\infty F_\alpha^2(Z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2.$$

1. Si $u(Z) \in \mathscr{D}(A^{\frac{3\theta}{2}})$, $(\theta > 0)$, alors la fonction I_2 peut être estimé comme suit :

$$I_2 \leq c_Z(\alpha,\theta)\|A^{\frac{3\theta}{2}}u(Z)\|^2, \tag{3.2.7}$$

où $c_Z(\alpha,\theta) = (\alpha Z/2)^{2\theta}$.

En effet, soit $s = (\alpha Z\lambda^{\frac{3}{2}})/2 \geq 1 \Rightarrow \lambda \geq (2/\alpha Z)^{\frac{2}{3}} = \lambda^*$, en vertu de $(1-e^{-s} \leq s^\theta,\ s \geq 1,\ \theta > 0)$, alors I_2 peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{\lambda^*}^\infty \left(\frac{\alpha Z\lambda^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^{2\theta}\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&\leq \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^{2\theta}\int_\gamma^\infty \lambda^{3\theta}\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&= c_Z(\alpha,\theta)\|A^{\frac{3\theta}{2}}u(Z)\|^2.
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. Si on pose $\theta = 1, \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, on a respectivement les estimations

$$I_2 \leq k_1(\alpha)\|A^{\frac{3}{2}}u(Z)\|^2, \tag{3.2.8}$$

$$I_2 \leq k_2(\alpha)\|Au(Z)\|^2, \tag{3.2.9}$$

$$I_2 \leq k_3(\alpha)\|A^{\frac{1}{2}}u(Z)\|^2, \tag{3.2.10}$$

où $k_1(\alpha) = c_Z(\alpha,1), k_2(\alpha) = c_Z(\alpha,\frac{2}{3})$ et $k_3(\alpha) = c_Z(\alpha,\frac{1}{3})$.

2. Soit $\mathcal{N}_\alpha(\lambda) = F_\alpha(Z,\lambda)/(\alpha Z\lambda^{\frac{3}{2}}/2)$, alors la fonction I_1 peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\gamma^{\lambda^*} \mathcal{N}_\alpha^2(\lambda)\left(\alpha Z\lambda^{\frac{3}{2}}/2\right)^2 \cosh^2(Z\sqrt{\lambda})\,d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&\leq k_1(\alpha)\Big(\sup_{\gamma\leq\lambda\leq\lambda^*}\mathcal{N}_\alpha(\lambda)\Big)^2\int_\gamma^{\lambda^*}\lambda^3\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})\,d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&\leq k_1(\alpha)\Big(\sup_{\gamma\leq\lambda\leq\lambda^*}\mathcal{N}_\alpha(\lambda)\Big)^2\int_\gamma^{\infty}\lambda^3\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})\,d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&= k_1(\alpha)\Big(\sup_{\gamma\leq\lambda\leq\lambda^*}\mathcal{N}_\alpha(\lambda)\Big)^2\|A^{\frac{3}{2}}u(Z)\|^2,
\end{aligned}$$

maintenant on pose

$$f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}, \tag{3.2.11}$$

où

$$0 < \alpha Z\gamma^{\frac{3}{2}}/2 \leq t = \alpha Z\lambda^{\frac{3}{2}}/2 \leq \alpha Z(\lambda^*)^{\frac{3}{2}}/2 = 1, \text{ pour tout } \lambda\in[\gamma,\lambda^*],$$

alors

$$f(t) \geq 0, \qquad \text{pour tout } t\in[0,1], \tag{3.2.12}$$

et on a

$$f'(t) = \frac{(1+t)e^{-t}-1}{t^2} = \frac{M(t)}{t^2}.$$

La fonction $t\mapsto M(t)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$M(0) = 0, \qquad M'(t) = -te^{-t} \leq 0 \Rightarrow M\downarrow,$$

ce qui implique que

$$M(t) \leq 0, \text{ pour tout } t\in[0,1],$$

et

$$f'(t) \leq 0 \Rightarrow f\downarrow\Rightarrow f(t)\leq f(\widetilde{t}),\ for\,all\ t\geq\widetilde{t} = \alpha Z\gamma^{\frac{3}{2}}/2,$$

il suit donc

$$\sup_{\widetilde{t}\leq t\leq 1} f(t) = f(\widetilde{t}) = \frac{1-e^{\widetilde{t}}}{\widetilde{t}}, \tag{3.2.13}$$

mais,

$$\lim_{\alpha\to 0}\widetilde{t} = 0 \Rightarrow 0 < \lim_{\widetilde{t}\to 0} f(\widetilde{t}) = 1 \Rightarrow \sup_{\widetilde{t}\leq t\leq 1} f(t) \leq 1. \tag{3.2.14}$$

Revenons maintenant à I_1 et en utilisant (3.2.14) on peut écrire

$$\begin{aligned} I_1 &\leq k_1(\alpha)\Big(\sup_{\gamma\leq\lambda\leq\lambda^*} \mathcal{N}_\alpha(\lambda)\Big)^2 \|A^{\frac{3}{2}}u(Z)\varphi\|^2 \\ &= k_1(\alpha)\Big(\sup_{\tilde{t}\leq t\leq 1} f(t)\Big)^2 \|A^{\frac{3}{2}}u(Z)\|^2 \\ &\leq k_1(\alpha)\|A^{\frac{3}{2}}u(Z)\|^2. \end{aligned}$$

En combinant cette dernière inégalité et (3.2.8), on obtient l'estimation

$$I \leq 2k_1(\alpha)\|A^{\frac{3}{2}}u(Z)\|^2, \tag{3.2.15}$$

De la même manière on trouve une estimation pour la fonction I_1 comme suit :

$$I_1 \leq k_2(\alpha)\|Au(Z)\|^2, \tag{3.2.16}$$

$$I_1 \leq k_3(\alpha)\|A^{\frac{1}{2}}u(Z)\|^2, \tag{3.2.17}$$

et on utilise les deux inégalités (3.2.9) et (3.2.16), on obtient

$$I \leq 2k_2(\alpha)\|Au(Z)\|^2, \tag{3.2.18}$$

maintenant par les deux inégalités (3.2.10) et (3.2.17), on obtient

$$I \leq 2k_3(\alpha)\|A^{\frac{1}{2}}u(Z)\|^2. \tag{3.2.19}$$

3.3 Méthode de Quasi-réversibilité : Cas $A_\alpha = g_\alpha(A) = A(I+\alpha A)^{-1}$

Soit u_α la solution du problème perturbé

$$\begin{cases} u''_\alpha(z) - A_\alpha u_\alpha(z) = 0, \quad z\in[0,Z], \\ u_\alpha(0) = \varphi^\delta, \\ u'_\alpha(0) = 0, \end{cases} \tag{$\mathscr{P}_\alpha$}$$

où l'opérateur A est remplacé par

$$A_\alpha = g_\alpha(A) = A(I+\alpha A)^{-1}. \tag{3.3.1}$$

On montre que

$$\sup_{0<z<Z} \|u_\alpha(z) - u(z)\| \to 0, \quad \text{quand } \alpha\to 0, \tag{3.3.2}$$

$$\|u_\alpha(Z) - u(Z)\| \to 0, \quad \text{quand } \alpha \to 0. \tag{3.3.3}$$

On montre que le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ est bien posé, i.e., sa solution

$$u_\alpha^\delta(z) = \cosh(z\sqrt{A_\alpha})\varphi^\delta, \tag{3.3.4}$$

dépend continûment de la donnée φ^δ. De plus, c'est une approximation de la solution exacte $u(z)$.

Lemme 3.3.1. *Le problème* (3.1.1) *admet une unique solution si et seulement si* $\varphi \in \{\varphi \in H : \ \|\varphi\|_1^2 = \int_\gamma^{+\infty} e^{2Z\sqrt{\lambda}} d\|E_\lambda \varphi\|^2 < +\infty\}$, *cette solution est représentée par*

$$u(z) = \cosh(z\sqrt{A})\varphi. \tag{3.3.5}$$

Noue tirerons un résultat de bornétude de la différence entre les solutions du problèmes (3.1.1) et $(\mathscr{P}_\alpha)$. Cependant, avant de faire cela, nous devons supposer que $u(Z)$ est bornée. i.e., $\|u(Z)\| \leq E$, où $E > 0$ est une constante. Le lemme suivant donne la relation entre n'importe quelles deux solutions régularisées de $(\mathscr{P}_\alpha)$.

Lemme 3.3.2. *On suppose qu'on a deux solutions régularisées* u_α^1 *et* u_α^2 *définies par* (3.3.4) *avec* φ_1^δ *et* φ_2^δ, *vérifiants* $\|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\| \leq \delta$. *Si on choisit* $\sqrt{\alpha} = Z/\ln(2E/\delta)$. *alors on trouve l'estimation d'erreur*

$$\|u_\alpha^1(z) - u_\alpha^2(z)\| \leq (2E)^{z/Z}\delta^{1-z/Z} \tag{3.3.6}$$

Démonstration. D'après (3.3.4) on a

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha^1(z) - u_\alpha^2(z)\|^2 &= \|\cosh(z\sqrt{A_\alpha})\varphi_1^\delta - \cosh(z\sqrt{A_\alpha})\varphi_2^\delta\|^2 \\
&\leq \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\|^2 \cosh^2(z/\sqrt{\alpha}) \\
&\leq \delta^2 e^{2z/\sqrt{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Le choix de paramètre $\sqrt{\alpha} = Z/\ln(2E/\delta)$ donne $\|u_\alpha^1(z) - u_\alpha^2(z)\| \leq (2E)^{z/Z}\delta^{1-z/Z}$
D'après le lemme (3.3.2) on voit que la solution définie par (3.3.4) dépend continûment par rapport au donnée φ^δ.

Lemme 3.3.3. *Soient* u *et* u_α *la solution du problème* (3.1.1) *et* $(\mathscr{P}_\alpha)$ *avec la même donnée* φ. *Supposons que* $\|u(Z)\| \leq E$. *Alors on a*

$$\|u(z) - u_\alpha(z)\| \leq C_E(z)\alpha, \tag{3.3.7}$$

où $C_E(z) = \left(\frac{3}{(Z-z)e}\right)^3 Ez/2$.

Démonstration. D'après (3.3.5) l'hypothèse $\|u(Z)\| \leq E$ est équivalente à

$$\|u(Z)\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} \cosh^2(Z\sqrt{\lambda}) d\|E_\lambda \varphi\|^2 \leq E^2. \tag{3.3.8}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|u(z)-u_\alpha(z)\|^2 &= \int_\gamma^{+\infty} G_\alpha^2(z,\lambda)d\|E_\lambda\varphi\|^2\\
&= \int_\gamma^{+\infty} H_\alpha^2(z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2\\
&\leq \int_\gamma^{+\infty} e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}F_\alpha(z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2\\
&\leq \Big(\sup_{\lambda\geq\gamma} e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}F_\alpha(z,\lambda)\Big)^2\int_\gamma^{+\infty}\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2,
\end{aligned}$$

alors,

$$\|u(z)-u_\alpha(z)\|^2 \leq \Big(\sup_{\lambda\geq\gamma} e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}F_\alpha(z,\lambda)\Big)^2 E^2, \tag{3.3.9}$$

en utilisant l'inégalité $1-e^{-r}\leq r$ $(r\geq 0)$, on trouve

$$e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}F_\alpha(z,\lambda) \leq \frac{\alpha z}{2}\lambda^{\frac{3}{2}}e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}.$$

Alors la fonction $J_\alpha(\lambda) = \lambda^{\frac{3}{2}}e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}$ satisfait les propriétés

1. $J_\alpha(0) = 0$,
2. $J_\alpha(+\infty) = 0$,
3. $J'_\alpha(\lambda) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\lambda}e^{-(Z-z)\sqrt{\lambda}}(3-(Z-z)\sqrt{\lambda})$,
4. $J'_\alpha(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_* = \Big(\dfrac{3}{Z-z}\Big)^2$.

La fonction J_α atteint son maximum, $\sup_{\lambda\geq\gamma} J_\alpha(\lambda) = J_\alpha(\lambda_*) = \Big(\dfrac{3}{(Z-z)e}\Big)^3$, quand $\lambda_* = \Big(\dfrac{3}{Z-z}\Big)^2$, alors (3.3.9) devient

$$\|u(z)-u_\alpha(z)\| \leq C_E(z)\alpha.$$

$\square$

Théorème 3.3.1. *Soit u la solution du problème* (3.1.1) *avec la donnée exacte φ et u_α^δ est donnée par* (3.3.4) *avec la donnée mesurée φ^δ. Supposons que $\|u(Z)\|\leq E$, et la fonction mesurée φ^δ satisfait $\|\varphi-\varphi^\delta\|\leq\delta$ et si on choisit $\sqrt{\alpha} = Z/\ln(2E/\delta)$. Alors on a*

$$\|u(z)-u_\alpha^\delta(z)\| \leq (2E)^{z/Z}\delta^{Z-z} + \frac{C_E(z)}{\ln^2(2E/\delta)}, \tag{3.3.10}$$

où $C_E(z) = \Big(\dfrac{3}{(Z-z)e}\Big)^3 Ez/2$.

Démonstration. Soit u_α la solution définie par (3.3.4) avec une donnée exacte, alors il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire

$$\|u - u_\alpha^\delta\| \le \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u_\alpha^\delta\|,$$

et les deux lemmes précédents □

On mentione ici, que dans la région $z = Z$ le théorème (3.3.1) ne donne aucune information sur la stabilité du problème (3.1.1) − (3.3.8), puisque la condition (3.3.8) est très faible. On montre quelques estimations d'erreur suivant la condition qu'on impose sur la donnée finale $u(Z)$.

Théorème 3.3.2. *Soit u et u_α les solutions du problème* (3.1.1) *et* $(\mathscr{P}_\alpha)$ *respectivement, avec la même donnée exacte φ. Supposons que*
(i) $u(Z) \in \mathscr{D}(A^{\frac{3}{2}})$ *Alors on a*

$$\|u(Z) - u_\alpha(Z)\| \le \sqrt{2c_Z(\alpha, 1)}E_3. \tag{3.3.11}$$

(ii) $u(Z) \in \mathscr{D}(A)$ *Alors on a*

$$\|u(Z) - u_\alpha(Z)\| \le \sqrt{2c_Z(\alpha, \frac{2}{3})}E_2. \tag{3.3.12}$$

(iii) $u(Z) \in \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}})$ *Alors on a*

$$\|u(Z) - u_\alpha(Z)\| \le \sqrt{2c_Z(\alpha, \frac{1}{3})}E_1. \tag{3.3.13}$$

Démonstration. **(i)** la suppostion $u(Z) \in \mathscr{D}(A^{\frac{3}{2}})$ est équivalente a

$$\int_\gamma^{+\infty} \lambda^3 \cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 \le E_3^2,$$

La différence $(u(Z) - u_\alpha(Z))$ peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned}
\|u(Z) - u_\alpha(Z)\|^2 &= \int_\gamma^{+\infty} G_\alpha^2(Z,\lambda)d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&= \int_\gamma^{+\infty} H_\alpha^2(Z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&\le \int_\gamma^{+\infty} F_\alpha^2(Z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&= \int_\gamma^{\lambda^*} F_\alpha^2(Z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 + \int_{\lambda^*}^{+\infty} F_\alpha^2(Z,\lambda)\cosh^2(Z\sqrt{\lambda})d\|E_\lambda\varphi\|^2 \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

et en vertue de l'inégalité (3.2.15) on obtient l'estimation demandée.
On montre **(ii)** et **(iii)** de la même manière. □

3.4 Méthode de quasi-réversibilité : Cas $A_\alpha = g_\alpha(A) = f(A)$

Dans cette section nous étendons la même méthode étulisée par Ames et Hughes dans [8].

Définition 3.4.1. Soit $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ une fonction Borelienne, et on suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\lambda) \le \omega^2$ pour tout $\lambda \in [0,\infty)$.

3.4.1 Méthode directe

On considère la méthode de régularisaton suivante :

$$\begin{cases} v''(z) = f(A)v(z), \quad z \in [0, Z], \\ v(0) = \varphi, \\ v'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

où l'opérateur A est remplacé par $f(A)$.

Dans ce cas, le problème (3.4.1) est bien posé, et sa solution est donnée par

$$v(z) = \cosh\left(z\sqrt{f(A)}\right)\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{z\sqrt{f(\lambda)}} + e^{-z\sqrt{f(\lambda)}}\right) dE_\lambda \varphi, \tag{3.4.2}$$

où $\left\{e^{z\sqrt{f(A)}}\right\}_{z\ge 0}$ est un semigroup fortement continu d'opérateurs bornés.
Pour établir la dépendance continue de la solution régularisée, nous supposons de plus que f satisfait la condition suivante :
Condition $(\mathscr{A})$

Il existe deux constantes positives β, δ, avec $0 < \beta < 1$, pour lesquelles

$$\mathscr{D}(A^{(1+\delta)/2}) \subseteq \mathscr{D}(\sqrt{f(A)}),$$

et

$$\left\|\left(-\sqrt{A} + \sqrt{f(A)}\right)\psi\right\| \le \beta \|A^{(1+\delta)/2}\psi\|, \tag{3.4.3}$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(A^{(1+\delta)/2})$.
Nous utilisons implicitement le fait que

$$\mathscr{D}(A^{(1+\delta)/2}) \subseteq \mathscr{D}(\sqrt{A}).$$

Ensuite, on note que, pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\sqrt{f(A)})$

$$\left(\sqrt{f(A)}\psi, \psi\right) \le \omega(\psi, \psi),$$

et que $\sqrt{f(A)}$ est un générateur d'un semigroupe fortement continu $\left\{e^{z\sqrt{f(A)}}\right\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés, où

$$||e^{z\sqrt{f(A)}}|| \leq e^{\omega z}.$$

Si on pose

$$g(\lambda) = -\sqrt{\lambda} + \sqrt{f(\lambda)}$$

pour $\lambda \in [0,\infty)$, alors $g(A)$ est un opérateur auto-adjoint, avec domaine de définition

$$\mathscr{D}(g(A)) = \left\{\psi \in H \mid \int_0^\infty |g(\lambda)|^2 d(E(\lambda)\psi,\psi) < \infty\right\}.$$

Il suit d'après les propriétés du calcul fonctionnel [82] que

$$-\sqrt{A} + \sqrt{f(A)} \subseteq g(A),$$

dans le sens des opérateurs bornés et que,

$$\mathscr{D}(-\sqrt{A} + \sqrt{f(A)}) = \mathscr{D}(\sqrt{A}) \cap \mathscr{D}(\sqrt{f(A)}) \subseteq \mathscr{D}(g(A))$$

et

$$g(A)\psi = (-\sqrt{A} + \sqrt{f(A)})\psi,$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(-\sqrt{A} + \sqrt{f(A)})$.
Puisque $g(A)$ est auto-adjoint, et $(g(A)\psi,\psi) \leq \omega(\psi,\psi)$ pour tout $\psi \in \mathscr{D}(g(A))$, il suit que $g(A)$ est aussi un générateur d'un semigroupe fortement continu $\{e^{zg(A)}\}_{z\geq 0}$ d'opérateurs bornés, où

$$||e^{zg(A)}|| \leq e^{\omega z}.$$

Avant de présenter notre résultat principal du chapitre, nous somme besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.1. *Pour tout* $t \geq 0$,

$$e^{zg(A)} = e^{-z\sqrt{A}} e^{z\sqrt{f(A)}}. \tag{3.4.4}$$

Démonstration. D'abord, on note que $\mathscr{D}(\sqrt{A}) \cap \mathscr{D}(\sqrt{f(A)})$ est un corps pour $g(A)$. En effet, soit

$$e_n = \{\lambda \in [0,\infty) / \; |g(\lambda)| \leq n\}$$

et soit $E_n = E(e_n)$. Alors si $\lambda \in e_n$, $\lambda \leq (n+\omega)^2$, donc e_n est un ensemble Borélien borné, et de là E_n est une projection bornée sur H.
Maintenant, si

$$x \in \mathscr{D}(g(A)),$$

alors
$$E(e_n)x \in \mathscr{D}(\sqrt{A}) \cap \mathscr{D}(\sqrt{f(A)}),$$
et $E(e_n)x \to x$. En plus,
$$g(A)E(e_n)x = E(e_n)g(A)x \to g(A)x,$$
et ainsi $\mathscr{D}(\sqrt{A}) \cap \mathscr{D}(\sqrt{f(A)})$ est un corps pour $g(A)$.
Ainsi $g(A)$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathscr{D}(\sqrt{A}) \cap \mathscr{D}(\sqrt{f(A)})$.
Puisque les opérateurs bornés $e^{-z\sqrt{A}}$ et $e^{z\sqrt{f(A)}}$ commutent, alors (3.4.4) est maintenant une conséquence du théorème de Trotter donné dans ([137], VIII.31).
(Une preuve plus courte est donnée dans ([56], XII.2.7, Corollaire 7)).

De nouveau en utilisant la théorie spectrale, on note que pour chaque $n = 1, 2, \ldots$, $\{e^{z\sqrt{A}}E_n\}_{z\geq 0}$ est un semigroup fortement continu d'opérateurs bornés sur H. En fait, une des conséquence du théorème spectral est que $\{e^{\alpha\sqrt{A}}E_n\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est un groupe entier d'opérateurs bornés dans H, dans le sens de [51], comme le sont $\{e^{\alpha\sqrt{f(A)}}E_n\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ et $\{e^{\alpha g(A)}E_n\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$.
De plus, observez que (3.4.4) reste valable pour toutes les valeurs complexes du paramètre, quand on l'applique à E_n :
$$e^{\alpha g(A)}E_n = e^{-\alpha\sqrt{A}}e^{\alpha\sqrt{f(A)}}E_n, \quad \alpha \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \ldots$$

En effet, de (3.4.4), nous avons l'égalité de ces deux fonctions entières pour toutes les valeurs de $z \geq 0$.
Maintenant on montre le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint positif défini dans H, soit f une fonction satisfait la condition ($\mathscr{A}$), et on suppose qu'il existe une constante γ indépendante de β et ω, telle que $(g(A)\psi, \psi) \leq \gamma(\psi, \psi)$, pour tout $\psi \in H$. Si $u(z)$ et $v(z)$ sont solutions respectivement de* (3.1.1) *et* (3.4.1)*, et on suppose de plus que $\|u(Z)\| \leq \widetilde{M}$, alors il existe des constantes C et M, indépendantes de β, telles que pour $0 \leq z < Z$,*
$$\|u(z) - v(z)\| \leq C\beta^{1-z/Z}M^{z/Z}.$$

Démonstration. Soit $\varphi_n = E_n\varphi$, où $E_n = E(e_n)$ et pour $h \in H$ on définit
$$\phi_n(\alpha) = \left(e^{\alpha^2}\left[\cosh(\alpha\sqrt{A}) - \cosh(\alpha\sqrt{f(A)})\right]\varphi_n, h\right), \tag{3.4.5}$$

Notre but est de montrer que $\phi_n(\alpha)$ est borné dans la bande $0 \leq Re\alpha \leq Z$, pour que nous puissons appliquer le théorème des trois cercles ([138], p. 33).
On pose $\alpha = z + i\eta$, où $0 \leq z \leq Z$, et $\eta \in \mathbb{R}$. Puisque A et $\sqrt{f(A)}$ sont auto-adjoint,
$$\|e^{i\eta\sqrt{A}}\| = \|e^{i\eta\sqrt{f(A)}}\| = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\phi_n(\alpha)| &\leq e^{z^2-\eta^2}||\cosh((z+i\eta)\sqrt{A})\varphi_n - \cosh((z+i\eta)\sqrt{f(A)})\varphi_n||||h|| \\
&\leq \frac{1}{2}e^{z^2-\eta^2}\Big(||e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{f(A)}}\varphi_n|| \\
&+ ||e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{-(z+i\eta)\sqrt{f(A)}}\varphi_n||\Big)||h||,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$|\phi_n(\alpha)| \leq \frac{1}{2}e^{z^2-\eta^2}\left(||\mathscr{B}_1\varphi_n|| + ||\mathscr{B}_2\varphi_n||\right)||h||, \tag{3.4.6}$$

où

$$\mathscr{B}_1 = e^{(z+i\eta)\sqrt{A}} - e^{(z+i\eta)\sqrt{f(A)}},$$

$$\mathscr{B}_2 = e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}} - e^{-(z+i\eta)\sqrt{f(A)}}.$$

Premièrement on a

$$\begin{aligned}
||\mathscr{B}_1\varphi_n|| &= ||e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{f(A)}}\varphi_n|| \\
&= ||e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{(z+i\eta)g(A)}\varphi_n|| \\
&\leq \Big(||e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{i\eta g(A)}\varphi_n|| \\
&+ ||e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{i\eta g(A)}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{(z+i\eta)g(A)}\varphi_n||\Big),
\end{aligned}$$

alors

$$||\mathscr{B}_1\varphi_n|| \leq ||\mathscr{I}_1\varphi_n|| + ||\mathscr{I}_2\varphi_n||, \tag{3.4.7}$$

où

$$\begin{aligned}
||\mathscr{I}_1\varphi_n|| &= ||e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{i\eta g(A)}\varphi_n|| \\
&\leq ||(I - e^{i\eta g(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi_n||.
\end{aligned}$$

Nous utilisons à plusieurs reprises (3.4.4) pour des valeurs complexes du paramètre et le cadre théorique des semi-groupes, si $\psi \in \mathscr{D}(g(A))$, et $\eta \in \mathbb{R}$, alors $I - e^{i\eta g(A)}\psi$, peut être écrit sous la forme

$$I - e^{i\eta g(A)}\psi = -i\int_0^\eta e^{isg(A)}g(A)\psi ds, \tag{3.4.8}$$

donc, une majoration simple donne

$$||(I - e^{i\eta g(A)})\psi|| \leq |\eta|||g(A)\psi||. \tag{3.4.9}$$

Puisque

$$e^{z\sqrt{A}}\varphi_n \in \mathscr{D}(\sqrt{A}) \cap \mathscr{D}(\sqrt{f(A)}) \subseteq \mathscr{D}(g(A)),$$

pour tout $z \geq 0$, et $e^{z\sqrt{A}}\varphi_n \in \mathscr{D}(A^{(1+\delta)/2})$, on a d'après la condition $(\mathscr{A})$ et l'inégalité (3.4.9) que

$$\begin{aligned} \|\mathscr{I}_1\varphi_n\| &= \|(I - e^{i\eta g(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\| \\ &\leq \beta|\eta|\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

D'une manière similaire on a

$$(I - e^{tg(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi_n = -\int_0^z e^{sg(A)}g(A)e^{z\sqrt{A}}\varphi_n ds, \tag{3.4.11}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \|\mathscr{I}_2\varphi_n\| &= \|(I - e^{zg(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\| \\ &\leq \beta z e^{\gamma z}\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|, \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

utilisons (3.4.10) et (3.4.12) l'inégalité (3.4.7) devient

$$\begin{aligned} \|\mathscr{B}_1\varphi_n\| &\leq \beta(|\eta| + ze^{\gamma z})\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\| \\ &\leq \beta(1 + Ze^{\gamma Z})\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|. \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathscr{B}_2\varphi_n\| &= \|e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{-(z+i\eta)g(A)}\varphi_n\| \\ &\leq \Big(\|e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{-i\eta g(A)}\varphi_n\| \\ &+ \|e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{-i\eta g(A)}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{-(z+i\eta)g(A)}\varphi_n\|\Big) \\ &= \|\mathscr{J}_1\varphi_n\| + \|\mathscr{J}_2\varphi_n\|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \|\mathscr{J}_1\varphi_n\| &= \|e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{-(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{-i\eta g(A)}\varphi_n\| \\ &\leq \|(I - e^{-i\eta g(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|. \end{aligned}$$

Si $\psi \in \mathscr{D}(g(A))$, et $\eta \in \mathbb{R}$, alors

$$I - e^{-i\eta g(A)}\psi = i\int_0^\eta e^{-isg(A)}g(A)\psi ds,$$

donc

$$\|\mathscr{J}_1\varphi_n\| = \|(I - e^{-i\eta g(A)})\varphi_n\| \leq \beta|\eta|\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\|. \tag{3.4.14}$$

De la même façon,

$$(I - e^{-zg(A)})\varphi_n = \int_0^z e^{-sg(A)}g(A)\varphi_n ds,$$

et alors

$$\begin{aligned} \|\mathscr{J}_2\varphi_n\| &= \|(I - e^{-zg(A)})\varphi_n\| \\ &\leq \beta z\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\mathscr{B}_2\varphi_n\| &\leq \beta(|\eta| + z)\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\| \\ &\leq \beta(1+Z)\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\|, \end{aligned}$$

selon (3.4.13) et (3.4.15) l'inégalité (3.4.6) devient

$$\begin{aligned} |\phi_n(\alpha)| &\leq \frac{1}{2}e^{z^2-\eta^2}\Big((|\eta| + z)\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\| + \beta(|\eta| + ze^{\gamma z})\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\Big)\|h\| \\ &\leq \frac{1}{2}e^{Z^2}\beta\Big((1+Z)\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\| + (1+Ze^{\gamma Z})\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\Big)\|h\| \\ &\leq \frac{1}{2}e^{Z^2}\beta\max\Big(1+Z, 1+Ze^{\gamma Z}\Big)\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\|h\|, \end{aligned}$$

et ainsi, en utilisant la continuité forte du semigroupe $\left(e^{z\sqrt{A}}E_n\right)$, il s'ensuit que ϕ_n est bornée sur l'intervalle $0 \leq z \leq Z$.
Par le théorème des trois cercles [138],

$$|\phi_n(z)| \leq M(0)^{1-z/Z}M(Z)^{z/Z}, \qquad \text{pour } 0 \leq z \leq Z, \tag{3.4.15}$$

où

$$M(z) = \max_{\alpha = z+i\eta,\, \eta\in\mathbb{R}} |\phi_n(\alpha)|. \tag{3.4.16}$$

Puisque

$$M(0) \leq \frac{1}{2}\beta\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\|\|h\|,$$

on a

$$|\phi_n(z)| \leq \left(\frac{1}{2}\beta\|A^{(1+\delta)/2}\varphi_n\|\|h\|\right)^{1-z/Z} M(Z)^{z/Z}, \qquad \text{pour } 0 \leq z \leq Z.$$

Nous retournons à (3.4.6) et en utlisant (3.4.10), (3.4.12), (3.4.14) et (3.4.15) nous avons

$$\begin{aligned} |\phi_n(Z+i\eta)| &\leq \Big(\|(I - e^{i\eta g(A)})e^{Z\sqrt{A}}\varphi_n\| + \|(I - e^{Zg(A)})e^{Z\sqrt{A}}\varphi_n\| \\ &+ \|(I - e^{-i\eta g(A)})\varphi_n\| + \|(I - e^{-Zg(A)})\varphi_n\|\Big)\|h\| \\ &\leq 2\|e^{Z\sqrt{A}}\varphi_n\|\|h\| + (1+e^{\gamma Z})\|e^{Z\sqrt{A}}\varphi_n\|\|h\| + 4\|\varphi_n\|\|h\| \\ &\leq (7+e^{\gamma Z})\|e^{Z\sqrt{A}}\varphi_n\|\|h\|, \end{aligned}$$

nous avons utilisé le fait que $||e^{Zg(A)}|| \leq e^{\gamma Z}$. Alors

$$|\phi_n(z)| \leq \left(\beta||A^{(1+\delta)/2}\varphi_n||\right)^{1-z/Z}\left(C_1||e^{Z\sqrt{A}}\varphi_n||\right)^{z/Z}||h||, \tag{3.4.17}$$

pour une constante appropriée C_1 qui est indépendante de β.

Nous supposons maintenant que $||\cosh(Z\sqrt{A})\varphi|| \leq \widetilde{M}$ (qui sert à stabiliser le problème), pour laquelle il suit que $||A^{(1+\delta)/2}\varphi|| \leq \widetilde{M}$ pour une valeur probablement différente de $\widetilde{M}$.
Si on fait tendre n à l'infini $n \to \infty$ dans (3.4.17), nous obtenons

$$|\phi(z)| \leq C\beta^{1-z/Z}M^{z/Z}||h||,$$

où

$$\phi(z) = e^{z^2}\left(\left[\cosh(z\sqrt{A}) - \cosh(z\sqrt{f(A)})\right]\varphi, h\right),$$

C et M sont des constantes indépendantes de β.
Par passage au sup sur tout $h \in H$, avec $||h|| \leq 1$, on obtient

$$e^{z^2}||u(z) - v(z)|| \leq C\beta^{1-z/Z}M^{z/Z},$$

et la preuve est complète. □

3.4.2 Exemple

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, avec une frontière régulière $\partial\Omega$, et on consider le problème mal-posé suivant

$$\begin{cases} u_{zz} + \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \times [0, Z), \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{dans } \Omega \\ u'(x,0) = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{dans } \partial\Omega \times [0, Z), \end{cases} \tag{$\mathscr{E}$}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée et $A = -\Delta$ (opérateur de Laplace).

Pour $\epsilon > 0$, on considère le problème régularisé bien posé

$$\begin{cases} v_{zz} + \Delta v + \epsilon\Delta v_{zz} = 0, & \text{dans } \Omega \times [0, Z), \\ v(x,0) = \varphi(x), & \text{dans } \Omega \\ v'(x,0) = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = 0, & \text{dans } \partial\Omega \times [0, Z). \end{cases} \tag{$\mathscr{E}_{2,\epsilon}$}$$

Dans ce cas, soit $f(\lambda) = \lambda(1+\epsilon\lambda)^{-1}$, pour $\epsilon > 0$. Alors f est une fonction Borélienne bornée, et clairement elle satisfait la condition $(\mathscr{A})$, avec

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{1}{\epsilon}, \\ \beta = \dfrac{\epsilon}{2}, \\ \delta = 2, \end{cases}$$

puisque

$$\left\| \left(\sqrt{(I+\epsilon A)^{-1}} - I \right) \sqrt{A}\psi \right\| \leq \beta \|A^{\frac{3}{2}}\psi\|,$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(A^{\frac{3}{2}})$.
Alors, $g(A) = -\sqrt{A} + \sqrt{A(I+\epsilon A)^{-1}}$, génère un semigroupe de contraction, donc nous pouvons prendre $\gamma \leq 0$.
Le théorème (3.4.1) donne le résultat

$$\|u(z) - v(z)\| \leq C\beta^{1-z/Z} M^{z/Z}.$$

On introduit maintenant la méthode de quasi-réversibilité modifiée pour régulariser le problème (3.1.1) par un problème proche et bien posé au sens d'Hadamard.

3.4.3 Méthode indirecte

Description de la méthode :

- Soit v la solution du problème perturbé (3.4.1)

$$\begin{cases} v''(z) = f(A)v(z), \quad z \in [0, Z], \\ v(0) = \varphi, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

- On injecte la condition finale

$$v(Z) = \cosh\left(Z\sqrt{f(A)}\right)\varphi,$$

dans le problème

$$\begin{cases} w''z = Aw(z), \quad z \in [0, Z], \\ w(Z) = v(Z) = \cosh\left(Z\sqrt{f(A)}\right)\varphi, \\ w'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.4.18}$$

▪ Enfin, on montre que

$$\|w(0) - \varphi\| \to 0, \ \beta \to 0.$$

Alors la solution de (3.4.18) est

$$w(z) = \cosh\left(Z\sqrt{f(A)}\right)\cosh^{-1}(Z\sqrt{A})\cosh(z\sqrt{A})\,\varphi. \tag{3.4.19}$$

Nous considérons

$$\begin{aligned}
\|u(z) - w(z)\| &= \left\|\cosh(z\sqrt{A})\,\varphi - \cosh\left(Z\sqrt{f(A)}\right)\cosh^{-1}(Z\sqrt{A})\cosh(z\sqrt{A})\,\varphi\right\| \\
&= \left\|\Big(\cosh(Z\sqrt{A}) - \cosh(Z\sqrt{f(A)})\Big)\cosh^{-1}(Z\sqrt{A})\cosh(z\sqrt{A})\,\varphi\right\|,
\end{aligned}$$

Maintenant nous sommes prêts à exposer et prouver les pincipaux résultats de cette section.
Utilisant les deux inégalités suivantes, $\cosh(Z\sqrt{A}) \geq \frac{1}{2}e^{Z\sqrt{A}}$, $\cosh(Z\sqrt{A}) \geq \frac{1}{2}e^{-Z\sqrt{A}}$, on a

$$\begin{aligned}
\|u(z) - w(z)\| &\leq \left\|\Big((I - e^{Zg(A)}) + (I - e^{-Zg(A)})\Big)e^{z\sqrt{A}}\varphi\right\| \\
&\leq \left\|(I - e^{Zg(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi\right\| + \left\|(I - e^{-Zg(A)})e^{t\sqrt{A}}\varphi\right\|.
\end{aligned}$$

Pour obtenir un résultat de convexité, on procède comme ci-dessus, posons

$$\phi_n(\alpha) = \left(e^{\alpha^2}\left[(e^{\alpha\sqrt{A}} - e^{\alpha\sqrt{A}}e^{Zg(A)}) + (e^{\alpha\sqrt{A}} - e^{\alpha\sqrt{A}}e^{-Zg(A)})\right]\varphi_n, h\right), \tag{3.4.20}$$

où h est un élément arbitraire de H. Alors

$$\begin{aligned}
\|\phi_n(\alpha)\| &\leq e^{z^2-\eta^2}\|e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{Zg(A)}\varphi_n\|\|h\| \\
&+ \|e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}\varphi_n - e^{(z+i\eta)\sqrt{A}}e^{-Zg(A)}\varphi_n\|\|h\| \\
&\leq e^{z^2-\eta^2}\Big(\|(I - e^{Zg(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\| + \|(I - e^{-Zg(A)})e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\Big)\|h\| \\
&\leq e^{z^2-\eta^2}\Big(Ze^{Z\gamma}\|g(A)e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\| + Z\|g(A)e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\Big)\|h\| \\
&= e^{z^2-\eta^2}Z(e^{Z\gamma} + 1)\|g(A)e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\|h\| \\
&\leq e^{z^2-\eta^2}Z(e^{Z\gamma} + 1)\beta\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\|h\| \\
&= C_Z e^{z^2-\eta^2}\beta\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}\varphi_n\|\|h\|,
\end{aligned}$$

où $C_Z = Z(e^{Z\gamma} + 1)$.
Comme dans la preuve du théorème (3.4.1), $\phi_n(\alpha)$ est bornée dans la bande $0 \leq Re\alpha \leq Z$, et ainsi par le théorème des trois cercles(Three Lines Theorem,) on obtient de nouveau que

$$|\phi_n(z)| \leq M(0)^{1-z/Z}M(Z)^{z/Z}, \tag{3.4.21}$$

où $M(z)$ a été défini précédemment. Puisque

$$M(0) \leq C_Z \beta ||A^{(1+\delta)/2} \varphi_n|| ||h||, \tag{3.4.22}$$

et

$$\begin{aligned} M(Z) &\leq e^{Z^2} \Big(||(I - e^{Zg(A)}) e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| + ||(I - e^{-Zg(A)}) e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| \Big) ||h|| \\ &\leq e^{Z^2} \Big((e^{Z\gamma} + 1) ||e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| + 2 ||e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| \Big) ||h|| \\ &= (e^{Z\gamma} + 3) e^{Z^2} ||e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| ||h|| \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |\phi_n(z)| &\leq \left(C_Z \beta ||A^{(1+\delta)/2} \varphi_n|| ||h|| \right)^{1-z/Z} \left((e^{Z\gamma} + 3) e^{Z^2} ||e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| ||h|| \right)^{z/Z} \\ &= (Z(e^{Z\gamma} + 1))^{1-z/Z} (e^{Z^2} (e^{Z\gamma} + 3))^{z/Z} (\beta ||A^{(1+\delta)/2} \varphi_n||)^{1-z/Z} (||e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n||)^{z/Z} ||h||, \end{aligned}$$

nous prenons le supremum sur tout $h \in H$, avec $||h|| \leq 1$,

$$||u(z) - w(z)|| \leq C_1 \left(\beta ||A^{(1+\delta)/2} \varphi_n|| \right)^{1-z/Z} \left(||e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| \right)^{z/Z}. \tag{3.4.23}$$

pour une constante bien déterminée C_1.
Si nous prenons la limite quand $n \to \infty$, et on suppose de plus que

$$||u(Z)|| = ||\cosh(Z\sqrt{A}) \varphi_n|| \leq M',$$

duquel il s'ensuit que

$$||e^{Z\sqrt{A}} \varphi_n|| \leq 2 ||\cosh(Z\sqrt{A}) \varphi_n|| \leq 2M' = M$$

et

$$||A^{(1+\delta)/2} \varphi_n|| \leq M'',$$

alors on obtient

$$||u(z) - w(z)|| \leq C \beta^{1-z/Z} M^{z/Z}, \tag{3.4.24}$$

pour une constante M indépendante de β, et $C = C_1 M''$.
Nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.4.2. *Soit A un opérateur auto-adjoint positif défini dans H, soit f une fonction satisfait la condition $(\mathscr{A})$, et on suppose qu'il existe une constante γ, indépendante de β, telle que*

$$(g(A)\psi, \psi) \leq \gamma(\psi, \psi), \ \textit{pour tout} \ \psi \in H.$$

Si $u(z)$ et $w(z)$ sont les solutions respectivement de (3.1.1) *et* (3.4.18), *on suppose de plus que $||u(Z)|| \leq M'$, alors il existe des constantes C et M, indépendantes de β, telles que pour $0 \leq z < Z$,*

$$||u(z) - w(z)|| \leq C \beta^{1-z/Z} M^{z/Z}. \tag{3.4.25}$$

Donc, on obtient directement le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.1. *Pour tout $\varphi \in H$, $\|w(0)-\varphi\| \to 0$, quand $\beta \to 0$.*

On suppose que φ est donnée dans H, $u(z) = \cosh(z\sqrt{A})u_0$ est une solution connue de (3.1.1), $v(z) = \cosh(z\sqrt{f(A)})\varphi$, et que $\|u_0 - \varphi\| \leq \epsilon$.

Corollaire 3.4.2. *Soit A un opérateur auto-adjoint positif défini dans H, soit f une fonction satisfait la condition $(\mathscr{A})$, avec $\omega \leq \dfrac{1}{Z}\ln\dfrac{M'}{\epsilon}$, et on suppose qu'il existe une constante γ, indépendante de β et ω, telle que*

$$(g(A)\psi,\psi) \leq \gamma(\psi,\psi),\ \textit{pour tout}\ \psi \in H.$$

Si $u(z)$ et $v(z)$ définis dans le paragraphe précédent, sont respectivement solutions de (3.1.1) et (3.4.1), et $\|u(Z)\| \leq M'$, alors il existe des constantes C et M, indépendantes de β, telles que pour $0 \leq z < Z$,

$$\|u(z) - v(z)\| \leq C(\beta+\epsilon)^{1-z/Z}M^{z/Z}. \tag{3.4.26}$$

Démonstration. On a $\varphi = u_0 + \psi$, où $\psi \in H$, et $\|\psi\| \leq \epsilon$.
Dans le but de comparer $u(z)$ avec $v(z) = \cosh(z\sqrt{f(A)})\varphi$, nous suivons la preuve du théorème (3.4.1), soit alors

$$\phi_n(\alpha) = \left(e^{\alpha^2}\left\{\left[\cosh\left(\alpha\sqrt{A}\right) - \cosh\left(\alpha\sqrt{f(A)}\right)\right](u_0)_n - \cosh\left(\alpha\sqrt{f(A)}\right)\psi\right\}, h\right) \tag{3.4.27}$$

où $(u_0)_n = E(e_n)u_0$.
Pour montrer que $\phi_n(\alpha)$ est bornée dans la bande $0 \leq Re\alpha \leq Z$, nous utilisons les mêmes estimations que dans la preuve du théorème (3.4.1), sauf qu'il y a un terme supplémentaire dans (3.4.6). Par un calcul direct on a

$$\begin{aligned}
\|\cosh((z+i\eta)\sqrt{f(A)})\psi\| &\leq \|e^{(z+i\eta)\sqrt{f(A)}}\psi\| \\
&\leq \|e^{z\sqrt{f(A)}}\psi\| \\
&\leq e^{\omega z}\|\psi\| \\
&\leq e^{\omega z}\epsilon.
\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\phi_n(\alpha)| &\leq e^{z^2-\eta^2}\Big(\|\cosh((z+i\eta)\sqrt{A})(u_0)_n - \cosh((z+i\eta)\sqrt{f(A)})(u_0)_n\| \\
&+ \|\cosh((z+i\eta)\sqrt{f(A)})\psi\|\Big)\|h\| \\
&\leq \frac{1}{2}e^{z^2-\eta^2}\left(\beta(|\eta|+z)\|A^{(1+\delta)/2}(u_0)_n\| + \beta(|\eta|+ze^{\gamma z})\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}(u_0)_n\|\right)\|h\| \\
&+ e^{z^2-\eta^2}\|e^{z\sqrt{f(A)}}\psi\|\|h\| \\
&\leq e^{z^2-\eta^2}\left(\beta(|\eta|+ze^{\gamma z})\|A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}(u_0)_n\| + \epsilon e^{\omega z}\right)\|h\|,
\end{aligned}$$

donc

$$|\phi_n(\alpha)| \leq M(z), \tag{3.4.29}$$

où

$$M(z) = e^{z^2-\eta^2}\Big(\beta(|\eta| + ze^{\gamma z})||A^{(1+\delta)/2}e^{z\sqrt{A}}(u_0)_n|| + \epsilon e^{\omega z}\Big)||h||,$$

pour que $\phi_n(\alpha)$ soit bornée dans la bande $0 \leq z \leq Z$, par le théorème des trois cercles(Three Lines Theorem) ([138]), on a

$$|\phi_n(z)| \leq M(0)^{1-z/Z} M(Z)^{z/Z},$$

où $M(0)$ peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned} M(0) &\leq (\beta||A^{(1+\delta)/2}(u_0)_n|| + \epsilon)||h|| \\ &\leq \max(||A^{(1+\delta)/2}(u_0)_n||, 1)(\beta + \epsilon)||h|| \\ &= M_1(\beta + \epsilon)||h||. \end{aligned}$$

Pour $M(Z)$, on a

$$M(Z) \leq (C_2||A^{(1+\delta)/2}e^{Z\sqrt{A}}(u_0)_n|| + e^{\omega Z}\epsilon)||h||.$$

Si nous utilisons la condition

$$\omega \leq \frac{1}{Z}\ln\frac{M'}{\epsilon},$$

et

$$||u(Z)|| = ||\cosh(Z\sqrt{A})(u_0)_n|| \leq M',$$

alors il s'ensuit que

$$||e^{Z\sqrt{A}}(u_0)_n|| \leq 2||\cosh(Z\sqrt{A})(u_0)_n|| \leq 2M' = M$$

et

$$||A^{(1+\delta)/2}(u_0)_n|| \leq M''.$$

On procède de la même manière que dans la preuve du théorème (3.4.2), on obtient

$$\begin{aligned} ||u(z) - v(z)|| &\leq \Big((\beta||A^{(1+\delta)/2}(u_0)_n|| + \epsilon)||h||\Big)^{1-z/Z}\Big((C_2||A^{(1+\delta)/2}e^{Z\sqrt{A}}(u_0)_n|| + e^{\omega Z}\epsilon)||h||\Big)^{z/Z} \\ &\leq M_1^{1-z/Z}(\beta + \epsilon)^{1-z/Z}(M'(C_2M'' + 1))^{z/Z}, \\ &= C(\beta + \epsilon)^{1-z/Z}M^{z/Z}, \end{aligned}$$

où $C = M_1^{1-z/Z}$ et $M = M'(C_2M'' + 1)$ sont indépendantes de ϵ.

La dépendance continue Hölderienne par rapport aux données est établie pour la fonction $f(\lambda) = \dfrac{\lambda}{1+\alpha\lambda}$, où $\alpha = \alpha(\epsilon) = \dfrac{Z}{\ln\frac{M}{\epsilon}}$, et alors $\omega = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{Z}\ln\dfrac{M}{\epsilon}$, et $\beta = \alpha$.

Puisque la fonction $f(\lambda) = \lambda - \alpha\lambda^2$ satisfait les hypothèses du corollaire (3.4.2), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.3. *On suppose les mêmes hypothèses du corollaire* (3.4.2), *avec* $f(\lambda) = \dfrac{\lambda}{1+\alpha\lambda}$, *où*

$$\alpha = \alpha(\epsilon) = \frac{Z}{\ln\frac{M}{\epsilon}}.$$

Alors il existe des constantes C et M, indépendantes de ϵ, pour lesquelles

$$||u(z) - v(z)|| \leq C\left(\frac{1}{\frac{Z}{\ln\frac{M}{\epsilon}}} + \epsilon\right)^{1-z/Z} M^{z/Z}. \tag{3.4.30}$$

On termine ce chapitre par la construction d'une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (3.1.1).

Définition 3.4.2. Une famille d'opérateurs $\{R_\beta(z),\ \beta > 0,\ z \in [0,Z]\} \subset \mathscr{L}(H)$ est dite famille d'opérateurs régularisante pour le problème (3.1.1) si pour toute solution $u(z)$, $0 \leq z \leq Z$ du problème (3.1.1) avec la condition initiale φ, et pour tout $\varrho > 0$, il existe un choix $\beta(\varrho) > 0$, tel que

$$\beta(\varrho) \longrightarrow 0,\ \varrho \longrightarrow 0, \tag{$\mathscr{R}_1$}$$

$$||R_{\beta(\varrho)}(z)\varphi_\varrho - u(z)|| \longrightarrow 0,\ \varrho \longrightarrow 0, \tag{$\mathscr{R}_2$}$$

pour tout $z \in [0,Z]$ dés que φ_ϱ satisfait $||\varphi_\varrho - \varphi|| \leq \varrho$.

On définit

$$R_{\beta(\varrho)}(z) = \cosh\left(z\sqrt{f(A)}\right),\ z \geq 0,\ \beta > 0. \tag{3.4.31}$$

Il est clair que $R_{\beta(\varrho)}(z) \in \mathscr{L}(H)$. Dans la suite nous montrerons que $R_{\beta(\varrho)}(z)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (3.1.1).

Théorème 3.4.3. *On suppose que $\varphi \in \mathscr{C}_1(A)$, alors $(\mathscr{R}_2)$ a lieu.*

Démonstration. On a

$$||R_{\beta(\varrho)}(z)\varphi_\varrho - u(z)|| \leq ||R_{\beta(\varrho)}(z)(\varphi_\varrho - \varphi)|| + ||R_{\beta(\varrho)}(z)\varphi - u(z)|| = \Delta_1(z) + \Delta_2(z), \tag{3.4.32}$$

choisissons $\omega \leq Z/\ln(M'/\varrho)$ alors on a

$$\begin{aligned}\Delta_1(z) = ||R_{\beta(\varrho)}(z)(\varphi_\varrho - \varphi)|| &\leq e^{\omega z}\varrho \\ &\leq (M'/\varrho)^{z/Z}\varrho \\ &= (M')^{z/Z}\varrho^{1-z/Z} \longrightarrow 0,\ \text{quand } \varrho \longrightarrow 0\end{aligned} \tag{3.4.33}$$

et

$$\Delta_2(z) = ||R_{\beta(\varrho)}(z)\varphi - u(z)||. \tag{3.4.34}$$

Maintenant, en vertu du théorème (3.4.1) on obtient

$$\Delta_2(z) = ||R_{\beta(\varrho)}(z)\varphi - u(z)|| \leq C\beta^{1-z/Z}M^{z/Z} \longrightarrow 0, \text{ quand } \varrho \longrightarrow 0, \tag{3.4.35}$$

uniformément par rapport à z. En Combinant (3.4.33) et (3.4.35) on obtient

$$\sup_{0\leq z\leq Z} ||R_{\beta(\varrho)}(z)\varphi_\varrho - u(z)|| \longrightarrow 0, \text{ quand } \varrho \longrightarrow 0. \tag{3.4.36}$$

qui montre que $R_{\beta(\varrho)}(z)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (3.1.1). □

Conclusion et perspectives

Dans la présente thèse, on a traité deux classes de problèmes bien et mal posés. Dans la première classe, on a étudié un problème d'évolution multitemporel avec des conditions non locales de nature très complexe, et grâce aux estimations a priori établies on a pu démontrer des théorèmes d'existence, d'unicité et de dépendance continue.

Comme perspectives, on se propose d'étudier le même problème d'évolution multitemporel, toujours dans le cas non local, mais dans un cadre plus général.

Quant à la deuxième classe, elle est coscacrée a l'étude d'un problème mal posé de type elliptique. L'approche utilisée dans cette analyse est basée sur la méthode de quasi-réversibilité dans un cadre plus général, qui nous permet d'établir des résultats de convexcité et construire une famille régularisante pour le problème considéré.

Comme perspectives on se propose d'étudier un problème parabolique rétrograde par deux méthodes.

1. Première méthode : Régularisation par des conditions non locales dans un cadre général.
2. Deuxième méhode : Régularisation par une combinaison de la méthode **Q.R** modifiée et la méthode des conditions non locales.

Bibliographie

[1] L. Abdulkerimov, *Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space,* Azerdaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap.,Fiz. i Mat. 32-36(MR0492645) 1977, (in Russian).

[2] S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces,* Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), 121-139.

[3] D.R. Akhmetov, M.M. Lavrentiev and Jr.R. Spigeler, *Singular perturbations for certain partial differential equations without boundary-layers,* Asymptotic Analysis 35 (2003), 65-89.

[4] D.R. Akhmetov, M.M. Lavrentiev, Jr. and R. Spigler, *Existence and uniqueness of classical solutions to certain nonlinear integro-differential Fokker-Plank type equations*, E.J.D.E. 24 (2002), 1-17.

[5] Alexander A. Samarskii, Peter N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin. New York, 2007.

[6] S.M.A.Alsulami, *On evolution equations in Banach spaces and commuting semigroups,* Ph.D 2005,université d'Ohio.

[7] K.A. Ames, L.E. Payne and J.C. Song, *On two classes of nonstandard parabolic problems,* J. Math. Anal. Appl, **311** (2005), 254-267.

[8] K.A. Ames, R.J. Hughes, *Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space,* Semigroup Forum, Vol. **70** (2005), No 1, 127-145.

[9] G. Allessandrini, L. Rondi, E. Rosset,and S. Vessella, *The stability of the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems **25**(12), 2009.

[10] G.A. Anastassiou, G.R. Goldestein and J.A. Goldstein, *Uniqueness for evolution in multidimensional time*, Nonlinear Analysis, 64 (2006), 33-41.

[11] A. Ashyralyev, *A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. 344 (2008) 557-573.

[12] A. Ashyralyev, A. Hanalyev, P.E. Sobolevskii, *Coercive solvability of the nonlocal boundary value problem for parabolic differential equations,* Abstact and applied analysis, No. **6** : (2001) 53-61.

[13] A. Ashyralyev, *Nonlocal boundary value problems for abstract parabolic equations : well-posedness in Bochnerspaces*, Journal of evolution equations, 6 (2006), 1-28.

[14] A. Ashyralyev, I. Karatay, P.E. Sobolevskii, *On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations.* Hindawi publishing corporation. Discrete dynamics in nature and society, No. **2** (2004) 273-286.

[15] S.A. Atanbaev, *On the quasi-inversion method for second-order evolution equations,* Vestn. Minist. Nauki Vyssh. Obraz. Nats. Akad. Nauk Resp. Kaz., (1999), No. 1, 30-36, (Russian).

[16] S.A. Atanbaev, *On the convergence of a difference analogue of the quasi-inversion method for evolution equations,* Izv. Minist. Obraz. Nauki Nats. Akad. Nauk Resp. Kaz. Ser. Fiz.-Mat., (2000), No. 1, 3-13, (Russian).

[17] G. Avalishvili, D. Gordeziani, *On the investigation of pluriévolution equations in abstract spaces,* Rep. of Enlarged Sess. of the Sem. of I. Vekua Inst. Appl. Math., Vol. 14, No. 3 (1999), 12-16.

[18] J.C. Baez, I.E. Segal and W.F. Zohn, *The global Goursat problem and scattering for nonlinear wave equations*, J. Funct. Anal, 93 (1990), 239-269.

[19] K. Balachandran, J.Y. Park, *Existence of solutions of second order nonlinear differential equations with nonlocal conditions in Banach spaces,* Indian J. Pure Appl. Math., **32** (2001), No. 12, 1883-1891.

[20] G. Barles, A. Tourin, *Commutation properties of semigroups for first order Hamilton-Jacobi equations and application to multi-time equation*, Indiana Univ. Math. Journal, 50(2001), 1524-1543.

[21] J. Baumeister, A. Leitao, On iterative methods for solving ill-posed problems modled by partial differential equations, J. Inv. Ill-Posed Problems., Vol. 9.1 (2001), 1-17.

[22] A.M Bayen, R.L Raffard and C.J Tomlin, *Adjoint-based constrained control of eulerian transportation network : application to air traffic control*, Boston, June 2004.

[23] F. Ben Belgacem, *Why is the Cauchy problem severly ill-posed ?* Inverse Problems **23** 823-36, 2007.

[24] A. Benrabah, F. Rebbani and N. Boussetila, *A study of the multitime evolution equation with time-nonlocal conditions,* Balkan Journal of Geometry and its applications, Vol.16, No.2, 2011, pp. 13-24.

[25] A.Bensoussan, P.L. Chow and J.L. Lions, *Filtering theory for stochastic processes with two-dimensional time parameter,* Math. Comput. Simulation 22 (1980), No. 3, 213-221.

[26] O. Bernardi, F. Cardin, *Minmax and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in the convex case*, Communications on Pure and Applied analysis Volume : 5, Number : 4 (2006), 793-812.

[27] V. M. Borok, L.V. Fardigola, *Nonlocal well-posed boundary problems in a layer,* Translated from Ukrainskii mathematicheskii zhurnal, vol. **48**, No. 1, pp. 20-25, (1990).

[28] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for a class of ill-posed Cauchy problems,* G.M.Journal, 2006.

[29] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for ill-posed evolution problems with two-dimensional time,* Analytic Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE-2003), 15-23, Cambridge Scientific publishers (2005).

[30] N. Boussetila, *Étude de Problèmes Non Locaux et Régularisation de Problèmes Mal Posés en EDP,* Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, 2007.

[31] H. Brezis, *Analyse fonctionelle, Théorie et application,* Masson (1993).

[32] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Some new boundary value problems for a class of partial differential equations. Part I*, Diff. Uravn, 4, (1968), 1081-1101 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 770-775].

[33] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *A mixed problem for certain pluri-parabolic differential equations*, Diff. Uravn, 6 (1970), 1624-1630 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 1234-1239].

[34] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Goursat Problem for abstract linear differential equation of second order*, Diff. Urav, Vol. 7 (1971), No. 7, 1001-1030 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 770-779].

[35] L. Byszewski, V. Lakshmikantham,*Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a non-local abstract Cauchy problem in a Banach space*, Appl. Anal. **40** (1991), No.1, 11-19.

[36] A.S. Carraso, *Overcoming Hölder continuity in ill-posed continuation problems,* SIAM J. Numer. Anal., **31** (1994), 1535-1557.

[37] F. Cardin, C. Viterbo, *commuting hamiltonians and hamiltan-jacobi multi-time equations*, Duke Maths.J. 144, 2 2008.

[38] R. Chapko and P. Kügler, *A comparison of the Landweber method and Gauss-Newton method for an inverse parabolic boundary value problem,* J. Comp. Appl. Math., **169**, 183-196, 2004.

[39] R. Chapko, R. Kress and J.R. Yoon, *On the numerical solution of an inverse boundary value problem for the heat equation,* Inverse Problems, **14**, 853-867, 1998.

[40] V.I. Chesalyn, N.I.Yurchuk, *Nonlocal boundary value problems for abstract Liav equations*, Izv. AN BSSR. Ser. Phys-Math, (1973), No.6, 30-35 (Russian).

[41] V.I. Chesalyn, *A problem with nonlocal boundary conditions for certain abstract hyperbolic equations*, Diff. Uravn., 15 (1979), No. 11, 2104-2106, (Russian).

[42] V.I. Chesalyn, *A problem with nonlocal boundary conditions for abstract hyperbolic equations*, Vestn. Beloruss. Gos. Univ. Ser. 1 Fiz. Mat. Inform., (1998), No. 2, 57-60, (Russian).

[43] V.I. Chesalin, N.I. Yurchuk, *The conjugation problem for abstract parabolic and hyperbolic equations with nonlocal conditions in t,* Dokl. Akad. Nauk BSSR, **18** (1974), 197-200, (Russian).

[44] V.I. Chesalin, *A nonlocal boundary value problem for a first-order differential equation with a sign-indefinite operator coefficient,* Dokl. Akad. Nauk BSSR., **24** (1980), No. 8, 688-690, (Russian).

[45] G.W. Clark, S.F. Oppenheimer, *Quasireversibility methods for non-well posed problems,* Elect. J. Diff. Eqns., **8** (1994), 1-9.

[46] A. Constantinescu, D. Ivaldi, and C. Stolz, *Identification du chargement thermique transitoire par contrôle optimal,* 2004.

[47] C. Cosner, W. Rundell, *Extension of solutions to second-order partial differential equations by the method of quasireversibility,* Houston J. Math., 10 (1984), No. 3, 357-370.

[48] W. Craig and S. Weinstein, *On determinism and well-posedness in multiple time dimensions*, Proc. R. Soc. A, 2009, 465, 3023-3046.

[49] Yu.L. Daletskiĭ, N.D. Tsvintarnaya, *Diffusion random functions of multidimensional time,* Ukrain. Mat. Zh., 34 (1982), No. 1, 20-24, (Russian).

[50] B. Delattre, D. Ivaldi, and C. Stolz, *Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique,* Pages 393-404 of : REEF, Giens '01, 2001.

[51] R. deLaubenfels, *Polynomials of Generators of Integrated Semigroups,* Proc. Amer. Math. Soc. **99**, 105-108, 1987.

[52] R. deLaubenfels, *Entire solutions of the abstract Cauchy problem,* Semigroup Forum **42**, 83-105, 1991.

[53] A.A. Dezin, *General questions in theory of boundary value problems,* Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag, (1980).

[54] D.N. Hào, T.D. Van and R. Gorenflo, *Toward the Cauchy Problems for the Laplace Equations*, vol 27(Warsaw : Polish Academyof Sciences) pp 111-28, 1992.

[55] D.N. Hào, V.D. Nguyen and D. Lesnic, *A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems **25**(2009)055002 (27pp).

[56] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators, Part I,* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.

[57] Engl, H. W. *Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates,* J. Optim. Th. and Appl., 52, 209-215 (1987).

[58] Engl, H. W., Anderssen, R. S. *The role of linear functionals in improving convergence rates for parameter identification via Tikhonov regularization,* In M. Yamaguti, et al. (eds.), Inverse problems in engineering sciences. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).

[59] Engl, H. W., Groetsch, C. W. *(eds.). Inverse and ill-posed problems,* Academic Press (1987).

[60] Engl, H. W., Neubauer, A. *Optimal parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization,* In l H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), Inverse and ill-posed problems. Academic Press (1987).

[61] L.V. Fardigola, *A Stabilizability Criterion for Differential Equations with Constant Coefficients in the Entire Space*, Differential Equations, Vol. 36, No. 12, 2000, 1863-1871. Translated from Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 36, No. 12, 2000, 1699-1706.

[62] L.V. Fardigola, *On A Two-Point Nonlocal Boundary Value Problem In A Layer For An Equation With Variable Cofficients,* Siberian Mathematical Journal, Val. 38, No. 2, 1997.

[63] L.V. Fardigola, *Test For Propriety In A Layer Of A Boundary Problem With Integral Condition*, Translated from Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 42, No. ii, 1546-1551, November, 1990.

[64] L.V. Fardigola, *Well-Posed Problems In A Layer With Differential Operators In Boundary Conditions*, Translated from Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 44, No. 8, 1083-1090, August, 1992.

[65] H.O. Fattorini, *The abstract Goursat problem,* Pacific. J. Math., Vol. 37 (1971), No. 1, 51-83.

[66] V. M. Filippov, *On a variational method for ultraparabolic equations,* Analysis of information-computing systems, 107-111, Univ. Druzhby Narodov, Moscow, 1986, (Russian).

[67] J.G. Foster, B. Müller, *Physics With Two Time Dimensions,* Complexity Science Group, Department of Physics, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4, 2010.

[68] A. Friedmann, W. Littman, *Partially characteristic boundary problems for hyperbolic equations*, Journ. of Math. and Mech, 12 (1963), 213-224.

[69] A. Friedmann, *The Cauchy problem in Several time variables*, Journ. of Math. and Mech, 11 (1962), 859-889.

[70] L. Garding, *Cauchy's Problem for hyperbolic equations,* University of chicago, Lectures notes, (1957).

[71] H. Gajewski, K. Zaccharias, *Zur regularisierung einer klass nichtkorrekter probleme bei evolutionglei-chungen,* J. Math. Anal. Appl., Vol. **38** (1972), 784-789.

[72] N.S. Gencev, *On ultraparabolic equations,* Dok. Akad. Nauk SSSR., 151, No. 2 (1963), 265-268.

[73] D. Gilbard, N. Trudinger, *Elliptic partial differentials equations of second order*, Springer-Classic in Mathematics, 1998.

[74] S.G. Gindikin, *A generalization of parabolic differential operators to the case of multidimensional time,* Dokl. Akad. Nauk SSSR., 173 (1967), 499-502, (Russian).

[75] D.G. Gordeziani, G.A. Avalishvili, *Time-nonlocal problems for Schrödinger type equations*, I. Problems in abstract spaces, Diff. Eqs., Vol. 41 (2005), No. 5, 703-711.

[76] D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, *Time-Nonlocal Problems for Schrödinger Type Equations :II. Results for Specific Problems*,Diff. Eqs., Vol. 41, No. 6, 852-859, 2005.

[77] D. Gordeziani , G. Avalishvili and M. Avalishvili, *On nonclassical multi-time evolution equation in abstract spaces,* Bull. Georgian Acad. Sci., Vol. 172, No. 3 (2005), 384-387.

[78] A. Guezane-Lakoud, F. Rebbani, *Strong solution for an abstract non local boundary value problem,* Int. J. Appl. Math., **4** (2000), No. 4, 469-478.

[79] A.V. Gulshak, *Properties of solutions of equations containing powers of an unbounded operator,* Diff. Eq., Vol. **39**, No. 10 (2003), 1428-1439.

[80] J. Hadamard. *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*,Yale Uni Press, New Haven, 1923.

[81] E.M. Hernández, *A remark on second order differential equations with nonlocal conditions,* Cadernos de Matematica **04** (2003), Artigo numero SMA 177, 299-309.

[82] E. Hille and R. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups,* AMS Colloquium Publications Vol. 31, AMS, Providence, 1957.

[83] P. Hillion, *The Goursat problem for maxwell's equations*. J. Math. Phys, 31 (1990), 3085-3088.

[84] Y. Huang, Q. Zheng, *Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups,* J. Differential Equations, Vol. **203** (2004), No. 1, 38-54.

[85] Y. Huang, Q. Zheng, *Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems,* Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 3005-3012.

[86] C.H. Huang and Y.L. Tsai, *A transient 3-D inverse problem in imaging the time-dependent local heat transfer coefficients for plate fin,* Applied Thermal Engineering, **25**, 2478-2495, 2005.

[87] C.H. Huang and H.C. Lo, *A three-dimensional inverse problem in predicting the heat fluxes distribution in the cutting tools,* Numerical Heat Transfer,part A, **48**, 1009-1034, 2005.

[88] M. Iannelli, *Mathematical theory of age-structured population dynamics*, Giardini Editori e Stampatori, Pisa, 1995.

[89] V.S. II'kiv, B.I. Ptashnyk, *Problems for partial differential equations with nonlocal conditions,* Metric approach to the problem of small denominators, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. **58**, No. 12, (2006).

[90] V. S. Il'kiv, B. I. Ptashnyk, *An ill-posed nonlocal two-point problem for systems ofpartial differential equatins*, Siberian Mathematical Journal, Vol. **46**, No. 1, 94-102, 2005.

[91] A.M. Il'in, R.W. Khas'minskiĭ, *On equations of Bownian motion*, Theory Probab.Appl. 9 (3) (1964), 421-444.

[92] A.M. Il'in, *On certain class of ultraparabolic equation,* Dok. Akad. Nauk SSSR., 159, No. 6 (1964), 1214-1217.

[93] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differeential equations,* 2^{nd} edn (Berlin : Springer) 2006.

[94] V.K. Ivanov, I.V. Mel'nikova and A.I. Flinkov 1995 *Operator-Differential equations and Ill-posed Problems,* (Moscow : Nauka)(in Russian)

[95] D. Jackson, *Existence and uniqeness of solutions to semilinear nonlocal parabolic equations,* J. Math. Anal. Appl., **172** (1993), 256-265.

[96] F. John, *A note on improper problems in partial differential equations,* Comm. Pure Appl. Math. **8**, 494-495, 1955.

[97] F. John, *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound,* Comm. Pure Appl. Math. **13**, 551-585, 1960.

[98] J. Jong Soo, *Existence results for nonlinear functional evolution equations with nonlocal initial conditions,* Panamer. Math. J., **13** (2003), No. 2, 37-56.

[99] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer-Verlag Berlin Heidelber, (1995).

[100] R.J. Knops, ed., *Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity,* Lecture Notes in Math. **316**, Springer, New York, (1973).

[101] V.I. Korzyuk, *The method of enegy inequalities and molifying operators,* Vestnik Belgosuniversiteta. Ser. **1**. Fizika, Matematika, Informatika, **3** (1996), 55-71 (Russian).

[102] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, *On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations,* Leningrad Math. J., 1 (1990), No. **5**, 1207-1228.

[103] S.G. Krein, *Linear differential equation in Banach space*, Moskow, Nauk 1972, Engl-Trans, Amer. Math. Soc, 1976.

[104] S.G. Krein, O.I. Prozorovskaja, *Analytic semi-groups and incorrect problems for evolutionary equations,* Dokl. Akad. Nauk SSSR., **133** (1960), 277-280.

[105] P. Kügler, *Identification of a temperature dependent heat conductivity from single boundary measurements,* SIAM J. Numer. Anal., **41**(4), 1543-1563, 2003.

[106] S.K. Kulkarni, M. T. Nair, *Characterization of closed range operators,* Indian J. Pure and Appl. Math., **31** (4), 353-361, (2000).

[107] R. Lattès, J. L. Lions, *The Method of Quasireversibility,* Applications to Partial Differential Equations, Amer. Elsevier, New-York, (1969).

[108] M.M. Lavrent'ev, *On the Cauchy problem for the Laplace equation,* (In Russian). Izvest. Akad. Nauk SSSR (Ser. Matem.) **20**, 819-842, 1956.

[109] M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov and G.P.Shishatskii, *Ill-posed Problems in Mathematical Physics and Analysis,* (Providence, RI : American Mathematical Society) 1986.

[110] B. Lecampion and A. Constantinescu, *Sensitivity analysis for parameter identification in quasistatic poroelasticity,* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **29**, 163-185, 2005.

[111] B. Lecampion, A. Constantinescu and D. Nguyen Minh, *Parameter identification for lined tunnels in a viscoplastic medium,* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **26**, 1191-1211, 2002.

[112] J. Leray, *Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients,* Priston, Just for Adv. Study., 1952.

[113] H. A. Levine, *Logarithmic convexity and the Cauchy problem for some abstract second-order differential inequalities,* J. Differential Equations, **8** (1970), 34-55.

[114] Y. Li Qin, W. Yuan Di, *Parabolic partial differential equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions,* Comm. Appl. Math. Comput., **19** (2005), No. 1, 1-10.

[115] I.V. Melnikova and A. I. Filinkov, *Abstract Cauchy Problems : Three Approaches,* Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **120**, Chapman and Hall, Boca Raton, FL, **2001.**

[116] I.V. Melnikova, *Regularization of ill-posed differential problems,* Siberian Math. J. 33 289-98, 1992.

[117] N.S. Mera, L. Elliot, D.B. Ingham and D. Lesnic, *Comparison of a genetic algorithm and a gradient based optimisation technique for a three-dimensional boundary detection problem,* In : Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, 2005.

[118] V.P. Mikhailov, *The analytic solutions of Goursat problem for the system of differential equations,* Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady 115 (1957), 450-453].

[119] V.P. Mikhailov, Non-analytical solutions of Goursat's problem for a system of differential equations in two independent variables, Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady 117 (1957), 759-762].

[120] K. Miller, *Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well posed problems,* Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics, 316 (1973), Springer-Verlag, Berlin, 161-176.

[121] M. Motta, F. Rampazo, *Nonsmooth multitime Hamiltan-Jacobi systems*, Indiana university Mathematics journal, 55, 5, 2006.

[122] A.M. Nakhushev, *Equations of mathematical biology* [in Russian], Vysshaya Shkola, Moscow (1995).

[123] D.G. Park, J.M. Jeong, and H.G. Kim, *Regularity For Semilinear Nonlocal Problems With Boundary Input Maps*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 15, No. 2, 247-261, 2009.

[124] L. Payne, *Improperly Posed Problems in Patial Differential Equations,* (PHiladelphia : SIAM) 1975.

[125] L. Payne, *Bounds in the Cauchy problem for Laplace's equation,* Arch. Rational Mech. Anal. **5**, 35-45, 1960.

[126] S.P. Petrat, *Evolution equations for multi-time wave functions,* Thèse à l'université de New Jersey, USA, 2010.

[127] L.G. Petrovsky, *Über das Cauchyshe problem für system von linearen partiallen differentialgeinchungen in Gebit der nichtanalystischen funktionen,* Bull. Univ. d'état, Moskow, No. **7**, (1938), 1-74.

[128] A. Pitea, C. Udriste, S. Mititelu, *PDI et PDE-constrained optimization problems with curvilinear functional quotients as objective vectors*, Balkan journal of Geometry and its applications, Vol.14, No.2, 2009, pp. 75-88.

[129] V. Plana, P. Reulet and P. Millan, *Experimental characterization of the thermophysical properties of composite materials by an inverse heat conduction method,* J. of Composite Materials, **40**(14), 1247-1258, 2006.

[130] B.I. Ptashnyk, P.I. Shtabalyuk *Multipoint problem for hyperbolic equations in a class of functions almost periodic with respect to spatial variables,* Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya, **35**, 210-215 (1992).

[131] B.I. Ptashnyk, M.M. Symotyuk, *Multipoint problem for nonisotropic partial differential equations with constant coefficients,* Ukrainian Mathematical Journal, Vol. **55**, No. 2, (2003).

[132] C. Pucci, *Sui problemi di Cauchy non ben posti,* Rend. Accad. Naz. Lineci **18**, 473-477, 1955.

[133] S.G. Pyatkov, *Solvability of boundary value problems for an ultraparabolic equation : in Nonclassical Equations and Equations of Mixed Type,* Sbornik Nauchnikh Trudov, Institute of Mathematics, Novosibirsk, (1990), 182-197, (Russian).

[134] M. Raynaud and J. Bransier, *A new finite-difference method for the nonlinear heat conduction problem,* Numerical Heat Transfer, **9**(1), 27-42, 1986.

[135] F. Rebbani, N. Boussetila and F. Zouyed, *Boundary value problem for a partial differential equation with nonlocal boundary conditions*, Proceeding of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Vol.10 (2001), 122-125.

[136] F. Rebbani, F. Zouyed, *Boundary value problem for an abstract differential equation with nonlocal boundary conditions,* Maghreb Math. Rev., Vol. **8** (1999), No. 1 et 2, 141-50.

[137] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics,* Vol.**I** : Functional Analysis, Academic Press, New York, **1972**.

[138] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics,* Vol.**II** : Fourier Analysis, Self-Adjointness, Academic Press, New York, **1975**.

[139] A.D Rendall, *The characteristic initial value problem of the Einstein equations*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 253 (1992).

[140] H. Risken, *The Fokker-Plank Equation. Methods of solution and application*, Springer, Berlin, 1984.

[141] K. Schugerl, *Bioreaction engineering. Reactions nvolving microorganisms and cells, in : Fundamentals, Thermodynamics,* Formal Kinetics, Idealized reactors types and operation modes, vol. 1, Wiley (1987).

[142] V.V. Shelukhin, *A time-nonlocal problem for equations of the dynamics of a barotropic ocean,* Sibirsk. Mat. Zh., **36** (1995), No. 3, 701-724, (Russian). [Translation in Siberian Math. J. , **36** (1995), No. 3, 608-630].

[143] Yu. T. Sil'chenko, *A Parabolic Equation With Nonlocal Conditions*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 149, No. 6, 2008.

[144] W.J. Roth, *Goursat problems for* $u_{rs} = Lu$, Indiana. Univ. Math. J., Vol. 2 (1973), No. 8, 779-788.

[145] V.B. Shakhmurov, *Linear and nonlinear nonlocal boundary value problems for differential operator equations*, Appl. Anal., 85 (2006), No.6-7, 701-716.

[146] R.E. Showalter, *The final value problem for evolution equations,* J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 563-572.

[147] R.E. Showalter, *Quasi-reversibility of first and second order parabolic evolution equations.* Improperly posed boundary value problems (Conf., Univ. New Mexico, Albuquerque, N.M., 1974), 76-84. Res. Notes in Math., No. 1, Pitman, London, (1975).

[148] R.E. Showalter, *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations,* Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier (1983).

[149] M. M. Symotyuk, N. M. Zadorozhna, *A nonlocal boundary value problem for differential equations with fractional time derivative with variable coefficients*, Journal of Mathematical Sciences, Vol . 107 , No. 1 , 2001.

[150] S.A. Tersenov, *Basic boundary value problems for one ultraparabolic equation*, Sebernian Mathematical journal, Vol. 42, No. 6 (2001), 1173-1189.

[151] Tarantola, A. *Inverse problem theory.* Elsevier (1987).

[152] Tarantola, A. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation.* SIAM (2005).

[153] N.N Tarkhanov, *The analysis of solutions of elliptic equations*, Springer-Verlag, Gmbh, 2007.

[154] S.A. Tersenov, *Ultraparabolic equations and unsteady heat transfert*, J.Evol.Equ. 5 (2005), 277-289.

[155] Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y. *Solutions to ill-posed problems.* Winston-Wiley, New York (1977).

[156] C. Udriste, *Finsler Optimal Control and Geometric Dynamics*, American Conference on Applied Mathematics(Math'08), Harvard, Massachusetts, USA, March 24-26, 2008.

[157] C. Udriste,*Multitime controllability, observability and bang-bang principale* Journal of optimization theory and applications, volume 139, Number 1, 141-157, 2008.

[158] C. Udriste, *Lagrangians constructed from Hamiltonian systems*, Mathematics a Computers in Business and Economics, Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Mathematics a Computers in Business and Economics(MCBE-08), Bucharest, Romania, June 24-26, 2008, 30-33.

[159] C. Udriste, *Simplified multitime maximum principle* Balkan Journal of Geometry and its applications, Vol.14, No.1, 2009, pp. 102-119.

[160] C. Udriste, *Nonholonomic approach of miltitime principle* Balkan Journal of Geometry and its applications, Vol.14, No.2, 2009, pp. 101-116.

[161] C. Udriste, I. Tevy, *Multitime linear-quadratic regulator problem based on curvilinear integral* Balkan Journal of Geometry and its applications, Vol.14, No.2, 2009, pp. 117-127.

[162] C. Udriste, *Equivalence of multitime optimal control problems* Balkan Journal of Geometry and its applications, Vol.15, No.1, 2010, pp. 155-162.

[163] J. Uglum, *Quantum cosmology of* $\mathbb{R} \times S^2 \times S^1$, Physical Review. D (3). 46, (1992), 4365-4372.

[164] P.N. Vabishchevich, *Nonlocal parabolic problems and the inverse heat-conduction problem,* Differentsial'nye Uravneniya **17** 1193-9, (in Russian), 1981.

[165] P.N. Vabishchevich, *Numerical Solution of nonlocal elliptic problems*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. mat. 13-9(in Russian), 1983.

[166] P.N. Vabishchevich and A.Y. Denisenko, *Regularization of nonstationnary problems for elliptic equations*, J. Eng. Phys. Thermophys. **65** 1195-9, 1993.

[167] P.N. Vabishchevich and P.A. Pulatov, *A methode of numerical solution of the Cauchy problem for elliptic equations*, Vestnik Moscow. Univ ; Ser. XV Vychisl. Mat.Kibernet. 3-8(in Russian) 1984. J. Eng. Phys. Thermophys. **65** 1195-9, 1993.

[168] V.S. Vladimirov, Yu. N. Drozhzhinov, *Generalized Cauchy problem for an ultraparabolic equation,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 31 (1967), 1341-1360, (Russian). [English transl : Math. USSR-Izvestija, 1, 1285-1304].

[169] O. D. Vlasii, B. I. Ptashnyk, *A problem with nonlocal conditions for partial differential equations with variable coefficients*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 53, No. 10, 2001.

[170] R. Volevič, S. G. Gindikin, *The Cauchy problem for ultraparabolic problems,* Diff. Eqs.II, MATH USSR SB., (1969), 7 (2), 205-226.

[171] W. Wolfgang, *Parabolic differential equations and inequalities with several time variables,* Math. Z., 191 (1986), No. 2, 319-323.

[172] C.Y. Yang, *Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems,* Applied Mathematical Modelling, **23**, 469-478, 1999.

[173] N.I. Yurchuk, *The Goursat problem for second order hyperbolic equations of special kind*, Diff. Uravn, 4 (1968), (a), 1333-1345 (Russian). [English transl-Diff. Equat, 694-700].

[174] N.I. Yurchuk, *A partialy characteristic boundary value problem for a particular type of partial differential equation. I*, Diff. Uravn, 4, 2258-2267 (Russian). [English. Transl-Diff. Equat, 1167-1172].

[175] N.I. Yurchuk, *A partialy characteristic mixed boundary value problem with Goursat initial conditions for linear equations with two-dimensional time*, Diff. Uravn, 5 (1969), (b), 898-910 (Russian). [English Trans-Diff. Equat, 652-661].

[176] N.I. Yurchuk, *An a priori estimate for the convergence of a modified quasi-inversion method,* Nonlinear analysis and related problems, (1999), 155-158, Tr. Inst. Mat. Minsk., **2**, Natl. Akad. Nauk Belarusi, Inst. Mat., Minsk, (Russian).

[177] A.Yu. Shcheglov, *Uniform approximation of a solution of an inverse problem by the quasi-reversibility method.* Mat. Zametki., **53** (1993), No. 2, 168-174, (Russian). [Translation in Math. Notes **53** (1993), No. 1-2, 235-239].

[178] F. Zouyed, F. Rebbani and N. Boussetila, *On a class of multitime evolution equations with non-local initial conditions,* Abstract and Applied Analysis. Volume 2007, Article ID 16938, 26 pages, doi :1155/2007/16938.

[179] F. Zouyed, *Étude de Certaines Équations Différentielles Abstraites Avec Des Conditions Aux Limites Non Locales,* thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, 2007.

