

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار
عناية

Année 2016

Faculté des Sciences

Département de Physique

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Optique Non Linéaire

Par :

M. BOUBIR BADREDDINE

THÈME :

Modélisation de la propagation des solitons dans un milieu non linéaire

Soutenue le : 22 / 05 /2016

DIRECTEUR DE THESE : Triki Houria Prof. Université d'Annaba

DEVANT LE JURY

Ghers Mokhtar	Prof. Université d'Annaba	Président
El Akrmi Abdulsettar	Prof. Université d'Annaba	Examineur
Bouزيد Samia	Prof. Université de Constantine	Examineur
Sid Abdelaziz	Prof. Université de Batna	Examineur
Aouachria Mekki	Prof. Université de Batna	Examineur

***Laboratoire de Physique des
Rayonnements***

إهداء

إلى من اناروا لي درب حياتي وحرصوا على إجتهادي

إلى من أعانوني بالصلوات والدعوات

إلى من لم يبخلوا بشيء لدفعي في كل خطوات حياتي

إلى من ساندوني وازروني في كل الصعاب

إلى من لا تكفي الكلمات أن توفي حقهما

إلى أحب ما لدي في الدنيا

إلى والدي العزيز ووالدتي الغالية



إلى من كانوا عوناً لي في الحياة وصعوباتها

إلى من قاسمت معهم أجمل أيام حياتي

إلى إخوتي



إلى من ساندتني وآزرتني وقاسمتني فرحتي واحزاني

إلى زوجتي



إلى قرة عيني و ربيع حياتي إبني الغالي عبدالرحمان



Résumé

L'équation de Korteweg-de Vries (KdV) constitue un modèle unidimensionnel générique pour l'étude de la propagation non linéaire des ondes dans les milieux physiques faiblement dispersifs. Elle joue un rôle prédominant dans la théorie des solitons du fait qu'elle modélise une variété de phénomènes non linéaires, y compris les ondes acoustiques ioniques dans les plasmas, les ondes en eau peu profonde et bien d'autres.

Une question évidente se pose : comment est la propagation des ondes lorsqu'elles se déplacent sur une surface non-uni-dimensionnelle ? Qui est, bien sûr, la situation physique. Dans ce contexte, un travail de recherche approfondi a été fait dans le développement de modèles de dimension supérieure, en particulier ceux à deux dimensions. La généralisation à deux dimensions la plus naturelle de l'équation KdV est celle dérivée par Novikov et Veselov, appelée l'équation de Novikov-Veselov (NV).

L'objectif de ce travail de thèse est l'étude, essentiellement théorique, des propriétés de propagation non linéaire des ondes au sein des systèmes modélisés par l'équation Novikov-Veselov. La construction des solutions de type soliton a été faite. De plus, l'étude de la dynamique de propagation non linéaire des solitons pour différentes variantes de l'équation NV a été réalisée. Ce travail a fait l'objet d'une publication internationale dans le journal *Applied Mathematical Modelling*.

Abstract

The Korteweg-de Vries equation (KdV) is a generic one-dimensional model for the study of nonlinear wave propagation in weakly dispersive physical media. It plays a leading role in the soliton theory because it models a variety of nonlinear phenomena, including ion acoustic waves in plasmas, waves in shallow water and many others.

An obvious question arises: how is the propagation of waves when they move on a non-one-dimensional area? Which is, of course, the physical situation. In this context, a thorough research has been done in the development of higher-dimensional models, particularly those with two dimensions. The most natural generalization in two dimensions of the KdV equation is that derived by Novikov and Veselov, called The Novikov-Veselov equation (NV).

The objective of this thesis is the study, mainly theoretical, of the nonlinear wave propagation properties within systems modeled by the Novikov-Veselov equation. The construction of soliton solutions was made. Thus the study of the nonlinear propagation dynamic of solitons for different variants of the NV equation was performed. This work has been published in the international journal Applied Mathematical Modelling (ELSEVIER).

تمثل معادلة كورتويويغ دي فرايس (KdV) نموذج عام احادي الأبعاد لدراسة الانتشار الأخطي للموجات في الأوساط الفيزيائية ضعيفة التشتت. إنها تلعب دوراً قيادياً في نظرية الأمواج المنفردة نظراً لأنها تمثل نموذجا لعدد من الظواهر الأخطية ، بما في ذلك الموجات الصوتية الايونية في البلازما والأمواج في المياه السطحية وغيرها.

سؤال مهم يطرح نفسه: كيف يكون انتشار الموجات عندما تتحرك في وسط غير احادي الأبعاد؟ وهو بطبيعة الحال الحالة الفيزيائية الحقيقية. للإجابة على هذا السؤال ، أنجزت العديد من الأبحاث لتطوير نماذج متعددة الأبعاد ، خاصة تلك التي هي ثنائية الأبعاد. التعميم ثنائي البعد الأكثر طبيعي لمعادلة KdV هي المكتشفة من قبل نوفيكونوف وفيسيلوف والمسماة معادلة نوفيكونوف فيسيلوف (NV).

الهدف الرئيسي لهذه الأطروحة هو الدراسة النظرية لخصائص الانتشار الأخطي للموجات داخل الأوساط الفيزيائية المنمذجة بمعادلة نوفيكونوف فيسيلوف. تم الحصول على حلول من نوع الأمواج المنفردة. وكذلك تمت دراسة ديناميكية الانتشار الأخطي للأمواج المنفردة لأنواع مختلفة من المعادلة NV. وقد تم نشر هذا العمل في المجلة العلمية الدولية: (ELSEVIER) Applied Mathematical Modelling.

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de physique des rayonnements (LPR) du département de physique de l'université Badji Mokhtar Annaba.

Je tiens à exprimer mon entière reconnaissance, tout d'abord, à l'ancien Directeur de LPR, et qui été aussi mon directeur de mémoire de magistère, le Professeur **Abdessetar El AKRMI**. Je le remercie chaleureusement de m'avoir accueilli, encadré, soutenu et qui a toujours été là pour moi et tous les membres du labo.

Je tiens à profiter de cette occasion pour exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à la directrice de cette thèse de doctorat **Pr. Houria TRIKI**. D'abord, Je la remercie et la félicite pour ça remarquable pédagogie d'enseignement, car en effet, mon envie d'entrer dans ce domaine de recherche revient aux cours d'optique non linéaire de première année de magistère, dont elle été chargée. Depuis ce temps-là, je souhaité pleinement d'être encadré par vous, **Pr. Houria TRIKI**. Ensuite, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance d'avoir cru en moi et de m'avoir proposée ce sujet de thèse. Durant ces années de travail, elle a été toujours disponible malgré un emploi du temps très chargé. **Pr. Houria TRIKI** بَارِكْ اللهُ فِيكَ.

Mes remerciements les plus sincères sont adressés à Monsieur **Mokhtar GHERS**, Professeur à l'université Badji Mokhtar d'Annaba, qui m'a honoré d'avoir accepté de présider le jury.

J'adresse mes respectueux remerciements à Madame **Samia BOUZID**, Professeur à l'université de Constantine, Messieurs **Abdelaziz SID** et **Mekki AOUACHRIA**, Professeurs à l'université de Batna et Monsieur **Abdessetar El AKRMI**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens de part cette opportunité d'exprimer toute ma gratitude et mes remerciements à ceux qui ont toujours été là depuis le début de mon existence, à ceux que nul mot ne saurait décrire les sentiments que je porte à leurs égard, à mes parents : 'Boubir Salah et Seridi Dalila'. Je remercie ma petite famille, mon épouse 'Ahlem' qui m'a soutenue tout au long de mon parcours, et mon fils Abderrahmane qui a chamboulé notre vie. J'adresse aussi mes chaleureux remerciements à mes frères : 'Salim', 'Sofiane' et 'Akram', et à ma bien aimer sœur 'Amira'.

Mes remerciements les plus particuliers à mon frère, amie et camarade de parcours : *'Abdel Kader DAOUI'*. Nous avons partagé ensemble tout au long de notre parcours des moments inoubliables. Je le remercie pour son aide durant ces années. Je lui souhaite de tout mon cœur une bonne continuation dans sa quête de savoir, et j'espère qu'on le parcourra ensemble.

Je remercie également tous mes amis : *Adel, Sofiane, Kader, Rochdi, Mounir, Mourad, Radouane, Saad* et tous ceux qui m'ont soutenu.

Finalement, je remercie tous mes collègues de travail à l'unité de recherche en optique et photonique (UROP) à Sétif.

TABLE DES MATIERES

Introduction Générale..... i

CHAPITRE I : Introduction à l'optique non linéaire

1. Introduction	4
2. Origine de la non linéarité optique.....	3
3. Polarisation non linéaire.....	5
3.1. Mécanismes responsables de la polarisation non linéaire.....	6
3.1.1. Distorsion du nuage électronique.....	6
3.1.2. Polarisation ionique.....	6
3.1.3. Réorientation moléculaire.....	6
3.1.4. Mouvement acoustique induit.....	6
3.1.5. Changement de population Induit.....	7
3.1.6. Redistribution spatiale des électrons.....	7
4. Susceptibilité non linéaire.....	7
4.1. Susceptibilité non linéaire du second ordre.....	8
4.1.1. Symétrie de Kleinman.....	10
4.1.2. Effets non linéaires du second ordre.....	10
4.1.2.1. Génération de la seconde harmonique.....	11
4.1.2.2. Génération par somme et différence de fréquences.....	12
4.2. Susceptibilité non linéaire du troisième ordre.....	13
4.2.1. Effet Kerr optique.....	14
4.2.2. Génération de la troisième harmonique.....	15
4.2.3. Mélange à quatre ondes.....	16
4.2.4. Effet Raman et effet Brillouin stimulés.....	17
5. Equation de propagation non linéaire.....	17
5.1. Équations de Maxwell.....	17
5.2. Solitons (Soliton Spatial et temporel).....	18
6. Théorie des Solitons et ses équations.....	19
6.1. Soliton où onde solitaire ? Définition et découverte.....	19
6.2. Équations avec Soliton comme solutions.....	21
6.2.1. Équation de Korteweg et de Vries.....	21
6.2.2. Équation de Schrödinger non linéaire.....	22
6.2.3. Équation de sine-Gordon.....	23
7. Conclusion.....	24
Références.....	26

CHAPITRE II : Dynamique des Solitons Korteweg-de Vries

1. Introduction	29
------------------------------	-----------

2. Dérivation de l'équation KdV	31
3. Propriétés de l'équation KdV	37
3.1. Solution « Soliton ».....	37
3.2. Lois de conservation de l'équation KdV.....	39
3.3. Hamiltonien de l'équation KdV.....	40
4. Non linéarité-Dispersion, équilibre et stabilité	42
5. Différentes formes de l'équation KdV	44
5.1. Equation KdV de troisième ordre.....	44
5.2. Equation KdV de cinquième ordre	46
5.3. Equation KdV de septième ordre	46
5.4. Equation KdV de neuvième ordre	46
5.5. Equation KdV à coefficients variables	47
6. Méthodes analytiques pour résoudre l'équation KdV	47
6.1. Méthode de diffusion inverse	47
6.1.1. Diffusion directe.....	49
6.1.2. Evolution temporelle des données de diffusion.....	49
6.1.3. Diffusion inverse	49
6.2. Méthode bilinéaire de Hirota	50
7. Méthodes numériques pour l'équation KdV	52
7.1. Méthode des différences finies.....	52
7.2. Méthode de la décomposition d'Adomian	53
8. Conclusion	55
Références	56

CHAPITRE III : Formes multidimensionnelles de l'équation Korteweg de-Vries

1. Introduction	60
2. Equation de Kadomtsev-Petviashvili	61
2.1. Dérivation	62
2.2. Hamiltonien de l'équation KP.....	62
2.3. Solutions Soliton	63
3. Equation de Zakharov–Kuznetsov	65
3.1. Lois de conservation de l'équation ZK	66
4. Equation de Novikov-Veselov	67
4.1. Dérivation	67
4.2. Obtention de l'équation KdV via la triplette L-A-B.....	68
4.3. Lois de conservation de l'équation NV	69
4.4. Différentes formes de l'équation NV	70
4.4.1. Equation NV généralisée	71
4.4.2. Equation NV modifiée.....	71
4.4.3. Equation Nizhnik-Novikov-Veselov.....	72

4.4.4. Equation NNV généralisée	72
4.4.5. Equation NV Non-dispersive	72
5. Conclusion	73
Références	74

CHAPITRE IV : Dynamique de propagation non linéaire des solitons Novikov-Veselov

1. Introduction	79
2. Ondes solitaires pour une équation NV à coefficients constants	81
3. Ondes solitaires pour une équation NV à coefficients variables	84
4. Ondes solitaires pour une équation NV (m, n) avec un terme d'évolution généralisé....	89
5. Ondes solitaires pour l'équation NV à (1+N)-dimensions	92
6. Discussions : dynamique de propagation non linéaire des solitons NV	97
6.1. Milieux homogènes.....	98
6.2. Milieux inhomogènes.....	99
6.2.1. Effet des pertes sur la propagation	100
6.2.2. Effet de la dispersion	102
7. Conclusion	106
Références	107

Conclusion générale

Introduction Générale

Durant les dernières décennies, la théorie des solitons est devenue un domaine de recherche très actif due à son importance dans de nombreuses branches de la physique telles que l'optique non linéaire, les plasmas et la mécanique des fluides. Un soliton est une forme spéciale d'onde pouvant se propager sans déformation sur de longues distances. Cela n'est toutefois pas la seule propriété particulière de cette onde. En effet, une autre caractéristique est que les solitons conservent leurs formes et vitesses après collision avec d'autres solitons voisins. Les solitons peuvent se propager dans une variété de milieux et ils sont utilisés dans de nombreuses applications. Dans certaines substances, ils peuvent porter une charge électrique. Lorsque ces solitons chargés voyagent à travers certaines chaînes de polymères, les chaînes ont tendance à se courber. Cette propriété peut être un jour utilisée dans des applications telles que les muscles artificiels. Les solitons sont également utilisés dans les télécommunications optiques où ils peuvent transférer de grandes quantités d'informations sur de grandes distances sans erreurs dans le signal [1]. Ils trouvent aussi d'autres applications à savoir dans les fibres optiques photoniques, les lasers à fibre, les systèmes moléculaires, la cosmologie et la physique de la matière condensée [2]. Ainsi, une énorme quantité de travail de recherche a été menée au cours des quatre dernières décennies pour faire plus de progrès dans la compréhension du phénomène soliton.

La première observation d'une onde avec des caractéristiques similaires à celles d'un soliton a été faite en 1834 par John Scott Russell (un ingénieur naval écossais). Ce fut le début d'un tout nouveau domaine d'étude auquel les scientifiques au fil des années ont largement contribué. En général, un soliton est une solution exacte à une famille spéciale d'équations aux dérivées partielles non linéaires (EDPNL). En outre, la plupart des phénomènes physiques de la dynamique des fluides, la physique des plasmas, la propagation des ondes en eau peu profonde, et de nombreux autres modèles sont contrôlés au sein de son domaine de validité par des équations aux dérivées partielles non linéaires [3]. Aujourd'hui, il y a un certain nombre d'équations connues pour avoir des solutions solitons dont la plus célèbre d'entre elles est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV). Les deux Néerlandais, Korteweg et de Vries ont développé une équation aux dérivées partielles non linéaires (KdV) pour modéliser la propagation des ondes en eau peu profonde. Ils ont publié une théorie qui décrit les ondes d'eau peu profonde qui a réduit les observations de Russell à ses caractéristiques essentielles. Dans la fin des années 1960, Zabusky et Kruskal [4] ont étudié l'équation KdV numériquement

puis analytiquement. Ils ont découvert un aspect remarquable des ondes solitaires c'est qu'elles conservent leurs formes et vitesses après collision. Zabusky et Kruskal ont appelé ces ondes "les solitons", car ils ressemblent à des particules dans leur nature. Dans le domaine d'optique non linéaire, Hasegawa et Tappert [5] ont découvert l'existence du soliton dans les fibres optiques en 1973 qui a été ensuite mis en évidence expérimentalement par Mollenauer en 1980 [6].

D'une manière générale, le concept de soliton est toujours lié aux équations aux dérivées partielles non linéaires. Les EDPNL sont devenus un outil utile pour décrire ces phénomènes naturels de la science. Par conséquent, il devient, d'une part, de plus en plus important de se familiariser avec toutes les méthodes traditionnelles et celles récemment développées pour résoudre des équations aux dérivées partielles. D'autre part, cette onde particulière est caractérisée par quatre paramètres : l'amplitude, la position temporelle, la phase, et la fréquence. La dynamique de propagation non linéaire des solitons doit se faire dans le cadre d'une théorie qui tiendra compte de la modification de ces paramètres ainsi que la stabilité de ces ondes localisées.

Cet objectif s'inscrit dans le travail présenté dans ce manuscrit. Il a pour but l'étude essentiellement théorique, des propriétés de propagation des ondes au sein des systèmes faiblement non linéaires et faiblement dispersifs. Nous nous intéressons plus particulièrement à la recherche des solutions de type soliton pour une famille bidimensionnelle d'équations de type KdV. L'influence des variations temporelles des différents paramètres physiques sur la dynamique de propagation non linéaire des solitons a été également étudiée.

Ce manuscrit est présenté en quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous présentons brièvement les principes fondamentaux de l'optique non linéaire ainsi que ses applications prépondérantes.
- Nous rapportons dans le deuxième chapitre les notions théoriques concernant la dynamique de propagation non linéaire des solitons dans un milieu faiblement non linéaire et faiblement dispersif, modélisée par l'équation de Korteweg-de Vries. Les différentes méthodes analytiques et numériques utilisées pour résoudre les équations d'évolution non linéaires de type KdV seront présentées.

- Dans le troisième chapitre, nous présenterons les généralisations en deux dimensions les plus connues de l'équation KdV. Nous introduisant dans ce chapitre le modèle considéré dans notre travail. Il s'agit de l'équation de Novikov-Veselov (NV).
- Dans le quatrième chapitre, nous exposons les différents résultats de nos calculs théoriques qui traitent la dynamique de propagation non linéaire des solitons dans un système à deux dimensions régie par l'équation NV. Notre étude est effectuée à l'aide de la méthode de l'ansatz d'onde solitaire. Les discussions nécessaires pour expliquer les phénomènes physiques de propagation non linéaire en deux dimensions seront également présentées dans ce dernier chapitre.

Références

- [1] Pam Frost Gordor, Solitons could power molecular electronics, artificial muscles, "<http://www.physorg.com/news71409967.html>" (April 19, 2010).
- [2] Abdul-Majid Wazwaz, "Adomian Decomposition Method Applied to Non-linear Evolution Equations in Soliton Theory", in Robert A. Meyers (Ed.), "Encyclopedia of Complexity and Systems Science", Springer (2009).
- [3] Abdul-Majid Wazwaz, "Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory", Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.
- [4] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, "Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states", Physical Review letters, volume 15, number 6, 9 August 1965.
- [5] A. Hasegawa and F. Tappert, "Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers". Appl. Phys. Lett. 23 (1973) 142-144.
- [6] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, and J.P. Gordon, "Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers". Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 1095-1098.

CHAPITRE I

Introduction à l'optique non linéaire

1. Introduction

L'optique est une partie importante de notre vie quotidienne. La lumière semble passer ou propager par l'espace vide, comme par les objets matériels, et nous fournit des informations visuelles sur notre monde. Les effets familiers de la réflexion, réfraction, diffraction, l'absorption et de la dispersion expliquent une large variété d'expériences visuelles communes à nous, du centre de la lumière par un objectif simple aux couleurs vues dans un arc-en-ciel. Remarquablement, ceux-ci peuvent être expliqués en assignant un petit ensemble de paramètres optiques aux matériaux. Sous les expériences ordinaires de la vie quotidienne, ces paramètres sont indépendants de l'intensité de la lumière qui permet l'observation des phénomènes optiques. C'est le royaume de ce qui s'appelle le l'Optique Linéaire [1].

« La Physique serait terne et la vie plus insatisfaisante si tous les phénomènes physiques qui nous entourent été linéaires. Heureusement, nous vivons dans un monde non linéaire. Alors que la linéarisation embellit la physique, la non-linéarité fournit l'excitation dans la physique »Y. R. SHEN

La Génération de la second harmonique (SHG : Second Harmonique Generation) est le premier effet d'optique non linéaire observé. En effet, l'expérience de La génération de la second harmonique de Franken et *al.* (1961), a marqué la naissance du domaine de l'optique non linéaire. Ils propagèrent le faisceau d'un laser à Rubis à 694,2 nm à travers un cristal de quartz et observèrent la création d'un faisceau de lumière ultraviolette à 347,1 nm. Mais l'optique non linéaire couvre un champ d'application beaucoup plus large. Il traite en général avec l'interaction non linéaire de la lumière avec la matière et comporte des problèmes tels que les changements induits par la lumière des propriétés optiques d'un milieu. Cependant, l'optique non linéaire est devenue un sujet de grand intérêt commun seulement après que le laser a été inventé⁽¹⁾ (1960). Effectivement, une source lumineuse ordinaire est beaucoup trop faible pour une telle expérience, il faut généralement un champ d'environ 1 kV/cm pour induire une réponse non linéaire dans un milieu, ceci correspond à une intensité de faisceau d'environ 2.5 kW/cm². Un tel rayon laser est nécessaire donc pour l'obtention de la génération harmonique optique ou pour d'autres effets d'optique non linéaire [2].

⁽¹⁾ La configuration d'un laser a été inventée par Gordon Gould en 1957. Le premier laser, un laser à Rubis (émettant à 694 nm), a été l'œuvre de Theodore Maiman en 1960.

Dans la nouvelle ère de l'optique non linéaire, les propriétés optiques des matériaux ne sont plus indépendantes de l'intensité de la lumière - comme a été cru pendant des centaines d'années avant - mais plutôt change avec l'intensité de la lumière, donnant lieu à une multitude de nouveaux phénomènes, d'effets et d'applications.

Aujourd'hui, l'optique non linéaire est entrée dans notre vie quotidienne de plusieurs manières et a également servi de base à de nombreuses nouveautés en technologie laser et en spectroscopie. En effet, à partir du moment de la naissance de l'optique non linéaire, la physique des lasers et de l'optique non linéaire ont été intimement liés.

2. Origine de la non linéarité optique

Quelle est la réponse d'un matériau quand il est placé dans un champ électromagnétique optique ? Un matériau peut être essentiellement considéré comme un ensemble de particules chargées, noyaux et électrons, liées les unes aux autres. Soumis à un champ électrique d'une onde optique, les charges tendent à se déplacer : les charges positives dans le sens du champ électrique et les charges négatives dans le sens opposé. Ce déplacement va perturber le nuage des électrons de valence par la force de Coulomb et ainsi induire un moment dipolaire \vec{p} (voir Figure 1.1).

$$\vec{p} = q_i \vec{r}_i \quad (1.1)$$

Puis que les charges positives (les noyaux) ont une masse considérablement plus importante que celle des charges négatives (les électrons), il est possible de considérer selon l'approximation de Born-Oppenheimer que seuls les électrons sont animés d'un mouvement oscillant sous l'action du champ électrique de l'onde lumineuse.

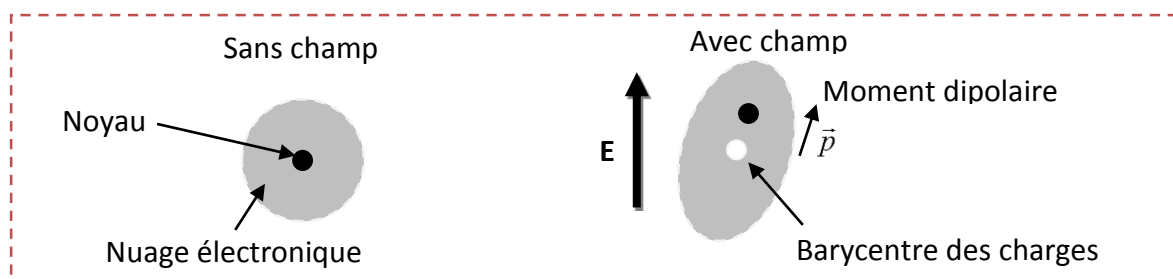


Figure 1.1 : Représentation schématique de l'effet d'un champ électrique sur un atome et son nuage électronique, génération d'un moment dipolaire \vec{p} [3].

Dans l'optique linéaire, le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique selon [4] :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (1.2)$$

Où α est la polarisabilité électronique de l'atome. La polarisation macroscopique électrique globale \vec{P} est obtenue en sommant tous les dipôles dans un volume V de l'échantillon et en divisant par le volume :

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P}_i}{V} \quad (1.3)$$

En supposant une distribution sphérique et uniforme de la charge totale q sur un rayon R , la polarisabilité électronique est approximativement donnée par $\alpha \approx 4\pi\epsilon_0 R^3 q$. Dans un atome d'un nombre atomique Z , le déplacement Δx est donné par :

$$\Delta x = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{Ze} E \quad (1.4)$$

Où e est la charge électronique. Pour un champ électrique de grandeur 10^4 V/m, $R = 0,2$ nm et $Z=8$, le déplacement Δx s'élève à $\approx 10^{-17}$ m. Pour des champs électriques de l'ordre de 10^8 V/m, un claquage du diélectrique s'installe.

Pour un champ électromagnétique d'un LASER, l'intensité d'un faisceau et l'amplitude E du champ électrique sont reliés par :

$$I = \frac{1}{2} cn \epsilon_0 E^2 \quad (1.5)$$

Pour une intensité $I = 10^{14}$ W/m² et $n = 1.5$, on obtient $E \approx 10^8$ V/m, qui est proche de la résistance de rupture des diélectriques [4]. Ainsi, à des intensités LASER bien plus modérées dans les limites de claquage du matériau, il apparaît une *non linéarité* dans la relation caractéristique entre la polarisation d'un milieu et le champ lumineux appliqué. En d'autres termes, une polarisation induite proportionnelle à l'amplitude du champ LASER cesse d'être valable et la polarisation \vec{P} du milieu devient une fonction non linéaire du champ électrique. En effet, elle se développe en série du champ électrique \vec{E} comme suit [5] :

$$\vec{P}(\vec{E}) = \epsilon_0 [\chi^{(1)} \cdot \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots] \quad (1.6)$$

Où $\chi^{(1)}$ représente la susceptibilité linéaire (du premier ordre), $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$ représente la susceptibilité non linéaire du 2^{ème} et 3^{ème} ordre respectivement.

3. Polarisation non linéaire

Généralement le vecteur de polarisation \vec{P} est une fonction d' \vec{E} qui décrit amplement la réponse d'un milieu au champ, et on le connaît souvent comme l'équation constitutive, et qui, pour un milieu isotopique et linéaire, s'écrit (*dans le domaine fréquentielle*) :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \vec{E} \quad (1.7)$$

Et peut également s'écrire en tenant compte des propriétés tensorielle des matériaux, suivant la notation d'Einstein comme :

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j \quad (1.8)$$

Où l'indice i représente l' $i^{\text{ème}}$ coordonnées cartésiennes ($i=x, y, z$), et la somme est sur $j=x, y$ ou z . La susceptibilité linéaire $\chi_{ij}^{(1)}$ est un tenseur de second rang et a $3^2=9$ composantes. Dans un milieu isotrope, il n'existe qu'une seule constituant indépendant et non nulle, et la susceptibilité linéaire s'écrit comme une quantité scalaire.

Dans le cas "non linéaire", La proportionnalité de la polarisation induite \vec{P} au champ électrique \vec{E} , d'un Laser par exemple, dans le milieu se casse et la polarisation résultante peut être considérée comme étant constitué de plusieurs contributions, représentées par des termes comprenant des produits des susceptibilités d'ordre supérieur ($\chi^{(n)}$ d'ordre « n ») et l'amplitude du champ électrique. Ainsi, la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur \vec{P} (où i représente x, y ou z) est donnée par [4] :

$$\begin{aligned} P_i &= \varepsilon_0 \left[\sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right], \quad (i, j, k, l = x, y, z) \\ &= P_{iL} + P_{iNL}^{(2)} + P_{iNL}^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le coefficient non linéaire du second ordre $\chi_{ijk}^{(2)}$ est un tenseur de troisième rang et il a $3^3=27$ composantes, et le coefficient du troisième ordre $\chi_{ijkl}^{(3)}$ est un tenseur de quatrième rang et il a $3^4 = 81$ composantes. Où P_L est la polarisation linéaire, $P_{NL}^{(2)}$ et $P_{NL}^{(3)}$ sont la polarisation non linéaire du 2^{ème} et 3^{ème} ordre respectivement.

On note que la plupart des matériaux d'optique non linéaire exigent l'utilisation des tenseurs pour décrire leurs propriétés linéaires, en plus, les tenseurs de susceptibilité linéaires

et non linéaires sont généralement dépendantes des fréquences qui interagissent dans le matériau.

3.1. Mécanismes responsables de la polarisation non linéaire

Selon la fréquence du champ appliquée et la phase du milieu, un ou plusieurs mécanismes discutés ci-dessous deviennent le principal facteur entraînant un comportement non linéaire du milieu via une polarisation non linéaire [6].

3.1.1. Distorsion du nuage électronique

La distorsion du nuage électronique externe des atomes, des ions et des molécules, respectivement apparaît dans les gaz, les liquides ou les solides, comparativement à l'état non perturbé. Sous l'effet d'un champ électrique optique externe, ce mécanisme a un temps de réponse très rapides ($<10^{-15}$ s). La plupart des effets de mélange de fréquence optiques utilisent ce mécanisme, tels que : la génération de la seconde et la troisième harmonique, la somme et mélange de fréquences, l'oscillation paramétrique optique....

3.1.2. Polarisation ionique

La contribution d'un champ optique induit un mouvement relatif entre les noyaux (ou ions) dans une molécule (vibration, rotation dans les molécules, les phonons optiques dans les solides). Le temps de réponse de ce mécanisme est d'environ 10^{-12} s. Exemples : mélange à quatre ondes...

3.1.3. Réorientation moléculaire

Il représente la contribution de la polarisation électrique supplémentaire à partir d'un champ optique induite par la réorientation des molécules anisotropes dans un liquide. Le temps de réponse de ce processus dépend de la viscosité rotationnelle des molécules dans les liquides et est d'environ 10^{-12} - 10^{-13} secondes. Exemples : la diffusion Kerr stimulé, le changement d'indice de réfraction liée à l'effet Kerr.

3.1.4. Mouvement acoustique induit

Il s'agit de la contribution de la polarisation à partir d'un mouvement acoustique optiquement induit liée à ce qu'on appelle l'effet électrostrictif. Le temps de réponse de ce

mécanisme est d'environ 10^{-9} - 10^{-10} secondes en fonction du milieu. Exemples : la diffusion Brillouin, l'auto focalisation, le claquage optique.

3.1.5. Changement de population Induit

La contribution des électrons à la polarisation dépend de leurs états propres. Les populations sont modifiées par une absorption à un ou deux photons et par d'autres interactions de résonance (exemple : des transitions Raman). Le temps de réaction dépend fortement de la transition électronique respective, mais est en général plus lent que celui des trois premiers mécanismes. Les exemples sont tous les processus non linéaires de résonance-augmenté.

3.1.6. Redistribution spatiale des électrons

Les porteurs de charge excités dans les solides (électrons ou trous) peuvent être redistribués dans l'espace par un flux lumineux modulé spatialement. C'est un effet majeur dans tous les matériaux dits photo-réfractifs. Le temps de réaction dépend de la mobilité des porteurs et du champ électrique interne, en général, il est lent comparé aux temps de réponse traité jusqu'ici. Les exemples sont tous les processus qui peuvent être résumés sous le terme de non linéarité photo-réfractive.

4. Susceptibilité non linéaire

L'origine de l'optique non linéaire est la réponse non linéaire du matériau à des champs électriques internes. La réponse du matériau se manifeste dans une susceptibilité. La susceptibilité linéaire est lié à l'indice de réfraction par :

$$\chi^{(1)} = n^2 - 1 \quad (1.10)$$

Lorsqu'une lumière intense pénètre dans un matériau transparent, sa susceptibilité peut devenir non linéaire, et elle est généralement exprimée comme un développement de Taylor dans le champ électrique :

$$\chi(E) = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}E + \chi^{(3)}EE + \dots \quad (1.11)$$

L'effet de la susceptibilité sur la lumière se propageant à travers le milieu se manifeste dans la densité de polarisation P et s'exprime selon l'équation (1.9) par :

$$- \text{ La polarisation linéaire : } P_{iL} = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j \quad (1.12)$$

$$- \text{ La polarisation non linéaire du 2ème ordre : } P_{iNL}^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \quad (1.13)$$

$$- \text{ La polarisation non linéaire du 3ème ordre : } P_{iNL}^{(3)} = \varepsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \quad (1.14)$$

Si on considère plusieurs ondes planes monochromatiques : $E_i(\omega_i)$, les équations (1.12 - 1.14) deviennent :

$$- P_{Li}(\omega) = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega) \quad (1.15)$$

$$- P_{NLi}^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) = \varepsilon_0 D^{(2)} \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) \quad (1.16)$$

$$- P_{NLi}^{(3)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \varepsilon_0 D^{(3)} \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3) \quad (1.17)$$

Où $D^{(2)}$ et $D^{(3)}$ sont des facteurs entiers, appelés facteurs de dégénérescence et ils représentent le nombre de permutations distinctes des deux fréquences ω_1 et ω_2 (pour $\chi^{(2)}$) et les fréquences ω_1, ω_2 et ω_3 (pour $\chi^{(3)}$), respectivement.

Selon les dérivations ci-dessus, la susceptibilité non linéaire est assez compliquée. Elle se compose d'un grand nombre d'éléments qui dépendent de la polarisation des champs électriques appliquées et de la direction de la polarisation générée. En outre, elle dépend des fréquences des champs, et est complexe, i.e. constitués d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Pour la plupart des applications dans le domaine des télécommunications optiques, cette complexité ainsi que la plupart des éléments du tenseur peuvent être négligés et par conséquent, les analyses peuvent être considérablement simplifiées [7].

4.1. Susceptibilité non linéaire du second ordre

Supposons deux faisceaux monochromatiques et polarisés linéairement de fréquences lumineuses ω_1 et ω_2 se propagent dans un milieu ayant une non linéarité du second ordre non négligeable caractérisée par le tenseur $\chi^{(2)}$, Le champ électrique total des deux faisceaux peut être exprimé par [8] :

$$E(t) = A_1 e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + A_2 e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} + cc \quad (1.18)$$

Où A_1 et A_2 sont les amplitudes complexes lentement variables des faisceaux incidents, $k_{1,2}$ sont les vecteurs d'onde pour les fréquences ω_1 et ω_2 respectivement. La polarisation non linéaire du 2^{ème} ordre est donnée alors par (l'équation (1.13)) :

$$P_{iNL}^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$$

Lorsque les indices j et k prennent chacun les valeurs de X, Y et Z, il y'a neuf combinaisons de j, k possible : XX, YY, ZZ, YZ, ZX, XY, ZY, XZ et YX.

En prenant $E_n = A_n e^{ik_n z}$, avec $n=1,2$, l'équation 1.24 s'écrit alors comme :

$$E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + cc \quad (1.19)$$

En Insérant l'équation (1.19) dans l'équation (1.13) on obtient :

$$P_{iNL}^{(2)} = \varepsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} (E_{1j} e^{-i\omega_1 t} + E_{2j} e^{-i\omega_2 t} + cc)(E_{1k} e^{-i\omega_1 t} + E_{2k} e^{-i\omega_2 t} + cc) \quad (1.20)$$

Lorsque $j = k = X$, par exemple, l'un des termes sur le côté droit de l'équation (1.20) est [8] :

$$\begin{aligned} & \chi_{iXX}^{(2)} (E_{1X} e^{-i\omega_1 t} + E_{2X} e^{-i\omega_2 t} + cc)(E_{1X} e^{-i\omega_1 t} + E_{2X} e^{-i\omega_2 t} + cc) \\ &= \chi_{iXX}^{(2)} (E_{1X}^2 e^{-2i\omega_1 t} + E_{2X}^2 e^{-2i\omega_2 t} + 2E_{1X} E_{2X} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}) \\ & \quad + 2E_{1X} E_{2X}^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + |E_{1X}|^2 + |E_{2X}|^2 + cc \end{aligned} \quad (1.21)$$

De même, lorsque $j \neq k$, par exemple, $j = X$ et $k = Y$, l'un des termes sur le côté droit de l'équation (1.20) est [8] :

$$\begin{aligned} & \chi_{iXY}^{(2)} (E_{1X} e^{-i\omega_1 t} + E_{2X} e^{-i\omega_2 t} + cc)(E_{1Y} e^{-i\omega_1 t} + E_{2Y} e^{-i\omega_2 t} + cc) \\ &= \chi_{iXY}^{(2)} [E_{1X} E_{1Y} e^{-2i\omega_1 t} + E_{2X} E_{2Y} e^{-2i\omega_2 t} + (E_{1X} E_{1Y} + E_{2X} E_{2Y}) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}] \\ & \quad + (E_{1X} E_{2Y}^* + E_{1Y} E_{2X}^*) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + E_{1X} E_{1Y}^* + E_{2X} E_{2Y}^* + cc \end{aligned} \quad (1.22)$$

Les équations (1.21) et (1.22) montrent que l'interaction non linéaire du second ordre de deux champs à des fréquences ω_1 et ω_2 dans un milieu, peut donner lieu à des composantes de polarisation oscillant à des fréquences de $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$ ainsi qu'une polarisation constante non-oscillant [8]. Plusieurs phénomènes d'optique non linéaire quadratique résultent de l'oscillation de la polarisation générée à des fréquences différentes, et dans des milieux et des conditions différentes.

4.1.1. Symétrie de Kleinman

En général $\chi_{ijk}^{(2)}$ à 27 coefficients indépendants avant qu'aucune condition de symétrie n'est pris en compte. Kleinman [9] a indiqué que lorsque $\chi_{ijk}^{(2)}$ est indépendant des fréquences des champs électriques en interactions, les indices i, j et k peuvent être librement permutés :

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_{ikj}^{(2)} = \chi_{jki}^{(2)} = \chi_{kij}^{(2)} \quad (1.23)$$

Le nombre de coefficients indépendants diminue alors jusqu'à 18. Avec 18 coefficients, il est parfois plus pratique de définir un tenseur à deux dimensions 3x6, généralement connu sous le nom du tenseur- \mathbf{d} de Kleinman :

$$d_{ijk} \equiv \frac{1}{2} \chi_{ikj}^{(2)} \quad (1.24)$$

Lorsque la symétrie de Kleinman est valide, l'expression de la polarisation non linéaire restent inchangés en inversant les deux indices second, ce qui permet une notation contracté $\mathbf{d}_{ijk} = \mathbf{d}_{im}$, où m est l'indice contracté donné ci-dessous [8] :

j, k	indice contracté
xx	1
yy	2
zz	3
yz, zy	4
xz, zx	5
xy, yx	6

Exemple de notation contracté :

$$d_{123} = d_{14}$$

$$d_{233} = d_{23}$$

$$d_{321} = d_{36}$$

Exemple de symétrie de Kleinman :

$$d_{14} = d_{123} = d_{213} = d_{25}$$

$$d_{14} = d_{123} = d_{312} = d_{36}$$

$$d_{23} = d_{233} = d_{323} = d_{34}$$

4.1.2. Effets non linéaires du second ordre

Les effets non linéaires issus de la susceptibilité du second ordre (quadratique) n'existent pas dans les milieux centro-symétriques, car si le milieu est centro-symétrique cela signifie qu'il admet un centre d'inversion. La polarisation induite par un champ \vec{E} devra être opposée à celle induite par un champ $-\vec{E}$, la susceptibilité d'ordre quadratique est donc nulle :

$$P_{iNL}^{(2)}(\vec{E}) = -P_{iNL}^{(2)}(-\vec{E}) \Rightarrow \chi^{(2)} \cdot \vec{E}\vec{E} = -\chi^{(2)} \cdot \vec{E}\vec{E} \Rightarrow \chi^{(2)} = 0$$

Où, la réponse non linéaire du milieu à une excitation optique est donnée par :

$$P_{NL}^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} \quad (1.25)$$

4.1.2.1. Génération de la seconde harmonique

La génération de la seconde harmonique (SHG : Second Harmonique Generation), où autrement dit, le doublage de fréquence, a été le premier phénomène d'optique non linéaire quadratique observé expérimentalement. L'expérience a été réalisée par l'équipe menée par Peter Franken à l'université de Michigan en 1961 [10]. Comme le montre la Figure 1.2, un laser à rubis a été concentrée sur une plaque cristalline de quartz pour savoir si la réponse non linéaire du milieu au rayonnement intense de fréquence 694,3 nm était assez fort pour créer une composante de seconde harmonique détectable à une longueur d'onde de 347,15 nm.

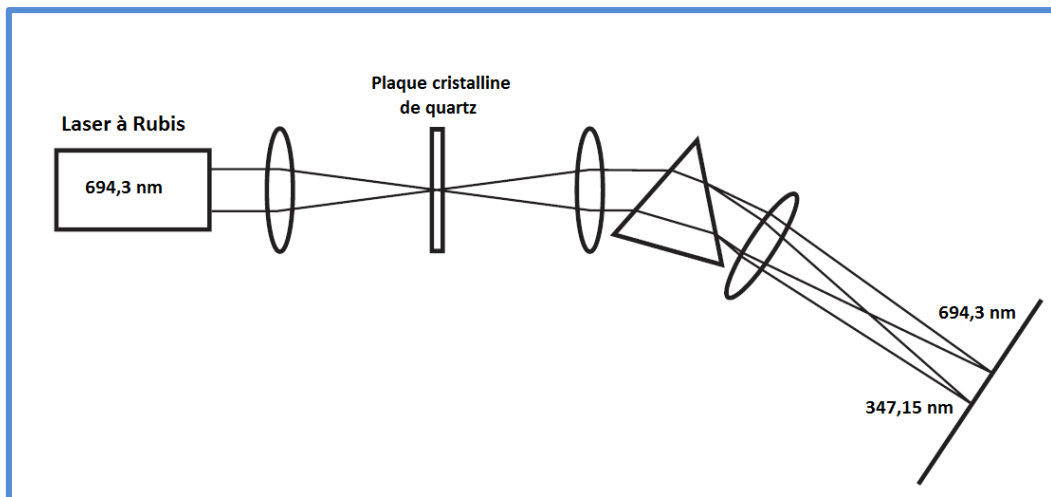


Figure 1.2 : Diagramme schématisé de la première expérience de génération de la seconde harmonique faite par le groupe de Peter Franken à l'Université du Michigan en 1961 [10].

Si on considère, par exemple, un champ électrique sinusoïdal de la forme :

$$E = E_0 \sin(\omega t) \quad (1.26)$$

Dans ce cas, la composante non linéaire de la polarisation (1.25) devient [11] :

$$P(2\omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 (1 - \cos(2\omega t)) \quad (1.27)$$

D'après (1.27), on remarque que la composante non linéaire d'ordre 2 de la polarisation contient en plus du terme constant, un terme oscillant à 2ω . Cette polarisation peut agir à son tour comme une source de rayonnement et engendre une nouvelle onde de fréquence 2ω .

La SHG est donc un processus non linéaire quadratique cohérent, où un milieu éclairé par un faisceau laser intense de fréquence ω , donne lieu à une fréquence 2ω sans qu'il y ait phénomène d'absorption. L'utilisation la plus courante de ce phénomène est la conversion d'une fréquence laser infrarouge ou visible en fréquences visibles ou ultraviolettes. Par doublement de fréquence successif, on peut obtenir du rayonnement cohérent jusqu'à environ 200 nm, longueur d'onde non accessible par des sources lasers primaires. Aujourd'hui, cette technique est à l'origine des pointeurs LASER vert à 532 nm et qui est un LASER Nd:YAG à 1064 nm doublé en fréquence par un cristal non linéaire.

4.1.2.2. Génération par somme et différence de fréquences

La génération par somme de fréquences optique a été observée pour la première fois par Bass et al. [12] en 1962 dans un cristal du sulfate de triglycine. Dans leur expérience, deux lasers pulsé à Rubis ont été utilisés pour fournir les faisceaux d'entrée, un fonctionne à la température ambiante et l'autre à la température de l'azote liquide (il existe une différence d'environ 100 nm entre les longueurs d'onde émises par les lasers à rubis à ces deux températures). La sortie analysée par un spectrographe, présentait trois lignes autour de 347 nm deux lignes de côté résultant du doublement de fréquence et celle du milieu de la génération par somme de fréquence des deux faisceaux laser.

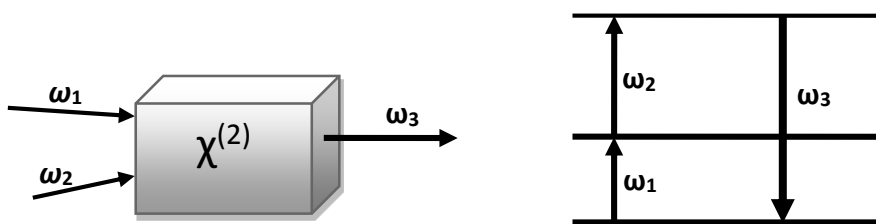


Figure 1.3 : Schéma du principe de la génération par somme de fréquences.

L'interprétation de ce phénomène, est que les faisceaux laser à ω_1 et ω_2 interagissent dans le cristal non linéaire et génèrent une polarisation non linéaire $P_{NL}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)$, cette

dernière, étant un ensemble de dipôles oscillants, agit comme une source de rayonnement à la fréquence $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ (figure 1.3). La polarisation résultante s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}^{(2)}(\omega_3) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\omega_2) \quad (1.28)$$

Dans le cas où l'interaction des ondes est optimisée (condition dite d'accord de phase), l'intensité de l'onde somme est proportionnelle aux intensités respectives des faisceaux incidents ($I(\omega_1)$; $I(\omega_2)$) et au carré de la longueur d'interaction l :

$$I(\omega_3) \approx (\chi^{(2)})^2 I(\omega_1) I(\omega_2) L^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}} \quad (1.29)$$

Où L est la longueur de milieu non linéaire traversé

Le processus est donc d'autant plus efficace que les intensités incidentes sont plus élevées. Cependant, le rendement de conversion ne peut atteindre 100 %, car l'intensité de l'onde somme devient alors suffisamment élevée pour induire le processus de dissociation d'un photon de haute fréquence en deux photons de plus basse fréquence.

La somme de fréquences peut être utilisée pour produire un rayonnement laser accordable dans le visible et l'ultraviolet, en maintenant une des fréquences incidentes (par exemple ω_1) fixe et en faisant varier l'autre (ω_2) en utilisant une source accordable.

La génération par différence de fréquences, est décrite par une polarisation non linéaire de la forme :

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}^{(2)}(\omega_1) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_1, \omega_2, -\omega_3) \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\omega_2) \quad (1.30)$$

avec : $\omega_1 = \omega_2 - \omega_3$.

Ce phénomène peut être utilisé pour obtenir une source cohérente accordable dans l'infrarouge par différence de fréquences entre un laser à la fréquence ω_1 et un laser à colorant à fréquence variable ω_2 . Ce phénomène est à la base de l'amplification optique paramétrique (OPA : Optical Parametric Amplifier).

4.2. Susceptibilité non linéaire du troisième ordre

Cette susceptibilité $\chi^{(3)}$ est un tenseur de rang quatre avec en général 81 coefficients, et elle lie la polarisation et le champ électrique avec la relation suivante :

$$P_{iNL}^{(3)} = \varepsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \quad (1.31)$$

Il est à noter que la susceptibilité d'ordre trois est responsable de plusieurs effets non linéaire du troisième ordre, comme l'effet Kerr, la génération de la troisième harmonique, le mélange à quatre ondes, la bi-stabilité optique et les diffusions Raman et Brillouin stimulées.

4.2.1. Effet Kerr optique

Le terme « effet Kerr » s'applique à plusieurs phénomènes, Couramment, on l'utilise pour parler d'effet Kerr électro-optique. Généralement, l'effet Kerr optique concerne les milieux dont l'indice de réfraction peut varier linéairement avec l'intensité d'un champ électrique appliqué. Ce phénomène, découvert en 1964 par G. Mayer et F. Gires [13], se traduit par une variation de l'indice de réfraction d'un milieu en fonction de la forte intensité du signal lumineux incident [14].

Si on considère, par exemple, une onde plane monochromatique de fréquence ω incidente sur un milieu non linéaire seulement de type du troisième ordre (milieu centro-symétrique $\chi^{(2)}=0$), la polarisation induite par l'onde, prend la forme suivante :

$$P_{NL}^{(3)}(\omega) = \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) \cdot E(\omega) E^*(\omega) \cdot E(\omega) \quad (1.32)$$

La composante de polarisation à la fréquence ω dans (1.32), correspond à un changement incrémentiel de la susceptibilité d'une valeur $\Delta\chi$ donné par [15] :

$$\varepsilon_0 \Delta\chi = \frac{P_{NL}^{(3)}(\omega)}{E(\omega)} = 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 = 6\chi^{(3)} \eta I \quad (1.33)$$

Où $I = |E(\omega)|^2 / 2\eta$, est l'intensité optique de l'onde incidente. Étant donné que $n^2 = 1 + \chi$, on a $2n \cdot \Delta n = \Delta\chi$, c'est donc équivalent à une incrémentation de l'indice de réfraction : $\Delta n = \Delta\chi / 2n$:

$$\Delta n = \frac{3\eta}{\varepsilon_0 n} \chi^{(3)} I \equiv n_2 I \quad (1.34)$$

Où $n_2 = \frac{3\eta}{\varepsilon_0 n} \chi^{(3)}$, est le coefficient Kerr optique, et est généralement appelé *l'indice non linéaire*.

Ainsi, la variation de l'indice de réfraction est proportionnelle à l'intensité optique. L'indice de réfraction global est donc une fonction linéaire de l'intensité optique I :

$$n(I) = n_0 + n_2 I \quad (1.35)$$

Certains auteurs utilisent plutôt la définition : $n = n_0 + n_2 |E|^2$

Cet effet est appelé l'effet Kerr optique, à cause de sa similitude avec l'effet Kerr électro-optique. L'effet Kerr optique est un effet auto-induit dans lequel la vitesse de phase de l'onde dépend de l'intensité propre de l'onde.

L'ordre de grandeur du coefficient n_2 (en unités de cm^2 / W) est de 10^{-16} à 10^{-14} dans les verres, de 10^{-14} à 10^{-7} dans des verres dopés, de 10^{-10} à 10^{-8} dans les matériaux organiques et de 10^{-10} à 10^{-2} dans les semi-conducteurs.

Comme conséquences de l'effet Kerr sur la propagation des impulsions lumineuses dans les fibres optiques, par exemple, l'auto-modulation de phase (SPM : Self Phase Modulation). Ce dernier se manifeste par un élargissement spectral des impulsions courtes et il provient de la variation temporelle de la vitesse de phase d'une impulsion se propageant en régime non-linéaire. L'SPM est un effet largement utilisé pour élargir le spectre d'impulsions femto-secondes.

Autre conséquence de l'effet Kerr est l'auto focalisation. Si un faisceau optique intense est transmis par un guide mince de matériau non linéaire et présentant l'effet Kerr optique, la variation de l'indice de réfraction limite le profil de l'intensité dans le plan transversal. Si le faisceau a sa plus grande intensité au centre, par exemple, la variation maximale de l'indice de réfraction est également au centre, le guide joue alors le rôle d'un milieu à gradient d'indice qui donne à l'onde un décalage de phase non uniforme, provoquant ainsi une courbure de front d'onde. Dans certaines conditions, le milieu peut agir comme une lentille avec une longueur focale dépendant de l'intensité, ce dernier appelé « lentille-Kerr » est utile pour les lasers à blocage de mode [15].

4.2.2. Génération de la troisième harmonique

La réponse d'un milieu non linéaire du troisième ordre à un champ optique monochromatique est une polarisation non linéaire P_{NL} contenant une composante à la fréquence ω et une autre à la fréquence 3ω . La présence d'une composante de polarisation à la fréquence 3ω indique que la troisième harmonique est générée. Cependant, dans la plupart des cas, le rendement de conversion d'énergie est faible. En effet, la génération de la troisième

harmonique est souvent réalisée par génération de seconde harmonique suivie par une génération de fréquence de somme de l'onde fondamentale et de la seconde harmonique [15].

4.2.3. Mélange à quatre ondes

Ce phénomène se manifeste lorsque plusieurs ondes optiques se propagent simultanément dans un milieu non linéaire d'ordre trois comme par exemple une fibre optique. Pour comprendre le mélange à quatre ondes (FWM : Four-Wave Mixing), on commence par déterminer la réponse du milieu à une superposition de trois ondes de pulsations ω_1 , ω_2 et ω_3 , avec le champ :

$$E(t) = \text{Re} \{E(\omega_1) \exp(j\omega_1 t)\} + \text{Re}\{E(\omega_2) \exp(j\omega_2 t)\} + \text{Re}\{E(\omega_3) \exp(j\omega_3 t)\} \quad (1.36)$$

Il est commode d'écrire le champ $E(t)$ comme une somme de six termes [15] :

$$E(t) = \sum_{q=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \frac{1}{2} E(\omega_q) \exp(j\omega_q t) \quad (1.37)$$

Où $\omega_{-q} = -\omega_q$ et $E(-\omega_q) = E^*(\omega_q)$

Remplaçons (1.37) dans (1.32), on écrit alors, $P_{\text{NL}}^{(3)}$ comme une somme de $6^3=216$ termes :

$$P_{\text{NL}}^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \sum_{q,r,l=\pm 1, \pm 2, \pm 3} E(\omega_q) E(\omega_r) E(\omega_l) \exp[j(\omega_q + \omega_r + \omega_l)t] \quad (1.38)$$

Ainsi, la polarisation $P_{\text{NL}}^{(3)}$ est la somme des composantes harmoniques de fréquences $\omega_1, \dots, 3\omega_1, \dots, 2\omega_1 \pm \omega_2, \dots, \pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$. L'amplitude de la composante de polarisation $P_{\text{NL}}^{(3)}(\omega_q + \omega_r + \omega_l)$ à la fréquence $(\omega_q + \omega_r + \omega_l)$ peut être déterminée en ajoutant des permutations appropriées entre q , r , et l dans l'équation (1.42). Par exemple, $P_{\text{NL}}^{(3)}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)$ comporte six permutations :

$$P_{\text{NL}}^{(3)}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = 6\chi^{(3)} E(\omega_1) E(\omega_2) E^*(\omega_3) \quad (1.39)$$

L'équation (1.39) indique que les quatre ondes aux fréquences ω_1 , ω_2 , ω_3 et ω_4 interagissent ou se mélangent dans le milieu si $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ où $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$. C'est la condition de correspondance de fréquence.

Le processus de mélange à quatre ondes peut être aussi interprété comme une interaction entre quatre photons. Un photon de fréquence ω_3 et un autre de fréquence ω_4 s'annihilent pour créer un photon de fréquence ω_1 et un autre de fréquence ω_2 .

4.2.4. Effet Raman et effet Brillouin stimulés

Ces effets reposent sur un transfert d'énergie du champ vers le milieu de propagation par excitation de modes de vibration. La différence fondamentale entre les deux effets étant que des phonons acoustiques entrent en jeu dans l'effet Brillouin, tandis qu'on parle des phonons optiques dans l'effet Raman. Le résultat principal est que l'onde lumineuse incidente est diffusée dans toutes les directions de l'espace avec un décalage spectral dépendant de l'angle de diffusion [11].

5. Equation de propagation non linéaire

5.1. Équations de Maxwell

Si le matériau est isolant (non conducteur), linéaire, homogène, isotrope et non magnétique. Donc, et par définition, la constante diélectrique (ϵ) est indépendante de l'orientation ou de l'emplacement, ainsi, ϵ est traité comme une grandeur scalaire. Dans de telles conditions, les équations de Maxwell deviennent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.40)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.42)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.43)$$

Avec,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (1.44)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.45)$$

Où \vec{E} est le champ électrique, \vec{H} le champ magnétique, \vec{D} l'induction électrique, \vec{B} l'induction magnétique, \vec{J} le vecteur densité du courant libre, ρ la densité de charge libre, \vec{P} la polarisation

électrique, \vec{M} la polarisation magnétique, ϵ_0 la permittivité du vide et μ_0 la perméabilité du vide.

Afin d'étudier les effets des non linéarités optiques d'un milieu sur la propagation d'une onde électromagnétique à l'intérieure de ce dernier, nous développons d'abord une simple équation d'onde appropriée pour une large classe de matériaux importants (les diélectriques). Pour ce faire, on commence par faire le rotationnel de l'équation (1.40), on obtient :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (1.46)$$

La partie gauche de l'équation (1.46) s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (1.47)$$

Dans les matériaux non conducteurs le produit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, donc l'équation (1.46) devient :

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Selon l'équation (1.9), la polarisation \vec{P} est constituée d'une polarisation linéaire P_L et une polarisation non linéaire $P_{iNL}^{(2 \text{ et } 3)}$, qui sont donné par les relations (1.12-1.14). L'équation (1.48) s'écrit alors :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}^{(3)}}{\partial t^2}}_{\frac{\partial^2 \vec{P}^{(NL)}}{\partial t^2}} \right) \quad (1.49)$$

La partie gauche de l'équation (1.49) représente l'équation d'onde homogène de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, tandis que la partie droite décrit les modifications à la propagation générée par l'effet de l'interaction entre la lumière et la matière.

5.2. Solitons (Soliton Spatial et temporel)

Quand un faisceau optique intense se déplace à travers un milieu non linéaire homogène, l'indice de réfraction est modifié de manière non uniforme de sorte que le milieu peut agir

comme un guide d'ondes à gradient d'indice. Ainsi, le faisceau peut créer son propre guide d'ondes. Si l'intensité du faisceau a la même distribution spatiale dans le plan transversal en tant que un des modes du guide d'onde que le faisceau lui-même a créé, le faisceau va se propager constamment sans modifier sa distribution spatiale. Sous ces conditions, la diffraction naturelle du milieu est compensée par l'auto-modulation de phase, et le faisceau est confiné dans son guide d'ondes auto-créé. De tels faisceaux autoguidés sont appelées les *Solitons spatiaux*. Un comportement analogue se produit dans le domaine temporel lorsque la dispersion de vitesse de groupe est compensée par l'auto-modulation de phase, ce qui conduit à la formation de ce qu'on appelle les *Solitons temporels*, qui se propagent sans changement de forme.

6. Théorie des Solitons et ses équations

Il existe plusieurs équations différentielles et non linéaire qui modélisent la dynamique de propagation non linéaire des ondes dans des systèmes physiques, qui varient selon les propriétés du milieu c'est-à-dire la dispersion et la non linéarité.

6.1. Soliton où onde solitaire ? Définition et découverte

Soliton ou onde solitaire ? D'un point de vue historique, La première observation scientifique d'une onde solitaire a été en 1834, par John Scott Russell un architecte naval Ecosais, il travaillait pour les sociétés de canal Ecosaise pour établir un moyen de transport rapide de bateau à vapeur sur les canaux. Dans le cadre de cette étude, il observait un bateau étant tiré le long d'un canal, rapidement, par une paire de chevaux. Pour une raison quelconque, les chevaux ont arrêté le bateau soudainement, ce qui est arrivé ensuite allait changer la science d'une manière spectaculaire. John Scott Russell a décrit ses observations lors d'un séminaire à la Royal Society en 1844, en disant :

“J’observais le mouvement d’un bateau qui était tiré rapidement le long d’un canal étroit par une paire de chevaux quand, soudain, le bateau s’arrêta. Mais il n’en fut pas de même pour la masse d’eau qu’il avait mise en mouvement dans le canal. Elle s’accumula autour de la proue du bateau dans un état de violente agitation ; puis, soudainement, l’abandonna, roula vers l’avant à grande vitesse, prenant la forme d’une grande élévation solitaire, d’un paquet

d'eau rond, à la forme douce et bien définie, qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse.

Je la suivis à cheval et la dépassais alors qu'elle roulait encore à la vitesse de 8 ou 9 miles à l'heure, préservant, sa forme originale de 30 pieds de long et d'un pied et demi en hauteur. La hauteur diminua peu à peu. Et après une poursuite d'un ou deux miles, je la perdais dans les méandres du canal. Tel fut, dans le mois d'août 1834, ma première rencontre avec ce magnifique et singulier phénomène."

A la suite de cette observation, Russell appela ce phénomène : la Grande onde Solitaire. Le mot onde solitaire est maintenant utilisé régulièrement, mais tend à être remplacé par un terme plus générique « le Soliton ». Soliton et onde solitaire semble avoir la même signification, mais par définition physique et mathématique ils divergent.

D'un point de vue physique, un soliton est une perturbation localisée qui se propage dans un milieu continu sans déformation ou modification et reste non déformé après collision avec d'autres solitons et manifestent seulement un petit changement global de phase, à la différence de l'onde solitaire qui peut se modifier après collision avec d'autres ondes solitaires. D'un point de vue mathématique, sachant que les équations non linéaires sont classées comme intégrable ou non-intégrable [16], les solitons sont des solutions pour les équations intégrables tandis que les équations non-intégrables peuvent avoir, pour certains paramètres, d'ondes solitaires comme solutions.

Les solitons ou ondes solitaires, se présentent également sous différentes formes et en générale on les classe en fonction des équations non linéaires qui décrivent leur évolution. Les plus célèbres sont :

- Soliton de Korteweg et de Vries : le premier observé sur les eaux peu profondes par Russell et à une vitesse qui est proportionnelle à l'amplitude.
- Soliton enveloppe : facilement observable sur les eaux profondes et il est une solution de l'équation de Schrödinger non linéaire. L'application la plus célèbre est dans les fibres optiques.
- Sine-Gordon (Kink Solitons) : les dislocations dans les solides sont décrites par ces solitons et ils sont Kinks ou anti-kinks.

6.2. Équations avec Soliton comme solutions

Dans cette partie, nous présentons quelques équations qui admettent le soliton comme solutions. L'équation de Korteweg et de Vries, l'équation de Schrödinger non linéaire et l'équation de sine-Gordon.

6.2.1. Équation de Korteweg et de Vries

Les observations expérimentales de Scott Russell en 1834 ont été suivies par le travail théorique de Lord Rayleigh et Joseph Boussinesq en 1871 et enfin en 1895, deux scientifiques néerlandais Diedrik Korteweg et Gustav de Vries ont dérivées analytiquement une équation partielle différentielle non linéaire qui décrit la propagation des ondes sur la surface d'un canal d'eau peu profond. Par la suite, l'équation a été nommée d'après ses découvreurs par *l'équation Korteweg-de Vries (KdV)*. Cette équation dispersive et non linéaire classique a été formulée par Korteweg et de Vries sous la forme la plus simple :

$$u_t + cu_x + \eta uu_x + \gamma u_{xxx} = 0 \quad (1.50)$$

avec $u_t = du/dt$ et $u_x = du/dx$. Où c est la vitesse de l'onde, γ est le coefficient de dispersion et le paramètre η représente le coefficient non linéaire qui peut prendre n'importe quel nombre réel. Les valeurs couramment utilisées sont $\eta = \pm 1$ ou $\eta = \pm 6$. Le terme u_t caractérise l'évolution temporelle de l'onde se propageant dans une direction, le terme non linéaire uu_x décrit le redressement de l'onde et le terme linéaire u_{xxx} représente l'étalement ou la dispersion de l'onde. Cette équation est une simple équation non linéaire mettant en œuvre deux effets : la non linéarité représentée par uu_x , et la dispersion linéaire représenté par u_{xxx} . La non linéarité tend à localiser l'onde alors que la dispersion étend l'onde. L'équilibre délicat entre la faible non linéarité et la dispersion définit la formulation des solitons. La stabilité des solitons est un résultat de l'équilibre parfait entre l'effet de la non linéarité et l'effet de la dispersion.

L'équation KdV a joué un rôle clé dans la théorie des solitons, cependant, le terme «Soliton» n'a été introduit qu'en 1965 par Zabusky et Kruskal [17] qui ont démontré que l'équation KdV révèle des propriétés linéaires permettant une solution sous la forme d'une onde solitaire se propageant sans changement de profil. L'équation KdV modélise une variété

de phénomènes non linéaires, y compris les ondes acoustiques ioniques dans les plasmas et les ondes en eau peu profonde.

L'équation KdV possède une solution d'onde solitaire (figure 1.4) donnée par [11] :

$$u(x,t) = \frac{3c}{\eta} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c/\gamma}}{2} (x - x_0 - ct) \right] \quad (1.51)$$

Où x_0 est une constante d'intégration arbitraire.

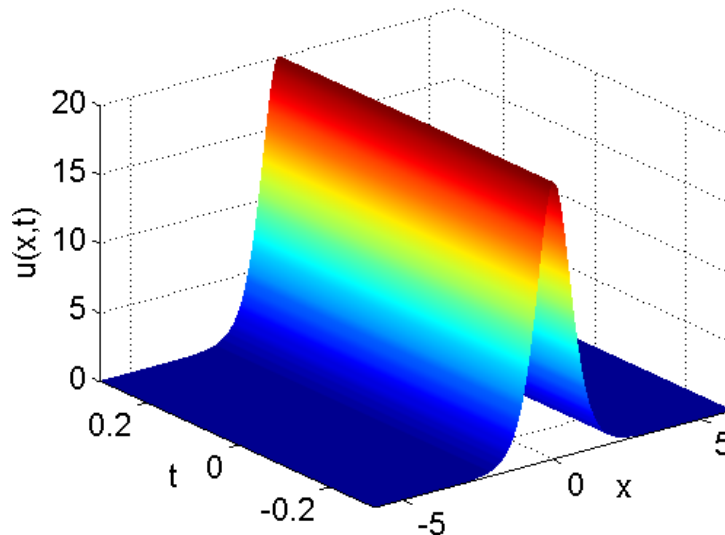


Figure 1.4 : Evolution de la solution Soliton de l'équation (1.51) avec : $\gamma = 0.5$, $\eta = 0.3$ et $c = 2$.

6.2.2. Équation de Schrödinger non linéaire

L'équation de Schrödinger non linéaire (NLSE) apparaît dans divers contextes physique pour décrire la propagation des ondes non linéaires. Elle est d'une importance particulière dans la description des effets non linéaires dans les fibres optiques, où elle régit la dynamique de propagation des impulsions laser dans une fibre optique caractérisé par une faible non linéarité et une forte dispersion. L'NLSE décrit aussi, la propagation des ondes d'eau dans la surface libre d'un fluide parfait et la propagation des ondes dans les plasmas [18]. L'NLSE est nommée d'après la similitude qu'elle montre à l'équation bien connue dérivée par Erwin Schrödinger, qui est l'une des bases de la théorie quantique qui décrit le comportement d'une particule dans un potentiel arbitraire. Contrairement à cela, la NLSE est basée sur la théorie de Maxwell classique et elle décrit le comportement des paquets d'ondes dans un environnement non linéaire. Elle s'écrit sous la forme suivante [8] :

$$j \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -\gamma |u|^2 u(z,t) + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial \tau^2} \quad (1.52)$$

Où β_2 et γ sont les coefficients de dispersion et de non linéarité du milieu, respectivement. $\tau = t - z/v_g$: est le temps mesuré dans le repère de l'impulsion, c'est-à-dire le temps réel t moins le temps de propagation de groupe qui est associé à la vitesse moyenne de propagation de l'impulsion v_g , appelé, vitesse de groupe.

Le premier terme du côté droit de l'équation (1.52) décrit l'influence de la non-linéarité sur l'impulsion optique tandis que le second terme caractérise la dispersion chromatique du milieu.

Si l'absorption du matériau est prise en considération, l'NLSE prend la forme suivante :

$$j \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + j \frac{\alpha}{2} u(z,t) = -\gamma |u|^2 u(z,t) + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial \tau^2} \quad (1.53)$$

où α est la constante d'atténuation.

La NLSE peut avoir sous certaines conditions deux types de solutions Soliton :

- *Soliton noir*, pour une dispersion normale ($\beta_2 > 0$) :

$$u(x, \tau) = \sqrt{\frac{k}{\gamma}} \tanh \left[\sqrt{\frac{k}{\beta_2}} (\tau - \tau_0) \right] e^{i(kz + \phi_0)} \quad (1.54)$$

avec $k = \gamma a$, avec a la puissance initiale du soliton.

- *Soliton brillant*, pour une dispersion anormale ($\beta_2 < 0$) :

$$u(x, \tau) = \sqrt{\frac{2k}{\gamma}} \tanh \left[\sqrt{\frac{-2k}{\beta_2}} (\tau - \tau_0) \right] e^{i(kz + \phi_0)} \quad (1.55)$$

6.2.3. Équation de sine-Gordon

L'équation de sine-Gordon (SG) est normalement décrite par une des deux formes suivantes [19] :

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \quad (1.56)$$

Ou sous la forme originale,

$$u_{\sigma\eta} = \sin u \quad (1.57)$$

Ainsi, en faisant le changement de variable $\sigma = (x-t)/2$ et $\eta = (x+t)/2$, l'équation (1.57) peut être transformée à l'équation (1.56).

L'équation SG apparaît dans un certain nombre d'applications physiques, y compris les dislocations dans les cristaux et le mouvement d'une pendule rigide attaché à un fil étiré. De plus, l'équation de SG peut être utilisée pour décrire des particules élémentaires et la propagation d'impulsions optiques ultra-courtes dans les lasers.

Une solution d'un soliton de l'équation SG sous sa forme (1.56) est :

$$u(x, \tau) = \arctan \left[\exp \frac{x - \lambda t}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right] \quad (1.58)$$

avec $-1 < \lambda < 1$. Cette solution est appelée *Kink*, pour lequel u augmente de zéro à 2π quand x augmente de $-\infty$ à ∞ . Il existe un autre type de solution soliton, appelé *anti-kink*, pour lequel u diminue de 2π à zéro quand x augmente de $-\infty$ à ∞ . En général, une solution de l'équation de SG peut contenir des kinks et des anti-kinks. Une représentation graphique du soliton kink de la solution (1.58) est donnée dans la figure 1.5.

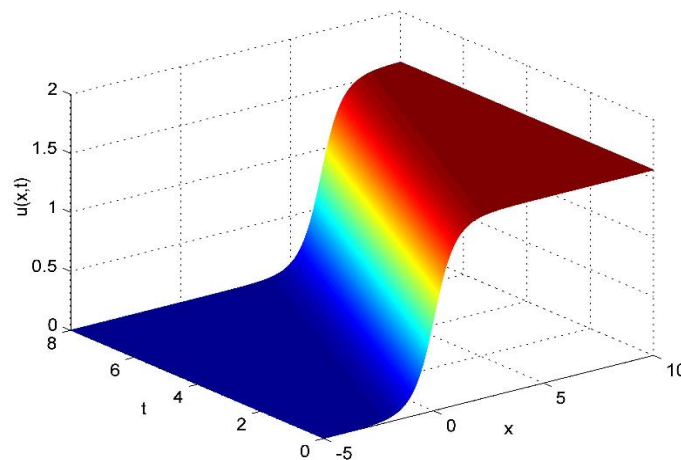


Figure 1.5 : Evolution du Kink de l'équation (1.58) pour $\lambda=0,8$.

7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté très brièvement les principes de base de l'optique non linéaire qui résultent de l'interaction rayonnement matière. En effet, sous l'action d'un champ électromagnétique intense la réponse d'un milieu physique n'obéit plus aux lois linéaires et ses propriétés physiques changent, notamment, la polarisation et la susceptibilité. Nous avons également présenté l'origine physique de l'apparition de la polarisation et la

susceptibilité non linéaire, et aussi les différents effets en résultants, que ce soit les effets non linéaires d'ordre deux ou trois. De plus, nous avons aussi introduit le soliton comme un nouveau concept physique qui se manifeste comme une onde invariante au cours de sa propagation, grâce à un équilibre parfait entre la dispersion et la non linéarité. Ainsi, la réponse des systèmes physiques réels n'est jamais exactement proportionnelle à une stimulation, en d'autre terme c'est une façon de dire que nous vivons dans un monde fondamentalement non linéaire [20].

Références

- [1] Richard L. Sutherland, "*Handbook of Nonlinear Optics, Second Edition*", Marcel Dekker New York, 2003.
- [2] Y. R. Shen, "*The principles of nonlinear optics*", Wiley-Interscience publication, John Willey & Sons (1984).
- [3] Benoît Trophème, "*Combinaison de faisceaux mutuellement incohérents par amplification paramétrique optique*", thèse de doctorat de l'université de Grenoble, France, 2006.
- [4] Y.V.G.S. Murti and C. Vijayan, "*Essentials of Nonlinear Optics*", Ane Books Pvt. Ltd., WILEY (2014), p 12-13.
- [5] N. Bloembergen, "*Nonlinear Optics*", Benjamin, Reading, MA (1977), p 02.
- [6] Manfred Wöhlecke, Klaus Betzler and Mirco Imlau, "*Nonlinear Optics*", Summer Term 2003, University of Osnabrück, rev. 2005.
- [7] Thomas Schneider, "*Nonlinear Optics in Telecommunications*", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [8] Shekhar Guha and Leonel P. Gonzalez, "*Laser Beam Propagation in Nonlinear Optical Media*", CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton (USA), 2014.
- [9] D. A. Kleinman, "Nonlinear Dielectric Polarization in Optical Media", Phys. Rev. 126, 1977–1979, 1962.
- [10] Geoffrey New, "*Introduction to Nonlinear Optics*", Cambridge University Press, United Kingdom (2011).
- [11] Triki Houria, "*Dynamique de propagation non linéaire des solitons KdV*", thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie, 2003.
- [12] M. Bass, P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters and G. Weinreich, "Optical Mixing", Phys. Rev. Lett. 8, 18 (1962).
- [13] G. Mayer and F. Gires, "*Physique moléculaire - Action d'une onde lumineuse intense sur l'indice de réfraction des liquides*", Comptes Rendus Hebdomadaires Des Séances De l'Académie Des Sciences, 258(7), p.2039, (1964).

- [14] G. P. AGRAWAL, "*Nonlinear fiber optics, third edition*", Academic Press, New York (2001), p.165.
- [15] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, "*Fundamental of photonics, Second Edition*", Willey Series in Pure and Applied Optics, John Willey & Sons (2007).
- [16] F. Kajzar and R. Reinisch, "*Beam Shaping and Control with Nonlinear Optics*", Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 2002.
- [17] V. Yu. Belashov and S.V. Vladimirov, "*Solitary Waves in Dispersive Complex Media*", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005, p-02.
- [18] Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem, "*The Nonlinear Schrodinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*", Springer-Verlag New York, 1999.
- [19] P.G. Drazin, R.S. Johnson, "*Solitons: an introduction*", Cambridge University Press (1989).
- [20] Richard H. Enns, "*It's a Nonlinear World*", Springer New York, 2010.

CHAPITRE II

Dynamique des Solitons Korteweg-de Vries

1. Introduction

Au cours du XIXe siècle, l'étude des ondes d'eau a été portée d'un grand intérêt, en raison aux fortes demandes en applications pour l'architecture et l'ingénierie navale et ainsi que pour améliorer la connaissance des marées et des inondations, en ce qui concerne le domaine industrielle et commerciale. Comme on l'a cité dans le premier chapitre, John Scott Russell, un architecte naval Ecossais, a étudié, dans le cadre de ses recherches sur le transport en bateau, le lien entre la résistance au mouvement et les vagues générées. Russell a observé une remarquable onde qui se propage sur un canal sans changement de forme ou diminution de vitesse, et il l'appela « *onde de translation* ». Cette découverte de Russell est en contradiction avec la théorie ondulatoire contemporaine, que les ondes normales auraient tendance à s'aplatir ou s'élever et se renverser. Russell a également noté que la vitesse de l'onde solitaire (onde de translation) dépendait de la taille de l'onde et que sa largeur dépendait de la profondeur de l'eau. Les observations de Russell ont contesté les théories reconnues de Newton et de Bernoulli concernant l'hydrodynamique, ce qui a créé un grand débat. Le mathématicien Sir George Airy Biddell s'est opposé au rapport mis par Russell sur sa « grande vague », affirmant que c'était juste une conséquence de la théorie linéaire des ondes d'eau peu profonde. Airy a également soulevé des doutes que l'onde solitaire pourrait se propager sans changement de forme. George Gabriel Stokes a fait valoir que la seule onde permanente serait sinusoïdale et l'onde solitaire finirait par se dissiper [1]. Malgré ces objections, les résultats expérimentaux de l'existence de l'onde solitaire sont restés solides. En conséquence, et afin de convaincre la communauté physique, Scott Russell a défié la communauté mathématique afin de prouver théoriquement l'existence du phénomène dont il a été témoin.

De nombreux chercheurs ont pris le défi de Russell, et ce fut en 1871, que Joseph Boussinesq, un mathématicien et physicien français, soit le premier à développer une théorie mathématique pour soutenir les observations de Russell. En 1876, le physicien anglais Lord Rayleigh a obtenu d'autres résultats similaires. En 1895, deux mathématiciens Néerlandais, Diederik Johannes Korteweg et son élève Gustave de Vries ont donné le dernier résultat significatif du 19ème siècle. Ils ont publié et dérivé un modèle d'équation pour décrire le mouvement des ondes sur la surface d'un fluide peu profond au-dessus d'un fond plat [2].

Boussinesq a considéré comme modèle, une onde longue, incompressible et libre de rotation, dans un canal peu profond avec une section transversale rectangulaire en négligeant le frottement le long des limites, et a obtenu l'équation suivante [3] :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + gh \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{3H^2}{2h} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] \quad (2.1)$$

Où H est l'amplitude de l'onde, h est la hauteur de l'eau en équilibre et g est la constante gravitationnelle.

La dernière preuve de l'existence de « l'onde de translation » a été donnée par D.J. Korteweg et G. de Vries. Ils ont construit une équation aux dérivées partielles non linéaire. Cette dernière possède une solution de type « onde solitaire » qui décrit le phénomène découvert par Russell. Dans leur document, Korteweg et de Vries ont utilisé une approche indépendante pour développer leur théorie sur le comportement des ondes longues en eau peu profonde. Leur approche utilise un système de coordonnées en mouvement avec l'onde et ils ne supposent pas que le potentiel et ses dérivés disparaissent, donnant, ainsi, une nouvelle condition de surface libre. L'équation Korteweg-de Vries, souvent abrégée en l'équation KdV, est donnée par [4] :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \right) \quad (2.2)$$

avec η est l'élévation de la surface au-dessus du niveau d'équilibre h , α est une petite constante arbitraire, qui est en connexion directe avec la vitesse exacte du mouvement uniforme donnée au liquide, g est la constante gravitationnelle et $\sigma = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{\rho g}$ qui dépend de la profondeur l du liquide, de la tension capillaire T à sa surface et de sa densité ρ .

En faisant le changement de variables suivant [5] :

$$t' \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l\sigma}} t, \quad x' \equiv -\frac{X}{\sqrt{\sigma}} \quad \text{et} \quad u \equiv -\left(\frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha\right)$$

On obtient l'équation KdV standard :

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

2. Dérivation de l'équation KdV

L'équation KdV décrit la propagation des ondes longues dans les eaux peu profondes. C'est l'équation la plus simple qui intègre à la fois la non-linéarité et la dispersion. L'équation est dérivée des équations d'Euler en supposant que l'amplitude est petite par rapport à la profondeur supposée faible par rapport à la longueur d'onde.

La théorie mathématique des ondes hydrodynamiques remonte à Stokes [6], qui a d'abord écrit les équations de mouvement d'un fluide parfait et incompressible, soumis à une force gravitationnelle constante, où le fluide a été borné, au-dessous par un fond rigide et au-dessus par une surface libre. Si le mouvement est non-rotationnel, alors la vitesse du fluide peut être écrite en termes d'un potentiel de vitesse [7].

En considérons le mouvement dans une dimension (direction x) des ondes d'un fluide incompressible et non visqueux (l'eau), dans un canal peu profond d hauteur h et de largeur suffisante avec une section transversale uniforme, conduisant à la formation d'une onde solitaire se propageant sous la gravité. On suppose que l'effet de la tension superficielle est négligeable. Soit l la longueur de l'onde et a la valeur maximale de son amplitude au-dessus de la surface horizontale (figure 2.1), qui est représentée par $\eta(x, t)$ [8].

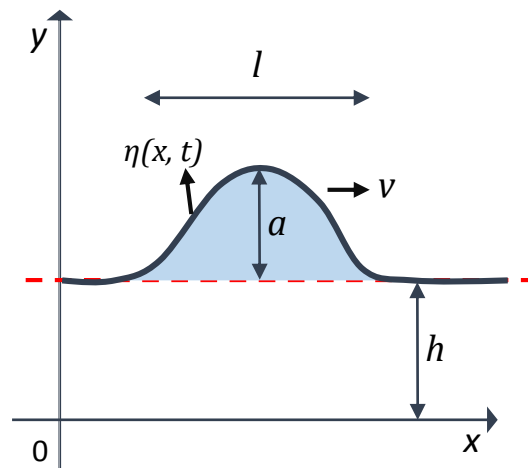


Figure 2.1 : Mouvement d'une onde à une dimension dans un canal d'eau peu profond [8].

En supposant que $a \ll h$ (eau peu profonde) et $h \ll l$ (ondes longues), on peut introduire deux petits paramètres naturels dans le problème ϵ et δ , qui sont définis par :

$$\epsilon = a/h \ll 1 \quad (2.4)$$

$$\delta = h/l \ll 1 \quad (2.5)$$

Ensuite, la dérivation de l'équation KdV se déroule comme se suit [4, 6-9] :

(i) Équation de mouvement :

Le mouvement du fluide peut être décrit par le vecteur de vitesse $V(x, y, t)$:

$$\vec{V}(x, y, t) = u(x, y, t)\vec{i} + v(x, y, t)\vec{j} \quad (2.6)$$

Où i et j sont les vecteurs unitaires le long des directions horizontale et verticale, respectivement.

Comme le mouvement est incompressible et non-rotationnel, nous avons :

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (2.7)$$

En conséquence, nous pouvons introduire le potentiel de vitesse $\phi(x, y, t)$, donné par la relation suivante :

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi(x, y, t) \quad (2.8)$$

(ii) Conservation de la densité :

Le système admet la loi de conservation de la densité de masse $\rho(x, y, t)$ suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho_t + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) = 0 \quad (2.9)$$

Comme ρ est une constante et selon (2.9), On obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.10)$$

En remplaçant (2.8) dans (2.10), nous remarquons que ϕ obéit à l'équation de Laplace :

$$\nabla^2\phi(x, y, t) = 0 \quad (2.11)$$

(iii) Équation d'Euler :

Comme la densité du fluide $\rho = \rho_0 = \text{constante}$, et en utilisant la loi de Newton pour le taux de variation de la quantité de mouvement, nous pouvons écrire :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p - g\vec{j} \quad (2.12)$$

Où $P = P(x, y, t)$ est la pression au niveau du point (x, y) et g est l'accélération due à la gravité, qui agit verticalement vers le bas (\vec{j} est le vecteur unitaire dans la direction verticale). En utilisant (2.8) dans (2.12), on obtient après intégration :

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{p}{\rho_0} + g y = 0 \quad (2.13)$$

(iv) Conditions aux limites :

Les deux équations (2.11) et (2.12) pour le potentiel de vitesse $\phi(x, y, t)$ du fluide, doivent être complétées par les relations imposées par les conditions aux limites appropriées.

En prenant en compte le fait que :

- (a) le fond horizontal à $y = 0$ est dur,
- (b) la limite supérieure $y = y(x, t)$ est une surface libre.

En conséquence :

- (a)** la vitesse verticale à $y = 0$ s'annule :

$$v(x, 0, t) = 0 \quad (2.14)$$

Ce qui implique, et en utilisant (2.6) et (2.8) que :

$$\phi_y(x, 0, t) = 0 \quad (2.15)$$

- (b)** Comme la limite supérieure du liquide est libre, nous la spécifions par $y = h + \eta(x, t)$ (voir figure 1). Ensuite au point $x = x_1, y = y_1 \equiv y(x, t)$, nous pouvons écrire :

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{dx_1}{dt} = \eta_t + \eta_x u_1 = v_1 \quad (2.16)$$

Vu que $v_1 = \phi_{1y}, u_1 = \phi_{1x}$, les deux dernières parties de (2.16) peuvent être réécrites comme :

$$\phi_{1y} = \eta_t + \eta_x \phi_{1x} \quad (2.17)$$

De même, à $y = y_1$, la pression $p_1 = 0$. Puis à partir de (2.12), il en résulte que :

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 v_{1x} + g \eta_x = 0 \quad (2.18)$$

Ainsi, le mouvement de la surface de l'onde d'eau est essentiellement défini par l'équation de Laplace (2.11) et (2.13) avec une condition à la limite fixe (2.15) et deux conditions aux limites variables et non linéaires (2.17) et (2.18). Il faut ensuite résoudre l'équation de Laplace soumis à ces conditions aux limites.

(v) Développement de Taylor de $\phi(x, y, t)$ en y :

En utilisant le fait que $\delta = h / l \ll 1$ où $h \ll l$, nous supposons que $y (= h + \eta(x, t))$ est petit afin d'introduire le développement de Taylor :

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \phi_n(x, t) \quad (2.19)$$

En substituant la série (2.19) dans l'équation de Laplace (2.11) et en résolvant de manière itérative tout en faisant usage des conditions aux limites (2.15) et (2.17), on peut montrer que [9] :

$$u_1 = \phi_{1x} = f - \frac{1}{2} y_1^2 f_{xx} + y_1^{d'ordre\ supérieure} \quad (2.20)$$

$$v_1 = \phi_{1y} = -y_1 f_x + \frac{1}{6} y_1^3 f_{xxx} + y_1^{d'ordre\ supérieure} \quad (2.21)$$

Où $f = \partial\phi_0 / \partial x$. Nous pouvons alors substituer ces expressions dans les conditions aux limites non linéaires (2.16), (2.17) et (2.18) pour obtenir des équations pour f et η .

(vi) Introduction des petits paramètres ϵ et δ :

Jusqu'à présent, dans notre analyse on n'a pas pris en compte pleinement la nature peu profonde du canal (équation (2.4)) et le fait que l'onde est solitaire ($a / l = a / h \cdot h / l = \epsilon\delta \ll 1$, $\epsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$), qui sont essentiels pour réaliser le phénomène observé par Scott Russell [9]. Pour cela, nous étendons les variables indépendantes et dépendantes dans les équations (2.16) - (2.18), (2.20) et (2.21) à travers un changement de variable approprié, mais, tout en conservant la forme générale des équations. Pour réaliser cela, nous pouvons introduire les changements de variables suivants :

$$x = l x', \quad \eta = a \eta' \quad \text{et} \quad t = \frac{l}{c_0} t' \quad (2.22)$$

Où c_0 est un paramètre à déterminer.

Ensuite, afin de conserver la forme de (2.20), (2.21), nous posons :

$$u_1 = \epsilon c_0 u'_1, \quad v_1 = \epsilon \delta c_0 v'_1, \quad f = \epsilon c_0 f' \quad (2.23)$$

Et nous avons également :

$$y_1 = h + \eta(x, t) = h(1 + \epsilon \eta'(x', t')) \quad (2.24)$$

En substituant les transformations (19) - (22) en (17), on obtient :

$$u'_1 = f' - \frac{1}{2} \delta^2 (1 + \epsilon \eta')^2 f'_{x'x'} = f' - \frac{1}{2} \delta^2 f'_{x'x'} \quad (2.25)$$

Où nous avons supprimé les termes proportionnels à « $\delta^2\epsilon$ » en supposant qu'ils sont négligeables par rapport à δ^2 . De même et à partir de (2.21), on obtient :

$$v'_1 = -(1 + \epsilon\eta')f'_{x'} + \frac{1}{6}\delta^2 f'_{x'x'x'} \quad (2.26)$$

Maintenant, compte tenu de la condition aux limites non linéaire (2.17) sous la forme :

$$v_1 = \eta_t + \eta_x u_1 \quad (2.27)$$

Cette dernière peut être réécrite, après avoir utilisé les transformations (2.22) - (2.24) et en négligeant les termes impliquant « $\epsilon\delta^2$ », comme :

$$\eta'_{t'} + f'_{x'} + \epsilon\eta'f'_{x'} + \epsilon f'\eta'_{x'} - \frac{1}{6}\delta^2 f'_{x'x'x'} = 0 \quad (2.28)$$

De même en considérant l'autre condition de limite (2.19) et en faisant usage des transformations ci-dessus, et en négligeant les termes de « $\epsilon\delta^2$ », elle peut être réécrite comme :

$$f'_{t'} + \epsilon f'f'_{x'} + \frac{ga}{\epsilon c_0^2}\eta'_{x'} - \frac{1}{2}\delta^2 f'_{x't't'} = 0 \quad (2.29)$$

Pour simplifier la notation, nous allons effacer le symbole prime (') de toutes les variables (f, η , x et t). Et, en remplaçant le paramètre $c_0^2 = gh$, les équations (2.28) et (2.29) deviennent respectivement :

$$\eta_t + f_x + \epsilon\eta f_x + \epsilon f\eta_x - \frac{1}{6}\delta^2 f_{xxx} = 0 \quad (2.30)$$

$$f_t + \epsilon f f_x + \frac{ga}{\epsilon c_0^2}\eta_x - \frac{1}{2}\delta^2 f_{xxt} = 0 \quad (2.31)$$

Les équations (2.20), (2.21), (2.30) et (2.31) représentent le système d'équations gouvernant la propagation des ondes longues dans les eaux peu profondes. Ces équations peuvent être résolues par un développement perturbatif pour aboutir à l'équation KdV.

On commence d'abord par résoudre le système (2.30) et (2.31) en $f(x, t)$ et $\eta(x, t)$, par un développement perturbatif [10] :

a. À l'ordre 0, en ϵ et δ^2 , le système (2.30) et (2.31) se réduit à :

$$\eta_t + f_x = 0 \text{ et } f_t + \eta_x = 0 \quad (2.32)$$

Le système d'équation (2.32) admet la solution $f = \eta$, si $f_t + f_x = 0$.

b. Étant donné que les paramètres ϵ et δ^2 sont petit, on peut faire un développement perturbatif de f sous la forme :

$$f = \eta + \epsilon\alpha + \delta^2\beta \quad (2.33)$$

Où $\alpha(x, t)$ et $\beta(x, t)$ sont des fonctions à déterminer, auxquelles on impose la condition sur f déduite de l'ordre 0 [10] :

$$\alpha_t + \alpha_x = 0 + \theta(\epsilon, \delta^2), \quad \beta_t + \beta_x = 0 + \theta(\epsilon, \delta^2) \quad \text{et} \quad \eta_t + \eta_x = 0 + \theta(\epsilon, \delta^2) \quad (2.34)$$

Où $\theta(\epsilon, \delta^2)$ représente les termes proportionnels à ϵ et δ^2 .

En remplaçant (2.33) dans (2.30) et (2.31), et en négligeant les termes d'ordre supérieur de ϵ et δ^2 , on obtient respectivement :

$$\eta_t + \eta_x + \epsilon\alpha_x + 2\epsilon\eta\eta_x + \delta^2\beta_x - \frac{1}{6}\delta^2\eta_{xxx} = 0 \quad (2.35)$$

$$\eta_t + \eta_x + \epsilon\alpha_t + \epsilon\eta\eta_x + \delta^2\beta_t - \frac{1}{2}\delta^2\eta_{xxt} = 0 \quad (2.36)$$

Puis en soustrayant (2.36) de (2.35), on obtient :

$$\epsilon(\alpha_x - \alpha_t) + \delta^2(\beta_x - \beta_t) + \epsilon\eta\eta_x - \frac{1}{6}\delta^2\eta_{xxx} + \frac{1}{2}\delta^2\eta_{xxt} = 0 \quad (2.37)$$

En appliquant la condition (2.34), on arrive à :

$$\epsilon(2\alpha_x + \eta\eta_x) + \delta^2(2\beta_x - \frac{2}{3}\eta_{xxx}) = 0 \quad (2.38)$$

Cette dernière ne peut être satisfaite que si nous avons :

$$2\alpha_x + \eta\eta_x = 0 \quad \text{et} \quad 2\beta_x - \frac{2}{3}\eta_{xxx} = 0 \quad (2.39)$$

Après intégration de (2.39) et en remplaçant dans l'équation (2.33), On parvient à l'expression de f en fonction de η :

$$f = \eta - \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{\delta^2}{3}\eta_{xx} + \epsilon C_1(t) + \delta^2 C_2(t) \quad (2.40)$$

Où $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont des constantes d'intégrations et sont en fonctions du temps seulement [10].

Finalement, en remplaçant l'équation (2.40) dans l'équation (2.30), nous arrivons à l'équation suivante :

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\epsilon\eta\eta_x + \frac{1}{6}\delta^2\eta_{xxx} = 0 \quad (2.41)$$

Cette équation non linéaire décrit la propagation unidirectionnelle des ondes en eau peu profonde. Cette dernière prend une forme plus simple et contemporaine si on fait le changement de variables suivant :

$$\zeta = x - t, \tau = t \quad (2.42)$$

L'équation (2.41) s'écrit alors :

$$\eta_\tau + \frac{3}{2}\epsilon\eta\eta_\zeta + \frac{1}{6}\delta^2\eta_{\zeta\zeta\zeta} = 0 \quad (2.43)$$

Puis en introduisant les nouvelles variables :

$$u = \frac{2\epsilon}{2\delta^2}\eta \text{ et } \tau' = \frac{6}{\delta^2}\tau \quad (2.44)$$

L'équation (2.43) devient :

$$u_{\tau'} + 6uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.45)$$

En redéfinissant les variables τ' comme t et ξ comme x , pour faciliter la notation, nous arrivons finalement à la forme omniprésente de l'équation KdV :

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.46)$$

3. Propriétés de l'équation KdV

Dans cette partie, nous allons prouver que l'équation KdV admet des solutions uniques avec des conditions aux limites données, et que les solitons sont une classe de solutions de l'équation KdV. Après, nous allons montrer que l'équation KdV possède d'une part un nombre de quantités conservées, et d'autre part, une structure hamiltonienne. Qui, et par conséquent, prouvent que l'équation KdV est intégrable.

3.1. Solution « Soliton »

La première et importante propriété de l'équation KdV, est la présence de solutions d'onde stable en progression, dite onde solitaire. Ces ondes sont obtenues en faisant le changement de variable suivant :

$$u(x, t) = u(\xi), \text{ où } \xi = x - ct \quad (2.47)$$

En substituant (2.47) dans (2.46), on obtient l'équation différentiel ordinaire suivante :

$$u_{\xi\xi\xi} + 6uu_{\xi} - cu_{\xi} = 0 \quad (2.48)$$

Une intégration de cette dernière par rapport à ξ donne :

$$u_{\xi\xi} = -3u^2 + cu + K_1 \quad (2.49)$$

Où K_1 est une constante d'intégration.

À partir des conditions aux limites, où $u \rightarrow 0, u_{\xi} \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow \pm\infty$, il en résulte que la constante $K_1=0$. Puis, en multipliant (2.49) par u_{ξ} et en intégrant une deuxième fois, on obtient :

$$\frac{1}{2}u_{\xi}^2 = -u^3 + \frac{1}{2}cu^2 + K_2 \quad (2.50)$$

Où K_2 est une constante d'intégration, qui pour la même raison précédente est égale à zéro.

L'équation (2.50) peut être écrite comme :

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = cu^2 - u^3 \quad (2.51)$$

Une intégration finale est possible en séparant les variables, ainsi on obtient :

$$\int \frac{du}{u\sqrt{c-2u}} = \int d\xi \quad (2.52)$$

Étant donné que, $u \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow \pm\infty$, l'intégration donne alors la solution solitaire suivante :

$$u(\xi) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(\xi - \xi_0)\right) \quad (2.53)$$

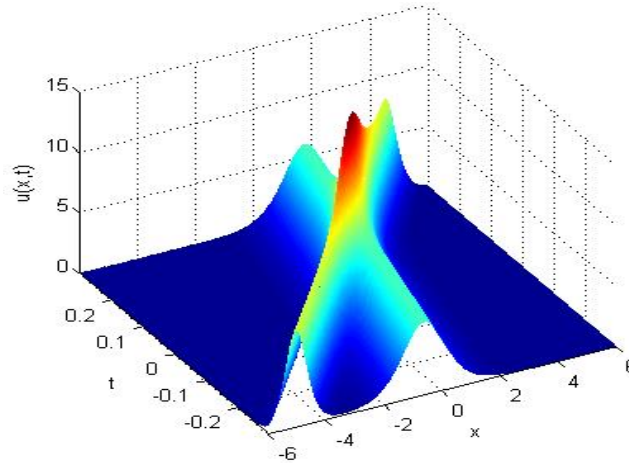
En remplaçant $\xi = x - ct$, on obtient :

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct - \xi_0)\right) \quad (2.54)$$

Où x_0 est la position du centre de l'onde à $t = 0$.

L'équation (2.54) représente une solution d'onde progressive localisée d'amplitude $(c/2)$ et de vitesse c qui est proportionnelle à l'amplitude, ce qui implique que plus l'amplitude de l'onde augmente plus ça vitesse fait de même. Une propriété important de (2.54) est que l'onde n'a pas de dispersion, elle conserve sa forme lorsqu'elle se déplace. C'est pour cette raison que la solution (2.54) de l'équation KdV (2.46) est appelée « Soliton ».

Les Solitons ont la particularité que les trois quantités fondamentales de la physique, la masse, le moment et l'énergie, reste toujours conservés. Une autre particularité des solitons, c'est qu'ils ont un comportement de « particule », ils peuvent interagir avec d'autres solitons,



sans changement de forme ni de vitesse. La seule indication qu'une interaction linéaire n'est pas survenue, est que les deux solitons aient un décalage de phase après collision ce qui se traduit par un léger décalage de trajet. La représentation 3D de ce phénomène est donnée dans la figure suivante :

Figure 2.2 : Représentation 3D d'une interaction de deux solitons

3.2. Lois de conservation de l'équation KdV

Une autre propriété de l'équation KdV qui a influé directement sur le développement des méthodes générale de solution de l'équation KdV, est l'existence d'un nombre infini de lois de conservation. Une loi de conservation d'une équation telle que l'équation KdV, sous la forme (2.46), est exprimée par une équation de la forme [11] :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dX}{dx} = 0 \quad (2.55)$$

Où T est la densité conservée et $-X$ est le flux lui correspondant. T et X sont en fonction de x , t , u et des dérivées de u .

Les lois de conservations peuvent être utilisées pour dériver et obtenir des intégrales du mouvement. Si par exemple $X \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$, alors :

$$\frac{d}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, t) dx = -[X]_{-\infty}^{+\infty} \quad (2.56)$$

Dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x, t) dx = C \quad (2.57)$$

Ainsi et pour tous les valeurs du temps C reste conservée. Les trois premières lois de conservations de l'équation KdV sont :

$$T_1 = u, \text{ et } X_1 = 3u^2 + u_{xx} \quad (2.58)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}u^2, \text{ et } X_2 = 4u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2 \quad (2.59)$$

$$T_3 = u^3, \text{ et } X_3 = \frac{9}{2}u^4 + 3u^2u_{xx} - 6uu_x^2 - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2 \quad (2.60)$$

Où le premier reprend simplement l'équation (2.46) sous une forme de loi de conservation. La seconde est obtenue après multiplication de l'équation (2.46) par $2u$ et ensuite réécrite sous une forme de loi de conservation. La troisième loi de conservation est obtenue en multipliant par $(3u^2 - u_x)$ et en effectuant des manipulations appropriées. Ces lois de conservation peuvent être interprétées physiquement, dans le cas des ondes en hydrodynamique comme : l'équation (2.58) exprime la conservation de la masse, l'équation (2.59) exprime la conservation du moment et l'équation (2.60) décrit la conservation de l'énergie. Les lois de conservations au-delà de ces trois premiers ne semblent pas avoir une interprétation physique.

3.3. Hamiltonien de l'équation KdV

Un système est dit hamiltonien si son évolution peut être décrite par un ensemble d'équations d'Hamilton. Par ailleurs, la définition habituelle en mécanique classique d'un système hamiltonien est qu'il y a une série spéciale de variables indépendantes, dite "canonique", composées de deux groupes, $\{q_i\}$ les coordonnées et $\{p_i\}$ les moments, $i = 1, \dots, n$. Et qu'il y a aussi une fonction $H(q, p)$, dite l'hamiltonienne. Les équations d'Hamilton canoniques sont données par [12] :

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.61)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.62)$$

Où $\{, \}$ représentent Les crochets de Poisson, qui sont donnés dans un cas continu par :

$$\{u(x), H\} = \int dy \frac{\delta H}{\delta u(y)} \{u(x), u(y)\} \quad (2.63)$$

Le symbole δ indique ici une dérivée fonctionnelle, aussi appelée l'expression d'Euler-Lagrange, qui est donné par :

$$\frac{\delta H}{\delta u} = E(h(u)) = \frac{dh}{du} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dh}{du_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dh}{du_{xx}} \right) - \dots \quad (2.64)$$

Pour montrer que l'équation KdV est en effet un système hamiltonien, nous devons trouver une relation fondamentale de crochet de Poisson et un hamiltonien qui donnerait à l'équation KdV une forme d'équation d'Hamilton. Autrement dit, nous désirons écrire l'équation (2.46) sous la forme [13] :

$$\frac{du}{dt} = \{u(x), H\} \quad (2.65)$$

Afin d'être capable de trouver une structure de crochet de Poisson et un hamiltonien pour l'équation KdV, nous réécrivons l'équation (2.46) comme :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -6 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(-3u^2 - \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Si nous choisissons comme un hamiltonien de la forme :

$$H[u] = \int dx \left(-u^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right) \quad (2.67)$$

Et en faisant la dérivée fonctionnelle (équation (2.64)), on obtient

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = -3u^2 - \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (2.68)$$

On note que $\frac{\delta H}{\delta u(x)}$ coïncide avec la quantité à l'intérieur des parenthèses de l'équation (2.66). Ainsi, nous pouvons écrire l'équation KdV comme :

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.69)$$

Pour que cette équation soit un hamiltonien, nous devons avoir :

$$\frac{du}{dt} = \{u(x, t), H\} \quad (2.70)$$

En comparant avec l'équation (2.69), nous voyons que cela nécessite :

$$\{u(x,t), H\} = \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.71)$$

Où :

$$\int dy \frac{\delta H}{\delta u(y)} \{u(x), u(y)\} = \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.72)$$

Cela détermine le crochet de Poisson fondamentale [13] :

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{d}{dx} \partial(x-y) \quad (2.73)$$

Celui-ci est antisymétrique,

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= \frac{d}{dx} \partial(x-y) \\ &= -\frac{d}{dy} \partial(x-y) \\ &= -\{u(y), u(x)\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Cette structure de crochet de Poisson est associée à l'algèbre abélienne (commutative) dans une dimension (1+1), et donc doivent satisfaire automatiquement l'identité de Jacobi [13].

Ainsi, nous avons vu que l'équation KdV est un système hamiltonien. De plus, notons une particularité de l'équation KdV. A savoir, qu'il existe également un système hamiltonien avec une deuxième structure de crochet de Poisson et un second hamiltonien donné par :

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \left(\frac{d^3}{dx^3} + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d}{dx} \right) \right) \partial(x-y) \quad (2.75)$$

$$H_2[u] = \int dx \left(\frac{1}{2} u^2(x) \right) \quad (2.76)$$

4. Non linéarité-Dispersion, équilibre et stabilité

Pour but de déterminer l'effet de chaque terme de l'équation, nous allons étudier l'équation KdV sous sa forme suivante :

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.78)$$

Dans la limite où la non linéarité domine, c'est le terme non linéaire « uu_x » qui domine l'équation KdV :

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.79)$$

Cette dernière équation a des similitudes avec l'équation de Burger, qui décrit la propagation d'une onde dans un système non linéaire sans dispersion. L'effet de la non linéarité a tendance de faire en sorte que les différentes parties d'une onde se propagent à

des vitesses différentes. Il induit donc une inclinaison de la partie arrière de l'onde, générant ainsi une onde de choc. La Figure 2.3 illustre ce phénomène.

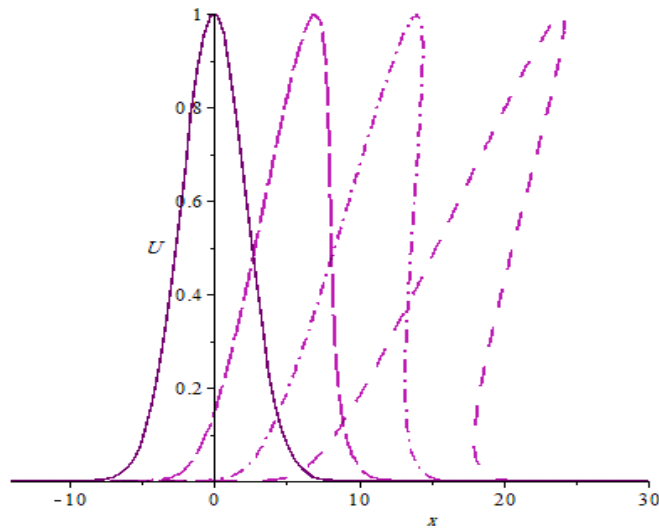


Figure 2.3 : Formation d'une onde de choc régie par l'équation de Burgers (2.79).

Considérons maintenant le cas où la dispersion domine, autrement dit, c'est le terme « u_{xxx} » de l'équation (2.78) qui domine. L'équation devient alors une équation linéaire :

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (2.80)$$

Par définition, un milieu dispersif fait en sorte que les différentes fréquences d'une onde ne se propagent pas à la même vitesse (vitesse de groupe). Cette variance engendre un élargissement de l'onde comme le montre la figure 2.4.

L'équation (2.80) peut être résolue en faisant l'ansatz « $u(x,t) = \exp(i(kx - \omega t))$ », d'où on obtient ce qu'on appelle la relation de dispersion $\omega = -k^3$. Dans ce cas, la vitesse de phase $C_p = \omega/k = -k^2$, est totalement dépendante du nombre d'onde k , et elle est différente de la vitesse de groupe $C_g = d\omega/dk = -3k^2$, ce qui signifie que c'est une équation d'un milieu dispersif.

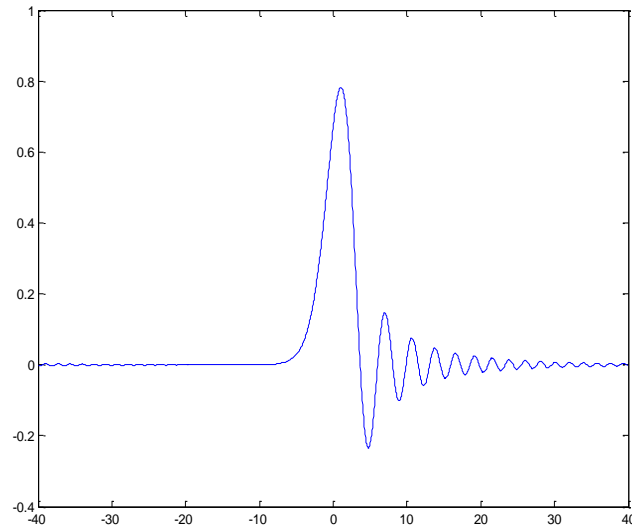


Figure 2.4 : Effet de la dispersion sur la propagation d'une onde dans un milieu régi par l'équation KdV linéarisé (2.80).

Le soliton ne peut exister si et seulement s'il existe un total et délicat équilibre entre l'effet linéaire, dans notre cas la dispersion, et l'effet de la non linéarité.

Pour les ondes de surface, l'équation KdV montre que la dispersion et la non linéarité sont régies par la profondeur h de l'eau. Le terme non linéaire, proportionnelle à $1/h$ augmente pour les eaux peu profondes, tandis que la dispersion, proportionnelle à h^2 diminue. Bien que de petites fluctuations de h ne perturbent pas le soliton, l'équilibre entre les deux peut toutefois être atteint si h est approximativement constant [14].

5. Différentes formes de l'équation KdV

L'équation KdV apparaît dans de différents ordres et formes. Dans ce qui suit, nous présenterons un bref résumé de ces formes. Nous ne limiterons dans cette partie à présenter les formes à une dimension de l'équation KdV. Les formes à deux dimensions seront présentées dans le troisième chapitre.

5.1. Equation KdV de troisième ordre

L'équation KdV de troisième ordre prend la forme suivante :

$$u_t + f(u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.81)$$

Soulignons que les termes $f(u)u_x$ et u_{xxx} peuvent avoir des coefficients. Le terme non linéaire $f(u)$ peut prendre les formes suivantes [15] :

$$f(u) = \begin{cases} \alpha u \\ \alpha u^2 \\ \alpha u^n \\ \alpha u_x \\ 2\alpha u - 3\beta u^2 \\ \alpha u^n - \beta u^{2n} \end{cases} \quad (2.82)$$

(i) Pour $f(u) = \pm 6u$, on trouve l'équation KdV standard.

(ii) Pour $f(u) = 6u^2$, on obtient l'équation KdV modifié (mKdV) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.83)$$

L'équation mKdV, comme l'équation KdV, est complètement intégrable. Cela signifie que l'équation (2.83) peut avoir N -solitons comme solution [15].

(iii) Pour $f(u) = \alpha u^n$, $n \geq 3$ (2.82) devient l'équation KdV généralisée (gKdV) [16].

$$u_t + \alpha u^n u_x + u_{xxx} = 0, n \geq 3 \quad (2.84)$$

Contrairement aux équations KdV et mKdV, l'équation gKdV n'est pas intégrable pour $n \geq 3$, et par conséquent, ne donne pas de solution multiple-solitons.

(iv) Pour $f(u) = \alpha u_x$, on arrive à l'équation KdV potentielle, donnée par :

$$u_t + \alpha (u_x)^2 + u_{xxx} = 0 \quad (2.85)$$

(v) Pour $f(u) = 2\alpha u - 3\beta u^2$, on obtient l'équation généralement appelée, l'équation Gardner [17], ou l'équation KdV-mKdV combiné, et elle est donnée par :

$$u_t + (2\alpha u - 3\beta u^2)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.86)$$

L'équation Gardner (2.86), est largement utilisée dans diverses branches de la physique, comme la physique des plasmas, la physique des fluides, la théorie quantique des champs [15].

(vi) Pour $f(u) = \alpha u^n - \beta u^{2n}$, nous obtenons une autre équation KdV généralisée avec deux puissances de non linéarités de la forme :

$$u_t + (\alpha u^n - \beta u^{2n})u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.87)$$

Cette dernière équation décrit la propagation non linéaire des ondes longues de type acoustique [18]. Pour $n=1$, on retrouve l'équation (2.86), dite l'équation Gardner.

5.2. Equation KdV de cinquième ordre

L'équation KdV de cinquième ordre (*fKdV*) apparaît dans de multiples formes, mais, la bien connue dans sa forme standard est la suivante :

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad (2.88)$$

Où α , β , et γ sont des paramètres réels et arbitraires ($\neq 0$). En changeant les valeurs de ces paramètres, plusieurs formes de l'équation *fKdV* peuvent être construites. Ces équations comprennent, pour des valeurs spécifiques de α , β et γ , l'équation de Lax [20], l'équation de Sawada-Kotera (SK) [21], et l'équation de Kaup-Kupershmidt (KK) [22].

5.3. Equation KdV de septième ordre

L'équation KdV de septième ordre (*sKdV*) prend la forme suivante [19] :

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + \alpha u_{7x} = 0 \quad (2.89)$$

Où α est une constante non-nulle. L'équation *sKdV* a été introduite par Pomeau et al. [23], pour discuter la stabilité structurelle de l'équation KdV sous perturbation singulière. L'équation *sKdV* possède le terme de dispersion d'ordre trois (u_{xxx}) et deux autres termes de dispersions, la dispersion de cinquième ordre (u_{5x}) et de septième ordre (u_{7x}).

5.4. Equation KdV de neuvième ordre

L'équation KdV de neuvième ordre (*nKdV*) s'écrit sous la forme suivante [19] :

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} - u_{5x} + \alpha u_{7x} + \beta u_{9x} = 0 \quad (2.90)$$

Où α et β sont des constantes arbitraires et non-nulles. L'équation *nKdV* possède en plus des termes de dispersion d'ordre trois (u_{xxx}), d'ordre cinq (u_{5x}) et d'ordre sept (u_{7x}), le terme de dispersion d'ordre neuf (u_{9x}).

5.5. Equation KdV à coefficients variables

La propagation des ondes dans un milieu inhomogène et faiblement non linéaire est régit par l'équation KdV à coefficient variable de la forme [24] :

$$u_t + 6uu_x + B(t)u_{xxx} = 0 \quad (2.91)$$

Où $B(t)$ est le coefficient de dispersion locale.

L'applicabilité de la KdV l'équation (2.91) à coefficient variable se pose dans de nombreux domaines de la physique, par exemple, la description de la propagation des ondes de gravité-capillaire et interraciales-capillaire, les ondes internes et les ondes de Rossby [24].

6. Méthodes analytiques pour résoudre l'équation KdV

Au cours des cinq dernières décennies, la construction des solutions exactes pour une large classe d'équations non linéaires y compris l'équation KdV a été un domaine extrêmement actif de la recherche. Une grande partie de la littérature de la théorie des équations non linéaires utilise le modèle de solution soliton de l'équation KdV comme exemple pour introduire la théorie non linéaire.

De nombreuses méthodes analytiques pour obtenir des solutions exactes de l'équation KdV ont été présentées. Comme la méthode de diffusion inverse, la méthode bilinéaire de Hirota, la transformation de Bäcklund, la méthode tanh, la méthode sin-cos, la méthode de perturbation, la méthode variationnelle, la méthode de la fonction Exponentielle, la méthode de l'équation auxiliaire et bien d'autres.

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques méthodes analytiques d'obtention des solutions exactes de type soliton, des différentes formes de l'équation KdV. On se limitera à ceux, qu'en plus de pouvoir trouver des solutions solitons, ils permettent de trouver en plus des solutions N -Soliton.

6.1. Méthode de diffusion inverse

La méthode de diffusion (scattering) a été couramment utilisée en mécanique quantique pour trouver les fonctions d'onde d'un potentiel donné. Un processus inverse de cette

méthode de diffusion est de trouver le potentiel à partir de données de diffusion connues. Un tel processus est appelé la méthode de diffusion inverse (MDI) (MDI pour Inverse Scattering Method en anglais).

L'MDI a joué un rôle très important dans le développement de la théorie des solitons. En effet, la méthode MDI utilise des techniques linéaires pour résoudre le problème de valeur initiale d'un grand nombre d'équation d'onde non linéaire et permet d'obtenir des solutions N-soliton ($N = 1, 2, 3, \dots$). L'MDI a été découverte et développée par Kruskal, Greene, Gardner et Miura en 1967, et elle a été d'abord appliquée pour trouver des solutions solitons à l'équation de Korteweg-de Vries [25].

Une formulation générale de la méthode MDI a rapidement suivie par Peter Lax [26], qui a supposé qu'il est possible de trouver deux opérateurs linéaires $L(u)$ et $B(u)$ qui dépendent de la solution $u(x, t)$ de l'équation KdV, et qui puisse satisfaire l'équation d'opérateur suivante [27] :

$$iL_t = [B, L] \equiv BL - LB \quad (2.92)$$

Pour l'équation KdV, les opérateurs L et B sont :

$$\begin{cases} L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \\ B = -4i \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3i(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u) \end{cases} \quad (2.93)$$

Notons que L_t est interprété comme égale à u_t . L'équation (2.93) confirme que L et B remplissent l'équation (2.92).

L'opérateur L est fonction du temps par sa dépendance à $u(x, t)$, donc nous allons le noter par $L(t)$. Alors le problème de valeur propre peut être formé par :

$$L\psi = \lambda\psi \quad (2.94)$$

Si B est auto-adjoint ($B^* = B$), l'équation (2.92) implique que la valeur propre λ dans (2.94) est indépendante du temps, en outre, la fonction propre ψ évolue dans le temps selon l'équation suivante [27] :

$$i\psi_t = B\psi \quad (2.95)$$

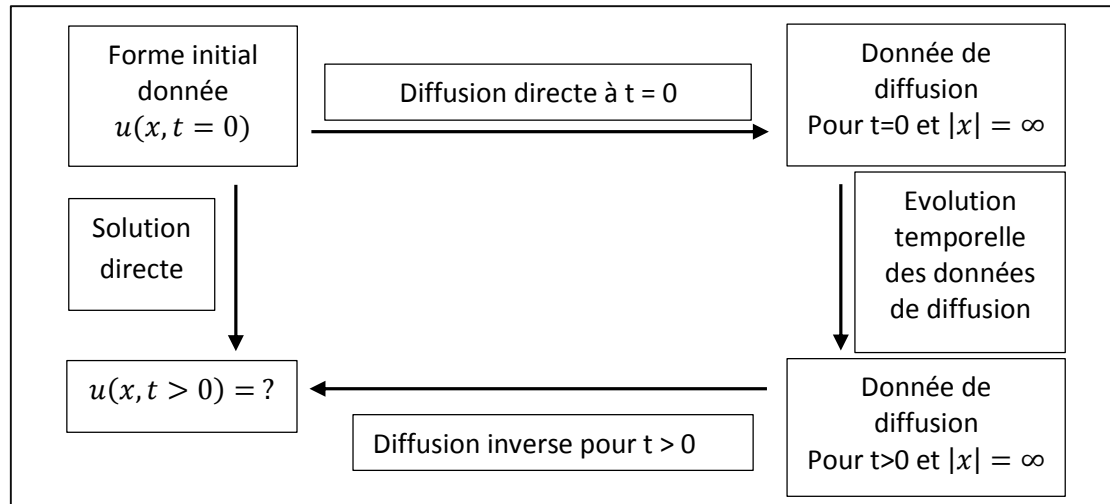


Figure 2.5 : Représentation schématique de la méthode MDI [27]

Le principe de la méthode MDI, selon le diagramme représentatif de la méthode (figure 2.5), est de trouver la solution $u(x, t > 0)$ compte tenu de la forme initiale $u(x, t = 0)$. L'idée de la méthode MDI se base donc sur trois phases : la diffusion directe, l'évolution temporelle des données de diffusion et en fin la diffusion inverse.

6.1.1. Diffusion directe

La solution initiale donnée $u(x, 0)$ résout l'équation de la valeur propre (2.94) à $t = 0$ pour les données de diffusion pour $|x| = \infty$. Pour l'équation KdV, l'équation de la valeur propre à $t = 0$ est la suivante :

$$L(0)\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u(x, 0)\psi = \lambda\psi \quad (2.96)$$

Cette dernière équation n'est que l'équation de Schrödinger en mécanique quantique.

6.1.2. Evolution temporelle des données de diffusion

En utilisant l'équation (2.95) avec la forme asymptotique de l'opérateur B pour $|x| = \infty$, l'évolution temporelle des données de diffusion peut être calculée pour $t > 0$.

6.1.3. Diffusion inverse

À partir de la connaissance des données de diffusion de L à $t > 0$, la solution $u(x, t > 0)$ peut être construite. Cela est accompli par la résolution d'une équation intégrale, dérivée à partir de l'équation (2.94). Le nom de la méthode provient de cette dernière étape.

En conclusion, La méthode MDI permet la résolution, en plus de l'équation KdV, l'équation Sine-Gordon classique et d'une grande classe d'équations non linéaires aux dérivées partielles (EDPNL) à condition d'être intégrable. De part cette particularité, l'MDI est une des plus importantes méthodes de résolution des EDPNL.

6.2. Méthode bilinéaire de Hirota

La méthode bilinéaire de Hirota, aussi appelée la méthode directe, a été développée en 1971 par Hirota pour construire des solutions multi-soliton (N -soliton) à des équations d'évolutions non linéaires et intégrables. Hirota a mis en évidence l'efficacité de la méthode en trouvant des solutions N -solitons à l'équation KdV [28].

Le principe de la méthode directe de Hirota est de transformer les équations d'évolution non linéaires en équations différentielles bilinéaires. Pour comprendre la méthode, nous allons prendre en exemple l'équation KdV sous sa forme (2.46).

Pour convertir l'équation (2.46) en une équation bilinéaire, Hirota a utilisé une approximation connue sous le nom l'approximation de Padé, et ça en remplaçant $u(x, t)$ par G/F , où G et F sont des polynômes de fonctions exponentielles. En remplaçant G/f dans (2.46) en obtient :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{G}{F} \\
 u_t &= \frac{G_t F - G F_t}{F^2} \\
 u_x &= \frac{G_x F - G F_x}{F^2} \\
 u_{xxx} &= \frac{G_{xxx}}{F} - \frac{3G_{xx} F_x + 3G_x F_{xx} + G F_{xxx}}{F^2} \\
 &\quad + 6 \frac{G_x F_x^2 + G F_{xx} F_x - G F_x^3}{F^3} - \frac{G F_x^3}{F^4}
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

En remplaçant les termes de (2.97) dans l'équation (2.46), on obtient une équation extrêmement compliquée comme suit [17] :

$$\begin{aligned}
 u_t + 6uu_x + u_{xxx} &= \frac{G_t F - G F_t}{F^2} + 6 \frac{G}{F} \frac{G_x F - G F_x}{F^2} \\
 &\quad + \frac{G_{xxx} F - 3G_{xx} F_x - 3G_x F_{xx} - G F_{xxx}}{F^2} \\
 &\quad + 6 \frac{F G_x F_x^2 + F G F_{xx} F_x - G F_x^3}{F^4} = 0
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Pour simplifier l'équation, et ça après quelques modifications de l'équation (2.98), Hirota a introduit un opérateur différentiel bilinéaire appelé l'opérateur- D de Hirota, et il est défini par [29] :

$$D_x^n f \cdot g = (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^n f(x_1)g(x_2) \Big|_{x_2=x_1=x} \quad (2.99)$$

Avec cet opérateur- D de Hirota, l'équation (2.98) se réduit en une équation quadratique, aussi appelée la forme bilinéaire de Hirota :

$$(D_t + D_x^3) G \cdot F = 0 \quad (2.100)$$

$$2GF - D_x^2 F \cdot F = 0 \quad (2.101)$$

Alternativement, la solution de l'équation KdV (2.46) peut être écrite sous la forme suivante :

$$u(x, t) = 2 \frac{f f_{xx} - f_x^2}{f^2} = 2(\log f)_{xx} \quad (2.102)$$

En d'autre terme, $G = 2(f f_{xx} - f_x^2)$ et $F = f^2$, où $f(x, t)$ est donnée par [15] :

$$f(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n f_n(x, t) \quad (2.103)$$

L'équation KdV peut s'écrire, alors, sous la forme bilinéaire de Hirota, comme :

$$(D_x D_t + D_x^4) f \cdot f = 0 \quad (2.104)$$

Pour une solution à un soliton, on pose :

$$f(x, t) = 1 + \epsilon f_1 \quad (2.105)$$

Où ϵ est un paramètre d'expansion. Pour une solution à 2 solitons, on met :

$$f(x, t) = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 \quad (2.106)$$

La solution à N -solitons est obtenue part :

$$f_1 = \sum_{i=1}^n \exp(\theta_i) \quad (2.107)$$

Où $\theta_i = k_i x + c_i t$, avec k_i et c_i sont des constantes, k_i est appelée le nombre d'onde. La relation entre k_i et c_i peut être obtenue en déterminant la relation de dispersion.

Les fonctions f_1 , f_2 et f_3 peuvent être déterminées par la substitution directe de (2.103) dans l'équation KdV (2.46).

7. Méthodes numériques pour l'équation KdV

Depuis la découverte de l'onde solitaire et la dérivation de l'équation de KdV, et dans le même temps de rechercher des solutions analytiques pour cette dernière, de nombreux autres travaux ont été réalisés pour trouver une solution numérique pour l'équation de KdV et pour d'autres équations de la même famille de cette dernière.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour le traitement numérique de l'équation KdV, et ça pour les différentes conditions initiales et aux limites, telles que les méthodes spectrale et pseudo spectrale, la méthode spectrale de Fourier, la méthode des différences finies (explicite, implicite et exponentielle), la méthode des éléments finies, la méthode B-spline et bien d'autres. Il existe aussi des méthodes semi-analytiques (analytique et numérique), telles que, la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode de l'itération variationnelle et la méthode d'analyse d'homotopie...etc.

L'étude numérique de l'équation KdV est essentielle, en raison de la non-disponibilité de solutions solitoniques pour des équations de la famille KdV à des conditions aux limites déterminées.

Dans ce qui suit, nous présenteront brièvement, deux méthodes, une numérique et une autre semi-analytique.

7.1. Méthode des différences finies

L'idée fondamentale de la méthode des différences finies (MDF) est de remplacer les variables continues x et t par des ensembles de valeurs discrètes : $\{x_i\}_{i=0}^n$ et $\{t_j\}_{j=0}^n$. Ces ensembles de valeurs sont choisis de sorte que les x_i et t_j , couvrent l'intervalle d'intérêt. L'idéal est de couvrir $-\infty < x < \infty, t \geq 0$, mais les limites de l'implantation numérique est qu'il faut choisir des ensembles finies, par exemple $-100 \leq x \leq 100$. D'autre part, il faut définir une différence constante entre les valeurs de x et t , par :

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h \text{ et } \Delta t_j = t_j - t_{j-1} = k$$

Le remplacement des valeurs continues x et t entraîne le remplacement de l'équation KdV par une équation de différence correspondante. Il existe plusieurs schémas pour appliquer les

différences finies, en cite, le schéma de Zabusky et Kruskal, schéma de Crank-Nicolson le schéma de Lax-Wendroff, le schéma de Walkley [30] ...etc.

Zabusky et Kruskal [31], en 1965, ont prouvé le comportement particule des ondes solitaire, d'où le nom Soliton, en utilisant une méthode FDM explicite, et en utilisant un schéma explicite dit «leapfrog», maintenant appelé le schéma de Zabusky-Kruskal. Dans leur travail, ils ont remplacé l'équation KdV (2.46) par [32] :

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n + u_i^n + u_{i-1}^n)(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \quad (2.108)$$

Où $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$, où i et n sont des nombres entiers.

Ce schéma est compatible avec l'équation (2.46) et l'erreur de troncature est de l'ordre ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$). L'exigence de stabilité linéaire pour ce régime est donnée par :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \left| -2u_0 + \frac{1}{(\Delta x)^2} \right| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (2.109)$$

Où u_0 est la valeur maximale de u dans la région d'intérêt. Cela signifie qu'un très petit intervalle de temps doit être utilisé pour préserver la stabilité.

7.2. Méthode de la décomposition d'Adomian

Nous considérons maintenant le problème de valeur initiale associée à l'équation KdV sous la forme suivante [33] :

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x, 0) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right), \end{cases} \quad (2.110)$$

Où c est la vitesse du front d'onde.

Selon la méthode de la décomposition d'Adomian (ADM), l'équation (2.110) peut être écrite sous une forme d'opérateur, qui est la suivante [34] :

$$\begin{cases} Lu = 6uu_x - u_{xxx}, \\ u(x, 0) = f(x) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right), \end{cases} \quad (2.111)$$

Où l'opérateur différentiel L est $L \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ et l'opérateur inverse L^{-1} est un opérateur intégrale donné par :

$$L^{-1}(o) = \int_0^t (o) dt \quad (2.112)$$

La méthode ADM assume une série de solutions pour la fonction inconnue $u(x, t)$ donnée par la forme suivante :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.113)$$

Et le terme non linéaire ($Nu = uu_x$)

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.114)$$

Où A_n est le polynôme d'Adomian, ce dernier est défini par :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k(x, t) \right) \right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.115)$$

En appliquant l'opérateur intégral (2.112) sur les deux côtés de l'équation (2.111) et en utilisant la condition initiale, on obtient l'équation suivante :

$$u(x, t) = f(x) + L^{-1}(6uu_x - u_{xxx}) \quad (2.116)$$

Puis en remplaçant les équations (2.113) et (2.115) dans cette dernière, on arrive à l'équation suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = f(x) + L^{-1} \left[6 \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)_{xxx} \right] \quad (2.117)$$

D'ici, toutes les composantes $u_n(x, t)$ peuvent être trouvées en utilisant un programme de calcul symbolique (Maple, Mathematica, Matlab...). La solution dans une série est donnée par [32] :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) \dots \\ &= -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) - \frac{c^{5/2}}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) t \\ &\quad - \frac{c^4}{8} (\cosh[\sqrt{c}x] - 2) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) t^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{c^{\frac{11}{2}}}{48} \operatorname{sech}^5\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right) \left(-11\sinh\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right) + \sinh\left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right)\right) t^3 + \dots \quad (2.118)$$

8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence l'importance de l'équation KdV dans le développement de la théorie des solitons. En passant en revue l'historique et la dérivation de l'équation KdV, nous avons pu constater l'importance qu'a donnée la communauté scientifique à cette équation, notamment en développant plusieurs méthodes de résolutions, que ce soit analytique, semi-analytique et bien évidemment numérique. L'importance de trouver des solutions exactes à cette équation a bien été constatée. Cette solution exacte, premièrement appelée onde solitaire puis appelée Soliton par Zabusky et Kruskal, qui ont, par une étude numérique de l'équation KdV pour la première fois, prouvé que ces solitons ont un comportement de particule, notamment en collision. Ces solitons peuvent donc voyager sans perte de vitesse ni se déformer, et gardent leur forme initiale après collision.

La méthode de diffusion inverse (MDI) a aussi joué un rôle déterminant dans le développement de la théorie des solitons. La MDI est une méthode très puissante pour résoudre les EDPNL. Car, en effet, une équation est dite intégrable si une transformation inverse de diffusion existe pour elle.

Tous les résultats présentés dans ce chapitre sont pour les équations de dimensions-(1 + 1) c'est-à-dire qui ont une dimension spatiale et une dimension temporelle. L'équation KdV a été généralisée pour traiter des problèmes non linéaires plus d'une dimension. Nous allons traiter les types d'équations KdV de dimension-(2+1) dans le chapitre suivant.

Références

- [1] Eugene Kramer, “Nonhomogeneous Boundary Value Problems for the Korteweg-de Vries Equation on a Bounded Domain”, Ph.D. Thesis, McMicken College of Arts & Sciences, University of Cincinnati, (2009), p.4.
- [2] Ivonne Rivas, “Analysis and Control of the Boussinesq and Korteweg-de Vries equations”, Ph.D. Thesis, McMicken College of Arts & Sciences, University of Cincinnati, (2011), p.2-4.
- [3] J. Boussinesq, “Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond”. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Deuxième Série* **17**: 55–108, (1872).
- [4] D. J. Korteweg and G. de Vries, “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves”, *Philosophical Magazine* **39** (240): 422–443, (1895).
- [5] Muhammad Usman, “Forced Oscillations of the Korteweg–deVries Equation and Their Stability”, Ph.D. Thesis, McMicken College of Arts & Sciences, University of Cincinnati, (2007), p.6.
- [6] G.G. Stokes, “On the theory of oscillatory waves”. *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8** : 441-455, (1847).
- [7] Harvey Segur, “Waves in shallow water, with emphasis on the tsunami of 2004”. Dans : Anjan Kundu (Ed.), “Tsunami and Nonlinear Waves”, Springer, Berlin, (2007), p 8-12.
- [8] M. Lakshmanan, “Solitons, Tsunamis and Oceanographical Applications of”. Dans : Robert A. Meyers (Ed.), “Mathematics of Complexity and Dynamical Systems”, Springer, New York, (2009), p 1606–1608.
- [9] M. Lakshmanan, “Integrable Nonlinear Wave Equations and Possible Connections to Tsunami Dynamics”. Dans : Anjan Kundu (Ed.), “Tsunami and Nonlinear Waves”, Springer, Berlin, (2007), p 35–40.
- [10] Michel PEYRARD et Thierry DAUXOIS, “Physique des Solitons”, EDP Sciences et CNRS Éditions, 2004, p 384-385.

- [11] Robert M. Miura et al, "*Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion*", Journal Of Mathematical Physics, Volume 9, Number 8, August 1968.
- [12] L. A. Dickey, "*Soliton Equations and Hamiltonian Systems (2nd Edition)*", World Scientific Publishing, Singapore, 2003, p 23.
- [13] Ashok Das, "*Integrable Models*", World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 30, p 15-20.
- [14] M. Peyrard, "*NONLINEAR EXCITATIONS IN BIOMOLECULES*", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995, p 16.
- [15] Abdul-Majid Wazwaz, "*Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*", Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.
- [16] P.G. Drazin, R.S. Johnson, "*Solitons: An Introduction*", Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [17] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- [18] G.B. Whitham, "*Linear and Nonlinear Waves*", Wiley-Interscience, New York, NY, 1999.
- [19] C.M. Dafermos and Milan Pokorný, "*Handbook Of Differential Equations Evolutionary Equations, Volume IV*", Elsevier B.V. 2008.
- [20] P.D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure Appl. Math.* 62 (1968) 467–490.
- [21] K. Sawada, T. Kotera, "A method for finding N-soliton solutions for the KdV equation and KdV-like equation", *Prog. Theor. Phys.* 51 (1974) 1355–1367.
- [22] D. Kaup, "A higher-order water wave equation and the method for solving it", *Prog. Theor. Phys.* 54 (1975) 396–408.
- [23] Y. Pomeau, A. Ramani, B. Grammaticos, "Structural stability of the Korteweg–de Vries solitons under a singular perturbation", *Physica D* 31 (1) (1988) 127–134.
- [24] S. Clarke, BA. Malomed, R. Grimshaw "Dispersion management for solitons in a Korteweg–de Vries system". *Chaos* 12(1) (2002): 8–15.

-
- [25] Samuel S. Shen, "A Course on Nonlinear Waves", SPRINGER-SCIENCE+BUSINESS MEDIA, 1994.
- [26] Peter D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 21, Issue 5, pages 467–490, September 1968.
- [27] Richard H. Enns and George C. McGuire, "Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers", Birkhauser Boston, 2001, p 491-494.
- [28] Ryogo Hirota, "Exact Solution of the Korteweg—de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons", Phys. Rev. Lett. Vol. 27, Iss. 18, 1192, November 1971.
- [29] Jarmo Hietarinta, "Hirota's bilinear method and soliton solutions", Physics AUC, vol. 15 (part I), 31-37 (2005).
- [30] Walkley, M. A. (1999). "A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-Water Wave Equations", PhD Thesis, School of Computer Studies, The University of Leeds, United Kingdom.
- [31] N.J.Zabusky & M.D.Kruskal, "Interaction of "soliton" in a Collisionless Plasma and Recurrence if Initial States", Phys. Rev. Letters, 15, 240-243, 1965.
- [32] Thiab R. Taha AND Mark J. Ablowitz, "Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations: III. Numerical, Korteweg-de Vries Equation", Journal of Computational Physics, Vol. 55, No.2, August 1984.
- [33] MUSTAFA INC, "Korteweg—de Vries Equation (KdV), Some Numerical Methods for Solving the", in Robert A. Meyers (Ed.), "Encyclopedia of Complexity and Systems Science", Springer (2009).
- [34] G. Adomian, "A review of the decomposition method in applied mathematics", J Math Anal Appl 135:501–544, (1998).

CHAPITRE III

Formes multidimensionnelles
de l'équation Korteweg de-Vries

1. Introduction

Dans le chapitre précédent on a pu démontrer que la propagation non linéaire unidimensionnelle d'une grande classe d'ondes dans les milieux faiblement non linéaires et faiblement dispersifs (par exemple, les ondes de surface en eau peu profonde, les ondes acoustiques ioniques et les ondes magnéto-soniques dans les plasmas), est décrite par l'équation KdV. Cette dernière est de dimension $(1 + 1)$, c'est-à-dire, une dimension temporelle et une dimension spatiale. On a vu aussi l'importance et le rôle qu'a pris la méthode de diffusion inverse (MDI) qui est une méthode très puissante pour résoudre les équations partielles différentielles non linéaires (EPDNL). Cette dernière transforme une EPDNL en un système linéaire d'équations différentielles ordinaires découplées par des transformations inverses appelées transformations de diffusion inverse (TDI) (Invers Scattering Transformation). Si une TDI existe pour une EPDNL donnée, l'équation est dite intégrable. Il est supposé qu'une EPDNL peut avoir une TDI si et seulement si cette dernière admet des solutions solitons.

Tous les résultats mentionnés jusqu'ici sont pour les équations de dimension- $(1 + 1)$. L'étude des équations à solitons a conduit à des résultats mathématiques et physiques intéressantes depuis la fin des années 1960. Mais l'extension de ces résultats à des équations à solitons multidimensionnelles sont venus après 1970. L'équation KdV décrit des ondes planes non linéaires qui se propagent dans la direction x , une question évidente a été posée : comment est la propagation des ondes lorsqu'elles se déplacent sur une surface non-unidimensionnelle [1] (qui est bien sûr la situation physique) ? Pour répondre à cette question, un travail de recherche approfondi a été fait dans le développement de modèles ayant plus d'une dimension, en particulier ceux dans la dimension $(1 + 2)$ où on a une temporelle et deux spatiales [4]. Soulignons que les généralisations les plus connus à deux dimensions de l'équation KdV sont : l'équation de Kadomtsov-Petviashvilli (KP) [2], l'équation de Zakharov-Kuznetsov (ZK) [3] et l'équation de Novikov-Veselov (NV) [4,5].

Notons que l'équation KP est intégrable et elle décrit l'évolution des ondes quasi-unidimensionnelles en eau peu profonde lorsque les effets de la tension de surface et la viscosité sont négligeables. En ce qui concerne l'équation ZK, elle n'est pas intégrable via l'MDI et elle gouverne le comportement des ondes acoustiques ioniques faiblement non linéaires dans un plasma comprenant des ions froids et des électrons chaud et isothermes, en présence

d'un champ magnétique uniforme [6]. L'équation NV est complètement intégrable, et elle est, mathématiquement parlant, la généralisation la plus naturelle en dimension $(1 + 2)$ de l'équation KdV.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les solutions solitons et quelques propriétés de ces trois équations.

2. Equation de Kadomtsev-Petviashvili

En 1970, deux physiciens russes Kadomtsev et Petviashvili ont proposé une équation d'onde non linéaire et dispersive à deux dimensions pour étudier la stabilité de l'onde solitaire sous l'influence des perturbations faibles, transversale à la direction de propagation. L'équation KP se pose comme le principal modèle de certains systèmes physiques présentant une faible non linéarité, une faible dispersion et une quasi-deux dimensionnalité. Elle admet plusieurs solutions exactes appelées solitons KP, qui sont régulières, ne se décroissent pas et localisées le long des lignes distinctes dans la plan bidimensionnel « xy » [7]. L'équation KP est pertinente pour la plupart des applications dans lesquelles l'équation KdV se pose. Cette équation prend la forme suivante [8] :

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\sigma^2 u_{yy} = 0 \quad (3.1)$$

Avec $u = u(x, y, t)$, et $\sigma^2 = \pm 1$.

Si $\sigma^2 = -1$, l'équation est appelée KP-I, et dans le cas où $\sigma^2 = +1$ l'équation est appelée KP-II. Par exemple, pour modéliser les ondes dispersives non linéaires sur la surface des fluides, l'équation KP-I est utilisée quand la tension de surface est grande, tandis que, l'équation KP-II est utilisée lorsque cette tension est faible. D'autre part, l'équation KP-I est connue pour avoir un effet focalisant et l'équation KP-II un effet défocalisant [9]. Selon le contexte physique, une dérivation asymptotique peut entraîner soit l'équation KP-I ou KP-II. Dans tous les cas, ces équations décrivent la dynamique de propagation des ondes faiblement non linéaires et faiblement dispersives dont sa longueur d'onde est longue par rapport à son amplitude.

2.1. Dérivation

Le principe mené par Kadomtsev et Petviashvili consisté à chercher une faible perturbation transversale de l'équation d'onde unidimensionnel :

$$u_t + u_x = 0, \quad (3.2)$$

Cette perturbation revient à ajouter un terme non locale, conduisant à :

$$u_t + u_x + \frac{1}{2} \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \quad (3.3)$$

L'opérateur ∂_x^{-1} est défini par la transformé de Fourier suivante :

$$\partial_x^{-1} \widehat{f}(\xi) = \frac{i}{\xi_1} \widehat{f}(\xi), \text{ avec } \xi = (\xi_1, \xi_2) \quad (3.4)$$

Quand cette même procédure est appliquée à l'équation KdV, écrite dans le contexte des ondes d'eau, on obtient l'équation KP suivante :

$$u_t + u_x + uu_x + (1 - \frac{1}{3}T)u_{xxx} + \frac{1}{2} \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \quad (3.5)$$

Où $T \geq 0$, est le nombre de Bond mesurant les effets de tension de surface. Par un changement de valeurs, l'équation (3.5) se réduit à l'équation KP-I si $T > \frac{1}{3}$, et à l'équation KP-II si $T < \frac{1}{3}$.

Bien sûr la même procédure pourrait être appliquée à toute équation unidimensionnelle faiblement dispersive et faiblement non linéaire.

2.2. Hamiltonien de l'équation KP

L'équation KP est complètement intégrable et elle a été démontrée dans le formalisme de Hamiltonien-Liouville par Zakharov et Faddeev [10].

Si on met $w = \int_{-\infty}^x u(x', y, t) dx'$, l'équation KP peut être écrite sous la forme Hamiltonienne suivante [11] :

$$H = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - u^3 \pm \frac{1}{2} w_y^2 \right) dx dy \quad (3.6)$$

Avec un moment $P = (P_x, P_x)$:

$$P_x = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2 dx dy, \quad P_x = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u w_y dx dy, \quad (3.7)$$

Et avec les crochets de Poisson suivant :

$$\{f, g\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta g}{\delta u} \right) dx dy \quad (3.8)$$

Où $u_t = \{u, H\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right)$ est l'équation KP.

En plus, l'équation KP a une infinité dénombrable de constantes de mouvement K_n et en particulier :

$$K_1 = \int \frac{1}{2} u dx dy, \quad K_2 = P_x, \quad K_3 = P_y, \quad K_4 = H, \quad (3.9)$$

2.3. Solutions Soliton

L'équation KP possède une variété de solutions exactes de type soliton. La première classe est une généralisation des solitons de l'équation KdV. Ces solutions décroissent exponentiellement lorsque $x, y \rightarrow \pm \infty$, mais il existe un nombre fini de directions le long duquel elles s'approchent d'une valeur constante. Pour cette raison, ces solutions sont appelées lignes de solitons. Pour un choix approprié de ses paramètres, la direction de propagation de chaque ligne de soliton est choisie pour ne pas être la direction y . Dans le cas le plus simple, les solitons se propagent tous dans la direction x , en ajoutant une seconde dimension aux solitons KdV. De nombreux autres scénarios sont possibles : deux lignes de solitons peuvent interagir avec différents types de régions d'interaction pour produire deux lignes de solitons, mais deux lignes de solitons peuvent également fusionner pour produire une seule ligne de soliton. Alternativement, une seule ligne de soliton peut se désintégrer en deux lignes de solitons. La production ou l'annihilation d'une ligne de soliton est parfois appelée résonance de soliton. Bien que les deux équations KP-I et KP-II ont des solutions lignes de solitons, la résonance de soliton ne se produit que pour l'équation KP-II. Une interaction de deux lignes de solitons est illustrée dans la figure 3.1.

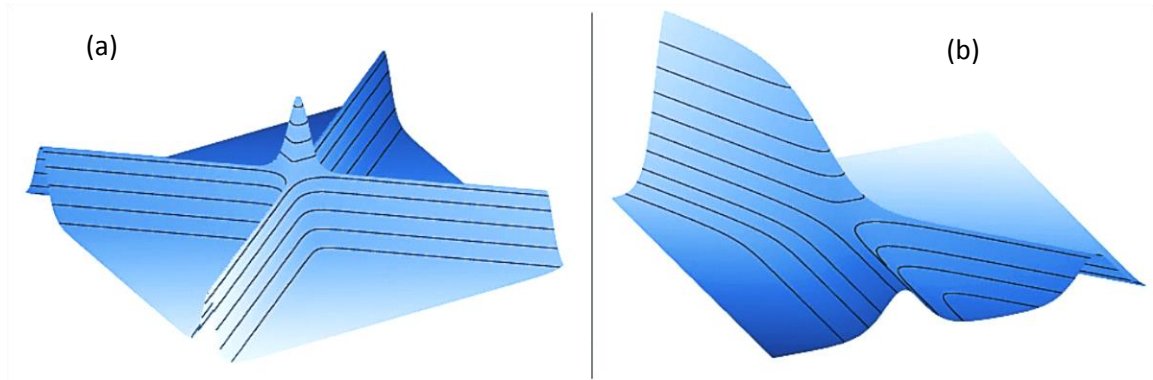


Figure 3.1 : interaction de deux lignes de soliton spatiaux de l'équation KP-II (à $t=0$) : (a) deux lignes de solitons identiques, l'interaction n'influe pas sur leurs caractéristiques. (b) Deux lignes de solitons fusionnent pour produire une ligne de soliton [12].

Une autre classe de solutions soliton existe seulement pour l'équation KP-I. Ces solitons décroissent dans toutes les directions quand $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. Ces solitons sont connue sous le nom de grosseur solitoniques (Lumps). Les grosseurs individuelles et les multi-grosseurs solitoniques, interagissent les uns avec les autres mais ne laissent aucune trace de cette interaction. Une grosseur solitonique est montrée dans la figure 3.2.

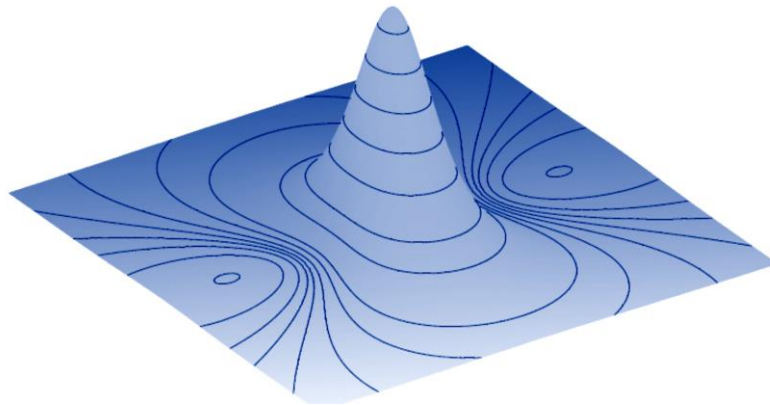


Figure 3.2 : Une grosseur solitoniques (à $t=0$), solution de l'équation KP-I [12].

Une autre importante classe de solutions de l'équation KP généralise les solutions exactes périodiques et quasi-périodiques de l'équation KdV. Une solution quasi-périodique avec des phases g est exprimée en termes de la fonction thêta de Riemann $\theta(z|B)$ par [12] :

$$u(x, y, t) = c + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(kx + ly + \omega t + \phi|B) \quad (3.10)$$

Où c est une constante, k , l , ω et ϕ sont des vecteurs g -dimensionnelles qui sont interprétés comme : le vecteur d'onde (k, l) , ω la fréquence et la phase ϕ . Avec \mathbf{B} est une matrice $(g \times g)$ de Riemann.

Pour $g = 1$, la solution (3.10) généralise la solution d'onde conoïdale de l'équation KdV en deux dimensions. Pour $g = 2$, la solution (3.10) reste périodique dans l'espace, ces solutions se déplacent le long d'une direction dans le plan (x, y) . Pour $g \geq 3$, la solution (3.10) n'est typiquement pas périodique. Pour certaines valeurs des paramètres de la solution (3.10), cette dernière peut être interprétée comme une superposition de lignes de solitons [12]. Des solutions pour $g \leq 2$ ont été comparées avec celles obtenues expérimentalement pour les eaux peu profondes avec un accord étant plus que satisfaisant (Hammack et al. 1995 [13]). Une solution à deux phases de l'équation KP-II est montrée dans la figure 3.3.

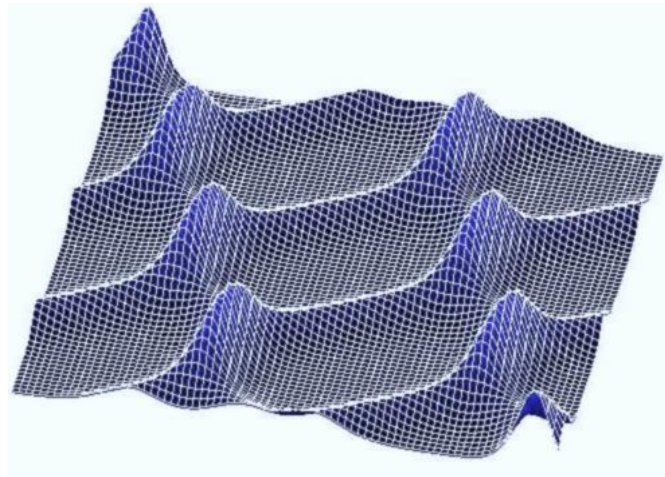


Figure 3.3 : Solution à deux phases de l'équation KP-II [12].

3. Equation de Zakharov–Kuznetsov

L'équation KdV a joué un rôle important dans le développement de la théorie des solitons où la non linéarité et la dispersion dominant, tandis que les effets de dissipation sont suffisamment petits pour être négligés. Cependant, l'équation KdV est considérée comme un modèle spatialement unidimensionnel. Une des généralisations à deux dimensions connue de l'équation KdV est l'équation Zakharov–Kuznetsov (ZK). Cette dernière prend la forme normalisée suivante [14,15] :

$$u_t + auu_x + \nabla^2 u_x = 0, \quad (3.11)$$

Où $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ est le Laplacien isotrope. Cela signifie que l'équation ZK à deux-dimensions est donnée par [16] :

$$u_t + auu_x + (u_{xx} + u_{yy})_x = 0, \quad (3.12)$$

Et à trois-dimensions par :

$$u_t + auu_x + (u_{xx} + u_{zz} + u_{yy})_x = 0, \quad (3.13)$$

L'équation ZK gouverne le comportement des ondes faiblement non linéaire d'ions acoustiques dans un plasma comprenant des ions froids est des électrons isothermes chauds en présence d'un champ magnétique uniforme [17,18]. L'équation ZK a d'abord été dérivée pour décrire des ondes faiblement non linéaires d'ions acoustiques dans un plasma fortement magnétisé en deux dimensions [14]. Cependant, contrairement à l'équation KP, l'équation ZK n'est pas intégrable par l'MDI. Une analyse de Painlevé a été faite pour l'équation ZK [19] et il a été montré qu'elle possède les propriétés de Painlevé, mais il n'y a pas d'autres preuves que cette équation est intégrable.

Dans le contexte de la physique des plasmas, une autre dérivation de l'équation ZK a été faite par Schamel [20] :

$$u_t + u^{1/2}u_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad (3.14)$$

Et

$$u_t + (1 + bu^{1/2})u_x + \frac{1}{2}u_{xxx} = 0, \quad (3.15)$$

Ces équations décrivent les ondes d'ions acoustiques dans un plasma à ions froids mais les électrons ne se comportent pas de façon isotherme l'or du passage de l'onde.

Monro et Parkes [17,18] ont montré que si les électrons sont non-isotherme, alors, l'équation gouvernante est forme modifiée de l'équation ZK appelée l'équation mZK.

3.1. Lois de conservation de l'équation ZK

Infeld et Frycz [20] ont trouvé que l'interaction des ondes solitaires de l'équation ZK est inélastique. D'ailleurs, il n'y a que trois polynômes de lois de conservation qui ont été trouvées pour l'équation ZK (Infeld [21] et Shivamoggi [22]). Il en revient à écrire l'équation ZK de la forme :

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} + u_{yyx} = 0, \quad (3.16)$$

comme suit :

$$u_t + (-3u^2 + u_{xx} + u_{yy})_x = 0, \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + (-2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + uu_{yy} + \frac{1}{2}u_y^2)_x = 0, \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{6}u_x^2 + \frac{1}{6}u_y^2\right) + \left(-\frac{3}{2}u^4 + u^2u_{xx} - 2uu_x^2 + \frac{1}{3}u_xu_{xxx} + \frac{1}{6}u_{xx}^2 + u^2u_{yy} + \frac{1}{3}u_xu_{yyx} + \frac{1}{6}u_{xy}^2\right)_x + \left(-2uu_xu_y - \frac{1}{3}u_{xx}u_{xy} + \frac{1}{3}u_yu_{yyy} - \frac{1}{6}u_{yy}^2\right)_y = 0, \quad (3.19)$$

4. Equation de Novikov-Veselov

4.1. Dérivation

La nature algébrique de l'intégrabilité de l'équation KdV a été trouvée par Peter Lax, qui a montré que l'équation KdV est équivalente à une équation qui décrit l'évolution d'un opérateur L [23] :

$$iL_t = [B, L] \quad (3.20)$$

Où L et B sont donnés pour l'équation KdV par :

$$\begin{cases} L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \\ B = -4i \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3i(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u) \end{cases} \quad (3.21)$$

Une représentation de la forme (3.20) a été plus tard obtenue pour une large classe d'équations non linéaire, notamment l'équation de Schrödinger cubique, l'équation sine-Gordon, l'équation Kadomtsev-Petviashvili et d'autres. Ces résultats ont mené à un développement rapide d'une méthode d'intégration exacte (la méthode de diffusion inverse MDI) pour une certaine classe d'équations différentielles non linéaires.

Novikov et Veselov ont pu obtenir l'équation suivante [24] :

$$u_t = \partial^3 u + \bar{\partial}^3 u + \partial(Vu) + \bar{\partial}(\bar{V}u) \quad (3.22)$$

Avec

$$\bar{\partial}V = 3\partial u \quad (3.23)$$

$$\partial \bar{V} = 3\bar{\partial}u \quad (3.24)$$

$$\text{Où } \partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ et } \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Et ça en utilisant un opérateur L où l'évolution de ce dernier est représentée par une triplette L - A - B de Manakov [25] qui est de la forme suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [L, A] - BL = 0 \quad (3.25)$$

Avec

$$L = \partial \bar{\partial} + V \quad (3.26)$$

$$A = \partial^3 + \bar{\partial}^3 + u\partial + \bar{u}\bar{\partial} \quad (3.27)$$

$$B = \partial u + \bar{\partial} \bar{u} \quad (3.28)$$

Cette représentation introduite par Manakov est une généralisation à deux dimensions de la relation (3.20), en d'autre terme c'est une généralisation de la paire de Lax de l'équation KdV. Ici L est un opérateur du potentiel bidimensionnelle de Schrödinger, qui est physiquement intéressant pour lequel l'équation NV joue le rôle d'une déformation iso-spectrale par rapport à un niveau d'énergie fixe [26].

De cette optique et mathématiquement parlant, l'équation NV est une généralisation plus naturelle en dimensions (1 + 2) de l'équation KdV que l'équation KP ou l'équation ZK.

4.2. Obtention de l'équation KdV via la triplette L-A-B

Pour prouver la représentation de Manakov, nous allons récupérer l'équation KdV depuis la triplette L-A-B. En utilisant les équations (3.26)-(3.28) et en omettant la dépendance en y , c'est-à-dire que les fonctions ne dépendent que de x et t . Nous trouvons les relations suivantes [27] :

$$\begin{aligned} [L, A + \partial_t] = BL = & \left(\frac{-u_{xxx}}{4} - u_t - \frac{\bar{V}u_x}{2} - \frac{Vu_x}{2} - \frac{\bar{V}_x u}{2} - \frac{V_x u}{2} \right) \\ & + \left(\frac{V_{xx}}{8} + \frac{\bar{V}_{xx}}{8} - \frac{3}{4}u_{xx} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ & + \left(\frac{V_x}{8} + \frac{\bar{V}_x}{8} - \frac{3}{4}u_x \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pour que l'équation (3.29) soit égale à zéro, il faut que tous ses composantes soient nulles, c'est-à-dire :

$$\frac{-u_{xxx}}{4} - u_t - \frac{\bar{V}u_x}{2} - \frac{Vu_x}{2} - \frac{\bar{V}_x u}{2} - \frac{V_x u}{2} = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{V_{xx}}{8} + \frac{\bar{V}_{xx}}{8} - \frac{3}{4}u_{xx} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{V_x}{8} + \frac{\bar{V}_x}{8} - \frac{3}{4}u_x = 0 \quad (3.32)$$

En intégrant les équations (3.31) et (3.32), on trouve respectivement :

$$6u_x = V_x + \bar{V}_x \quad (3.33)$$

$$6u = V + \bar{V} + K \quad (3.34)$$

Où K est une constante d'intégration.

En remplaçant les équations (3.33) et (3.34) dans l'équation (3.30), on trouve l'équation suivante pour $K=0$ [27] :

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x = 0 \quad (3.35)$$

Un changement de variable simple transforme l'équation (3.35) à la forme classique de l'équation KdV.

4.3. Lois de conservation de l'équation NV

Afin de montrer les lois de conservations de l'équation NV, nous allons utiliser quelques définitions de la méthode de diffusion inverse. En effet, il a été montré que l'équation NV est intégrable et peut être résolue en utilisant la méthode de diffusion inverse (MDI) [28].

En Prenant $z = x + iy$, et $k = k_1 + ik_2$, les données de diffusions de u sont définies par [27] :

$$t(k) = \int e^{-ikz} u(z)\psi(z, k) dz \quad (3.36)$$

Au moyen des solutions de Faddeev d'optique géométriques complexes [29], la fonction $\psi(z, k)$ est la solution de l'équation Schrödinger qui a une croissance exponentielle de la forme [30] :

$$(-\Delta + u)\psi(\cdot, k) = 0 \quad (3.37)$$

Il est plus convenable de travailler avec des solutions normalisées d'optique géométriques complexes $\mu(z, k)$ définie par [27,30] :

$$\mu(z, k) = \psi(z, k)e^{ikz} \quad (3.38)$$

Un calcul direct montre que $\mu(z, k)$ obéit à l'équation suivante :

$$\bar{\partial}(\partial + ik)\mu = \frac{1}{4}u\mu \quad (3.39)$$

En assumant que $\mu(z, k)$ admet une expansion de la forme d'une série :

$$\mu(z, k) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j(z)}{k^j} \quad (3.40)$$

Et en substituant la série (3.40) dans l'équation (3.39), on peut résoudre le système obtenu pour les coefficients a_j suivant [30] :

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Delta a_j(z)}{k^j} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4i\bar{\partial}a_j(z)}{k^j} + u \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4i\bar{\partial}a_j(z)}{k^j} = -u \quad (3.41)$$

On obtient $a_1 = \frac{1}{4i}\bar{\partial}^{-1}u$.

Une formulation générale peut être dérivée :

$$a_{j+1} = \frac{1}{4i}\bar{\partial}^{-1}(-4\bar{\partial}\partial a_j + ua_j) = i\partial a_j + \frac{1}{4i}\bar{\partial}^{-1}(ua_j) \quad (3.42)$$

En substituant l'équation (3.41) dans l'équation (3.42), nous obtenons un nombre infini de quantités conservées. Les trois premières sont données par [27,30] :

$$I_0 = \int u(z)dz, \quad (3.43)$$

$$I_1 = \int u(z)(\bar{\partial}^{-1}u)(z)dz, \quad (3.44)$$

$$I_2 = \int \left(\frac{1}{4}u(z)V(z) - \frac{1}{16}u\bar{\partial}^{-1}(u\bar{\partial}^{-1}u)(z) \right) dz, \quad (3.45)$$

Avec $z = x + iy$.

4.4. Différentes formes de l'équation NV

L'équation NV comme l'équation KdV se présente dans de différentes formes. Dans cette section, nous allons citer brièvement les formes de l'équation NV.

4.4.1. Equation NV généralisée

Elle est donnée par la forme suivante [31.32] :

$$u_t + au_{xxx} + bu_{yyy} + c(u\partial_y^{-1}u_x)_x + d(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0 \quad (3.46)$$

Avec a , b , c et d sont des paramètres constants. Ces derniers peuvent être variables (en fonction du temps) [31].

4.4.2. Equation NV modifiée

L'équation NV modifiée (mNV) est une généralisation naturelle en (1 + 2) dimensions de l'équation KdV modifiée (mKdV). L'équation mNV est donnée par [33] :

$$u_t = (u_{zzz} + 3u_z v + \frac{3}{2}uv_z) + (u_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3u_{\bar{z}}\bar{v} + \frac{3}{2}u\bar{v}_{\bar{z}}) \quad (3.47)$$

Avec

$$v_{\bar{z}} = (u^2)_z \quad (3.48)$$

L'équation mNV comme l'équation NV a une représentation d'une tripléte d'opérateurs L - A - B de la forme de l'équation (3.25). Pour l'équation mNV, les opérateurs L , A et B sont donnés par [34] :

$$L^{mNV} = \begin{pmatrix} \partial & -u \\ u & \bar{\partial} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$A^+ = \partial^3 + 3 \begin{pmatrix} 0 & -u_z \\ 0 & v \end{pmatrix} \partial + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2uv \\ 0 & v_z \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$B^+ = 3 \begin{pmatrix} 0 & u_z \\ -u_z & 0 \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} 0 & -uv \\ -u_{zz} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$A^- = \bar{\partial}^3 + 3 \begin{pmatrix} \bar{v}\bar{\partial} & 0 \\ u_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \bar{v}_{\bar{z}} & 0 \\ -2u\bar{v} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$B^- = 3 \begin{pmatrix} 0 & u_{\bar{z}} \\ -u_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \bar{\partial} + 3 \begin{pmatrix} 0 & u_{\bar{z}\bar{z}} + u\bar{v} \\ u\bar{v} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Ces triplets représentent les équations suivantes [34] :

$$u_{t^+} = u_{zzz} + 3u_z v + \frac{3}{2}uv_z \quad (3.54)$$

$$u_{t^-} = u_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3u_{\bar{z}}\bar{v} + \frac{3}{2}u\bar{v}_{\bar{z}} \quad (3.55)$$

Où la fonction v est donnée par l'équation (3.48).

Dans [26], il est montré que l'équation est liée à l'équation NV d'une manière similaire à la façon dans laquelle l'équation mKdV est liée à l'équation KdV.

4.4.3. Equation Nizhnik-Novikov-Veselov

L'équation de dimensions (1 + 2) de Nizhnik-Novikov-Veselov (NNV) est donnée par [36] :

$$u_t + u_{xxx} + u_{yyy} - 3(uv)_x - 3(uw)_y = 0 \quad (3.56)$$

$$v_y = u_x \quad (3.57)$$

$$w_x = u_y \quad (3.58)$$

Le système d'équation (3.56)-(3.58) qui représente l'équation NNV est très similaire à l'équation NV. L'équation NNV constitue un modèle pour les fluides incompressibles [37].

4.4.4. Equation NNV généralisée

L'équation NNV généralisée (gNNV) est une généralisation symétrique de l'équation KdV en dimensions (1 + 2) et elle est donnée par [38] :

$$u_t + au_{xxx} + bu_{yyy} + cu_x + du_y - 3a(v_x u + v u_x) - 3b(w_y u + u w_y) = 0, \quad (3.59)$$

$$v_y = u_x \quad (3.60)$$

$$w_x = u_y \quad (3.61)$$

Où a , b , c , et d sont des paramètres. Cette équation est également connue pour être complètement intégrable.

4.4.5. Equation NV Non-dispersive

L'équation NV non-dispersive (dNV) est donnée par [30] :

$$u_t = (vu)_z + (u\bar{v})_{\bar{z}} \quad (3.62)$$

$$v_{\bar{z}} = -3u_z \quad (3.63)$$

L'équation dNV a été dérivée dans [39] comme étant la limite de l'optique géométrique des équations de Maxwell dans un milieu anisotrope. Le modèle régit la propagation des

ondes électromagnétiques monochromatiques d'haute fréquence. En particulier, ils considèrent les milieux non linéaires possédants une fonction diélectrique et une perméabilité magnétique dépendantes de la fréquence de type Cole-Cole [40].

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes formes multidimensionnelles de l'équation KdV, et plus particulièrement ceux de dimension $(1+2)$. Les propriétés mathématiques de ces équations ont été montrées. Nous avons pu constater que les équations KP et NV sont les généralisations bidimensionnelles les plus complètes de l'équation KdV. L'équation ZK est une généralisation en dimension $(1+2)$ mais elle ne garde pas une des propriétés mathématiques la plus importantes de l'équation KdV, qui est l'intégrabilité. Nous avons vu que certes l'équation ZK a des lois de conservations et les propriétés de Painlevé mais jusqu'à aujourd'hui ça complète intégrabilité n'a pas été prouvée. Il est à noter que l'équation NV avec ces différentes formes trouve des applications potentielles et en particulier en hydrodynamique [41], en optique non linéaire [39] où elle intervient comme un modèle pour décrire la propagation de la lumière dans la limite de l'optique géométrique dans une classe particulière de milieux non linéaires [39].

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à l'étude de l'équation NV sous plusieurs formes : simple, généralisée et avec des coefficients constants ou variables. La dynamique de propagation non linéaire des solitons modélisés par ces différentes formes sera étudiée.

Références

- [1] R.S. Johnson, "A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves", Cambridge University Press, 1997.
- [2] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili. "On the stability of solitary waves in weakly dispersing media". Soviet Physics Doklady, Vol. 15 (6) (1970), pp. 539–541.
- [3] V.E. Zakharov, E.A. Kuznetsov, "On three-dimensional solitons", Sov Phys, 39 (1974), pp. 285–288.
- [4] S.P. Novikov, A.P. Veselov, "Two-dimensional Schrodinger operator: inverse scattering transform and evolutional equations", Physica D 18 (1986) 267–273
- [5] A.P. Veselov, S.P. Novikov, "Finite-zone, two-dimensional, potential Schrodinger operators, explicit formulas and evolution equations", Sov. Math. Dokl. 30 (1984) 558–591.
- [6] Abdul-Majid Wazwaz, "The extended tanh method for the Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation, the modified ZK equation, and its generalized forms", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 13 (2008) 1039–1047.
- [7] Yuhan Jia, M.S, B.S., "Numerical study of the KP solitons and higher order Miles theory of the Mach reflection in shallow water", Dissertation, Graduate Program in Mathematics, The Ohio State University, 2014.
- [8] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media", Sov. Phys. Dokl. 15 (1970) 539–541.
- [9] C. Klein and K. Roidot, "Fourth Order Time-Stepping For Kadomtsev–Petviashvili And Davey–Stewartson Equations", SIAM J. SCI. COMPUT, VOL. 33, NO. 6, PP. 3333–3356.
- [10] L. D. Faddeev and V. E. Zakharov, "Kortweg-de Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system". Funct. Anal. Appl. 5 (1971), 280–287.
- [11] Zhuhan JIANG and R.K. BULLOUGH, "Complete Integrability Of The Kadomtsev-Petviashvili Equations In 2 + 1 Dimensions", Physica 18D (1986) 305-307.
- [12] Bernard Deconinck, "Kadomtsev-Petviashvili Equation", dans: Alwyn Scott, "Encyclopedia of Nonlinear Science", Routledge, Taylor & Francis, New York, 2005.

-
- [13] J. Hammack, D. McCallister, N. Scheffner & H. Segur, "Two-dimensional periodic waves in shallow water. Part 2. Asymmetric waves". *Journal of Fluid Mechanics*, 285: 95–122, 1995.
- [14] VE. Zakharov, EA. Kuznetsov, "On three-dimensional solitons". *Sov Phys* 39:285–8, 1974.
- [15] Kivshar YS, Pelinovsky DE. "Self-focusing and transverse instabilities of solitary waves", *Phys Rep*, 331:117–95, 2000.
- [16] Abdul-Majid Wazwaz, "Exact solutions with solitons and periodic structures for the Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation and its modified form", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 10, 597–606, 2005.
- [17] Monro S, Parkes EJ. "The derivation of a modified Zakharov–Kuznetsov equation and the stability of its solutions", *J Plasma Phys*, 62(3):305–17, 1999.
- [18] Monro S, Parkes EJ. "Stability of solitary-wave solutions to a modified Zakharov–Kuznetsov equation". *J Plasma Phys*, 64(3):411–26, 2000.
- [19] Bhimsen K. Shivamoggi, "*The Painlevé Analysis of the Zakharov-Kuznetsov Equation*", *Physica Scripta*. Vol. 42, 641-642, 1990.
- [20] E. Infeld and P. Frycz, "Self-focusing of nonlinear ion-acoustic waves and solitons in magnetized plasmas. Part 2. Numerical simulations, two-soliton collisions", *Journal of Plasma Physics*, volume 37, issue 01, pp 97- 106, February 1987.
- [21] E. Infeld, "Self-focusing of nonlinear ion-acoustic waves and solitons in magnetized plasmas", *Journal of Plasma Physics*, volume 33, issue 02, pp 171- 182, April 1985.
- [22] Bhimsen K. Shivamoggi, "Nonlinear ion-acoustic waves in a magnetized plasma and the Zakharov-Kuznetsov equation", *Journal of Plasma Physics*, volume 41, issue 01, pp 83- 88, February 1989.
- [23] Richard H. Enns and George C. McGuire, "Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers", *Birkhauser Boston*, pp 491-494, 2001.
- [24] S. P. Novikov, and A. P. Veselov, "Finite-zone, two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formula and evolutions equations". *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 279, 20–24, 1984. Translation in *Sov. Math. Dokl.* 30, 588–591, 1984.

- [25] S. V. Manakov, "The inverse scattering method and two-dimensional evolution equations". *Uspekhi Mat. Nauk* 31(5), 245–246, 1976 (in Russian).
- [26] L. V. Bogdanov, "Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation", *Theoretical and Mathematical Physics*, Volume 70, Issue 2, pp 219-223, February 1987.
- [27] Ryan P. Croke, "An Investigation of The Novikov–Veselov equation: New solutions, stability and implications for the inverse scattering transform", Dissertation, Colorado State University, 2012.
- [28] P. A. Perry, "Miura maps and inverse scattering for the Novikov–Veselov equation", ArXiv e-prints : 1201.2385, (2012).
- [29] L. D. Faddeev, "Increasing solutions of the Schrodinger equation", *Sov. Phys. Dokl*, 10 (1966), pp. 1033–1035.
- [30] R. Croke, J. L. Mueller et al., "The Novikov-Veselov Equation: Theory and Computation", *Contemporary Mathematics*, Volume 635, 2015, <http://dx.doi.org/10.1090/conm/635/12718>.
- [31] B. Boubir, H. Triki, A.M. Wazwaz, "Bright solitons of the variants of the Novikov–Veselov equation with constant and variable coefficients", *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 420–431.
- [32] Neng Zhu, Chaohong Pan, Zhengrong Liu, "Two kinds of important bifurcation phenomena of nonlinear waves in a generalized Novikov–Veselov equation", *Nonlinear Dyn*, DOI 10.1007/s11071-015-2404-7, Springer, pp 1-14, September 2015.
- [33] Delong Yu, Q P Liu and Shikun Wang, "Darboux transformation for the modified Veselov–Novikov equation", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35 (2002) 3779–3785.
- [34] Iskander A. TAIMANOV, "Modified Veselov–Novikov equation and differential geometry of surface", *Trans. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 179 (1997), pp. 133–153, arXiv:dg-ga/9511005v5.

- [36] Jiashi Tang, Feng Han, Minghua Zhao, Wenbin Fu, "Travelling wave solutions for the (2 + 1) dimensional Nizhnik–Novikov–Veselov equation", *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 11083–11088.
- [37] P. G. ESTEVEZ AND S. LEBLE, "A wave equation in 2+1: Painleve analysis and solutions", *Inverse Probl.*, 11 (1995), p. 925.
- [38] C. Senthil Kumar, R. Radha, M. Lakshmanan, "Trilinearization and localized coherent structures and periodic solutions for the (2 + 1) dimensional K-dV and NNV equations", *Chaos, Solitons and Fractals* 39 (2009) 942–955.
- [39] Boris Konopelchenko and Antonio Moro, "Integrable Equations in Nonlinear Geometrical Optics", *Studies in Applied Mathematics*, Volume 113, Issue 4, pages 325–352, November 2004.
- [40] Cole, K. S., Cole, R. H. "Dispersion and absorption in dielectrics", *J. Chem. Phys.*, 9 (1941), 341–351.
- [41] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko and A. Moro, "Symmetry constraints for real dispersionless Veselov–Novikov equation", Preprint (arXiv:nlin/0406023v1), 2004.

CHAPITRE IV

Dynamique de propagation
non linéaire des solitons

Novikov-Veselov

1. Introduction

Les progrès récents de la science non linéaire ont conduit à l'élaboration d'un certain nombre de nouvelles techniques qui pourraient servir bien pour trouver diverses solutions d'équations différentielles partielles non linéaires (EDPNL), ayant des coefficients constants ou variables. Donnant un grand intérêt pour les EDPNL est dû au fait que cette classe d'équations d'évolution non linéaire décrit plusieurs phénomènes dans les systèmes non linéaires ayant des applications très larges dans de nombreux domaines de la physique telles que l'optique non linéaire, les plasmas, la mécanique des fluides, la matière condensée, l'électro magnétique ...etc. Plusieurs types de solutions à ces équations, y compris les solutions de types solitons, et d'autres excitations non linéaires cohérentes ont été construites. Ces solutions exactes, quand elles existent, peuvent aider à bien comprendre le mécanisme des phénomènes physiques complexes et les processus dynamiques modélisés par ces équations d'évolution non linéaires [1]. Parmi ces méthodes, comme nous l'avons montré dans le deuxième chapitre, on peut citer d'autres méthodes telles que la méthode de l'équation différentielle ordinaire de substitution [subsidiary ordinary differential equation method (sub-ODE pour faire court)] [2, 3, 4], la formulation de couplage amplitude-phase [5], la méthode de transformation de Backlund, la méthode de l'ansatz d'onde solitaire [7-11], etc. Ces méthodes fonctionnent même si le test d'intégrabilité de Painlevé est échoué [11].

L'équation KdV constitue un modèle de propagation unidimensionnelle pour les ondes longues à la surface de l'eau, en faible profondeur. C'est le modèle générique pour l'étude des ondes longues dans les systèmes faiblement non linéaires [12]. L'équation KdV joue un rôle clé dans la théorie des solitons du fait qu'elle modélise une variété de phénomènes non linéaires, y compris les ondes acoustiques ioniques dans les plasmas, les ondes en eau peu profonde et bien d'autres [13,14]. L'équation KdV est une équation intégrable par la méthode de diffusion inverse (Inverse Scattering method) et elle possède un nombre infini de lois de conservation et donne des solutions de type N-solitons.

Comme nous l'avons vu dans le troisième chapitre, Kadomtsev et Petviashvili ont étendu l'équation KdV à deux dimensions (1+2), une temporelle et deux spatiale, pour obtenir l'équation suivante [15] :

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0 \quad (4.1)$$

L'équation KP est également intégrable et donne des solutions de type N-solitons.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'équation de Novikov-Veselov (NV), qui s'écrit sous la forme suivante [16, 17] :

$$2u_t + u_{xxx} + u_{yyy} + 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x + 3(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0 \quad (4.2)$$

Cette dernière constitue une autre généralisation en (1+2)-dimension de l'équation KdV, en plus de l'équation de Kadomtsev-Petviashvili [16]. Elle représente un modèle de grande importance en physique non-linéaire (en particulier dans la théorie de la diffusion inverse) [18-22] et en mathématiques [23,24].

Dans ce qui suit, la méthode de l'ansatz de l'onde solitaire sera exploitée pour construire des solutions exactes de type soliton ou onde solitaire pour quatre variantes de l'équation NV. Les modèles qui seront étudiés sont les suivants :

(i) L'équation NV à coefficients constants :

$$u_t + au_{xxx} + bu_{yyy} + c(u\partial_y^{-1}u_x)_x + d(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0 \quad (4.3)$$

(ii) L'équation NV à coefficients variables avec un terme d'amortissement :

$$u_t + f(t)u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u_{yyy} + r(t)(u\partial_y^{-1}u_x)_x + s(t)(u\partial_x^{-1}u_y)_y + \alpha(t)u = 0, \quad (4.4)$$

(iii) L'équation NV (m,n) avec un terme d'évolution généralisé :

$$(u^l)_t + \alpha(u^n)_{xxx} + \beta(u^n)_{yyy} + \gamma(u^m\partial_y^{-1}u_x)_x + d(u^m\partial_x^{-1}u_y)_y = 0, \quad (4.5)$$

(iv) L'équation NV à (1+N)-dimension avec des coefficients variable et terme de force de la forme suivante :

$$u_t + a(t) \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i x_i} + b(t) \sum_{i=1}^N (u\partial_{x_j}^{-1}u_{x_i})_{x_i} + c(t) \sum_{i \neq j}^N (u\partial_{x_i}^{-1}u_{x_j})_{x_j} = \lambda(t), \quad (4.6)$$

En considérant ces modèles intéressants, nous donnons une étude approfondie de la dynamique des solitons dans différents systèmes non linéaires modélisés par les des équations d'évolution de type NV. En outre, la recherche de nouvelles solutions d'ondes solitaires est d'un grand intérêt car elles permettent de comprendre les phénomènes

physiques intervenant au cours de la propagation des ondes dans les systèmes dynamiques homogènes ou inhomogènes modélisés par les modèles NV.

2. Ondes solitaires pour une équation NV à coefficients constants

Considérons une famille d'équation NV à coefficients constants donnée par :

$$u_t + au_{xxx} + bu_{yyy} + c(u\partial_y^{-1}u_x)_x + d(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0 \quad (4.7)$$

Où a, b, c et d sont des constantes arbitraire non-nulle, et $u(x, y, t)$ est une fonction inconnue qui dépend des coordonnées spatiale x et y , et de la variation du temps t . Les indices x, y et t désignent des dérivées partielles par rapport à ces variables.

On commence par introduire les variables auxiliaires suivants :

$$v = \partial_y^{-1}u_x \quad (4.8)$$

$$w = \partial_x^{-1}u_y \quad (4.9)$$

Ces dernières emmènent l'équation (4.7) en un système d'équations couplées sous la forme suivante :

$$u_t + au_{xxx} + bu_{yyy} + c(uv)_x + d(uw)_y \quad (4.10)$$

$$v_y = u_x \quad (4.11)$$

$$w_x = u_y \quad (4.12)$$

Pour déterminer la solution soliton pour le système d'équation (4.10)-(4.12), nous allons utiliser la méthode de l'ansatz d'onde solitaire [7-10] basée sur l'utilisation des hypothèses suivantes :

$$u(x, y, t) = \frac{A_1}{\cosh^{p_1}\tau}, \quad (4.13)$$

$$v(x, y, t) = \frac{A_2}{\cosh^{p_2}\tau}, \quad (4.14)$$

$$w(x, y, t) = \frac{A_3}{\cosh^{p_3}\tau}, \quad (4.15)$$

Où

$$\tau = B_1x + B_2y - Vt \quad (4.16)$$

Et $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$.

A_1, A_2 et A_3 représentent les amplitudes des solitons u, v et w , respectivement. V est la vitesse des solitons, tandis que B_1 et B_2 sont les largeurs inverses dans les directions x et y , respectivement. Les exposants p_1, p_2 et p_3 sont des inconnues à ce stade et seront déterminés plus tard.

De l'ansatz (4.13)-(4.15), on obtient :

$$u_t = \frac{p_1 V A_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau}, \quad (4.17)$$

$$u_x = -\frac{p_1 A_1 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau}, \quad (4.18)$$

$$u_y = -\frac{p_1 A_1 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau}, \quad (4.19)$$

$$v_y = -\frac{p_2 A_2 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_2} \tau}, \quad (4.20)$$

$$w_x = -\frac{p_3 A_3 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_3} \tau}, \quad (4.21)$$

$$u_{xxx} = -\frac{A_1 p_1^3 B_1^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} + \frac{A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) B_1^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+2} \tau}, \quad (4.22)$$

$$u_{yyy} = -\frac{A_1 p_1^3 B_2^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} + \frac{A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) B_2^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+2} \tau}, \quad (4.23)$$

$$(uv)_x = -\frac{A_1 A_2 (p_1 + p_2) B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+p_2} \tau}, \quad (4.24)$$

$$(uw)_y = -\frac{A_1 A_3 (p_1 + p_3) B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+p_3} \tau}, \quad (4.25)$$

En faisant la substitution des équations (4.17)-(4.25) dans le système d'équations (4.10)-(4.12), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 V A_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} - \frac{a A_1 p_1^3 B_1^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} + \frac{a A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) B_1^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+2} \tau} \\ & - \frac{b A_1 p_1^3 B_2^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} + \frac{b A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) B_2^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+2} \tau} \\ & - \frac{c A_1 A_2 (p_1 + p_2) B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+p_2} \tau} - \frac{d A_1 A_3 (p_1 + p_3) B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_1+p_3} \tau} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\frac{p_2 A_2 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_2} \tau} = \frac{p_1 A_1 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} \quad (4.27)$$

$$\frac{p_3 A_3 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_3} \tau} = \frac{p_1 A_1 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} \quad (4.28)$$

Pour que les exposants des fonctions 'cosh' dans les équations (4.27) et (4.28), se coïncident, il est nécessaire d'avoir l'égalité :

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad (4.29)$$

En posant les coefficients respectifs aux fonctions indépendantes $1/\cosh^i$ dans l'Eq. (4.27) égale à zéro, on obtient :

$$A_2 = \frac{A_1 B_1}{B_2} \quad (4.30)$$

Et pour le cas de (4.28), on obtient :

$$A_3 = \frac{A_1 B_2}{B_1} \quad (4.31)$$

En égalant les exposants des fonctions $\cosh^{p_1+p_2}\tau$ ou $\cosh^{p_1+p_3}\tau$ et \cosh^{p_1+2} dans l'équation (4.26) (avec $p_1 = p_2 = p_3$), on trouve :

$$\begin{aligned} 2p_1 &= p_1 + 2, \\ p_1 &= 2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Maintenant à partir de (4.26), en mettant les coefficients des fonctions $\tanh \tau / \cosh^{p_j+2}\tau$, où $j = 0, 2$, égale à zéro, on obtient :

$$p_1 V A_1 - a A_1 p_1^3 B_1^3 - A_1 p_1^3 B_2^3 = 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} a A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) B_1^3 + b A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) B_2^3 - \\ c A_1 A_2 (p_1 + p_2) B_1 - d A_1 A_3 (p_1 + p_3) B_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

La résolution des équations ci-dessus donne :

$$V = p_1^2 (a B_1^3 + b B_2^3) \quad (4.35)$$

$$p_1 (p_1 + 1) (a B_1^3 + b B_2^3) = c A_2 B_1 + d A_3 B_2 \quad (4.36)$$

En insérant les équations (4.30) et (4.31) dans (4.36), nous trouvons :

$$A_1 = \frac{6B_1B_2(aB_1^3 + bB_2^3)}{cB_1^3 + dB_2^3} \quad (4.37)$$

On voit clairement à partir de l'équation (4.37) que l'amplitude A_1 du soliton- u est en fonction de la largeur inverses B_1 et B_2 , et aussi de tous les coefficients du modèle : a , b , c et d . Pour le calcul des amplitudes A_2 et A_3 du soliton- v et du soliton- w , nous devons remplacer l'équation (4.37) dans (4.30) et (4.31), respectivement.

Ainsi, les solutions solitons au système d'équations considérées (4.10) - (4.12) sont données par :

$$u(x, y, t) = \frac{A_1}{\cosh^2[B_1x + B_2y - Vt]}, \quad (4.38)$$

$$v(x, y, t) = \frac{A_2}{\cosh^2[B_1x + B_2y - Vt]}, \quad (4.39)$$

$$w(x, y, t) = \frac{A_3}{\cosh^2[B_1x + B_2y - Vt]}, \quad (4.40)$$

Où la vitesse des solitons est donnée par l'équation (4.35), tandis que l'amplitude A_1 du soliton- u est donnée par l'équation (4.37). Soulignons que les solutions solitons obtenues existent dans le cadre de la condition paramétrique donnée dans l'équation (4.36).

3. Ondes solitaires pour une équation NV à coefficients variables

Pendant de nombreuses années, l'attention a été portée aux EDPNL avec des coefficients constants [1-7], en raison de leur simplicité pour décrire la dynamique des ondes dans les milieux homogènes. Cependant, une telle situation change de manière significative dans un milieu non linéaire inhomogène, où la présence de nombreux types de défauts d'inhomogénéité provoque des variations à la fois d'effets dispersifs et non-linéaires. En fait, dans les systèmes physiques réels, aucun milieu n'est homogène, par la longue distance de propagation et de l'existence d'une non-uniformité due à de nombreux facteurs comme par exemple les variations de la géométrie du système (les fluctuations de diamètre, etc.). Il convient, donc, de souligner que l'existence des inhomogénéités dans les milieux influence les effets physiques accompagnés, donnant lieu à des variations spatiales ou temporelles de la dispersion et la non linéarité. Dans un tel cas, les équations d'évolutions non linéaires à coefficients variables sont nécessaires pour décrire correctement la propagation des ondes

dans ces systèmes. En réalité, les équations d'ondes non linéaires à coefficients variables sont plus réalistes dans diverses situations physiques que leurs homologues à coefficients constants.

Au cours des dernières années, de plus en plus d'attentions ont été portées aux EDPNL à coefficients variables [8, 11], et de nombreuses méthodes d'intégrabilité ont été proposées pour résoudre ces modèles.

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à trouver les solutions solitons pour une famille d'équation NV à coefficients dépendants du temps incorporant un terme d'amortissement de la forme (4.4) [25] :

$$u_t + f(t)u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u_{yyy} + r(t)(u\partial_y^{-1}u_x)_x + s(t)(u\partial_x^{-1}u_y)_y + \alpha(t)u = 0, \quad (4.41)$$

Où $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $r(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions réelles dépendantes du temps. Le terme relié à $\alpha(t)$ représente un terme d'amortissement. Si on pose $f(t) = \alpha(t) = 0$, $g(t) = h(t) = 1/2$ et $r(t) = s(t) = 3/2$, l'équation (4.41) se réduit à l'équation NV standard (4.2).

Dans l'équation (4.41), le premier terme représente le terme d'évolution, le second terme décrit la dispersion du premier ordre, les troisième et quatrième termes représentent la dispersion dans les directions x et y , respectivement, tandis que les termes cinquième et sixième représentent les non linéarités.

Tout d'abord, nous commençant par introduire les variables auxiliaires (4.8) et (4.9) dans l'équation (4.41). Cela donne l'ensemble des équations d'évolutions pour les fonctions inconnues $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $w(x, y, t)$ suivantes :

$$u_t + f(t)u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u_{yyy} + r(t)(uv)_x + s(t)(uw)_y + \alpha(t)u = 0, \quad (4.42)$$

$$v_y = u_x \quad (4.43)$$

$$w_x = u_y \quad (4.44)$$

Pour construire les solutions solitons pour le système d'équations (4.42)-(4.44), on utilise les ansatz d'ondes solitaires suivantes [7-10] :

$$u(x, y, t) = \frac{A_1(t)}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.45)$$

$$v(x, y, t) = \frac{A_2(t)}{\cosh^{p_2 \tau}}, \quad (4.46)$$

$$w(x, y, t) = \frac{A_3(t)}{\cosh^{p_3 \tau}}, \quad (4.47)$$

Où

$$\tau = B_1(t)x + B_2(t)y - V(t)t \quad (4.48)$$

Et $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$.

Dans les équations (4.45)-(4.48), les paramètres inconnus et dépendants du temps $A_i(t)$ (avec $i=1, 2, 3$), $B_1(t)$, $B_2(t)$ et $V(t)$ sont à déterminer en fonctions des fonctions des paramètres du modèle $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $r(t)$ et $s(t)$. Notons que $A_i(t)$ (avec $i=1, 2, 3$) sont les amplitudes des soliton- u , soliton- v et du soliton- w respectivement. $B_1(t)$ et $B_2(t)$ sont les largeurs inverses dans les directions x et y respectivement, tandis que $V(t)$ représente la vitesse des solitons.

En remplaçant les ansatz (4.45)-(4.48) dans les équations (4.42)-(4.44), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{dA_1}{dt} \frac{1}{\cosh^{p_1 \tau}} + \frac{p_1 A_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}} \left\{ x \frac{dB_1}{dt} + y \frac{dB_2}{dt} - \left(V + t \frac{dV}{dt} \right) \right\} \\ & - f(t) \frac{p_1 A_1 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}} - \frac{(g(t)B_1^3 + h(t)B_2^3)A_1 p_1^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}} \\ & + \frac{(g(t)B_1^3 + h(t)B_2^3)A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + 2} \tau} \\ & - \frac{r(t)A_1 A_2 (p_1 + p_2) B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + p_2} \tau} - \frac{s(t)A_1 A_3 (p_1 + p_3) B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + p_3} \tau} \\ & + \frac{\alpha(t)A_1}{\cosh^{p_1 \tau}} = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Et

$$\frac{p_2 A_2 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_2 \tau}} = \frac{p_1 A_1 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.59)$$

$$\frac{p_3 A_3 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_3 \tau}} = \frac{p_1 A_1 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.60)$$

Pour que les exposant des fonctions 'cosh' dans les équations (4.59) et (4.60), se coïncident, il faut que :

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad (4.61)$$

Ainsi, leurs coefficients correspondants donnent :

$$A_2 = \frac{A_1 B_1}{B_2} \quad (4.62)$$

Et

$$A_3 = \frac{A_1 B_2}{B_1} \quad (4.63)$$

En contrebalançant les exposants des fonctions $\cosh^{p_1+p_2}\tau$ ou $\cosh^{p_1+p_3}\tau$ et \cosh^{p_1+2} dans l'équation (4.58) (avec $p_1 = p_2 = p_3$), on trouve :

$$\begin{aligned} 2p_1 &= p_1 + 2, \\ p_1 &= 2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Si on remplace l'équation (4.64) dans l'équation (4.58), on peut déterminer l'amplitude $A_1(t)$ du soliton- u en mettant les coefficients des fonctions $\tanh \tau / \cosh^4 \tau$ égale à zéro. Cela donne :

$$6(g(t)B_1^3 + h(t)B_2^3) - r(t)A_2B_1 - s(t)A_3B_2 = 0, \quad (4.65)$$

De plus, la substitution des expressions (4.62) et (4.63) dans l'équation (4.65), donne l'amplitude $A_1(t)$ du soliton- u sous la forme suivante :

$$A_1(t) = \frac{6B_1B_2[g(t)B_1^3 + h(t)B_2^3]}{r(t)B_1^3 + s(t)B_2^3} \quad (4.66)$$

D'autre part, en mettant le coefficient de fonction $1/\cosh^2 \tau$ égale à zéro, on obtient :

$$A_1(t) = A_0 e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'} \quad (4.67)$$

Où A_0 est une constante d'intégration liée à l'amplitude initiale de l'onde. L'équation (4.67) montre que l'amplitude $A_1(t)$ du soliton- u est seulement affectée par la dépendance au temps du coefficient $\alpha(t)$. Ainsi, l'amplitude du soliton- u peut être contrôlée par les variations temporelles du coefficient d'amortissement.

La dépendance au temps de la vitesse V du soliton peut être déterminée en mettant le coefficient correspondant au terme $\tanh \tau / \cosh^2 \tau$ dans l'équation (4.58) égale à zéro :

$$p_1 A_1 \left\{ x \frac{dB_1}{dt} + y \frac{dB_2}{dt} - \left(V + t \frac{dV}{dt} \right) \right\} - f p_1 A_1 B_1 - (g(t)B_1^3 + h(t)B_2^3) A_1 p_1^3 = 0, \quad (4.68)$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$p_1 A_1 \left\{ x \frac{dB_1}{dt} + y \frac{dB_2}{dt} - \frac{d(tV)}{dt} - f B_1 - (g(t)B_1^3 + h(t)B_2^3) p_1^2 \right\} = 0, \quad (4.69)$$

En tenant compte que le paramètre $V(t)$ du soliton, que nous voulons déterminer à partir de l'équation (4.69), est en fonction du temps seulement, on peut, alors, diviser l'équation (4.69) en trois équations de la façon suivante :

$$\frac{dB_1}{dt} = 0, \quad (4.70)$$

$$\frac{dB_2}{dt} = 0, \quad (4.71)$$

$$-f B_1 - (g(t)B_1^3 + h(t)B_2^3) p_1^2 = 0, \quad (4.72)$$

Cela donne après intégration :

$$B_1(t) = b_1, \quad (4.73)$$

$$B_2(t) = b_2, \quad (4.74)$$

$$V(t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \{ f(t') B_1 + p_1^2 g(t') B_1^3 + p_1^2 h(t') B_2^3 \} dt', \quad (4.75)$$

Où b_1 et b_2 sont des constantes d'intégrations liées aux largeurs inverses initiales.

D'après les équations (4.73) et (4.74), on voit clairement que les largeurs inverses des ondes solitaires restent constantes au cours de leur propagation dans le milieu inhomogène. De plus, l'équation (4.75) montre que la vitesse du soliton est affectée par les coefficients de dispersion du premier ordre $f(t)$ et de troisième ordre $g(t)$ et $h(t)$.

En utilisant les équations (4.66), (4.67), (4.73) et (4.74), on obtient une équation décrivant les conditions d'existence des solitons sous la forme :

$$\frac{[r(t)b_1^3 + s(t)b_2^3] e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'}}{g(t)b_1^3 + h(t)b_2^3} = K \quad (4.76)$$

Où K est une constante.

Ainsi, les solutions exactes de type ondes solitaire pour le système d'équation (4.42)-(4.44) sont données par :

$$u(x, y, t) = \frac{A_0 e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'}}{\cosh^2[b_1 x + b_2 y - V(t)t]}, \quad (4.77)$$

$$v(x, y, t) = \frac{A_0 b_1 e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'}}{b_2 \cosh^2[b_1 x + b_2 y - V(t)t]}, \quad (4.78)$$

$$w(x, y, t) = \frac{A_0 b_2 e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'}}{b_1 \cosh^2[b_1 x + b_2 y - V(t)t]}, \quad (4.79)$$

Où la vitesse des solitons est donnée par l'équation (4.75), tandis que A_0 , b_1 et b_2 sont des constantes arbitraires non-nulles. La condition pour que ces solitons existent est donnée par l'équation (4.76).

4. Ondes solitaires pour une équation NV (m, n) avec un terme d'évolution généralisé

Le succès récent dans la théorie des solitons a engendré la généralisation de nombreuses équations d'évolution non linéaires qui possèdent de nombreuses applications dans différents domaines de la physique. L'exemple le plus connu est celui de l'équation $K(m, n)$ qui a été proposée par Rosenau et Hyman [26], pour comprendre le rôle joué par la dispersion non linéaire dans la formation des motifs (patterns) dans les gouttes de liquide. Il est à noter que cette équation est la forme généralisée de l'équation KdV. De même, l'équation de Boussinesq a été généralisée à l'équation $B(m, n)$ [27], l'équation Zakharov-Kuznetsov a été généralisée à l'équation $ZK(m, n, k)$ [28], les équations couplés de Klein et Gordon ont été généralisées à l'équation $CKG(m, n, k)$ [29], etc. Les formes généralisées des équations d'évolution non linéaire permettent de décrire la dynamique de la propagation non linéaire des ondes dans une variété de systèmes dynamiques et trouver plusieurs cas particuliers sont significatifs.

Dans cette section, nous allons introduire une forme plus généralisée de l'équation NV notée NV (m, n), présentant un terme d'évolution généralisé sous la forme suivante [25] :

$$(u^l)_t + \alpha(u^n)_{xxx} + \beta(u^n)_{yyy} + \gamma(u^m \partial_y^{-1} u_x)_x + \delta(u^m \partial_x^{-1} u_y)_y = 0, \quad (4.80)$$

Où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sont des constantes tandis que l, m, n sont des entiers positifs. Pour le cas particulier $l = m = n = 1$, on obtient l'équation NV standard (4.3).

L'objectif recherché est la détermination des solutions de type ondes solitaires de l'équation (4.80) pour des valeurs quelconques de l , m et n . L'équation (4.80) est généralement non intégrable. Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode de l'ansatz d'onde solitaire pour construire les solutions de type soliton pour cette équation.

En utilisant les variables auxiliaires (4.8) et (4.9), l'équation (4.80) devient :

$$(u^l)_t + \alpha(u^n)_{xxx} + \beta(u^n)_{yyy} + \gamma(u^m v)_x + \delta(u^m w)_y = 0, \quad (4.81)$$

$$v_y = u_x \quad (4.82)$$

$$w_x = u_y \quad (4.83)$$

Pour déterminer les solutions d'ondes solitaires pour le système (4.81)-(4.83), nous utilisons les mêmes hypothèses de départ (4.13)-(4.15), de sorte que nous obtenons :

$$(u^l)_t = p_1 l A_1^l V \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 l} \tau}, \quad (4.84)$$

$$(u^n)_{xxx} = -A_1^n p_1^3 n^3 B_1^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n} \tau} + A_1^n p_1 n (p_1 n + 1)(p_1 n + 2) B_1^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n + 2} \tau}, \quad (4.85)$$

$$(u^n)_{yyy} = -A_1^n p_1^3 n^3 B_2^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n} \tau} + A_1^n p_1 n (p_1 n + 1)(p_1 n + 2) B_2^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n + 2} \tau}, \quad (4.86)$$

$$(u^m v)_x = -(p_1 m + p_2) A_1^m A_2 B_1 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 m + p_2} \tau}, \quad (4.87)$$

$$(u^m w)_y = -(p_1 m + p_3) A_1^m A_3 B_2 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 m + p_3} \tau}, \quad (4.88)$$

En substituant les équations (4.84)-(4.88) dans les équations (4.81)-(4.83), on obtient :

$$\begin{aligned} & p_1 l A_1^l V \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 l} \tau} - \alpha A_1^n p_1^3 n^3 B_1^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n} \tau} + \alpha A_1^n p_1 n (p_1 n + 1)(p_1 n + 2) B_1^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n + 2} \tau} \\ & - \beta A_1^n p_1^3 n^3 B_2^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n} \tau} + \beta A_1^n p_1 n (p_1 n + 1)(p_1 n + 2) B_2^3 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 n + 2} \tau} - \gamma (p_1 m \\ & + p_2) A_1^m A_2 B_1 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 m + p_2} \tau} - \delta (p_1 m + p_3) A_1^m A_3 B_2 \frac{\tanh \tau}{\cosh^{p_1 m + p_3} \tau} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\frac{p_2 A_2 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_2} \tau} = \frac{p_1 A_1 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} \quad (4.90)$$

$$\frac{p_3 A_3 B_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_3} \tau} = \frac{p_1 A_1 B_2 \tanh \tau}{\cosh^{p_1} \tau} \quad (4.91)$$

Pour satisfaire les équations (4.90) et (4.91), nous devons avoir l'égalité suivante :

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad (4.92)$$

On obtient alors :

$$A_2 = \frac{A_1 B_1}{B_2}, \quad (4.93)$$

$$A_3 = \frac{A_1 B_2}{B_1}, \quad (4.94)$$

En égalant les exposants des fonctions $\tanh \tau / \cosh^{p_1 m + p_2} \tau$ ou $\tanh \tau / \cosh^{p_1 m + p_3} \tau$ et $\tanh \tau / \cosh^{p_1 n + 2} \tau$ dans l'équation (4.89) (avec $p_1 = p_2 = p_3$), on trouve que :

$$p_1 m + p_2 = p_1 n + 2, \quad (4.95)$$

En tenant compte de l'égalité $p_1 = p_2 = p_3$, la condition (4.95) donne :

$$p_1 = \frac{2}{m - n + 1}, \quad (4.96)$$

Il est important de noter que les solutions de type solitons existent uniquement lorsque $p_1 > 0$. Cette condition impose $m + 1 > n$ dans l'équation. (4.96).

Ensuite, nous trouvons après avoir fixé leurs coefficients correspondants à zéro, cette équation :

$$(\alpha B_1^3 + \beta B_2^3) A_1^n p_1 n (p_1 n + 1) (p_1 n + 2) - (\gamma A_2 B_1 + \delta A_3 B_2) (p_1 m + p_2) A_1^m = 0, \quad (4.97)$$

En insérant les équations (4.93) et (4.94) dans l'équation (4.97), il est possible de trouver l'amplitude du soliton A_1 sous cette forme :

$$A_1 = \frac{2n(n + m + 1) B_1 B_2 (\alpha B_1^3 + \beta B_2^3)}{(m - n + 1) (\gamma B_1^3 + \delta B_2^3)}, \quad (4.98)$$

Cette dernière équation indique que l'amplitude A_1 (et par conséquent les autres amplitudes A_2 et A_3 dans les équations (4.93) et (4.94)) est dépendante des largeurs inverses B_1 et B_2 dans les directions x et y respectivement, et dépend aussi des coefficients du modèle α , β , γ , et δ . L'équation (4.98) montre que le soliton existe que seulement si :

$$(\alpha B_1^3 + \beta B_2^3) (\gamma B_1^3 + \delta B_2^3) > 0, \quad (4.99)$$

Si $m - n + 1$ est un nombre entier pair. Cependant, si $m - n + 1$ est un nombre entier impair il n'y a pas une telle restriction, mais la solution sera dirigée vers le bas.

Maintenant, et depuis l'équation (4.89), en mettant les coefficients des fonctions $\tanh \tau / \cosh^{p_1 n} \tau$ égale à zéro cela donne la vitesse des solitons comme suit :

$$V = p_1^2 (aB_1^3 + bB_2^3), \quad (4.100)$$

Finalement, les solutions de type soliton aux équations considérées (4.81)-(4.83), sont données par :

$$u(x, y, t) = \frac{A_1}{\cosh^{\frac{m-n+1}{2}} [B_1 x + B_2 y - Vt]}, \quad (4.101)$$

$$v(x, y, t) = \frac{A_2}{\cosh^{\frac{m-n+1}{2}} [B_1 x + B_2 y - Vt]}, \quad (4.102)$$

$$w(x, y, t) = \frac{A_3}{\cosh^{\frac{m-n+1}{2}} [B_1 x + B_2 y - Vt]}, \quad (4.103)$$

Où la vitesse V des solitons est définie par l'équation (4.100), tandis que l'amplitude A_1 du Soliton- u est donnée par (4.98). Les deux autres amplitudes A_2 et A_3 des soliton- v et soliton- w peuvent être trouvées par l'insertion de l'équation (4.98) dans les équations (4.93) et (4.94) respectivement.

5. Ondes solitaires pour l'équation NV à (1+N)-dimensions

Comme on le sait, l'étude de la dynamique des ondes non linéaires dans les systèmes multidimensionnels est une tâche importante d'un point de vue physique. Ainsi, il sera très intéressant d'évaluer la solution soliton pour l'équation NV à (1+N) dimensions. Notant que les effets transversaux doivent être pris en compte pour modéliser des systèmes réels ayant des dimensions plus d'un espace. Soulignons que la prise en compte de plusieurs dimensions dans certaines EDPNL est nécessaire dans le cas où l'effet de dispersion est important dans toutes les directions du milieu.

A cet effet, nous introduisons une équation NV de dimensions (1+N) comme suit [25] :

$$u_t + a \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i x_i} + b \sum_{i=1}^N \left(u \partial_{x_j}^{-1} u_{x_i} \right)_{x_i} + c \sum_{i \neq j}^N \left(u \partial_{x_i}^{-1} u_{x_j} \right)_{x_j} = 0, \quad (4.104)$$

Par la suite, nous nous intéressons à une famille d'équation NV de dimensions (1+N) avec des coefficients dépendant du temps et un terme de force, qui prend la forme suivante [25] :

$$u_t + a(t) \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i x_i} + b(t) \sum_{i=1}^N \left(u \partial_{x_j}^{-1} u_{x_i} \right)_{x_i} + c(t) \sum_{i \neq j}^N \left(u \partial_{x_i}^{-1} u_{x_j} \right)_{x_j} = \lambda(t), \quad (4.105)$$

Où $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$ est une fonction inconnue qui dépend des coordonnées spatiales x_i (avec $i = 1, \dots, N$) et du temps t . $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des coefficients dépendant du temps, $\lambda(t)$ représente le coefficient du terme de force. Dans le cas particulier $a(t) = 1/2$, $b(t) = c(t) = 3/2$, $\lambda(t) = 0$ et $u = u(x_1, x_2)$, l'équation (4.105) se réduit à l'équation NV standard.

Nous allons d'abord définir une formule de transformation d'onde généralisée de la forme suivante [30] :

$$q(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t) + \beta(t) \quad (4.106)$$

Où :

$$\beta(t) = \int \lambda(t) dt, \quad (4.107)$$

En remplaçant l'équation (4.106) dans (4.105), cela conduit à une équation NV homogène avec des coefficients dépendants du temps, de la forme :

$$q_t + a(t) \sum_{i=1}^N q_{x_i x_i x_i} + b(t) \sum_{i=1}^N \left(q \partial_{x_j}^{-1} q_{x_i} \right)_{x_i} + c(t) \sum_{i \neq j}^N \left(q \partial_{x_i}^{-1} q_{x_j} \right)_{x_j} = 0, \quad (4.108)$$

Et en utilisant le changement de variable suivant :

$$s = \partial_{x_j}^{-1} q_{x_i} \quad (4.109)$$

$$r = \partial_{x_i}^{-1} q_{x_j} \quad (4.110)$$

On peut réécrire le model d'équation (4.108) sous la forme suivante :

$$q_t + a(t) \sum_{i=1}^N q_{x_i x_i x_i} + b(t) \sum_{i=1}^N (qs)_{x_i} + c(t) \sum_{i \neq j}^N (qr)_{x_j} = 0, \quad (4.111)$$

$$s_{x_j} = q_{x_i} \quad (4.112)$$

$$r_{x_i} = q_{x_j} \quad (4.113)$$

Pour construire les solutions solitons du système d'équation (4.111)-(4.113), on adopte l'ansatz de l'onde solitaire sous la forme suivante [7-10] :

$$q(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{A_1(t)}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.114)$$

$$s(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{A_2(t)}{\cosh^{p_2 \tau}}, \quad (4.115)$$

$$r(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{A_3(t)}{\cosh^{p_3 \tau}}, \quad (4.116)$$

Où :

$$\tau = B_1(t)x_1 + B_2(t)x_2 + \dots + B_N(t)x_N - V(t)t \quad (4.117)$$

Avec $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$, pour que le soliton existe.

Notant que, $B_i(t)$, $A_i(t)$ et $V(t)$ sont des paramètres en fonction du temps qui doivent être déterminés en fonction des coefficients du modèle $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $\lambda(t)$.

En utilisant les équations (4.114)-(4.116), nous obtenons les relations suivantes :

$$q_t = \frac{dA_1}{dt} \frac{1}{\cosh^{p_1 \tau}} + \frac{p_1 A_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \frac{dB_i}{dt} - \left(V + t \frac{dV}{dt} \right) \right\}, \quad (4.118)$$

$$q_{x_i} = - \frac{p_1 A_1 B_i \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.119)$$

$$q_{x_j} = - \frac{p_1 A_1 B_j \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.120)$$

$$s_{x_j} = - \frac{p_2 A_2 B_j \tanh \tau}{\cosh^{p_2 \tau}}, \quad (4.121)$$

$$s_{x_j} = - \frac{p_3 A_3 B_i \tanh \tau}{\cosh^{p_3 \tau}}, \quad (4.122)$$

$$q_{x_i x_i x_i} = - \frac{A_1 p_1^3 B_i^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}} + \frac{A_1 p_1 (p_1 + 1)(p_1 + 2) B_i^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + 2} \tau}, \quad (4.123)$$

$$(qs)_{x_i} = - \frac{A_1 A_2 (p_1 + p_2) B_i \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + p_2} \tau}, \quad (4.124)$$

$$(qr)_{x_j} = - \frac{A_1 A_3 (p_1 + p_3) B_j \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + p_3} \tau}, \quad (4.125)$$

En remplaçant les équations (4.118)-(4.125) dans le système d'équation (4.111)-(4.113), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} \frac{1}{\cosh^{p_1 \tau}} + \frac{p_1 A_1 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \frac{dB_i}{dt} - \left(V + t \frac{dV}{dt} \right) \right\} - \frac{a(t) A_1 p_1^3 \sum_{i=1}^N B_i^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}} \\ + \frac{a(t) A_1 p_1 (p_1 + 1) (p_1 + 2) \sum_{i=1}^N B_i^3 \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + 2} \tau} \\ - \frac{b(t) A_1 A_2 (p_1 + p_2) \sum_{i=1}^N B_i \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + p_2} \tau} - \frac{c(t) A_1 A_3 (p_1 + p_3) \sum_{i \neq j} B_j \tanh \tau}{\cosh^{p_1 + p_3} \tau} = 0, \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\frac{p_2 A_2 B_j \tanh \tau}{\cosh^{p_2 \tau}} = \frac{p_1 A_1 B_i \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.127)$$

$$\frac{p_3 A_3 B_i \tanh \tau}{\cosh^{p_3 \tau}} = \frac{p_1 A_1 B_j \tanh \tau}{\cosh^{p_1 \tau}}, \quad (4.128)$$

Pour que les exposants des fonctions 'cosh' dans les équations (4.127) et (4.128) se coïncident, il faut avoir la condition suivante :

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad (4.129)$$

Ainsi, leurs coefficients respectifs doivent disparaître, pour le premier cas (4.127) on obtient :

$$A_2 = \frac{A_1 B_i}{B_j}, \quad (4.130)$$

Tandis que le second cas (4.128) donne :

$$A_3 = \frac{A_1 B_j}{B_i}, \quad (4.131)$$

En égalant les exposants des fonctions $\cosh^{p_1 + p_2} \tau$ ou $\cosh^{p_1 + p_3} \tau$ et $\cosh^{p_1 + 2}$ dans l'équation (4.26) (avec $p_1 = p_2 = p_3$), on trouve que $2p_1 = p_1 + 2$. Cela implique :

$$p_1 = 2 \quad (4.132)$$

En remplaçant la valeur $p_1 = 2$ dans l'équation (4.126), et en mettant le coefficient de la fonction $\tanh \tau / \cosh^4 \tau$ égale à zéro, on obtient la relation suivante :

$$6a(t) \sum_{i=1}^N B_i^3 - b(t) A_2 \sum_{i=1}^N B_i - c(t) A_3 \sum_{i \neq j} B_j = 0, \quad (4.133)$$

Par ailleurs la substitution des expressions (4.130) et (4.131) dans (4.133), donne l'amplitude $A_1(t)$ du soliton-u comme suit :

$$A_1 = \frac{6a(t)B_i B_j \sum_{i=1}^N B_i^3}{b(t)B_i^2 \sum_{i=1}^N B_i + c(t)B_j^2 \sum_{i \neq j}^N B_j}, \quad (4.134)$$

D'autre part, en mettant le coefficient de la fonction $1/\cosh^2 \tau$ égale à zéro, on obtient :

$$\frac{dA_1}{dt} = 0, \quad (4.135)$$

Ce qui implique que l'amplitude A_1 de l'soliton-u est constante.

La dépendance au temps de la vitesse du soliton $V(t)$ peut être trouvée en mettant les coefficients correspondant aux termes $\tanh \tau / \cosh^2 \tau$ de l'équation (4.126) égale à zéro telle que :

$$2A_1 \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \frac{dB_i}{dt} - \left(V + t \frac{dV}{dt} \right) \right\} - a(t)A_1 p_1^3 \sum_{i=1}^N B_i^3 = 0, \quad (4.136)$$

Cette dernière équation peut être réécrite comme :

$$2A_1 \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \frac{dB_i}{dt} - \frac{d(tV)}{dt} - a(t)p_1^2 \sum_{i=1}^N B_i^3 \right\} = 0, \quad (4.137)$$

En tenant compte que le paramètre $V(t)$ du soliton, que nous voulons déterminer à partir de l'équation (4.137), est en fonction du temps seulement, on peut réécrire cette dernière équation de la façon suivante :

$$\frac{dB_i}{dt} = 0, \quad (4.138)$$

$$-\frac{d(tV)}{dt} - a(t)p_1^2 \sum_{i=1}^N B_i^3 = 0, \quad (4.139)$$

Après intégration, cela donne :

$$B_i(t) = \text{constante}, \quad (4.140)$$

$$V(t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \left\{ a(t)p_1^2 \sum_{i=1}^N B_i^3 \right\} dt', \quad (4.141)$$

En insérant les équations (4.135) et (4.140) dans l'équation (4.134), on obtient une condition importante pour l'existence des solitons, comme :

$$\frac{6a(t)B_i B_j \sum_{i=1}^N B_i^3}{b(t)B_i^2 \sum_{i=1}^N B_i + c(t)B_j^2 \sum_{i \neq j}^N B_j} = K', \quad (4.142)$$

Où K' est une constante.

Ainsi, les solutions solitons pour l'équation NV de dimension $(1+N)$ sont données par :

$$q(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{A_1(t)}{\cosh^2(\sum_{i=1}^N B_i x_i - V(t)t)}, \quad (4.143)$$

$$s(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{A_2(t)}{\cosh^2(\sum_{i=1}^N B_i x_i - V(t)t)}, \quad (4.144)$$

$$r(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{A_3(t)}{\cosh^2(\sum_{i=1}^N B_i x_i - V(t)t)}, \quad (4.145)$$

Où les largeurs inverses B_i ($i=1, \dots, N$) dans les directions x_i , et les amplitudes A_i ($i=1, 2, 3$) sont des constantes, tandis que la vitesse $V(t)$ est donnée par l'équation (4.141). Il est à noter que les solutions (4.143)-(4.145) existent seulement si la condition (4.142) est satisfaite.

6. Discussions : dynamique de propagation non linéaire des solitons NV

Dans la physique en général, vérifié si une onde existe ou non peut être assez simple. Si on observe l'onde ou la perturbation, elle existe. Par exemple, les solitons KdV existent certainement parce qu'ils ont été observés dans de nombreuses applications telles que les ondes d'eau, les fibres optiques et le problème de Fermi-Pasta-Ulam [31]. Toutefois, si un certain type d'onde ne se voit pas, on ne peut pas affirmer qu'il n'existe pas. Cela peut signifier simplement que si l'onde existe, elle peut ne pas exister assez longtemps pour être détectée.

Pour cette raison, l'étude de la stabilité des solutions ondes solitaires ou solitoniques devient importante. Si l'onde est avérée être instable, elle ne devrait pas apparaître dans les applications ou dans un environnement de laboratoire [32]. Une question qui peut être posée est de savoir comment l'onde est instable, quels types de perturbations provoquent la disparition ou la non-observation de l'onde.

Récemment, un concept nouveau dans la théorie des solitons a été développé, il s'agit du contrôle ou la gestion des solitons [33]. Ce dernier a été largement étudié en raison de ses

potentielles dans les applications des solitons, qui se développent de plus en plus à travers l'ensemble de la physique de l'hydrodynamique à l'optique non linéaire, la physique des plasmas, la physique des particules élémentaires, etc.

Dans cette section consacrée à la discussion des résultats obtenus, nous allons étudier les mécanismes fondamentaux d'où les propriétés principales des solitons sont affectées par le choix des inhomogénéités du milieu qui sont représentées par les coefficients variables dans les équations NV traitées.

Dans ce qui suit nous allons se focaliser sur l'étude du soliton- u , parce que les trois autres solitons en la même forme donc le même comportement.

6.1. Milieux homogènes

La propagation des ondes dans les milieux homogènes est principalement décrite par les équations d'évolution non linéaire à coefficients constants. Dans ce contexte, nous avons obtenu la solution (4.38) pour le soliton- u , où les paramètres caractéristiques sont l'amplitude A_1 (l'équation 4.37), la vitesse V (l'équation 4.35). Tous les paramètres du soliton- u sont en fonctions des coefficients constants de l'équation (4.7), et sont donc eux même constants.

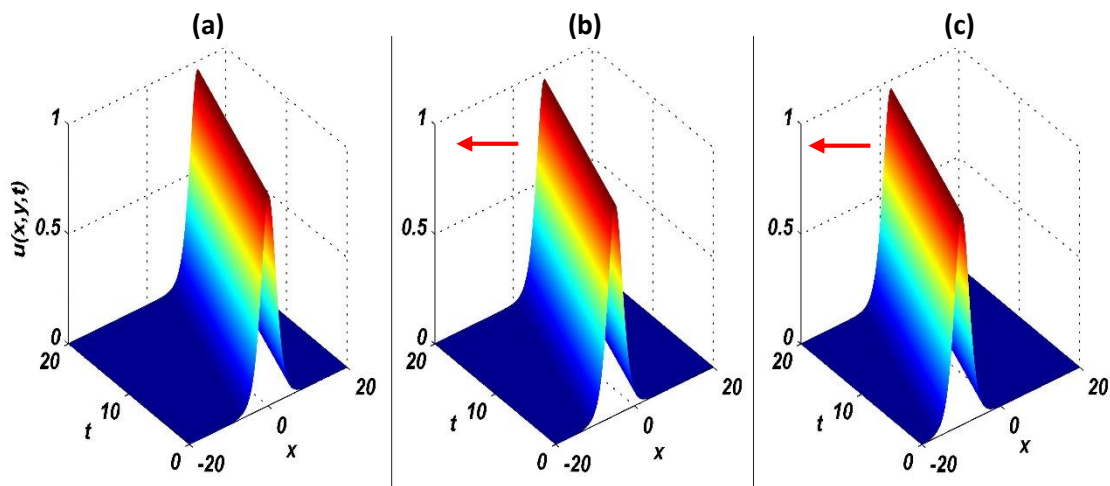


Figure 1 : Evolution du soliton- u donné par la solution (4.38) pour : $a = 0.5$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $d = b*c/a$, $B_1=0.4$, $B_2=0.4$, avec : (a) : $y = 0$, (b) : $y = 5$, (c) : $y = 10$.

La figure 1 représente l'évolution selon ' x ', ' t ' et pour des valeurs différentes de ' y '. Dans le cas des coefficients constants, que nous avons pris de façons arbitraire, en remarque qu'il y a deux évolutions du soliton- u , une évolution temporelle qui est dans la même direction de

'x' et l'autre selon la direction 'y' représentée par un décalage au sens contraire de la direction 'x'. Pour l'amplitude et la vitesse du soliton- u , elles restent constantes et ne changent pas du fait qu'elles sont en fonctions des coefficients constants de l'équation NV (4.7).

Pour mieux comprendre la bi-dimensionnalité de l'évolution du soliton- u , nous allons contrairement à la figure 1 donner des valeurs fixes au temps 't', et faire évoluer la solution (4.38) selon 'y'.

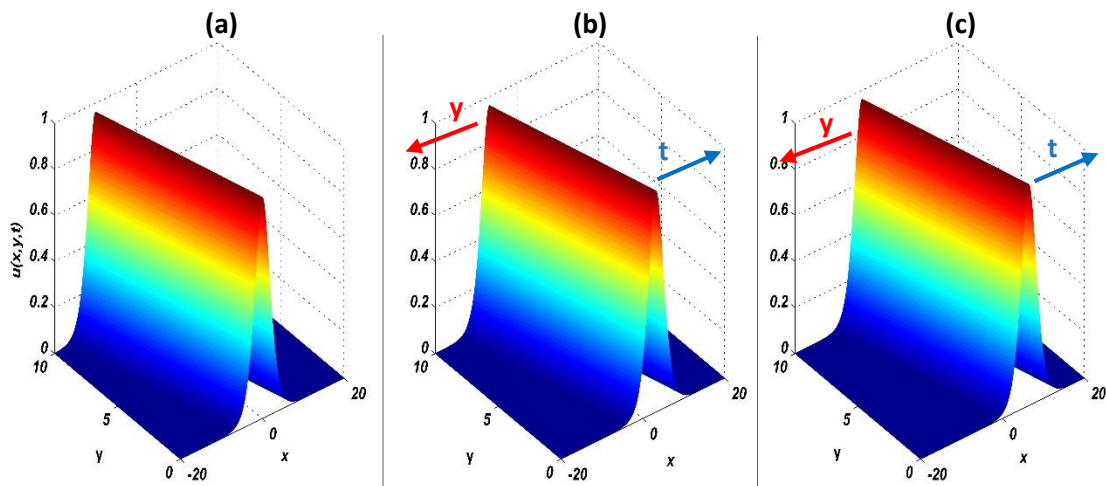


Figure 2 : Evolution du soliton- u donné par la solution (4.38) selon 'x' et 'y' pour : $a = 0.5$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $d = d*c/a$, $B_1 = 0.4$, $B_2 = 0.4$, avec : (a) : $t = 0$, (b) : $t = 5$, (c) : $t = 10$.

Selon la figure 2, nous voyons clairement que l'évolution temporelle du soliton- u est dans la direction 'x', tandis qu'elle est au sens inverse de la direction 'x' pour 'y'. On peut conclure que la vitesse du soliton- u selon la direction 'x' est retardée par la dispersion d'ordre trois de la direction 'y'.

6.2. Milieux inhomogènes

Au cours des dernières années, l'étude des systèmes inhomogènes a attiré beaucoup d'attention en raison de leurs avantages par rapport aux systèmes homogènes qui offrent des solitons théoriquement parfaits. En outre, ces systèmes inhomogènes ont été étudiés en détail en raison de leur potentiel d'applications telles que l'amplification des impulsions, la compression des impulsions, les commutateurs optiques, mise en forme d'impulsions, etc. En effet, le contrôle des solitons dans des milieux présentant des inhomogénéités offre de belles perspectives dans plusieurs domaines, sachant que les solitons sont très utiles dans le

transport de l'énergie d'un endroit à l'autre dans le laboratoire, l'astrophysique et les plasmas, sans oublier que des structures électromagnétiques de solitons ont été utilisés dans la communication [34].

D'un point de vue mathématique, la description de l'existence des inhomogénéités dans un milieu matériel se reflète à travers les coefficients variables des équations régissant la propagation dans ce milieu. Dans notre cas d'étude, nous avons pu trouver une solution de type onde solitaire pour l'équation NV à coefficients variables avec un terme d'amortissement (l'équation 4.41). Le terme $\alpha(t)$ représente en général les pertes dans le milieu étudié, mais peut aussi dans certains cas représenté le gain, notamment dans le guides d'ondes ou les fibres optique dopées par des éléments amplificateurs (les ions de terres rares par exemple), ou dans les Lasers en général.

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence des variations temporelles des coefficients variables de l'équation NV (4.41) sur la dynamique de propagation non linéaire et voir comment peut-on par le biais de ces paramètres contrôler la propagation des solitons.

6.2.1. Effet des pertes sur la propagation

Le terme $\alpha(t)$ peut prendre trois valeurs, zéro, positif ou négatif, ce qui correspond respectivement à trois types de milieu : $\alpha(t) = 0$ correspond à un milieu sans perte, si $\alpha(t) < 0$ cela correspond à un milieu à gain (amplificateur), autrement si $\alpha(t) > 0$ c'est un milieu avec pertes.

- **1^{er} cas $\alpha(t) = 0$:**

L'onde peut se propager de façon stable et ne subit pas d'élargissement ou de compression, c'est-à-dire que l'amplitude reste inchangée avec l'évolution temporelle et spatiale du soliton, comme on peut le voir dans la figure 3.

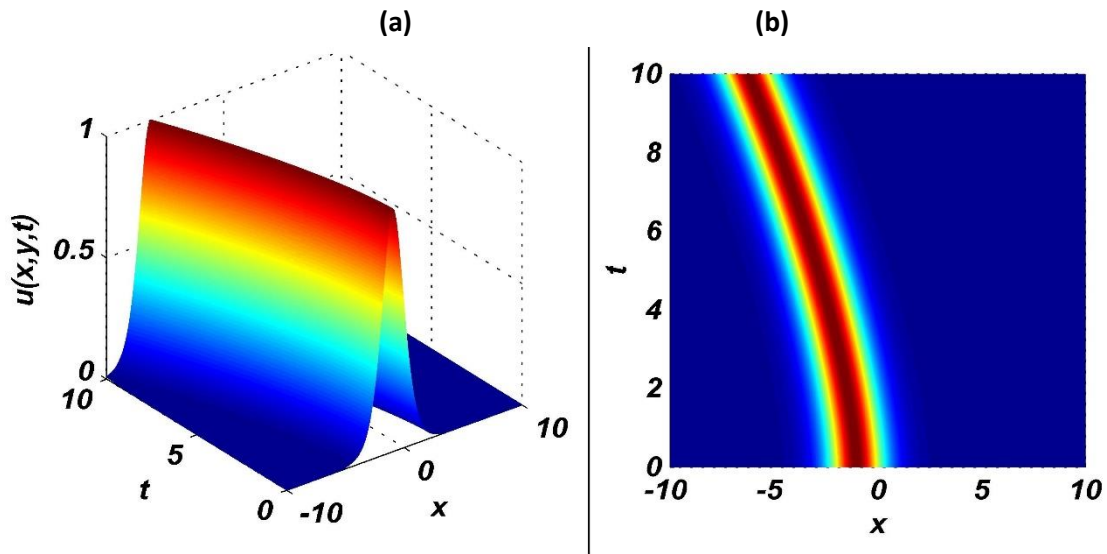


Figure 3 : Évolution du soliton- u dans un milieu sans perte ($\alpha(t) = 0$), (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation. Avec $f(t) = \frac{1}{20}\sqrt{t}$, $g(t) = \frac{1}{30}\sqrt{t}$ et $h(t) = \frac{1}{30}\sqrt{t}$. Où $B_1 = 0.8$, $B_2 = 0.82$, et $\gamma = 1$.

- 2^{ème} cas $\alpha(t) > 0$:

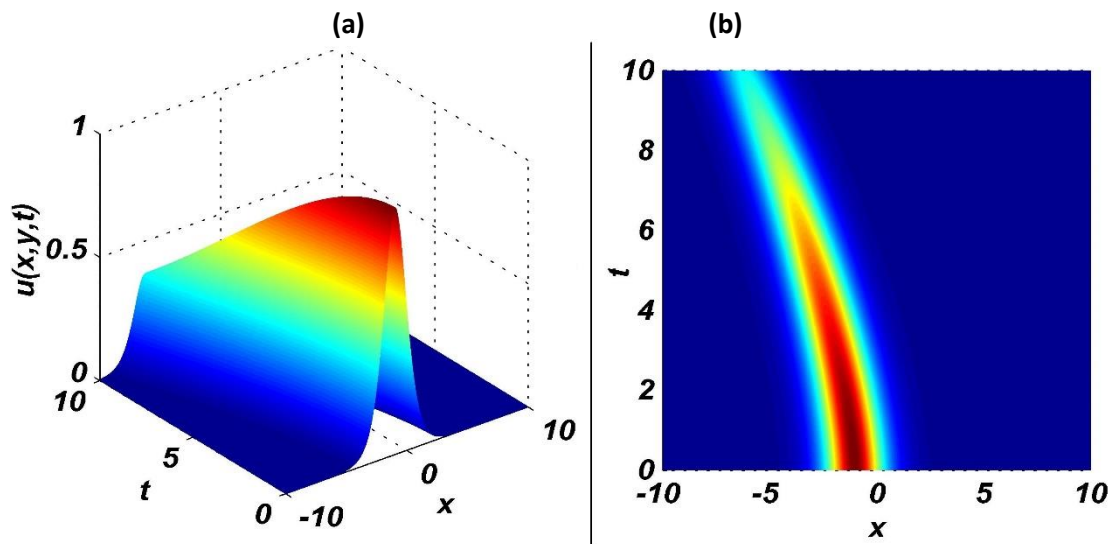


Figure 4 : Évolution du soliton- u dans un milieu avec pertes, $\alpha(t) = (0.01) * t$, (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation. Avec $f(t) = \frac{1}{20}\sqrt{t}$, $g(t) = \frac{1}{30}\sqrt{t}$ et $h(t) = \frac{1}{30}\sqrt{t}$. Où $B_1 = 0.8$, $B_2 = 0.82$, et $\gamma = 1$.

- 3^{ème} cas $\alpha(t) < 0$:

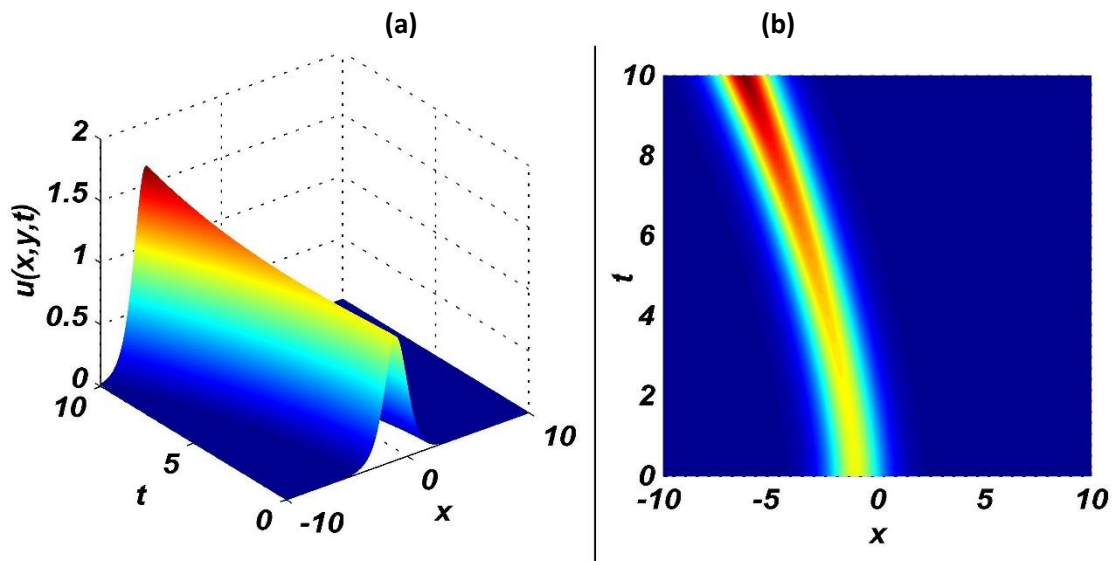


Figure 5 : Évolution du soliton- u dans un milieu à gain, $\alpha(t) = -(0.005) * t$, (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation. Avec $f(t) = \frac{1}{20}\sqrt{t}$, $g(t) = h(t) = \frac{1}{30}\sqrt{t}$. Où $B_1 = 0.8$, $B_2 = 0.82$, et $\gamma = 1$.

En remarque clairement l'influence du paramètre $\alpha(t)$ sur l'amplitude du soliton, soit par induire des pertes (Fig. 1) soit d'amplifier le soliton (Fig. 2). Néanmoins, la vitesse et la forme du signal reste indifférente au changement du paramètre $\alpha(t)$.

6.2.2. Effet de la dispersion

Dans cette partie nous allons étudier les effets des inhomogénéités sur la propagation non linéaire des solitons obtenues.

Nous avons vu, d'après l'équation (4.75), que la vitesse du soliton- u (4.77) est en fonctions des paramètres $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$, qui représentent les effets de dispersions de premier ordre et de troisième ordre selon 'x' et 'y', respectivement. Mais cela n'empêche pas les effets non linéaires d'intervenir, notamment, par la relation (4.76) qui décrit la condition d'existence des solutions solitons.

Pour étudier les effets des inhomogénéités du milieu sur la propagation non linéaire des solitons, représenté ici par les effets de dispersions $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$, nous allons donner des formes arbitraires à ces paramètres et voir le comportement du solitons.

Dans la figure 6 nous avons obtenu un comportement connu sous le nom de déplacement serpenté, qui est obtenu par un effet sinusoïdal des dispersions.

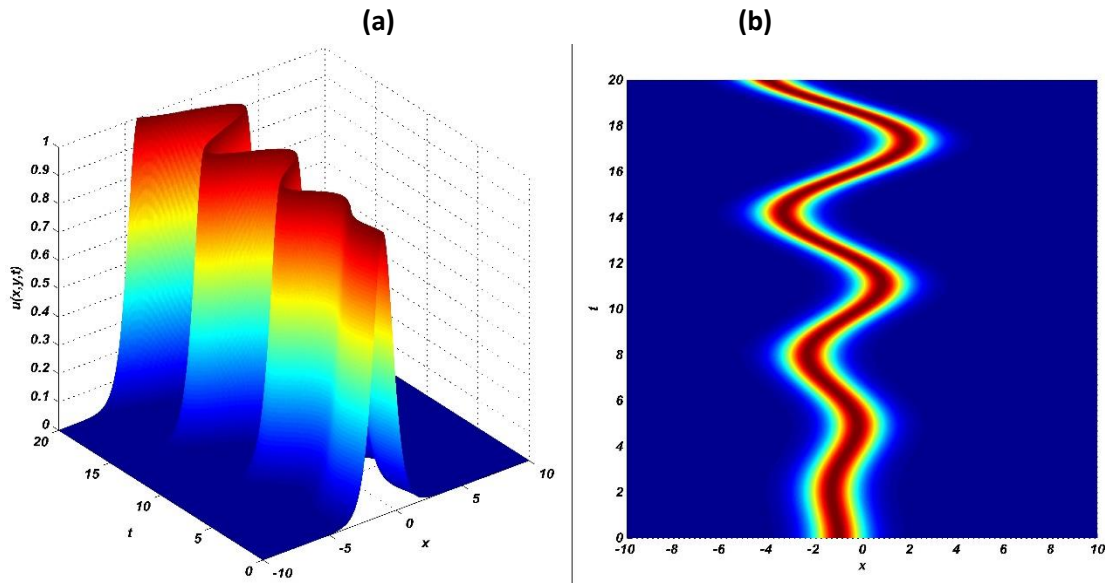


Figure 6 : Évolution spatio-temporelle du soliton- u . (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation, avec $f(t) = \frac{1}{6}t^2 \cos(t)$, $g(t) = h(t) = \frac{1}{24}t \sin(t)$, où $B_1 = B_2 = 1$, et $\gamma = 1$.

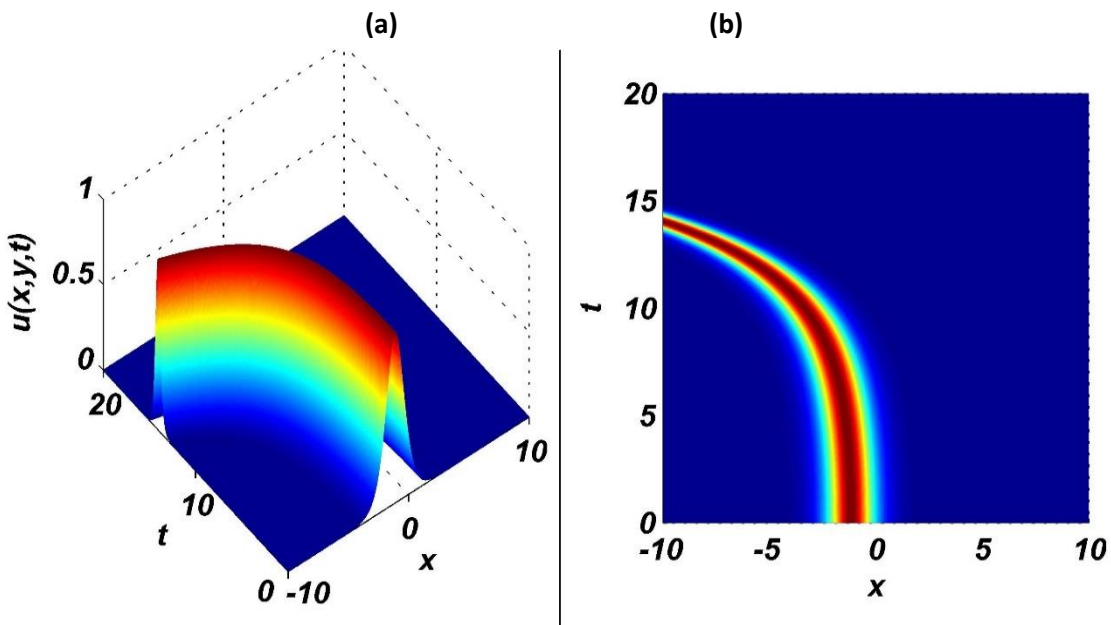


Figure 7 : Évolution spatio-temporelle du soliton- u . (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation, avec $f(t) = \frac{1}{3} \cosh\left(\frac{t}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \sinh\left(\frac{t}{3}\right)$, $g(t) = \frac{1}{72} \cosh\left(\frac{t}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \sinh\left(\frac{t}{3}\right)$ et $h(t) = \frac{-6}{72} \cosh\left(\frac{t}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \sinh\left(\frac{t}{3}\right)$, où $B_1 = B_2 = 1$, et $\gamma = 1$.

La figure 7 montre un effet de compression d'une onde solitaire. Cet effet trouve des applications très importantes dans le domaine des télécommunications optiques notamment pour la formation des impulsions ultracourtes.

D'autres formes de propagation ont pu être obtenues. La figure 8 représente une forme 'V'. Les figures 9 et 10 représentent des propagations en formes 'M' et 'W', respectivement.

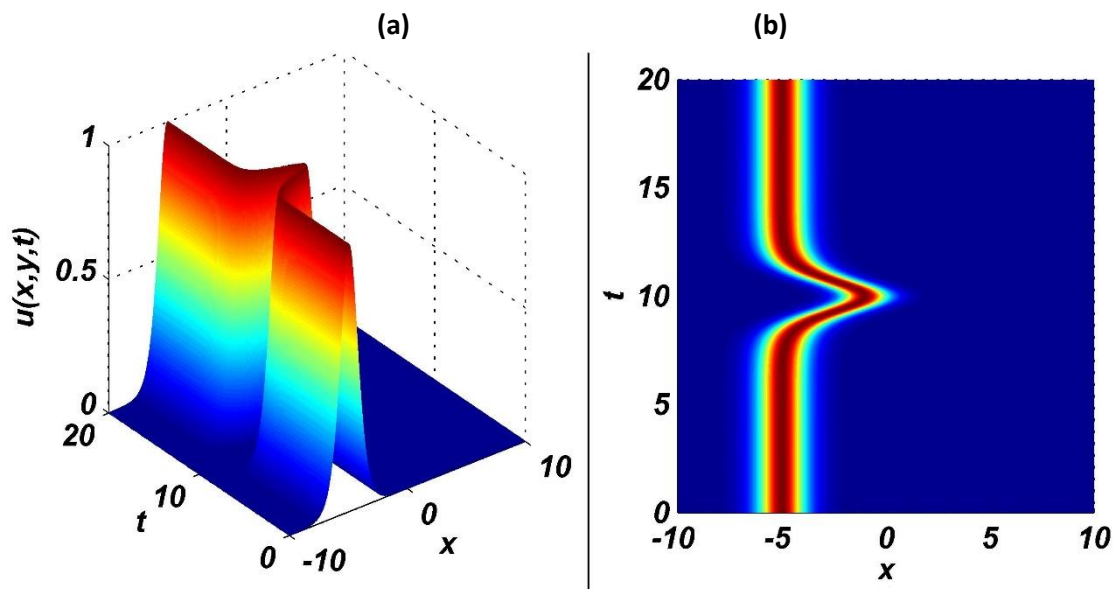


Figure 8 : Évolution spatio-temporelle du soliton- u . (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation, avec $f(t) = 8 \tanh(t - 10)$, $g(t) = h(t) = -\tanh(t - 10)^3$, où $B_1 = B_2 = 1$, et $y = 1$.

A partir de ces figures, on constate que le soliton conserve sa forme même si sa vitesse ou sa phase est modifiée durant la propagation. Cette forme inchangée des solitons présente une de leurs propriétés la plus importante.

Dans les figures 9 et 10, on voit clairement que les variations temporelles de $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ permettent de contrôler et de moduler la propagation spatio-temporelle des solitons d'une manière efficace. Ainsi par un choix approprié de la variation temporelles de ces paramètres, on a pu identifier de nouvelles formes de propagations telles que les formes 'M' et 'W'. Cela traduit l'importance du choix des effets d'inhomogénéités. Il est à noter que plusieurs autres formes d'évolution des solitons peuvent être réalisées en faisant un choix judicieux des variations temporelles des paramètres de l'équation NV à coefficient variables.

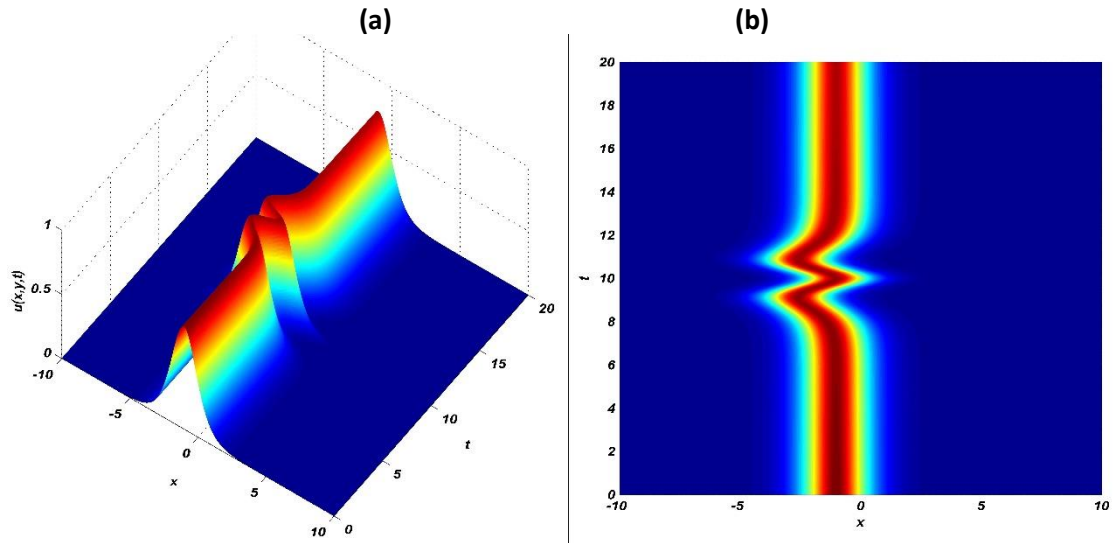


Figure 9 : Évolution spatio-temporelle du soliton- u . (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation, avec $f(t) = 10 \tanh(-10 + t) \operatorname{sech}(-10 + t)^2$, $g(t) = h(t) = -\frac{5}{2} \tanh(-10 + t)^3 \operatorname{sech}(-10 + t)^2$, où $B_1 = B_2 = 1$, et $\gamma = 1$.

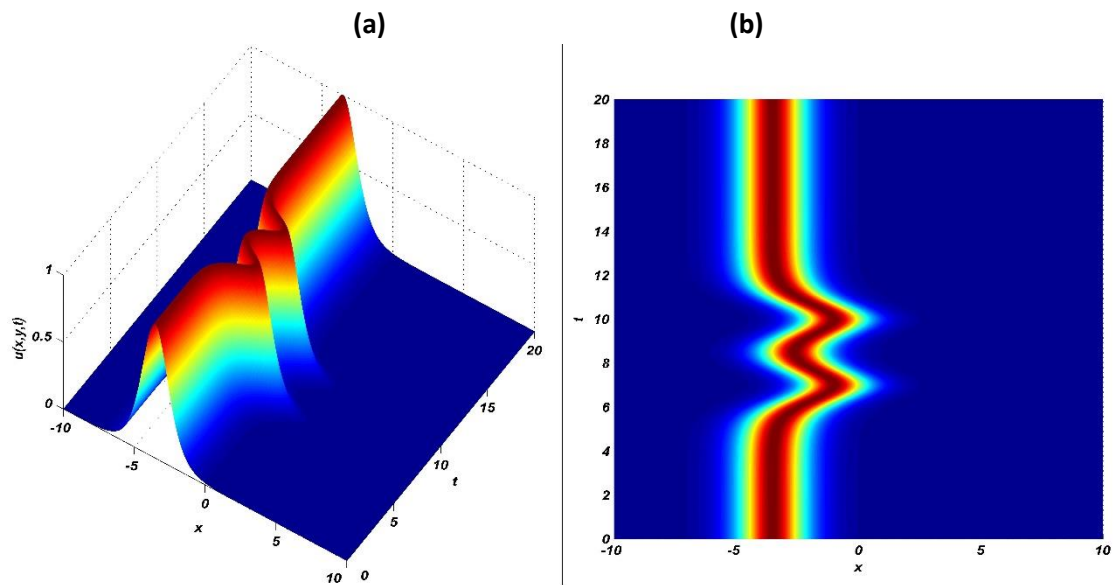


Figure 10 : Évolution spatio-temporelle du soliton- u . (a) : l'amplitude du soliton- u , (b) : profile de propagation, avec $f(t) = 4 \tanh(t - 7)$, $g(t) = -\tanh(t - 7)^3$ et $h(t) = \tanh(t - 10) \operatorname{sech}(t - 10)^2$, où $B_1 = B_2 = 1$, et $\gamma = 1$.

7. Conclusion

Nous avons étudié l'existence des solutions de types solitons pour quatre variantes de l'équation NV, en utilisant la méthode de l'ansatz d'onde solitaire. Ces équations sont l'équation NV à coefficients constants, l'équation NV à coefficients variables avec un terme d'amortissement, l'équation généralisée NV (m, n) plus un terme d'évolution généralisée, et l'équation NV à $(1 + N)$ -dimensions avec des coefficients variables et un terme de force. Les Conditions pour l'existence des solitons ont été également présentées. À notre connaissance, les solutions solitons obtenues et les modèles considérés, dans notre travail, n'ont pas été précédemment rapporté. Compte tenu de l'analyse, nous voyons que la méthode utilisée est une méthode efficace pour construire des solutions exactes de type soliton pour les modèles NV à coefficients constants ou variables.

Nous avons étudié l'influence des variations temporelles des paramètres physiques sur la dynamique de propagation non linéaire des solitons NV dans un milieu inhomogènes. Les inhomogénéités du système sont représentées dans les modèles étudiés par les paramètres dépendants du temps décrivant la dispersion du premier ordre, la dispersion de troisième ordre selon la direction 'x' et 'y', respectivement ainsi les termes liées aux pertes ou au gain. Nous avons remarqué que l'amplitude des solitons est principalement affectée par la variation temporelle du coefficient de perte. Pour un coefficient de perte positif, l'amplitude des ondes diminue énormément et elle augmente rapidement en considérant un coefficient négatif. En absence de perte, les soliton NV se propagent sans aucune déformation notable dans le milieu. De plus, on a montré que la dynamique des solitons NV peut être contrôlée par un choix approprié des variations temporelles des coefficients de dispersion. Les résultats présentés ont montré qu'une variété de forme de solitons NV peut être obtenue en faisant un choix judicieux de la variation temporelle des paramètres physiques. Les solitons NV peuvent être compressés ou accélérés au cours de leurs propagations dans le milieu inhomogène.

Références

- [1] S.A. El-Wakil, M.A. Abdou, A. Elhanbaly, “New solitons and periodic wave solutions for nonlinear evolution equations”, *Phys. Lett A* 353 (2006) 40-47.
- [2] Xiangzheng Li and Mingliang Wang, “A sub-ODE method for finding exact solutions of a generalized KdV-mKdV equation with high-order nonlinear terms”, *Phys. Lett A.* 361 (2007) 115-118.
- [3] H. Triki, A.M. Wazwaz, “Sub-ODE method and soliton solutions for the variable-coefficient mKdV equation”, *Appl. Math. Comput.* 214 (2009) 370–373.
- [4] H. Triki, Thiab R. Taha, “The sub-ODE method and soliton solutions for a higher order dispersive cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation”, *Chaos, Solitons and Fractals.* 42 (2009) 1068-1072.
- [5] S.L. Palacios, A. Guinea, J.M. Fernandez-Diaz, and R.D. Crespo, “Dark solitary waves in the nonlinear Schrödinger equation with third order dispersion, self-steepening, and self-frequency shift”, *Phys. Rev. E* 60, No. 1 (1999) R45-R47.
- [6] R. Hirota, “The Direct Method in Soliton Theory”, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [7] Anjan Biswas, “1-soliton solution of the K(m,n) equation with generalized evolution”, *Phys. Lett. A* 372 (2008) 4601–4602.
- [8] H. Triki, A.M.Wazwaz, “Bright and dark soliton solutions for a K(m,n) equation with t-dependent coefficients”, *Phys. Lett A* 373 (2009) 2162–2165.
- [9] A.M. Wazwaz, H. Triki, “Soliton solutions for a generalized KdV and BBM equations with time dependent coefficients”, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 16 (2011) 1122–1126.
- [10] Anjan Biswas, Daniela Milovic, “Bright and dark solitons of the generalized nonlinear Schrödinger’s equation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15 (2010) 1473-1484.
- [11] Manirupa Saha, Amarendra K. Sarma, Anjan Biswas, “Dark optical solitons in power law media with time-dependent coefficients”, *Phys. Lett A* 373 (2009) 4438-4441.

- [12] T.R. Marchant, “Asymptotic solitons for a higher-order modified Korteweg-de Vries equation”, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 046623:1–8.
- [13] T.R. Marchant, “Asymptotic solitons for a third-order Korteweg-de Vries equation”, *Chaos, Solitons and Fractals*. 22 (2004) 261–270.
- [14] A. M. Wazwaz, “Exact solutions of compact and noncompact structures for the KP-BBM equation”, *Appl. Math. Comput.* 169 (2005) 700–712.
- [15] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, “On the stability of solitary waves in weakly dispersive media”, *Sov. Phys. Dokl.* 15 (1970) 539–541.
- [16] A. M. Wazwaz, “Four (2 + 1)-dimensional integrable extensions of the Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Appl. Math. Comput.* 215 (2010) 3631–3644.
- [17] Xing-Biao Hu, “Nonlinear superposition formula of the Novikov-Veselov equation”, *J. Phys. A Math. Gen.* 27 (1994) 1331-1338.
- [18] J. Nickel and H. W. Schurmann, “2-Soliton-Solution of the Novikov-Veselov equation”, *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 45, No. 10, (2006) 1825-1829.
- [19] C. Athorne and J. J. C. Nimmo, “On the Moutard transformation for integrable partial differential equations”, *Inverse Problems*. 7 (1991) 809-826.
- [20] Xing-Biao Hu, “Nonlinear superposition formula of the Novikov-Veselov equation”, *J. Phys. A Math. Gen.* 27 (1994) 1331-1338.
- [21] Xing-Biao Huy and Ralph Willox, “Some new exact solutions of the Novikov–Veselov equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 29 (1996) 4589–4592.
- [22] Boris G Konopelchenko and Antonio Moro, “Geometrical optics in nonlinear media and integrable equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37 (2004) L105–L111.
- [23] E. V. Ferapontov, “Stationary Veselov–Novikov equation and isothermally asymptotic surfaces in projective differential geometry”, *Differential Geometry and its Applications* 11, (1999) 117–128.
- [24] I. A. Taimanov, “Finite–gap solutions of the modified Novikov–Veselov equation, their spectral properties, and applications”, *Siberian Math. J.* 40 (1999), 1146–1156.

- [25] B. Boubir, H. Triki, A.M. Wazwaz, "Bright solitons of the variants of the Novikov–Veselov equation with constant and variable coefficients", *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 420–431.
- [26] Philip Rosenau and James M. Hyman, "Compactons: Solitons with finite wavelength", *Phys. Rev. Lett.* 70 (5), (1993) 564-567.
- [27] Y. Zhang, "New exact special solutions with solitary patterns for Boussinesq-like $B(m, n)$ equations with fully nonlinear dispersion", *Appl. Math. Comput* 2006; 173:1137-48.
- [28] Mustafa Inc, "Compacton and periodic wave solutions of the nonlinear dispersive Zakharov-Kuznetsov equation", *Cent Eur J Phys* 2007; 5(3):351-66.
- [29] Zhenya Yan, "New exact solution structures and nonlinear dispersion in the coupled nonlinear wave systems", *Phys. Lett A* 361 (2007) 194-200.
- [30] A. M. Wazwaz, "A study on KdV and Gardner equations with time-dependent coefficients and forcing terms", *Appl. Math. Comput.* 217 (2010) 2277-2281.
- [31] Ryan P. Croke, "An Investigation of The Novikov–Veselov equation: New solutions, stability and implications for the inverse scattering transform", Dissertation, Colorado State University, 2012.
- [32] G. Rowlands, "Stability of non-linear plasma waves", *Journal of Plasma Physics*, 3, pp. 567–576, 1969.
- [33] A. Mahalingam, M.S. Mani Rajan, "Influence of generalized external potentials on nonlinear tunnelling of nonautonomous solitons: Soliton management", *Optical Fiber Technology* 25, 44–50, 2015.
- [34] Jyoti Hitendra, K. Malik and R. P. Dahiya, "Inhomogeneity Effect on Solitary Structures in a Magnetized Warm Plasma: Ionization versus Recombination", *The Open Plasma Physics Journal*, 7, 18-30, 2014.

Conclusion générale

Dans cette thèse, on s'est intéressé à l'étude de la propagation des solitons modélisés par des équations différentielles non linéaires de type Novikov-Veselov (NV). Cette classe d'équations constitue une généralisation en deux dimensions d'un modèle d'équation d'onde hydrodynamique non linéaire connue sous le nom d'équation Korteweg-de Vries. Pour obtenir les équations d'évolutions correspondantes aux directions x et y , nous avons jugé nécessaire d'introduire un changement de variable qui permet de découpler la propagation des deux solitons. On a commencé par étudier la propagation dans un milieu homogène modélisé par une équation NV à coefficients constants. Des solutions exactes de type solitons ont été déterminées pour la première fois, en utilisant la méthode de l'ansatz d'onde solitaire. Ces solutions sont caractérisées par un profil spatial d'une fonction sécante hyperbolique.

On s'est intéressé également à l'étude de la propagation des ondes dans un milieu inhomogène dont la modélisation de la dynamique se fait en utilisant une équation NV à coefficients variables. Des solutions de type soliton ont été trouvées sous certaines conditions paramétriques. Nous avons remarqué que l'amplitude des solitons est principalement affectée par la variation temporelle du coefficient de perte. Pour un coefficient de perte positif, l'amplitude des ondes diminue énormément et elle augmente rapidement en considérant un coefficient négatif. En absence de perte, les solitons NV se propagent sans aucune déformation notable dans le milieu. De plus, on a montré que la dynamique des solitons NV peut être contrôlée par un choix approprié des variations temporelles des paramètres physiques. Les résultats présentés ont montré qu'une variété de forme de solitons NV peut être obtenue à travers la variation temporelle des paramètres dépendants du temps.

Dans la troisième partie de ce travail, on a introduit une généralisation du modèle NV incorporant un terme d'évolution généralisé qu'on a appelé équation "NV (m, n)". Cette forme généralisée permet de décrire la dynamique de propagation non linéaire des ondes dans un milieu matériel modélisé par l'équation NV présentant des non linéarités et des dispersions de puissance quelconque. A partir de ce modèle généralisé, on peut identifier de nombreux sous-systèmes décrivant la propagation dans les milieux présentant des termes non linéaire et dispersifs modifiés. Nous nous sommes intéressés à la recherche de solutions explicites de type ondes solitaires de l'équation NV (m, n) en utilisant la méthode de l'ansatz d'onde solitaire. Ainsi, une famille de solutions solitons est obtenue sous certaines conditions paramétriques.

Dans une quatrième partie de ce travail, relatif à l'étude théorique de la dynamique de propagation non linéaire des solitons NV, nous avons traité un problème physique très important permettant d'identifier les solutions de type ondes solitaires pour un modèle NV multidimensionnel. En utilisant à nouveau la méthode de l'ansatz d'onde solitaire, on a pu déterminer les solutions exactes de cette équation de dimension $(1 + N)$. Ainsi, de nouvelles familles de solutions exactes de type ondes solitaires ont été obtenues pour ce modèle à plusieurs dimensions.

Les résultats obtenus ont montré que la méthode de l'ansatz d'onde solitaire est efficace pour déterminer les solutions exactes de type soliton à une variété de modèles d'équations de type NV.

Les solutions obtenues pourraient être utilisés pour comprendre certains phénomènes intervenant au cours de la propagation non linéaire des ondes dans les systèmes faiblement non linéaires modélisés par les équations de type NV. En particulier, le choix des variations temporelles des paramètres physiques permet de contrôler et de moduler l'évolution spatio-temporelle des solitons NV.