



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2017

Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en Mathématiques

QUELQUES PROPRIÉTÉS SPECTRALES DE QUELQUES CLASSES D'OPÉRATEURS DANS UN ESPACE DE BANACH

Option

Système dynamique

Par

Hechifa Abderrazak

DIRECTEUR DE THÈSE : MANSOUR Abdelouahab M.C.A U. ELOUED
CO- DIRECTEUR : MAKHLOUF Ammar Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Djebabla Abdelhak M.C.A U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Bouznada Smail M.C.A U. TEBESSA
EXAMINATEUR : Salmi Abdelouahab M.C.A U.B.M. ANNABA

ملخص

تركز هذه الرسالة حول بعض الخواص الطيفية للمؤثرات المعرفة على فضاءات بناخ، و خصوصا المفهوم الطيفي حديث التعريف و الذي يسمى الطيف الممدد لمؤثرات " سيزارو".
في الجزء الأول نحن نقدم التعاريف الضرورية في مجال نظرية المؤثرات و بعض فئات المؤثرات.

في الجزء الثاني نتطرق إلى الخصائص العامة للطيف الممدد لبعض المؤثرات في بعض الحالات الخاصة، مثل حالة المؤثرات منتهية البعد و المؤثرات القابلة للقلب.

في الجزء الثالث نتطرق إلى خصائص مؤثرات سيزارو المستمرة على فضاءات لوبيغ.

في الجزء الرابع وصفنا الطيف الممدد لمؤثرات سيزارو المنفصلة على مجموعة المتتاليات.

و في الجزء الأخير، قمنا بإثبات أن مؤثر سيزارو المرجح تحت الطبيعي و حددنا الطيف الممدد لهذا المؤثر.

الكلمات المفتاحية: الطيف الممدد، القيم الذاتية الممددة، الشعاع الذاتي الممدد ، مؤثر سيزارو، المؤثر ذاتي القرين، المؤثر العادي، المؤثر شبه العادي.

Abstract

This thesis is based on some spectral properties of some classes of operators in Banach spaces, especially on a relatively new spectral notion, called extended spectrum of Cesàro operators.

In the first part we offer some definitions of the general operator theory and some classes of operators.

We are interested in the second part by the properties of extended spectrum of an operator in some special cases, such as the case of finite dimension and the case of invertible operator.

In the third section we describe completely the extended spectrum and Some properties of continuous Cesàro operators on Lebesgue spaces.

In the fourth part we describe the discrete extended spectrum of Cesàro operators on sequence spaces.

In the last part, we prove that the weighted Cesàro operator on $\ell^2(h)$ where h is a positive discrete measure on \mathbb{N} is subnormal, and describe the extended spectrum of weighted Cesàro operators.

Keywords:

Extended spectrum, Extended eigenvalue, Extended eigenoperator, Cesàro operator, self-adjoint operator, normal operator, quasinormal operator, subnormal operator, hyponormal operator.

Résumé

Cette thèse s'articule autour de quelques propriétés spectrales des opérateurs et précisément d'une notion spectrale assez récente, appelée spectre étendu de l'opérateur de Cesàro.

Dans la première partie nous fournissons des définitions dans le domaine de la théorie des opérateurs et quelques classes d'opérateurs.

Nous nous intéressons dans la deuxième partie par les propriétés générales du spectre étendu d'un opérateur dans certains cas particuliers, tels que le cas de dimension finie et celui des opérateurs inversibles.

Dans la troisième partie nous décrivons complètement le spectre étendu avec quelques propriétés pour les opérateurs de Cesàro continus sur les espaces de Lebesgue.

Dans la quatrième partie nous décrivons le spectre étendu des opérateurs de Cesàro discrets sur les espaces de suites.

Dans la dernière partie, on démontre que l'opérateur de Cesàro pondéré sur $\ell^2(h)$ où h désigne une mesure discrète positive sur \mathbb{N} est sous normal et on détermine le spectre étendu de cet opérateur.

Mots-clés :

Spectre étendu, valeur propre étendue, vecteur propre étendu, opérateur de Cesàro, opérateur autoadjoint, opérateur normal, opérateur quasinormal, opérateur sous normal, opérateur hyponormal.

Remerciements

Ce travail de thèse, je le dois beaucoup à toutes les personnes qui m'ont entouré pendant ces dernières années. A cet effet, je tiens à leur exprimer, mes remerciements les plus sincères.

Tout d'abord, ma plus grande gratitude s'adresse tout particulièrement à mon directeur de thèse, Abdelouahab Mansour, qui m'a choisi ce sujet extrêmement intéressant et co directeur de thèse, le professeur Makhoulouf Ammar, qui m'a donné beaucoup de suggestions et remarques pour compléter ce travail.

Merci également aux membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : La présidence du jury assurée par Mr. Djebabla Abdelhak, est très honorable pour moi. Je remercie sincèrement Mrs. Bouznada Smail, et Salmi Abdelouahab, pour l'honneur qu'ils me font d'accepter de participer à ce jury et de juger mon travail.

Je tiens également adresser mes plus sincères remerciements pour Mrs. Adel Aissaoui et Belhadi Ahfouda.

Je remercie du fond de coeur, ma famille, mes très chers parents, mes frères et sœurs, ainsi que mes amis. Ils m'ont tous largement aidé et soutenu tout au long des diverses épreuves de ces dernières années.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Notions Préliminaires	8
2.1	Notations et définitions	8
2.2	Les opérateurs linéaires bornés	9
2.3	L'inverse d'un opérateur	11
2.4	L'adjoint d'un opérateur	11
2.5	Les commutateurs	11
2.6	Dérivations	12
2.7	Quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$. . .	13
2.7.1	Opérateurs positifs	14
2.7.2	Opérateurs sous normaux	16
2.7.3	Opérateurs quasinormaux	24
2.7.4	Opérateurs hyponormaux	26
2.8	Propriété de Fuglède-Putnam	28
3	Spectre étendu des opérateurs	30
3.1	Généralités sur le spectre d'un opérateur	30
3.2	Spectre étendu d'un opérateur	35
3.2.1	Relation avec le spectre ponctuel	36
3.2.2	Cas d'opérateurs inversibles	37
3.2.3	Espace de Hilbert de dimension finie	38
3.2.4	Cas d'opérateurs avec spectre ponctuel riche . . .	39
4	Valeur et opérateur propres étendus pour L'opérateur de Cesàro continu	43
4.1	L'opérateur de Cesàro continu	43
4.2	Valeur et opérateur propres étendus pour C_1 sur les es- paces de Lebesgue.	45

4.3	Exemples	49
4.4	Quelques propriétés des opérateurs de Cesàro continus finis	50
4.5	Valeur et opérateur propres étendus pour C_1 sur l'espace de Hilbert.	55
5	Valeur et opérateur propres étendus pour L'opérateur de Cesàro discret	61
5.1	L'opérateur de Cesàro discret sur les espaces de suites . .	61
5.2	valeurs propres étendues de l'opérateur de Cesàro discret sur les espaces de suites	66
5.3	Quelques propriétés	69
6	L'opérateur de Cesàro pondéré C_h	71
6.1	Introduction	71
6.2	Sous normalité de C_h	72
6.3	Valeurs propres étendues de l'opérateur C_h	74
	Bibliographie	78

Chapitre 1

Introduction

Le travail de recherche entreprise pour la préparation de ma thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs, qui traite les valeurs propres étendues des opérateurs de Cesàro et les opérateurs propres étendus associés dans les cas continu ou discret. Cette théorie est surtout développée dans le cas des espaces de Hilbert. En général on dénote par H un espace de Hilbert complexe et séparable et par $B(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis sur H .

Dans ma thèse, j'ai étudié quelques propriétés spectrales des opérateurs, plus particulièrement une notion spectrale assez récente qui concerne le spectre étendu des opérateurs de Cesàro.

Soit $T \in B(H)$, on dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur T s'il existe un opérateur $X \in B(H) \setminus \{0\}$ tel que $TX = \lambda XT$. Dans ce cas, l'opérateur X est dit opérateur propre étendu associé à λ . On appelle spectre étendu de T l'ensemble de toutes les valeurs propres étendues de T , et on le notera par $\sigma_{ext}(T)$.

Notons aussi par $E_{ext}(T, \lambda)$ (ou simplement $E_{ext}(\lambda)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le sous espace propre étendu associé à $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$.

Dans [4], A. Biswas, A. Lambert et S. Petrovic ont introduit cette notion en montrant que le spectre étendu d'un opérateur T à image dense, correspond au spectre ponctuel d'un autre opérateur (non borné en général) construit à partir de T . En effet, Soient $T, X \in B(H)$ et supposons qu'il existe un opérateur $Y \in B(H)$ tel que

$$TX = XY. \tag{1.1}$$

Une très importante approche du spectre étendu d'un opérateur, se

manifeste en regardant la définition de cet ensemble comme un cas particulier de l'équation opératoire de Sylvester $TX - XS = Q$, en posant $S = \lambda T$ et $Q = 0$.

Dans [41], M. Rosenblum a montré que si $\sigma(T) \cap \sigma(S) = \emptyset$, alors $X = 0$ est l'unique solution de l'équation $TX - XS = 0$, ce qui implique l'inclusion importante suivante

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

Dans [5], A. Biswas et S. Petrovic ont complètement décrit l'ensemble du spectre étendu d'un opérateur $T \in B(H)$, avec H un espace de Hilbert de dimension finie. Plus précisément, ils ont montré que dans ce cas

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

En dimension infinie, la situation est loin d'être simple. Dans [29], A. Lambert a abordé le cas des opérateurs inversibles, en montrant qu'il existe dans ce cas deux constantes $0 < a < b < \infty$ telles que

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{z \in \mathbb{C}, \quad a \leq |z| \leq b\}.$$

Dans [22], Bourdon et Shapiro se sont basés sur les propriétés d'entrelacement entre les opérateurs de Toeplitz, trouvées par J. A. Deddens dans [18] et [19], pour déterminer l'ensemble du spectre étendu de certains opérateurs de Toeplitz plus généraux que le shift $S = Tz$.

Dans le deuxième chapitre on évoque quelques définitions de base indispensables à la recherche entreprise dans le domaine de la théorie des opérateurs.

Dans le troisième chapitre on traite les propriétés générales du spectre étendu d'un opérateur dans certains cas particuliers, tels que le cas dimension finie et celui des opérateurs inversibles.

Le quatrième chapitre est consacré pour décrire complètement le spectre étendu et quelques propriétés du spectre étendu des opérateurs de Cesàro continu sur les espaces de Lebesgue.

Dans le cinquième chapitre on a pu décrire le spectre étendu des opérateurs de Cesàro discrets sur les espaces de suites.

Et dans la dernière partie, on a démontré que l'opérateur de Cesàro pondéré est sous normal et on a déterminé le spectre étendu des opérateurs de Cesàro pondérés.

Chapitre 2

Notions Préliminaires

2.1 Notations et définitions

Dans le contenu de cette thèse, on désigne par H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie muni d'un produit scalaire, noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- $B(H)$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H .
- Pour $T \in B(H)$: $R(T)$ (resp. $\ker(T)$) désigne l'image (resp. le noyau) de T .

Proposition 1. *Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit une norme sur H , tel que*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in H.$$

Définition 1. *Deux vecteurs x et y dans H sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.*

Définition 2. *Soit M un sous-ensemble de H , le complémentaire orthogonal de M (noté par M^\perp) est défini par*

$$M^\perp = \{y \in H; \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in M\}.$$

Remarque 1. – M^\perp est un sous-espace fermé de H .

- $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$
- $M^{\perp\perp}$ est le plus petit sous-espace fermé contenant M .

Lemme 1. *Si M est un sous espace d'un espace de Hilbert H , alors*

$$M^{\perp\perp} = \overline{M}$$

Démonstration 1. *Pour démontrer l'égalité on doit démontrer les inclusions dans les deux sens.*

– $(M)^{\perp\perp} \subset \overline{M}$:

Soit $f \in M^{\perp\perp}$, on peut toujours écrire f sous la forme $f = g + h$ où $g \in \overline{M}$ et $h \in \overline{M}^\perp = M^\perp$.

or $f \in M^{\perp\perp}$

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, h \rangle &= \langle g + h, h \rangle \\ &= \langle h, h \rangle \\ &= \|h\|^2, \end{aligned}$$

donc $h = 0$ et $f = g$ qui est bien dans \overline{M} , donc $f \in \overline{M}$, d'où l'inclusion.

– *L'inclusion en deuxième sens est claire, elle découle du fait $M \subset M^{\perp\perp}$ et $M^{\perp\perp}$ est fermé, donc $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$. Et par conséquent $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.*

□

Lemme 2. *Si M est un sous-espace fermé de H , alors H est la somme directe orthogonale de M et M^\perp , notée par $H = M \oplus M^\perp$.*

Définition 3. *L'ensemble $M = \{x_i \in H; \quad i \in I \subset \mathbb{N}\}$ est appelé système orthogonal si pour tous $i, j \in I$ et $i \neq j$ on a $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.*

M est appelé système orthonormal s'il est orthogonal et $\|x_i\| = 1$ pour tous $i \in I$.

Définition 4. *Soit E un ensemble non vide et M une partie de E .*

– *M est dit convexe si :*

$$\forall (x, y) \in M^2, \quad \forall \alpha \in [0, 1]; \quad \alpha x + (1 - \alpha) y \in M.$$

– *L'enveloppe convexe de M est le plus petit convexe contenant M , noté $\text{co}(M)$.*

2.2 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 5. *Une application T définie d'un espace de Hilbert H dans H est dite "Opérateur linéaire" si T satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. *Additivité* : $T(x + y) = Tx + Ty$ pour tout $x, y \in H$.
 2. *Homogénéité* : $T(\alpha x) = \alpha Tx$ pour tout $x \in H$ et α complexe.
- L'opérateur identité I est défini par $Ix = x$, pour tout $x \in H$.
 - L'opérateur nul 0 est défini par $0x = 0$, pour tout $x \in H$.

Définition 6. *L'opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H est dit borné, s'il existe un nombre positif c tel que*

$$\|Tx\| \leq c \|x\|, \quad \forall x \in H.$$

De plus la norme de l'opérateur T est définie par

$$\|T\| = \inf \{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\|, \forall x \in H\}.$$

Théorème 1. *Pour tout opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H , on a*

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| ; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Démonstration 2. *On démontre les inégalités dans le deux sens.*

1. *Posons $a = \sup \{\|Tx\| ; x \in H, \|x\| = 1\}$, si l'opérateur T est borné, alors*

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| = \|T\|, \quad \text{pour } \|x\| = 1,$$

donc $a \leq \|T\|$ d'après la définition de $\|T\|$.

2. *Pour tout vecteur $x \in H$ on a*

$$\|Tx\| = \left\| T \left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \leq a \|x\|$$

d'où $\|T\| \leq a = \sup \{\|Tx\| ; x \in H, \|x\| = 1\}$.

En combinant les deux inégalités dans (1) et (2) on obtient l'égalité désirée.

□

2.3 L'inverse d'un opérateur

Définition 7. On dit que l'opérateur T est inversible sur l'espace de Hilbert H , s'il existe un opérateur S qui vérifie

$$ST = TS = I$$

où I est l'opérateur identité dans H .

On écrit $S = T^{-1}$ et est dit l'opérateur inverse de T .

Définition 8. Si T est un opérateur linéaire borné, La trace de T est la somme des éléments diagonaux de la matrice de l'opérateur T dans une base quelconque, on la note $\text{tr}T$.

2.4 L'adjoint d'un opérateur

Définition 9. Pour $T \in B(H)$, T^* désigne l'opérateur adjoint de T , défini par

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall x, y \in H$$

Théorème 2. [35] Si S et T sont deux opérateurs définis sur un espace de Hilbert H , alors leurs adjoints T^* et S^* sont aussi deux opérateurs sur H et les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\|T\| = \|T^*\|$.
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
4. $(T^*)^* = T$.
5. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, si T est inversible.
6. $(ST)^* = T^*S^*$

2.5 Les commutateurs

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie.

Définition 10. 1. Un élément X de $B(E)$ est appelé commutateur s'il existe A et B de $B(E)$, tels que $X = AB - BA$.

2. Le commutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}' = \{B \in B(E); AB = BA\}.$$

3. Le bicommutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}'' = \{C \in B(E); CB = BC, \quad \forall B \in \{A\}'\}.$$

Propriétés :

1. $\{A\}'' = \{\{A\}'\}'$
2. $\{A\}'$ est une sous-algèbre de $B(E)$.
3. $\{A\}''$ est une sous-algèbre commutative de $B(E)$.
4. Tout polynôme de A appartient à $\{A\}''$

2.6 Dérivations

Définition 11. Soit Λ une algèbre sur un corps commutatif K . Une dérivation δ sur Λ est une application linéaire continue de Λ dans Λ qui satisfait la propriété suivante

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y) \quad \text{pour tout } X, Y \in \Lambda$$

Remarque 2. 1. Soit $A \in \Lambda$, l'application de Λ dans Λ qui associe à tout élément X de Λ son image

$$\delta_A(X) = AX - XA.$$

est une dérivation sur Λ et est appelée dérivation intérieure induite par A .

2. l'application de Λ dans Λ qui associe à tout élément X de Λ son image

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB.$$

où A et B sont des éléments de Λ , est aussi une dérivation sur Λ et est appelée dérivation généralisée induite par A et B .

Théorème 3. Soient $A, B \in B(H)$ les trois assertions suivantes sont équivalentes

1. $\exists X \in B(H); AX - XB = I$.
2. $\exists Y \in B(H)$, inversible tel que $Y \in \{A\}' \cup \{B\}'$, et $Y \in R(\delta_{A,B})$.
3. $R(\delta_{A,B})$ contient l'ensemble des opérateurs inversibles dans $B(H)$ qui commutent avec A ou B .

Démonstration 3. (3) \Rightarrow (2) : est évidente car I est inversible, $I \in \{A\}' \cup \{B\}'$ et $I \in R(\delta_{A,B})$.

(2) \Rightarrow (1) : Soit $Y \in B(H)$, inversible tel que $Y \in \{A\}' \cup \{B\}'$
(supposons que $Y \in \{A\}'$)
 $Y \in R(\delta_{A,B}) \Rightarrow \exists X \in B(H)$, tel que $AX - XB = Y$.
Posons $Z = Y^{-1}X$ (i.e $X = YZ$), alors $A(YZ) - (YZ)B = Y$. Comme $Y \in \{A\}'$, alors on obtient $Y(AZ - ZB) = Y$, et par conséquent $AZ - ZB = I$.

(1) \Rightarrow (3) : Soit $X \in B(H); AX - XB = I, Y$ inversible dans $B(H)$ et commute avec B . Posons $Z = XY$ (i.e. $X = ZY^{-1}$), alors
 $AX - XB = I \Rightarrow A(ZY^{-1}) - (ZY^{-1})B = I \Rightarrow (AZ - ZB)Y^{-1} = I = YY^{-1}$, d'où $AZ - ZB = Y$, et par conséquent $Y \in R(\delta_{A,B})$.

□

2.7 Quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$.

Un opérateur $T \in B(H)$ est dit :

- **Compact**, si $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ pour toute suite orthonormée (x_n) de H .
- **De rang fini**, si $R(T)$ est de dimension finie.
- **Positif**, si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$; on note $T \geq 0$.
- **Auto-adjoint**, si $T = T^*$.
- **projection** si $T^2 = T$.
- **projection orthogonale** si $T^2 = T$ et $T = T^*$.
- **Isométrie**, si $T^*T = I_H$.
- **Unitaire**, si $T^*T = TT^* = I$.
- **Dominant**, si $R(T - \lambda) \subseteq R(T - \lambda)^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- **Normal**, si $T^*T - TT^* = 0$.
- **Sous-normal**, s'il admet une extension normale.

- **Quasinormal**, s'il commute avec T^*T .
- **Hyponormal**, si $T^*T - TT^* \geq 0$.
- **Semi-normal**, si T ou T^* est hyponormal.
- **k -quasihyponormal**, si $T^{*k}(T^*T - TT^*)T^k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Définition 12. Soient $T \in B(H)$ et M un sous-espace vectoriel fermé de H .

- M est dit invariant par T si $T(M) \subseteq M$.
- M est dit réduisant pour T si $T(M) \subseteq M$ et $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

2.7.1 Opérateurs positifs

Définition 13. Un élément $T \in B(H)$ est appelé positif notation $T \geq 0$ si pour tout $x \in H, \langle Tx, x \rangle \geq 0$.

Théorème 4. Tout opérateur positif T admet un unique opérateur positif S tel que $T = S^2$. De plus, S commute avec tout opérateur qui commute avec T . On appelle S la racine carré de T et on note par \sqrt{T} .

Définition 14. Un opérateur $T \in B(H)$ est appelé isométrie partielle si

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in \text{Ker}(T)^\perp.$$

Proposition 2. Un opérateur $T \in B(H)$ est une isométrie partielle si et seulement si T^*T est une projection orthogonale.

Démonstration 4. Supposons que T est une isométrie partielle.

On a alors

$$(T^*T)^* = T^*T \quad \text{et} \quad (TT^*)^* = TT^*.$$

Il reste donc à prouver que

$$(T^*T)^2 = T^*T \quad \text{et} \quad (TT^*)^2 = TT^*.$$

Comme $H = \text{Ker}(T)^\perp \oplus \text{Ker}(T)$, on a pour tout $x \in H$

$$T^*Tx = T^*Tx_1 \in \text{Ker}(T)^\perp$$

où $x_1 \in \text{Ker}(T)^\perp$ vérifiant $(x - x_1) \in \text{Ker}(T)$.

Il résulte de $\|Tx_1\| = \|x_1\|$ que $\langle T^*Tx_1, x_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle$, puis de l'identité de polarisation $T^*Tx_1 = x_1$, On a donc $(T^*T)^2x = T^*Tx$.

Montrons la réciproque :

Comme T^*T est une projection orthogonale, on a

$$\|T^*Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2.$$

On en déduit alors que $\text{Ker}(T^*T) = \text{Ker}(T)$ et donc T^*T est une projection orthogonale sur $\text{Ker}(T)^\perp$. D'où, pour tout $x \in \text{Ker}(T)^\perp$

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \|x\|^2.$$

□

Théorème 5. (Décomposition polaire)

Soit $T \in B(H)$, Posons $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Il existe une isométrie partielle U telle que $T = U|T|$. En outre, U est unique si on impose la condition $\text{Ker}U = \text{Ker}T$.

Démonstration 5. Remarquons qu'on a

$$\|Tx\|^2 = \||T|x\|^2, \forall x \in H \quad (2.1)$$

En particulier, on en déduit que $\text{Ker}(|T|) = \text{Ker}(T)$ et que

$$|T|x = |T|y \implies Tx = Ty.$$

On définit alors l'application

$$\begin{aligned} V : \text{Ran}(|T|) &\longrightarrow \text{Ran}(T) \\ |T|x &\longmapsto Tx. \end{aligned}$$

V est isométrique grâce à (2.1). Elle s'étend donc par continuité à une isométrie de $\overline{\text{Ran}(|T|)}$ vers $\overline{\text{Ran}(T)}$, qu'on note encore par V .

En posant $U = VP$ avec P la projection orthogonale sur $\text{Ker}(T)^\perp$, on obtient une isométrie partielle sur H vérifiant la propriété énoncée.

Unicité : Si U_1 et U_2 sont deux isométries partielles vérifiant $U_1|T| = U_2|T|$ alors $U_1 = U_2$ sur $\overline{\text{Ran}(|T|)}$.

De plus comme $\text{Ran}(|T|)^\perp = \text{Ker}(T)$, la condition :

$\text{Ker}(U_1) = \text{Ker}(U_2) = \text{Ker}(T)$, implique que $U_1 = U_2$ sur H .

□

2.7.2 Opérateurs sous normaux

Définition 15. *Un opérateur S sur un espace de Hilbert H est sous normal s'il existe un espace de Hilbert K contenant H et un opérateur normal N sur K tel que $NH \subseteq H$ et $N|_H = S$.
en d'autres termes, un opérateur est sous normal s'il admet une extension normale.*

Exemple (l'opérateur de Bergman)

Soit G un ouvert borné de \mathbb{C} , $L_a^2(G)$ l'espace des fonctions analytiques appartenant à $L^2(G)$.

L'opérateur S défini sur $L_a^2(G)$ par $(Sf)(z) = zf(z)$, pour tout f dans $L_a^2(G)$.

Si $N : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$, est un opérateur défini par $(Nf)(z) = zf(z)$, pour tout f dans $L^2(G)$. Alors N est normal et est une extension de S , d'où S est sous normal

2.7.2.1 Critère de sous normalité

Théorème 6. [14] *Si $S \in B(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. S est sous normal
2. S est une extension d'un opérateur quasinormal
3. Si $f_0, \dots, f_n \in H$ alors

$$\sum_{j,k=0}^n \langle S^j f_k, S^k f_j \rangle \geq 0 \quad (2.2)$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute $f_0, \dots, f_n \in H$

$$\sum_{j,k=0}^n \langle S^{j+1} f_k, S^{k+1} f_j \rangle \leq c \sum_{j,k=0}^n \langle S^j f_k, S^k f_j \rangle \quad (2.3)$$

4. Pour chaque $f_0, \dots, f_n \in H$, (2.2) est valable.
5. Pour chaque $f_0, \dots, f_n \in H$,

$$\sum_{j,k=0}^n \langle S^{j+k} f_j, S^{j+k} f_k \rangle \geq 0. \quad (2.4)$$

6. Si $B_0, \dots, B_n \in C^*(S)$, (la $C^*(S)$ algèbre générée par S) alors

$$\sum_{j,k=0}^n B_j^* S^{*k} S^j B_k \geq 0. \quad (2.5)$$

Démonstration 6. – (1) \iff (2) : Clair (voir proposition (6)).

– (1) \implies (3) : Soit N un opérateur normale sur K avec $H \subseteq K$ et $N|_H = S$ et P la projection de K sur H , il est facile de voir que pour f dans H , $S^{*n} f = PN^{*n} f$, $n \geq 1$.

Donc si $f_0, \dots, f_n \in H$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=0}^n \langle S^j f_k, S^k f_j \rangle &= \sum_{j,k=0}^n \langle N^j f_k, N^k f_j \rangle \\ &= \sum_{j,k=0}^n \langle N^{*k} N^j f_k, f_j \rangle \\ &= \sum_{j,k=0}^n \langle N^j N^{*k} f_k, f_j \rangle \\ &= \sum_{j,k=0}^n \langle N^{*k} f_k, N^{*j} f_j \rangle \\ &= \left\| \sum_{k=0}^n N^{*k} f_k \right\|^2. \end{aligned}$$

ainsi (2.2) est vérifiée.

En mettant $g_k = S f_k$, et pour chaque f_k dans les équations précédentes remplacé par g_k , alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=0}^n \langle S^{j+1} f_k, S^{k+1} f_j \rangle &= \sum_{j,k=0}^n \langle N^j g_k, N^k g_j \rangle \\ &= \left\| \sum_{k=0}^n N^{*k} g_k \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=0}^n N^{*k} N f_k \right\|^2 \\ &= \left\| N \sum_{k=0}^n N^{*k} f_k \right\|^2 \leq \|N\|^2 \sum_{k=0}^n \langle S^j f_k, S^k f_j \rangle \end{aligned}$$

d'où (2.3) est vérifiée avec $c = \|N\|^2$.

- (3) \implies (4) : Clair
- (4) \implies (5) : Si $h_k = S^k f_k$ alors

$$0 \leq \sum_{j,k=0}^n \langle S^j h_k, S^k h_j \rangle = \sum_{j,k=0}^n \langle S^{j+k} f_k, S^{j+k} f_j \rangle$$

alors (2.4) est vérifiée.

- (4) \implies (6) : Si $B_0, \dots, B_n \in C^*(S)$ et $f \in H$, soit $f_k = B_k f$

$$0 \leq \sum_{j,k=0}^n \langle S^j B_k f, S^k B_j f \rangle = \left\langle \sum_{j,k=0}^n B_j^* S^{*k} S^j B_k f, f \right\rangle$$

alors (2.5) est vérifiée.

□

Théorème 7. [46] Soit $S \in B(H)$, Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. S est sous normal
2. Il existe un opérateur unitaire $U \in B(H \oplus H)$ tel que pour $n = 0, 1, \dots$, : $T^{*n} = P_H U^n T^n$, où P_H est la projection orthogonale de $H \oplus H$ sur $H \oplus 0$.
3. Pour $n = 0, 1, \dots$, :

$$T^{*n} = \left[\int_{\partial D} e^{int} dQ(t) \right] T^n \quad (2.6)$$

où Q est une mesure des opérateurs positifs définie sur le bord du disque de l'unité ∂D .

4. Il existe une suite d'opérateurs $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in B(H)$ satisfaisant

$$T^{*n} = K_n T^n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots$$

En outre, si nous définissons

$$L_n = \begin{cases} K_n & n \geq 0 \\ K_n^* & n < 0 \end{cases}$$

Alors pour tout ensemble fini $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ contenu dans H

$$\sum_{j,k \geq 0}^n \langle L_{j-k} x_j, x_k \rangle \geq 0.$$

5. Il existe une suite d'opérateurs $K_n \in B(H)$ satisfaisant $T^{*n} = K_n T^n$ pour $n = 0, 1, \dots$, En outre, si nous définissons

$$L_n = \begin{cases} K_n & n \geq 0 \\ K_n^* & n < 0 \end{cases}$$

puis, pour chaque $x \in H$ et chaque $n = 0, 1, \dots$ la matrice

$$[\langle L_{j-k}x, x \rangle]_{j,k \geq 0}^n$$

est définie positive.

Démonstration 7. – (1) \implies (2) Soit N une extension normale de T agissant sur $H \oplus H$. Comme le noyau de N réduit N on peut écrire $N = N_1 \oplus 0$ agissant sur $(\ker N)^\perp \oplus (\ker N)$ où N_1 est normal et bijectif. Puisque N_1 est normal, si $N_1 = U_1 |N_1|$ est une décomposition polaire de N_1 , alors U_1 est unitaire. Soit V_1 un opérateur unitaire dans $B(\ker N)$ et $U = U_1 \oplus V_1$. Ainsi $N = U|N|$ où $U \in B(H \oplus H)$ est unitaire. Par la normalité U_1 commute avec N_1 ainsi U commute avec N . On calcule

$$\begin{aligned} N^{*n} &= (U|N|)^{*n} \\ &= U^{*n}|N|^n \\ &= U^{*2n}(U|N|)^n \\ &= (U^{*2})^n N^n \end{aligned}$$

En projetant sur $H \oplus 0$ on voit que l'assertion (2) est vérifiée.

– (2) \implies (3) Par le théorème spectral [15]

$$U^n = \int_{\partial D} e^{int} dE(t), \quad n \text{ est un nombre entier.}$$

Pour une mesure d'une valeur de projection E définie sur ∂D . Ainsi pour $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} T^{*n} &= P_H U^n P_H T^n \\ &= \left[\int_{\partial D} e^{int} dQ(t) \right] T^n \end{aligned}$$

où $Q(t) = P_H E(t) P_H$ est une mesure des opérateurs positifs sur ∂D .

– (3) \implies (4) Par hypothèse, nous pouvons choisir

$$K_n = \int_{\partial D} e^{int} dQ(t), \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

puis

$$K_n^* = \int_{\partial D} e^{-int} dQ^*(t) = \int_{\partial D} e^{-int} dQ(t), \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Par conséquent

$$L_n = \int_{\partial D} e^{int} dQ(t), \quad \text{pour tout entier } n$$

Pour toute partie finie $\{x_0, \dots, x_M\}$ de H . Soit $\{\Delta_p\}_{p=1}^n$ une partition de ∂D et choisissons $e^{it_p} \in \Delta_p$. Alors pour tout p fixe

$$\sum_{j,k \geq 0}^M e^{ijt_p} e^{-ikt_p} \langle Q(\Delta_p)x_j, x_k \rangle = \left\langle Q(\Delta_p) \sum_{j=0}^M e^{ijt_p} x_j, \sum_{k=0}^M e^{-ikt_p} x_k \right\rangle \geq 0.$$

En sommant sur p et changer l'ordre de sommation, nous obtenons

$$\sum_{j,k \geq 0}^M \sum_{p=1}^n e^{i(j-k)t_p} \langle Q(\Delta_p)x_j, x_k \rangle \geq 0.$$

La somme qui est à l'intérieure est une somme de Riemann pour

$$\int_{\partial D} e^{i(j-k)t} d \langle Q(t)x_j, x_k \rangle.$$

Nous pouvons conclure que

$$\sum_{j,k \geq 0}^M \langle L_{j-k}x_j, x_k \rangle = \sum_{j,k \geq 0}^M \int_{\partial D} e^{i(j-k)t} d \langle Q(t)x_j, x_k \rangle \geq 0.$$

- (4) \implies (5) Pour tout x dans H et un sous-ensemble fini $\{t_0, \dots, t_M\}$ des nombres complexes, on désigné $t_j x$ par x_j et on applique (4) on trouve (5).
- (5) \implies (4) Par suite de Herglotz (voir [?]), l'hypothèse dit que $\{\langle L_n x, x \rangle\}_{n=-\infty}^{\infty}$ est une suite de moment trigonométrique pour une mesure de Borel positif μ_x sur ∂D , dont la variation totale est

$$\langle L_0 x, x \rangle = \|x\|^2$$

Ainsi

$$\langle L_n x, x \rangle = \int_{\partial D} e^{int} d\mu_x(t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

Soit x dans H . Pour chaque borélien $\Delta \subset \partial D$, on définit la forme positive $Q(\Delta)$ par

$$\langle Q(\Delta)x, x \rangle = \int_{\Delta} 1 d\mu_x(t).$$

On peut étendre cette forme à une forme bilinéaire sur H par polarisation. La forme bilinéaire est donc bornée. L'opérateur positif $Q(\Delta)$ est défini et $Q(\Delta)$ est dans $B(H)$. Par polarisation et (2.7), nous avons

$$\langle L_n x, y \rangle = \int_{\partial D} e^{int} d \langle Q(t)x, y \rangle$$

pour x, y dans H . Ainsi

$$\langle T^{*n} x, y \rangle = \langle L_n T^n x, y \rangle = \int_{\partial D} e^{int} d \langle Q(t)T^n x, y \rangle.$$

Ainsi (3) est vérifiée et ainsi (4) doit.

– (4) \implies (1) Soit $\{x_0, \dots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de H . Par (4)

$$\sum_{j,k \geq 0}^n \langle L_{j-k} T^j x_j, T^k x_k \rangle \geq 0.$$

maintenant si $k - j \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle L_{j-k} T^j x_j, T^k x_k \rangle &= \langle T^j x_j, K_{k-j} T^{k-j} T^j x_k \rangle \\ &= \langle T^j x_j, T^{*k-j} T^j x_k \rangle \\ &= \langle T^k x_j, T^j x_k \rangle. \end{aligned}$$

On obtient un résultat similaire lorsque $k - j < 0$. Ainsi

$$0 \leq \sum_{j,k \geq 0}^n \langle L_{j-k} T^j x_j, T^k x_k \rangle = \sum_{j,k \geq 0}^n \langle T^k x_j, T^j x_k \rangle.$$

Il en résulte de ce critère (Bram-Halmos) que T est sous normal [7].

□

Corollaire 1. L'opérateur S est sous normal si et seulement si pour tout x dans une variété linéaire dense dans H , la restriction de S à H_x est sous normal

Démonstration 8. *La nécessité de la condition est triviale.*

Si D dénote la variété linéaire dense dans H donnée dans les hypothèses et $S|_{H_x}$ dénote la restriction de S à H_x .

Si $S|_{H_x}$ est sous normal pour tout $x \in D$, il en est de même $(\lambda - S)|_{H_x}$. Ainsi, sans perte de généralité, nous supposons que S est inversible et

$$(S|_{H_x})^{-1} = S^{-1}|_{H_x}.$$

Fixons x dans D , comme $S|_{H_x}$ est sous normal, il existe des contractions B_n dans $B(H_x)$ de telles sorte que

$$P_{H_x} S^{*n}|_{H_x} = B_n S^n|_{H_x}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Alors

$$P_{H_x} S^{*n} S^{-n}|_{H_x} = B_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Par (5) du théorème 7 appliqué à x et B_n , nous voyons que

$$\left[\langle S^{*j-k} S^{k-j} x, x \rangle \right]_{j,k \geq 0}^n, \quad \text{est définie positive}$$

*pour $n = 0, 1, \dots$, Mais $S^{*n} = (S^{*n} S^{-n}) S^n$, donc (5) du théorème 7 montre que S est sous normal.*

□

2.7.2.2 L'extension normale minimale

Définition 16. *Si S est un opérateur sous normal sur H et N est une extension normale de S à K , alors N est une extension minimale normale de S si K n'a pas de sous-espace propre qui contient H et réduit N .*

Si N est une extension normale de S , $N \in B(K)$, et M est un opérateur normal sur L alors $N \oplus M$ n'est pas une extension normale Minimale de S puisque $K \oplus 0$ Réduit $N \oplus M$ et contient H .

Proposition 3. *si S est sous normal sur H et N est l'extension normale sur K alors N est une extension minimale normale de S si et seulement si*

$$K = \{N^{*i} x : x \in H \quad \text{et} \quad i \geq 0\}$$

Démonstration 9. Si $L = \{N^{*i}x : x \in H \text{ et } i \geq 0\}$. alors L réduit N et $H \subseteq L$. si N est une extension minimale normale de S et $K = L$. Aussi, si M est un sous espace de réduction pour N qui contient H , alors $N^{*n}x \in M$ pour chaque $x \in H$ et $n \geq 0$ c'est-à-d- $L \subseteq M$ si $L = K, N$ est une extension minimale normale de S .

□

Proposition 4. Pour $k = 1, 2$, soit S_k un opérateur sous normal sur H_k et N_k une extension normale minimale de S_k sur l'espace de Hilbert K_k . Si $U : H_1 \rightarrow H_2$ est un isomorphisme de telle sorte que $US_1U^* = S_2$, alors il est un isomorphisme $V : K_1 \rightarrow K_2$ tel que

$$V|_{H_1} = U \text{ et } VN_1V^* = N_2.$$

Démonstration 10. L'idée ici est de définir V sur K_1 par

$$VN_1^{*n}f_1 = N_2^{*n}Uf_1, \quad f_1 \in H_1, \quad \text{et } n \geq 0.$$

Il doit être démontré que cela définit en effet un opérateur qui est un isomorphisme.

Si $f_1, f_2, \dots, f_m \in H_1$ et $n_1, n_2, \dots, n_m \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m N_2^{*n_k} U f_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^m N_2^{*n_k} U f_k, \sum_{j=1}^m N_2^{*n_j} U f_j \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left\langle N_2^{*n_k} U f_k, N_2^{*n_j} U f_j \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left\langle N_2^{n_j} U f_k, N_2^{n_k} U f_j \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left\langle U N_1^{n_j} f_k, U N_1^{n_k} f_j \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left\langle N_1^{n_j} f_k, N_1^{n_k} f_j \right\rangle \\ &= \left\| \sum_{k=1}^m N_1^{*n_k} f_k \right\|^2. \end{aligned}$$

Ceci démontre en même temps que

$$V \left(\sum_{k=1}^m N_1^{*n_k} f_k \right) = \sum_{k=1}^m N_2^{*n_k} U f_k \quad (2.8)$$

est un opérateur bien défini et une isométrie de quelque variétés linéaires de K_1 en K_2 .

Par la proposition (3) et le fait que N_1 et N_2 sont les extensions minimales normales de S_1 et S_2 , V est donc bien défini et s'étend à un isomorphisme $V : K_1 \rightarrow K_2$.

Il s'en suit facilement de (2.8) que

$$V|_{H_1} = U \quad \text{et} \quad VN_1V^* = N_2.$$

□

Convention. S designera toujours un opérateur sous normal agissant sur un espace de Hilbert H et N sera son extension minimale normale agissant sur $K \supseteq H$.

Soit X l'opérateur de H^\perp à H défini par

$$Xx = PNx, \quad x \in H^\perp$$

où P la projection de K à H .

Soit T l'opérateur de H^\perp à H^\perp défini par

$$T = N^*|_{H^\perp}.$$

Si nous écrivons $K = H \oplus H^\perp$, alors N a la représentation matricielle

$$N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Si la matrice N^* est écrite par rapport à $K = H \oplus H^\perp$, il vient

$$N^* = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ X^* & T \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Il en résulte que T est sous normal et N^* est son extension minimale normale.

2.7.3 Opérateurs quasinormaux

Définition 17. un opérateur $S \in B(H)$ est quasinormal si S commute avec S^*S .

Proposition 5. Si $S = UA$ est la décomposition polaire de S , alors S est quasinormal si et seulement si A et U commutent.

Démonstration 11. $A = |S| = \sqrt{(S^*S)}$, U est une isométrie partielle.

1. Si S est quasinormal alors S et S^*S commutent, avec $S^*S = A^2$.

Cela implique, S et A commutent

d'où :

$$\begin{aligned} SA - AS &= 0 \\ &= UAA - AUA \\ &= (UA - AU)A \\ \implies (UA - AU) &= 0 \\ \implies UA &= AU. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Si } UA = AU \implies UAAA &= AUA \\ &= AAUA \\ \implies SA^2 &= A^2S \\ \implies S &\text{ est quasinormal.} \end{aligned}$$

□

Proposition 6. Chaque opérateur quasinormal est sous normal

Démonstration 12. Cas 1 : supposons que $\text{Ker}S = (0)$ si $S = UA$ est la décomposition polaire de S alors U doit être une isométrie. Soit $E = UU^*$ alors E est la projection sur l'espace final de U ainsi $E^\perp U = U^*E^\perp = 0$. (ici $E^\perp = I - E$), si on définit des opérateurs V et B sur $K = H \oplus H$ par

$$V = \begin{pmatrix} U & E^\perp \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

et $N = VB$. comme $UA = AU$ et $U^*A = AU^*$ il est facile de vérifier que N est normal. Comme

$$N = \begin{pmatrix} S & E^\perp A \\ 0 & U^*A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & E^\perp A \\ 0 & S^* \end{pmatrix}$$

il s'ensuit que N laisse $H = H \oplus (0)$ invariant et $N|_H = S$.

Cas 2 : Supposons maintenant que $\text{Ker}S \neq (0)$. ici $\text{Ker}S = L \subseteq \text{Ker}S^*$, comme $S^* = AU^* = U^*A$. Si $S_1 = S|_{L^\perp}$ et $S = S_1 \oplus (0)$ sur $L^\perp \oplus L = H$, $S^*S = S_1^*S \oplus (0)$ et il est facile de voir que S_1 est quasinormal. par la première partie, S_1 est sous normal. S est clairement sous normal.

□

Lemme 3. *Si N est une extension minimale normale de S alors S est quasinormal si et seulement si H est invariant par N^*N*

Démonstration 13. *Si S est quasinormal et $f \in H$ alors*

$$\begin{aligned}
\|S^*Sf\|^2 &= \langle S^*Sf, S^*Sf \rangle \\
&= \langle Sf, SS^*Sf \rangle \\
&= \langle Sf, S^*S^2f \rangle \\
&= \langle S^2f, S^2f \rangle \\
&= \|S^2f\|^2 \\
&= \|N^2f\|^2 \\
&= \|N^*Nf\|^2.
\end{aligned}$$

*Par conséquent $N^*Nf \in H$.*

L'inverse est clair.

□

2.7.4 Opérateurs hyponormaux

Définition 18. *un opérateur T est hyponormal si*

$$T^*T \geq TT^*. \quad (2.11)$$

Proposition 7. *Soit T un opérateur hyponormal. Si T est inversible alors T^{-1} est hyponormal*

Démonstration 14. *Cette preuve utilise le fait que si A est un opérateur inversible positif et $A \geq 1$ alors $A^{-1} \leq 1$.*

Puisque

$$T^*T \geq TT^*$$

et T est inversible alors

$$T^{-1}T^*TT^*T^{-1} \geq T^{-1}TT^*T^{-1} = 1$$

Par conséquent

$$T^*T^{-1}T^{*-1}T \leq 1$$

donc

$$T^{-1}T^{*-1} \leq T^{*-1}T^{-1}.$$

D'où T^{-1} est hyponormal.

□

Proposition 8. Si T un opérateur hyponormal alors

$$\|T^n\| = \|T\|^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Démonstration 15. Si $f \in H$ et $n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} \|T^n f\|^2 &= \langle T^n f, T^n f \rangle \\ &= \langle T^* T^n f, T^{n-1} f \rangle \\ &\leq \|T^* T^n f\| \|T^{n-1} f\| \\ &\leq \|T^{n+1} f\| \|T^{n-1} f\| \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\|.$$

Nous allons maintenant prouver l'égalité par récurrence.

Clairement, il est vrai pour $n = 1$, supposons donc que

$$\|T^k\| = \|T\|^k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

Alors

$$\|T\|^{2n} = \|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| = \|T^{n+1}\| \|T\|^{n-1}$$

d'où

$$\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|$$

L'inégalité inverse est valable pour tous les opérateurs alors

$$\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \Rightarrow \|T^{n+1}\| = \|T\|^{n+1}.$$

Ainsi, pour chaque nombre naturel n , $\|T^n\| = \|T\|^n$

□

Proposition 9. *Chaque opérateur sous normal est hyponormal*

Démonstration 16. *Soit S un opérateur sous normal et N son extension minimale normale.*

Si nous écrivons N comme dans (2.9), alors

$$0 = N^*N - NN^* = \begin{pmatrix} S^*S & S^*X \\ X^*S & X^*X + TT^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} SS^* + XX^* & XT \\ T^*X^* & T^*T \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$0 = S^*S - SS^* - XX^*, \quad \text{ou} \quad S^*S - SS^* = XX^* \geq 0.$$

□

En généralisant le concept de normalité, plusieurs auteurs ont introduit les classes des opérateurs non normaux.

Notre nouvelle classe occupe l'endroit indiqué dans le schéma suivant et les inclusions sont tous appropriés.

opérateur normal \subset opérateur quasinormal \subset opérateur sous normal \subset opérateur hyponormal.

2.8 Propriété de Fuglède-Putnam

Définition 19. *Soient $A, B \in B(H)$, on dit que la paire (A, B) satisfait $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglède-Putnam), si $AC = CB$ où $C \in B(H)$ implique $A^*C = CB^*$.*

Lemme 4. *Si S est un opérateur auto adjoint dans $B(H)$, alors les deux opérateurs e^{iS} et e^{-iS} sont des opérateurs unitaires.*

Démonstration 17. *Soit S un opérateur auto adjoint dans $B(H)$, alors on a*

$$(e^{iS})^* = e^{-iS^*} = e^{-iS},$$

donc

$$(e^{iS})^* e^{iS} = e^{-iS} e^{iS} = I \quad \text{et} \quad e^{iS} (e^{iS})^* = e^{iS} e^{-iS} = I$$

de même on obtient

$$(e^{-iS})^* e^{-iS} = e^{iS} e^{-iS} = I \quad \text{et} \quad e^{-iS} (e^{-iS})^* = e^{-iS} e^{iS} = I$$

sont des opérateurs unitaires.

□

Théorème 8. Soient A et B deux opérateurs normaux dans $B(H)$, si $AX = XB$ pour $X \in B(H)$, alors $A^*X = XB^*$.

Démonstration 18. Soient A et B deux opérateurs normaux dans $B(H)$, tels que $AX = XB$ pour $X \in B(H)$, on peut démontrer par récurrence que $A^n X = X B^n$ pour tout entier naturel n . D'où on peut avoir facilement

$$e^{i\bar{\lambda}A} X = X e^{i\bar{\lambda}B},$$

pour tout nombre complexe λ , et par conséquent

$$X = e^{i\bar{\lambda}A} X e^{-i\bar{\lambda}B},$$

On définit la fonction f par

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*},$$

en combinant cette fonction par la forme de X donnée par

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} e^{i\bar{\lambda}A} X e^{-i\bar{\lambda}B} e^{-i\lambda B^*},$$

donc par la normalité de A et B on peut écrire

$$f(\lambda) = e^{i(\lambda A^* + \bar{\lambda}A)} X e^{-i(\bar{\lambda}B + \lambda B^*)},$$

On a

$$(\lambda A^* + \bar{\lambda}A)^* = \bar{\lambda}A + \lambda A^* \quad \text{et} \quad (\bar{\lambda}B + \lambda B^*)^* = \lambda B^* + \bar{\lambda}B,$$

alors $\bar{\lambda}A + \lambda A^*$ et $\lambda B^* + \bar{\lambda}B$, sont auto adjoints, donc d'après le lemme précédent $e^{i(\lambda A^* + \bar{\lambda}A)}$ et $e^{-i(\bar{\lambda}B + \lambda B^*)}$, sont unitaires.

$f(\lambda)$ est analytique et bornée, pour tout nombre complexe λ , donc le théorème de Liouville nous assure que $f(\lambda)$ est constante.

On peut prendre donc $f(\lambda) = f(0) = X$, donc $e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*} = X$, d'où $e^{i\lambda A^*} X = X e^{i\lambda B^*}$, et par conséquent $A^*X = XB^*$.

□

Chapitre 3

Spectre étendu des opérateurs

3.1 Généralités sur le spectre d'un opérateur

Dans cette section, nous développons la théorie spectrale d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach complexe. Les concepts de spectre et résolvante sont introduits et les différentes parties du spectre sont étudiées.

Définition 20. Soit $T \in B(X)$. L'ensemble résolvante $\rho(T)$ de T est l'ensemble des nombres complexes λ pour les quels $\lambda I - T$ est inversible dans l'algèbre de Banach $B(X)$.

Définition 21. Le spectre $\sigma(T)$ de T est défini comme $\mathbb{C}/\rho(T)$.

Définition 22. La fonction

$$\lambda \longrightarrow (\lambda I - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T)$$

est appelée résolvante de T .

Théorème 9. Soit $T \in B(X)$. L'ensemble résolvante $\rho(T)$ est ouvert. Aussi la fonction $\lambda \longrightarrow (\lambda I - T)^{-1}$ est analytique dans $\rho(T)$.

Démonstration 19. Soit λ un point fixe dans $\rho(T)$ et μ est un nombre complexe avec $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$.

Nous montrons que $\lambda + \mu \in \rho(T)$. Considérons la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k (\lambda I - T)^{-(k+1)}.$$

Comme $\|\mu(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$ cette série converge pour la norme de $B(X)$.

Désignons sa somme par $S(\mu)$ alors

$$[(\lambda + \mu)I - T] S(\mu) = (\lambda I - T)S(\mu) + \mu S(\mu) = I,$$

$$S(\mu) [(\lambda + \mu)I - T] = S(\mu)(\lambda I - T) + \mu S(\mu) = I.$$

Il en résulte que $(\lambda + \mu) \in \rho(T)$ et la fonction $\mu \rightarrow S(\mu) = [(\lambda + \mu)I - T]^{-1}$ est analytique au point $\mu = 0$.

□

Corollaire 2. Soit $T \in B(X)$, Si $d(\lambda)$ est la distance du point λ au spectre $\sigma(T)$ puis

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(\lambda)}, \quad \lambda \in \rho(T).$$

Donc $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \rightarrow \infty$ comme $d(\lambda) \rightarrow 0$, et l'ensemble résolvante est le domaine naturel d'analyticité de la résolvante.

Démonstration 20. Au cours de prouver le théorème (9), on a montré que, si $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$ alors $(\lambda + \mu) \in \rho(T)$.

Par conséquent

$$d(\lambda) \geq \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}.$$

□

Théorème 10. Soit $T \in B(X)$, Alors $\sigma(T)$ est compact et non vide.

Démonstration 21. Pour $|\lambda| > \|T\|$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} T^n / \lambda^{n+1}$ converge pour la norme de $B(X)$. Soit $S(\lambda)$ sa somme, alors

$$(\lambda I - T)S(\lambda) = S(\lambda)(\lambda I - T) = I.$$

Par conséquent

$$S(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}, \quad (|\lambda| > \|T\|)$$

Il en résulte que $\sigma(T)$ est borné. D'après le théorème (9), $\sigma(T)$ est fermé. D'où $\sigma(T)$ est compact. Il reste à montrer que le spectre est non vide. Si $\sigma(T) = \emptyset$, alors la résolvante de T est une fonction entière. Comme $(\lambda I - T)^{-1}$ est analytique, il en résulte du théorème de Liouville que $(\lambda I - T)^{-1}$ est une constante. Par conséquent, le coefficient de λ^{-1} dans la série de Laurent $\sum_{n=0}^{\infty} T^n / \lambda^{n+1}$ disparaît, de sorte que $I = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $X \neq \{0\}$. Ce qui complète la démonstration.

□

Définition 23. Soit $T \in B(X)$, Le rayon spectral $r(T)$ de T est défini par

$$r(T) = \text{Sup} \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Proposition 10. Soit $T \in B(X)$, L'identité suivante, connue sous le nom équation de la résolvante, est valable pour toutes les paires de points $\lambda, \mu \in \rho(T)$.

$$(\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1}.$$

Démonstration 22. Notons que

$$(\mu I - T)(\lambda I - T) \left\{ (\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1} \right\} = (\mu I - T) - (\lambda I - T) = (\mu - \lambda)I,$$

pour compléter la démonstration, on multiplie les deux côtés de cette équation par $(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1}$.

□

Nous introduisons maintenant quelques sous ensembles importants du spectre.

Définition 24. Soit $T \in B(X)$

– Le spectre ponctuel de T est l'ensemble

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - T) \text{ n'est pas injectif}\}.$$

– le spectre continu de T est l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda I - T \text{ est injectif, } \overline{(\lambda I - T)X} = X \quad \text{mais} \quad (\lambda I - T)X \neq X \right\}.$$

– le spectre résiduel de T est l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - T) \text{ est injectif mais } \overline{(\lambda I - T)X} \neq X \right\}.$$

Clairement $\sigma_p(T), \sigma_c(T)$ et $\sigma_r(T)$ sont disjoints et

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, on dit que λ est une valeur propre de T , dans ce cas, il existe un vecteur non nul x dans X tel que $Tx = \lambda x$. Un tel vecteur est appelé vecteur propre correspondant à la valeur propre λ de T .

Proposition 11. Soit $T \in B(X)$ alors

$$\sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(T^*) \subseteq \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T).$$

Démonstration 23. Soit $\lambda \in \sigma_r(T)$. Alors $(\lambda I - T)$ est injectif mais $\overline{(\lambda I - T)X} \neq X$. Par conséquent, il existe f dans X^* avec $f \neq 0$ tel que

$$\langle (\lambda I - T)x, f \rangle = 0, \quad x \in X,$$

C'est à dire

$$\langle x, (\lambda I^* - T^*)f \rangle = 0, \quad x \in X.$$

Par conséquent $T^*f = \lambda f$ et donc $\lambda \in \sigma_p(T^*)$.

Maintenant, pour $\lambda \in \sigma_p(T^*)$. Il existe une valeur non nulle $f \in X^*$ tel que

$$\langle x, (\lambda I^* - T^*)f \rangle = 0, \quad x \in X,$$

C'est à dire

$$\langle (\lambda I - T)x, f \rangle = 0, \quad x \in X,$$

Si $(\lambda I - T)$ n'est pas injectif, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Si $(\lambda I - T)$ est injectif, la dernière équation montre que $f(y) = 0$ pour tous $y \in \overline{(\lambda I - T)X}$ et donc $\overline{(\lambda I - T)X} \neq X$. Dans ce cas, $\lambda \in \sigma_r(T)$. Ceci termine la démonstration. □

Définition 25. Le spectre approché de $T \in B(X)$ est l'ensemble

$$\sigma_a(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset X; \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x_n = 0 \right\}.$$

Le résultat suivant résume les principales propriétés du spectre ponctuel et approché.

Théorème 11. Soit $T \in B(X)$

1. L'ensemble $\sigma_a(T)$ est un sous-ensemble non vide fermé du spectre de T .
2. La frontière de $\sigma(T)$ est contenu dans $\sigma_a(T)$.
3. $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)$.

Démonstration 24. Nous montrons d'abord que $\sigma_a(T) \subseteq \sigma(T)$.

Supposons $\lambda \in \rho(T)$.

Alors $(\lambda I - T)$ est borné et inversible, ainsi

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)x\| \\ &\leq \|(\lambda I - T)^{-1}\| \|(\lambda I - T)x\|, \quad x \in X \end{aligned}$$

Cela veut dire que

$$\|(\lambda Ix - Tx)\| \geq \epsilon \|x\|, \quad x \in X$$

où $\epsilon = \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1} > 0$, et donc $\lambda \in \mathbb{C}/\sigma_a(T)$.

Par conséquent $\sigma_a(T) \subseteq \sigma(T)$.

Si $\lambda_0 \in \mathbb{C}/\sigma_a(T)$, nous avons montré qu'il y a $\epsilon > 0$ tel que $\|(\lambda_0 Ix - Tx)\| \geq \epsilon$ pour tous les vecteurs unitaires x dans X .

Par conséquent si $\|x\| = 1$ et $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\epsilon}{2}$ alors

$$\|(\lambda Ix - Tx)\| \geq \|(\lambda_0 Ix - Tx)\| - |\lambda - \lambda_0| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

de sorte que $\lambda \in \mathbb{C}/\sigma_a(T)$.

Et par conséquent $\sigma_a(T)$ est fermé.

Ensuite, si λ_0 est un point sur la frontière de $\sigma(T)$ et soit $\epsilon > 0$ donné. Alors nous pouvons trouver $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\epsilon}{2}$.

Par Corollaire (2)

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(\lambda)} \geq \frac{2}{\epsilon}.$$

où $d(\lambda)$ représente la distance de λ au spectre de T . Ainsi, on peut choisir $x \in X$ tel que

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \|(\lambda I - T)^{-1}x\| \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Si $x_0 = \|(\lambda I - T)^{-1}x\|^{-1} (\lambda I - T)^{-1}x$ alors $\|x_0\| = 1$ et

$$\|(\lambda_0 I - T)x_0 - (\lambda I - T)x_0\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'où il résulte que

$$\|(\lambda_0 I - T)x_0\| \leq \|(\lambda_0 I - T)x_0 - (\lambda I - T)x_0\| + \|(\lambda I - T)x_0\|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\|x\|}{\|(\lambda I - T)^{-1}x\|} < \frac{3\epsilon}{2}.$$

Or $\epsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte que $\lambda_0 \in \sigma_a(T)$.

Maintenant, d'après le théorème (10), $\sigma(T)$ est non vide. Comme tout sous ensemble compact non vide de \mathbb{C} a une frontière non vide, $\sigma_a(T)$ est non vide. La preuve de (1) et (2) est terminée.

Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ il existe un x dans X avec $\|x\| = 1$ et $Tx = \lambda x$. Donc $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)$ et (3) est prouvée.

□

3.2 Spectre étendu d'un opérateur

Définition 26. On dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur $T \in B(H)$, s'il existe un opérateur $X \in B(H) / \{0\}$ tel que $TX = \lambda XT$. Dans ce cas, l'opérateur X est dit opérateur propre étendu de T associé à λ .

On appelle spectre étendu de T l'ensemble de toutes les valeurs propres étendues de T , et on le note par $\sigma_{ext}(T)$. Notons aussi par $E_{ext}(T, \lambda)$ (ou simplement par $E_{ext}(\lambda)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le sous-espace propre étendu associé à $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$.

Remarquons de plus que 1 appartient à $\sigma_{ext}(T)$ pour tout $T \in B(H)$, avec $X = I$ comme opérateur propre étendu associé.

Théorème 12. Soient A, B deux opérateurs de $B(H)$ tels que

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset.$$

Alors $X = 0$ est l'unique solution de l'équation opératorielle

$$AX - XB = 0.$$

Démonstration 25. Pour démontrer ce théorème, on va considérer l'équation opératorielle suivante $AX - XB = Q$, avec $Q \in B(H)$. Par hypothèse, il existe un ensemble relativement compact D dont la frontière ∂D forme une courbe de Jordan, et tel que $\sigma(B) \subset D$ et $\sigma(A) \cap D = \emptyset$. Supposons maintenant que X soit une solution de l'équation considérée, et soit $z \in \partial D$, i.e. $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$. On a donc l'équation

$$(A - zI)X + X(zI - B) = Q,$$

qui entraîne

$$(A - zI)^{-1}X + X(zI - B)^{-1} = (A - zI)^{-1}Q(zI - B)^{-1} \quad (3.1)$$

D'après les propriétés du calcul fonctionnel de Dunford [20] on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} (A - zI)^{-1}X dz = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} X(zI - B)^{-1} dz = X$$

Ainsi, (3.1) implique :

$$\frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial D} R_z(A)QR_z(B) dz = X$$

En posant $Q = 0$, on obtient le résultat.

□

En remplaçant dans le dernier théorème $A = T, B = \lambda T$, on obtient de manière directe la proposition suivante.

Proposition 12. [5] Soit $T \in B(H)$, alors

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

En particulier, si $\sigma(T) = \{\alpha\}$, avec $\alpha \neq 0$, alors $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$.

Lemme 5. Supposons que $T \in B(H)$ soit un opérateur quasinilpotent, alors

$$\sigma_{ext}(\alpha I + T) = \{1\}, \forall \alpha \in \mathbb{C} / \{0\}.$$

3.2.1 Relation avec le spectre ponctuel

La proposition suivante donne une relation entre le spectre étendu d'un opérateur et son spectre ponctuel.

Proposition 13. [5] Soit $T \in B(H)$. Si l'on note par $\sigma_p(T)$ le spectre ponctuel de T , alors on a

$$\left\{ \frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in \sigma_p(T), \beta \in \sigma_p(T^*), \beta \neq 0 \right\} \subset \sigma_{ext}(T)$$

Démonstration 26. Supposons que $\alpha \in \sigma_p(T)$ et que $\beta \in \sigma_p(T^*)$, alors il existe $x, y \in H / \{0\}$ tels que $Tx = \alpha x$ et $T^*y = \beta y$.

Si l'on définit l'opérateur $X = x \otimes y$ par

$$Xz = (x \otimes y)z = \langle z, y \rangle x, \quad \forall z \in H,$$

On a alors

$$TXz = \langle z, y \rangle Tx = \alpha \langle z, y \rangle x,$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta}XTz &= \frac{\alpha}{\beta} \langle Tz, y \rangle x \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \langle z, T^*y \rangle x = \alpha \langle z, y \rangle x, \end{aligned}$$

Alors que X est un vecteur propre étendu pour T associé à la valeur $\frac{\alpha}{\beta}$. Donc $\frac{\alpha}{\beta} \in \sigma_{ext}(T)$.

□

3.2.2 Cas d'opérateurs inversibles

Remarquons tout d'abord que 0 ne peut pas être valeur propre étendue d'un opérateur inversible. Dans [29], A. Lambert a montré que le spectre étendu d'un tel opérateur est situé dans un anneau fermé et borné de centre 0. Dans la proposition suivante, on donne en plus les bornes de cet anneau.

Proposition 14. Soit $T \in B(H)$ inversible, et posons $a := \|T\| \|T^{-1}\|$. Alors

1. $\sigma_{ext}(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{a} \leq |z| \leq a\} = A_{\frac{1}{a}, a}$
2. Si $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ avec $|\lambda| \neq 1$. Alors il existe un entier $N > 1$ tel que tout produit de N éléments de $E_{ext}(\lambda)$ est nul. En particulier, tout élément de $E_{ext}(\lambda)$ est un opérateur nilpotent de rang N au plus.

Démonstration 27. 1) Comme T est inversible, il existe une constante $c > 0$ ($c = \|T^{-1}\|^{-1}$) telle que pour tout $x \in H$, $\|Tx\| \geq c \|x\|$.

Soient $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ et $X \in E_{ext}(\lambda) / \{0\}$, alors

$$TX = \lambda XT.$$

Il en résulte que

$$c \|Xx\| \leq \|TXx\| = |\lambda| \|XTx\| \leq |\lambda| \|X\| \|Tx\|, \forall x \in H.$$

Il s'en suit que

$$c \|X\| \leq |\lambda| \|X\| \|T\|,$$

de fait, $|\lambda| \geq \frac{1}{a}$.

Quant à la deuxième inégalité, si $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$, ($\lambda \neq 0$) alors $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ext}(T^{-1})$.

On obtient d'une manière analogue

$$\left| \frac{1}{\lambda} \right| \geq \frac{1}{a}$$

ou bien $|\lambda| \leq a$. La première assertion est alors prouvée.

2) Soit $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ tel que $|\lambda| \neq 1$, on peut alors trouver un entier $N > 1$ tel que $\lambda^N \notin A_{a, \frac{1}{a}}$ et $\lambda^{N-1} \in A_{a, \frac{1}{a}}$. Soient $X_1, \dots, X_N \in E_{ext}(\lambda) / \{0\}$, alors

$$TX_1 \dots X_N = \lambda^N X_1 \dots X_N T,$$

ce qui implique forcément $X_1 \dots X_N = 0$

□

3.2.3 Espace de Hilbert de dimension finie

Dans ce paragraphe on décrit complètement le spectre étendu d'un opérateur agissant sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie.

Théorème 13. [5] Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H de dimension finie. Alors

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}$$

Démonstration 28. Considérons dans la preuve les deux cas suivants : Supposons dans le premier cas que T ne soit pas inversible, alors le noyau de T et celui de T^* ne sont pas réduits à $\{0\}$. On peut donc considérer un opérateur $X \neq 0$ de $\ker T^*$ dans $\ker T$. Posons ensuite $X' = XP$, où

P est le projecteur orthogonal de H sur $\ker T^*$ ($X' \neq 0$).

Par conséquent

$$TX' = \lambda X'T = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

d'où, $\sigma_{\text{ext}}(T) = \mathbb{C}$. De plus, et comme T n'est pas inversible, alors $0 \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. On en déduit que

$$\sigma_{\text{ext}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} = \mathbb{C}.$$

Supposons maintenant que T soit inversible, i.e. $0 \notin \sigma(T)$ Étant donné $\lambda \in \mathbb{C}$, il suffit de montrer que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} \subset \sigma_{\text{ext}}(T).$$

Supposons pour cela que $\beta \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$, il existe donc un vecteur propre $a \in H$ tel que $Ta = \beta a$ (forcément $\beta \neq 0$, et par conséquent $\lambda \neq 0$,). De même, et vu que $(\beta/\lambda) \in \sigma(T)$, il s'en suit que $\overline{(\beta/\lambda)} \in \sigma(T^*)$, il existe alors un vecteur propre $b \in H$ tel que $T^*b = \overline{(\beta/\lambda)}b$. Posons finalement $X = a \otimes b$, on vérifie alors facilement l'égalité $TX = \lambda XT$, avec $X \neq 0$. Ce qui entraîne $\lambda \in \sigma_{\text{ext}}(T)$.

□

Corollaire 3. Soit T un opérateur linéaire agissant sur un espace de Hilbert de dimension finie, alors :

1. $\sigma_{\text{ext}}(T) = \{1\}$ si et seulement si $\sigma(T) = \{\alpha\}$ avec $\alpha \neq 0$.
2. $\sigma_{\text{ext}}(T) = \mathbb{C}$ si et seulement si T n'est pas inversible.
3. Si T est inversible, alors $\sigma_{\text{ext}}(T) = \{\alpha/\beta : \alpha, \beta \in \sigma(T)\}$.

3.2.4 Cas d'opérateurs avec spectre ponctuel riche

Définition 27. On dit qu'un opérateur T sur un espace de Banach complexe admet une spectre ponctuel riche qui vérifie int $\sigma_p(T) \neq \emptyset$ et pour toute disque ouvert $D \subseteq \sigma_p(T)$ la famille de vecteurs propres

$$\bigcup_{z \in D} \ker(T - z) \tag{3.2}$$

est un ensemble total.

Nous allons donner deux exemples d'opérateurs avec spectre ponctuel riche : l'opérateur de Cesàro continu dans le chapitre (4) et l'adjoint de l'opérateur de Cesàro discret dans le chapitre (5).

Théorème 14. [28] *Supposons qu'un opérateur T sur un espace de Banach complexe dispose un spectre ponctuel riche.*

Si λ est une valeur propre étendue pour T alors nous avons

$$\lambda \cdot \text{int}\sigma_p(T) \subseteq \overline{\sigma_p(T)}. \quad (3.3)$$

Démonstration 29. *Soit X un opérateur propre étendu de T correspondant à la valeur propre étendue λ , c'est $X \neq 0$ et $TX = \lambda XT$.*

Soit $z \in \text{int}\sigma_p(T)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D(z, \frac{1}{n}) \subseteq \sigma_p(T)$.

Puisque $X \neq 0$ et T ont des spectres ponctuels riches, il existe

$z_n \in D(z, \frac{1}{n})$ et $f_n \in \ker(T - z_n) \setminus \{0\}$ tel que $Xf_n \neq 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} TXf_n &= \lambda XTf_n \\ &= \lambda z_n Xf_n \end{aligned}$$

et comme $Xf_n \neq 0$, Ceci veut dire que $\lambda z_n \in \sigma_p(T)$. En passant au limite quand $n \rightarrow \infty$ on obtient $\lambda z \in \overline{\sigma_p(T)}$.

□

Théorème 15. *Soit T un opérateur linéaire borné avec spectre ponctuel riche de telle sorte que $\sigma_p(T) = D(r, r)$ pour certains $r > 0$. Si λ est une valeur propre étendue pour T alors λ est réel et $0 < \lambda \leq 1$.*

$D(r, r)$ est le disque avec le centre $(r, 0)$ et le rayon r dans \mathbb{R}^2 .

Démonstration 30. *Soit $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Nous devons montrer que μ est réelle et $\mu \geq 1$. Tout d'abord, considérons le demi-plan ouvert*

$$\Omega_r = \left\{ w \in \mathbb{C} : \text{Re}w > \frac{1}{2r} \right\}$$

et notons que $z \in D(r, r)$ si et seulement si $\frac{1}{z} \in \Omega_r$. D'après le théorème (14), nous avons $\mu w \in \overline{\Omega_r}$ pour chaque $w \in \Omega_r$. Cela signifie que l'application $\varphi(w) = \mu w$ transforme Ω_r en $\overline{\Omega_r}$ et il résulte de continuité de φ qu'il transforme le demi-plan fermé $\overline{\Omega_r}$ en lui-même. Maintenant commençons par un point $w \in \Omega_r \cap \mathbb{R}$ et on fait les itérations pour obtenir une suite de points $(\mu^n w)$ dans $\overline{\Omega_r}$, pour que $\text{Re}(\mu^n w) \geq \frac{1}{2r}$, ou en d'autres termes,

$$\text{Re} \left[\left(\frac{\mu}{|\mu|} \right)^n \right] \geq \frac{1}{2rw |\mu|^n} > 0.$$

Enfin, on écrit $\mu = |\mu|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ pour certains $0 \leq \theta < 2\pi$. Notons que $\cos(n\theta) > 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et cela ne peut se produire si $\theta = 0$. Cela montre que μ est réel. Il est clair que $\mu \geq 1$ parce que si $\mu < 1$ alors l'image de φ extérieur $\overline{\Omega_r}$, par exemple

$$\varphi\left(\frac{1}{2r}\right) = \frac{\mu}{2r} < \frac{1}{2r}.$$

et ceci est une contradiction.

□

Lemme 6. Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach complexe E et supposons qu'il existe une application analytique $h : \text{int}\sigma_p(T) \rightarrow E$ avec $h(z) \in \ker(T - z) \setminus \{0\}$ pour tous $z \in \text{int}\sigma_p(T)$ et de telle sorte que $\{h(z) : z \in \text{int}\sigma_p(T)\}$ est un sous-ensemble total de E . Alors T a un spectre ponctuel riche.

Démonstration 31. Soit D un disque ouvert contenu dans $\sigma_p(T)$ et soit $g^* \in E^*$ tel que $\langle h(z), g^* \rangle = 0$ pour tout $z \in D$. Nous devons montrer que $g^* = 0$. Nous considérons la fonction analytique $\varphi : \text{int}\sigma_p(T) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(z) = \langle h(z), g^* \rangle.$$

Nous avons par hypothèse que φ disparaît sur D . Ensuite, il découle du principe de prolongement analytique que φ disparaît sur $\text{int}\sigma_p(T)$. Comme la famille de vecteurs propres $\{h(z) : z \in \text{int}\sigma_p(T)\}$ est un ensemble total, il en résulte que $g^* = 0$.

□

Nous terminons cette section avec une formulation plus générale du théorème (14)

Théorème 16. Soit T, S deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe, et supposons qu'il existe un opérateur X qui entrelace T, S , qui est $X \neq 0$ et $XT = SX$.

Si T a un spectre ponctuel riche; alors

$$\text{int}\sigma_p(T) \subseteq \overline{\sigma_p(S)}.$$

Démonstration 32. Soit $z \in \text{int}\sigma_p(T)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D(z, \frac{1}{n}) \subseteq \sigma_p(T)$. Comme $X \neq 0$ et puisque T a un spectre ponctuel riche, il existe $z_n \in D(z, \frac{1}{n})$ et $f_n \in \ker(T - z)/\{0\}$ telle que $Xf_n \neq 0$. Par conséquent

$$SXf_n = XTf_n = z_nXf_n$$

et comme $Xf_n \neq 0$, cela signifie que $z_n \in \sigma_p(S)$. En passant au limite quand $n \rightarrow \infty$ on obtient $z \in \overline{\sigma_p(S)}$.

□

Notons que le théorème (14) devient un cas particulier du théorème (16) puisque λ est une valeur propre étendue pour T si et seulement s'il existe un opérateur non nul qui entrelace λT et T .

Chapitre 4

Valeur et opérateur propres étendus pour L'opérateur de Cesàro continu

Maintenant, nous nous concentrons sur les valeurs propres étendues et opérateurs propres étendus pour l'opérateur de Cesàro C_1 définis sur un espace de Lebesgue $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ par l'expression (4.1). En plus on va essayer de prouver certaines propriétés

4.1 L'opérateur de Cesàro continu

Définition 28. *L'opérateur de Cesàro C_1 est défini sur les espaces de Banach complexes $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ par l'expression*

$$(C_1 f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \quad (4.1)$$

Leibowitz [30] a montré que C_1 est en effet un opérateur borné sur $L^p([0, 1])$ et a calculé son spectre et son spectre ponctuel.

Théorème 17. *l'opérateur de Cesàro C_1 défini sur un espace de Lebesgue $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ par (4.1) alors C_1 est un opérateur linéaire borné sur $L^p([0, 1])$. Le spectre de C_1 est le disque fermé*

$$D_p = \left\{ \lambda : \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \geq \frac{p-1}{p} \right\}.$$

Chaque valeur propre de C_1 a multiplicité 1 et le spectre ponctuel de C_1 est l'intérieur de D_p

Démonstration 33. On sait que l'opérateur de Cesàro continu C_∞ défini sur les espaces de Banach complexes $L^p([0, \infty[)$ par

$$(C_\infty f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \quad (4.2)$$

Par l'inégalité de Hardy pour les intégrales [23], si $y \in L^p([0, \infty[)$ alors

$$C_\infty y \in L^p([0, \infty[) \quad \text{et} \quad \|C_\infty y\|_p < \frac{p}{p-1} \|y\|_p$$

Par conséquent C_∞ est un opérateur borné sur $L^p([0, \infty[)$, et puisque la constante est le meilleur possible

$$\|C_\infty\|_p = \frac{p}{p-1}.$$

De cela, il résulte que C_1 est un opérateur borné sur $L^p([0, 1])$ à norme au plus $\frac{p}{p-1}$.

Car si $f \in L^p([0, 1])$ et $\tilde{f}(t) = f(t)$ ($0 < t < 1$), $\tilde{f}(t) = 0$ ($t \geq 1$) alors

$$\begin{aligned} \|C_1 f\|_p &= \left(\int_0^1 |C_\infty \tilde{f}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|C_\infty \tilde{f}\|_p \\ &\leq \frac{p}{p-1} \|\tilde{f}\|_p = \frac{p}{p-1} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Nous observons que si $f \in L^p([0, 1])$, alors $f \in L^1([0, 1])$ et donc $C_1 f$ est une fonction continue sur $[0, 1]$. En particulier, l'image de C_1 est un sous espace propre de $L^p([0, 1])$, donc 0 appartient au spectre de C_1 .

Si $\lambda \neq 0$ et $C_1 f = \lambda f$, il en résulte que f est continue et donc par le théorème fondamental du calcul, f est différentiable.

En différenciant la relation

$$\lambda x f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Nous obtenons

$$\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0.$$

Ceci est une équation différentielle d'Euler de premier ordre et donc ses solutions ont la forme

$$f(x) = kx^\alpha$$

où α est un scalaire complexe. Nous trouvons

$$\lambda \alpha + (\lambda - 1) = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1}{\lambda} - 1.$$

Ainsi, considéré comme une application de l'espace des fonctions intégrables à l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, C_1 a tout nombre non nul comme une valeur propre simple.

Comme

$$x^\alpha \in L^p([0, 1]) \quad \text{si seulement si} \quad \operatorname{Re}(\alpha p) > -1,$$

$$x^{\frac{1}{\lambda}-1} \in L^p([0, 1]) \quad \text{si seulement si} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) > \frac{p-1}{p}$$

Ainsi, le spectre ponctuel de C_1 est l'intérieur de D_p et chaque valeur propre de C_1 a multiplicité géométrique 1.

Nous observons que la condition

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \geq \frac{p-1}{p},$$

est équivalent à la condition

$$|\lambda|^2 \leq \frac{p}{p-1} \operatorname{Re}\lambda,$$

$q = \frac{p}{p-1}$ est l'indice conjugué à p , donc

$$|\lambda|^2 \leq q \operatorname{Re}\lambda,$$

de façon que D_p est le disque avec le centre $(\frac{q}{2}, 0)$ et le rayon $\frac{q}{2}$ dans \mathbb{R}^2 .

□

4.2 Valeur et opérateur propres étendus pour C_1 sur les espaces de Lebesgue.

Dans [28], les auteurs ont montré que chaque $\lambda \in]0, 1]$ est une valeur propre étendue pour C_1 sur $L^p([0, 1])$ et qu'un certain opérateur de composition pondéré est un opérateur propre étendu correspondant.

Théorème 18. *Si $0 < \lambda \leq 1$ alors λ est une valeur propre étendue pour l'opérateur de Cesàro C_1 on $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition pondéré $X_0 \in B(L^p[0, 1])$ défini par*

$$(X_0 f)(x) = x^{(1-\lambda)/\lambda} f(x^{1/\lambda}), \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (4.3)$$

Démonstration 34. *Tout d'abord, montrons que X_0 est un opérateur linéaire borné.*

Nous avons pour chaque $f \in L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(X_0 f)(x)|^p dx &= \int_0^1 x^{p(1-\lambda)/\lambda} |f(x^{1/\lambda})|^p dx \\ &= \lambda \int_0^1 y^{(p-1)(1-\lambda)} |f(y)|^p dy \leq \lambda \int_0^1 |f(y)|^p dy, \end{aligned}$$

donc X_0 est bornée sur $L^p([0, 1])$ avec $\|X_0\| \leq \lambda^{1/p}$.

Maintenant, montrons que X_0 est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et notez que $X_0 x^n = x^{(n+1-\lambda)/\lambda}$, pour que

$$\begin{aligned} C_1 X_0 x^n &= C_1 x^{(n+1-\lambda)/\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{n+1} x^{(n+1-\lambda)/\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{n+1} X_0 x^n \\ &= \lambda X_0 C_1 x^n \end{aligned}$$

et comme le sous-espace linéaire $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de $L^p([0, 1])$, il en résulte que $C_1 X_0 = \lambda X_0 C_1$, i.e X_0 est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ .

□

Notre prochain objectif est de montrer que si λ est une valeur propre étendue de l'opérateur de Cesàro continu $C_1 \in B(L^p[0, 1])$, alors λ est réel et $0 < \lambda \leq 1$.

Tout d'abord, nous montrons que C_1 a un spectre ponctuel riche.

Soit $1 < p, q < \infty$ un couple d'indices conjugués, qui est,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Leibowitz [30] a prouvé le résultat suivant sur le spectre ponctuel de C_1 .

Lemme 7. *Le spectre ponctuel de l'opérateur de Cesàro C_1 sur $L^p([0, 1])$ est le disque ouvert $D(q/2, q/2)$. Par ailleurs, chaque $z \in D(q/2, q/2)$ est une valeur propre simple de C_1 et une fonction propre correspondante est donnée par*

$$h_z(x) = x^{\frac{(1-z)}{z}}.$$

Théorème 19. [37] Soit $1 < p < \infty$ et soit (r_n) une suite de nombres réels distincts supérieurs à $-1/p$. Le sous-espace linéaire $\{X^{r_0}, X^{r_1}, \dots, X^{r_n}, \dots\}$ est dense dans $L^p([0, 1])$ si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n + 1/p}{(r_n + 1/p)^2 + 1} = \infty \quad (4.4)$$

Théorème 20. [28] L'opérateur de Cesàro fini continu C_1 sur $L^p([0, 1])$ a un spectre ponctuel riche .

Démonstration 35. Notez que $\sigma_p(C_1) = D(q/2, q/2)$ est ouvert et connecté. En outre, l'application $h : \sigma_p(C_1) \rightarrow L^p([0, 1])$ défini par

$$h(z)(x) = x^{(1-z)/z}$$

est analytique et $h(z) \in \ker(C_1 - z) \setminus \{0\}$. Il est une conséquence standard du théorème de Muntz (19) que la famille de fonctions propres $\{h(z) : z \in D(q/2, q/2)\}$ est totale dans $L^p([0, 1])$. En effet, il suffit de considérer une suite de nombres réels distincts (z_n) avec $q/2 < z_n < q$ et telle que $\lim z_n = q$ comme $n \rightarrow \infty$, étant donné que la séquence d'exposants $r_n = (1 - z_n)/z_n$ satisfait clairement la condition (4.4). Le résultat suit maintenant du lemme (6).

□

Corollaire 4. Si λ est une valeur propre étendue pour C_1 sur $L^p([0, 1])$, puis λ est réel et $0 < \lambda \leq 1$.

Démonstration 36. Ceci est une conséquence du théorème (15) maintenant nous savons que C_1 a un spectre ponctuel riche et que son spectre ponctuel est le disque ouvert $D(q/2, q/2)$.

□

D'une manière générale, le terme X_k , $k = 0, 1, \dots$ peut donner des opérateurs propres étendus de C_1 associé à la valeur propre étendue λ , où X_k défini par

$$(X_k f)(x) = x^{(\frac{1}{\lambda} + k - 1)} \frac{d^k f(x^{\frac{1}{\lambda}})}{dx^k} \quad (4.5)$$

Lorsque f est une fonction infiniment différentiable à support compact. Et à partir du théorème suivant

Théorème 21. [34] Si $0 < \lambda \leq 1$ alors λ est une valeur propre étendue pour l'opérateur Cesàro C_1 sur $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ et une opérateur propre étendue correspondante est l'opérateur de composition pondérée $X_k \in B(L^p[0, 1])$, $k \in \mathbb{N}$ définie par (4.5)

Démonstration 37. Tout d'abord, nous montrons que X_k est en effet un opérateur linéaire borné.

Nous avons pour chaque $f \in L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(X_k f)(x)|^p dx &= \int_0^1 \left| x^{(\frac{1}{\lambda} + k - 1)} \frac{d^k f(x^{\frac{1}{\lambda}})}{dx^k} \right|^p dx \\ &= \int_0^1 x^{p(\frac{1}{\lambda} + k - 1)} \left| \frac{d^k f(x^{\frac{1}{\lambda}})}{dx^k} \right|^p dx \\ &= \lambda \int_0^1 y^{(pk\lambda + (p-1)(1-\lambda))} \left| \frac{d^k f(y)}{dy^k} \right|^p dy, \quad \text{où } y = x^{\frac{1}{\lambda}} \\ &\leq \lambda \int_0^1 \left| \frac{d^k f(y)}{dy^k} \right|^p dy \end{aligned}$$

et cela montre que X_k est borné sur $L^p([0, 1])$ avec $\|X_k\| \leq \lambda^{1/p}$.

Maintenant, montrons que X_k est un opérateur propre étendu de C_1 associé à l'étendue de la valeur propre λ .

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} X_k x^n &= x^{(\frac{1}{\lambda} + k - 1)} \frac{d^k x^{\frac{n}{\lambda}}}{dx^k} \\ &= x^{(\frac{1}{\lambda} + k - 1)} \left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{\lambda} - k + 1 \right) x^{\frac{n}{\lambda} - k} \\ &= \left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{\lambda} - k + 1 \right) x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} C_1 X_k x^n &= C_1 \left(\left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{\lambda} - k + 1 \right) x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \right) \\ &= \left(\left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{\lambda} - k + 1 \right) \right) C_1 x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda}{n+1} \left(\left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{\lambda} - k + 1 \right) \right) x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda}{n+1} X_k x^n \\ &= \lambda X_k \frac{x^n}{n+1} \\ &= \lambda X_k C_1 x^n \end{aligned}$$

et puisque le sous espace linéaire $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de $L^p([0, 1])$, il en résulte que $C_1 X_k = \lambda X_k C_1$, d'où $X_k, k \in \mathbb{N}$ est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ .

□

4.3 Exemples

Supposons qu'un opérateur X_k défini par (4.5)

1. Si $k = 0$ alors $(X_0 f)(x) = x^{(1-\lambda)/\lambda} f(x^{1/\lambda})$.
2. Si $k = 1$ alors X_1 défini par

$$(X_1 f)(x) = x^{1/\lambda} \frac{df(x^{1/\lambda})}{dx} \quad (4.6)$$

Montrons que X_1 , est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et notez que $X_1 x^n = \frac{n}{\lambda} x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}}$ alors

$$\begin{aligned} C_1 X_1 x^n &= C_1 \left(\frac{n}{\lambda} x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \right) \\ &= \frac{\lambda}{n+1} \frac{n}{\lambda} x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda}{n+1} X_1 x^n \\ &= \lambda X_1 C_1 x^n. \end{aligned}$$

X_1 est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ .

3. Si $k = 2$ alors X_2 défini par

$$(X_2 f)(x) = x^{\frac{1}{\lambda}+1} \frac{d^2 f(x^{1/\lambda})}{dx^2} \quad (4.7)$$

Montrons que X_2 est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ .

Soit $n \in \mathbb{N}$, Il est clair que $X_2 x^n$ est égal à

$$\begin{aligned} X_2 x^n &= x^{\frac{1}{\lambda}+1} \frac{d^2 (x^{\frac{n}{\lambda}})}{dx^2} \\ &= x^{\frac{1}{\lambda}+1} \left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) x^{\frac{n}{\lambda}-2} \\ &= \left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
C_1 X_2 x^n &= C_1 \left(\binom{n}{\lambda} \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \right) \\
&= \left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) C_1 \left(x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \right) \\
&= \left(\frac{\lambda}{n+1} \right) \left(\frac{n}{\lambda} \right) \left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) x^{\frac{n+1-\lambda}{\lambda}} \\
&= \frac{\lambda}{n+1} X_2 x^n \\
&= \lambda X_2 C_1 x^n.
\end{aligned}$$

X_2 est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ .

En outre, Nous examinons dans la paragraphe suivante quelques propriétés intéressantes des opérateurs Cesàro continu finis.

4.4 Quelques propriétés des opérateurs de Cesàro continus finis

Nous savons dans la paragraphe précédente que X_0 est un opérateur propre étendu pour l'opérateur de Cesàro C_1 . La racine de X_0 est un opérateur propre étendu pour l'opérateur Cesàro C_1 . Aussi bien que la racine de l'ordre n pour X_0 est un opérateur propre étendu pour l'opérateur de Cesàro C_1 . Pour répondre à ces questions, on donne ces théorèmes

Théorème 22. *Si $0 < \lambda \leq 1$ alors λ^n , $n \in \mathbb{N}$ est une valeur propre étendue pour l'opérateur de Cesàro C_1 sur $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ l'opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition pondéré $X_0^n \in B(L^p[0, 1])$, X_0 défini par (4.3).*

Démonstration 38. *L'opérateur X_0^n , $n \in \mathbb{N}$ est borné sur $L^p([0, 1])$ avec*

$$\|X_0^n\| \leq \lambda^{n/p}.$$

Maintenant, montrons que X_0^n est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ^n .

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned}
C_1 X_0 &= \lambda X_0 C_1 \Rightarrow C_1 X_0 X_0^{n-1} = \lambda X_0 C_1 X_0^{n-1} \\
&\Rightarrow C_1 X_0^n = \lambda^n X_0^n C_1
\end{aligned}$$

D'où $C_1 X_0^n = \lambda^n X_0^n C_1$, et donc X_0^n est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue λ^n .

□

Théorème 23. [34] Soit Q la racine carrée de X_0 défini par (4.3).

Si $0 < \lambda \leq 1$, alors $\sqrt{\lambda}$ est une valeur propre étendue pour l'opérateur Cesàro C_1 sur $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition pondéré $Q \in B(l^p[0, 1])$ défini par

$$(Qf)(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda+\sqrt{\lambda}}} f\left(x^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right). \quad (4.8)$$

Démonstration 39. Premièrement, montrons que $X_0 = Q^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et notez que $X_0 x^n = x^{(n+1-\lambda)/\lambda}$, de sorte que

$$\begin{aligned} Qx^n &= x^{\frac{1-\lambda}{\lambda+\sqrt{\lambda}}} x^{\frac{n}{\sqrt{\lambda}}} &= x^{\frac{1-\lambda}{\lambda+\sqrt{\lambda}} + \frac{n}{\sqrt{\lambda}}} \\ &= x^{\frac{(1-\lambda)\sqrt{\lambda} + n(\lambda+\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{(1-\sqrt{\lambda})(1+\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} + n(\lambda+\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{(1-\sqrt{\lambda})(\lambda+\sqrt{\lambda}) + n(\lambda+\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{(1-\sqrt{\lambda}+n)(\lambda+\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} Q^2 x^n &= Q(Qx^n) &= Qx^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}} \\ &= x^{\frac{1-\lambda}{\lambda+\sqrt{\lambda}}} x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\lambda}} \\ &= x^{\frac{1-\lambda}{\lambda+\sqrt{\lambda}} + \frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\lambda}} \\ &= x^{\frac{(1-\lambda)\lambda + (n+1-\sqrt{\lambda})(\lambda+\sqrt{\lambda})}{\lambda(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{(1-\sqrt{\lambda})(1+\sqrt{\lambda})\lambda + (n+1-\sqrt{\lambda})(\lambda+\sqrt{\lambda})}{\lambda(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{(1-\sqrt{\lambda})(\lambda+\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} + (n+1-\sqrt{\lambda})(\lambda+\sqrt{\lambda})}{\lambda(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{[(1-\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} + (n+1-\sqrt{\lambda})](\lambda+\sqrt{\lambda})}{\lambda(\lambda+\sqrt{\lambda})}} \\ &= x^{\frac{(\sqrt{\lambda}-\lambda) + (n+1-\sqrt{\lambda})}{\lambda}} \\ &= x^{\frac{(n+1-\lambda)}{\lambda}} \end{aligned}$$

D'où $X_0 = Q^2$.

Aussi Q est borné sur $L^p([0, 1])$ avec $\|Q\| \leq (\sqrt{\lambda})^{\frac{1}{p}}$.

Maintenant, prouvons que Q est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue $\sqrt{\lambda}$.

Nous avons $Qx^n = x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}$, de sorte que

$$\begin{aligned} C_1 Qx^n &= C_1 x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}} = \frac{1}{x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}+1}} x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}+1} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{n+1} x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{n+1} Qx^n \\ &= \sqrt{\lambda} Q C_1 x^n \end{aligned}$$

Le sous espace linéaire $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de $L^p([0, 1])$, il s'en suit que $C_1 Q = \sqrt{\lambda} Q C_1$, soit Q un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue $\sqrt{\lambda}$.

□

Théorème 24. [34] Soit Q_k opérateur où $Q_k = X_0^{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{N}^*$, X_0 définie par (4.3). Si $0 < \lambda \leq 1$, alors $\lambda^{\frac{1}{k}}$ est une valeur propre étendue pour l'opérateur Cesàro C_1 sur $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition pondéré $Q_k \in B(L^p[0, 1])$ défini par

$$(Q_k f)(x) = (X_0^{\frac{1}{k}} f)(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda^{\frac{1}{k}} + \lambda^{\frac{2}{k}} + \dots + \lambda^{\frac{k}{k}}}} f(x^{\frac{1}{\lambda^{1/k}}}) \quad (4.9)$$

Démonstration 40. Nous avons Q_k est borné sur $L^p([0, 1])$ avec $\|Q_k\| \leq (\lambda)^{\frac{1}{pk}}$.

Montrons que Q_k est un opérateur propre étendu pour l'opérateur de Cesàro C_1 associé à la valeur propre étendue $\lambda^{\frac{1}{k}}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} Q_k x^n &= x^{\frac{1-\lambda}{\lambda^{\frac{1}{k}} + \lambda^{\frac{2}{k}} + \dots + \lambda^{\frac{k}{k}}} \frac{n}{\lambda^{\frac{1}{k}}}} = x^{\frac{(1-\lambda)\lambda^{1/k} + n(\lambda^{1/k} + \lambda^{2/k} + \dots + \lambda)}{\lambda^{1/k}(\lambda^{1/k} + \lambda^{2/k} + \dots + \lambda)}} \\ &= x^{\frac{(1-\lambda)\lambda^{1/k} + n\lambda^{1/k} \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{1/k}}}{\lambda^{1/k} \lambda^{1/k} \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{1/k}}}} \\ &= x^{\frac{(1-\lambda^{1/k})(1-\lambda)\lambda^{1/k} + n(1-\lambda)\lambda^{1/k}}{\lambda^{1/k}(1-\lambda)\lambda^{1/k}}} \\ &= x^{\frac{n+1-\lambda^{1/k}}{\lambda^{1/k}}} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 C_1 Q_k x^n &= C_1 x^{\frac{n+1-\lambda^{1/k}}{\lambda^{1/k}}} = \frac{1}{x^{\frac{n+1-\lambda^{1/k}}{\lambda^{1/k}} + 1}} x^{\frac{n+1-\lambda^{1/k}}{\lambda^{1/k}} + 1} \\
 &= \frac{\lambda^{1/k}}{n+1} x^{\frac{n+1-\lambda^{1/k}}{\lambda^{1/k}}} \\
 &= \frac{\lambda^{1/k}}{n+1} Q_k x^n \\
 &= \lambda^{1/k} Q_k C_1 x^n
 \end{aligned}$$

Le sous espace linéaire $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de $L^p([0, 1])$, il s'en suit que $C_1 Q_k = \lambda^{1/k} Q_k C_1$, soit Q_k un opérateur propre étendue pour l'opérateur Cesàro C_1 associé à la valeur propre étendue $\lambda^{1/k}$.

□

Théorème 25. [34] Soit Q_{qk} où $Q_{qk} = X_0^{\frac{q}{k}}$, $q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, X_0 définie par (4.3). Si $0 < \lambda \leq 1$, alors $\lambda^{\frac{q}{k}}$ est une valeur propre étendue pour l'opérateur Cesàro C_1 sur $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition pondéré $Q_{qk} \in B(L^p[0, 1])$ défini par

$$(Q_{qk} f)(x) = (X_0^{\frac{q}{k}} f)(x) = (Q_k^q f)(x) \quad (4.10)$$

Q_k défini par (4.9).

Démonstration 41. Nous avons Q_k est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre l'étendu $\lambda^{1/k}$. Et donc

$$\begin{aligned}
 C_1 Q_k &= \lambda^{1/k} Q_k C_1 \Rightarrow C_1 Q_k^q = \lambda^{q/k} Q_k^q C_1 \\
 &\Rightarrow C_1 Q_{qk} = \lambda^{q/k} Q_{qk} C_1
 \end{aligned}$$

D'où Q_{qk} est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue $\lambda^{q/k}$.

□

Exemple :

Supposons que $q = 3$, $k = 2$ et soit $X = X_0^{\frac{3}{2}}$.

Maintenant, nous essayons de prouver que X est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue $\lambda^{3/2}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 X &= X_0^{\frac{3}{2}} = X_0 X_0^{1/2} \\
 &= X_0 Q
 \end{aligned}$$

où Q est défini par (4.8).

Ainsi $Qx^n = x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}$, et

$$\begin{aligned} X_0 Qx^n &= X_0 \left(x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}} \right) \\ &= x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} x^{\frac{n+1-\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}}} \\ &= x^{\frac{n+1-\lambda\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_1 Xx^n &= C_1 \left(x^{\frac{n+1-\lambda\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}}} \right) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left(t^{\frac{n+1-\lambda\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}}} \right) dt \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{n+1-\lambda\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}} + 1} \left(x^{\frac{n+1-\lambda\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}} + 1} \right) \\ &= \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{n+1} \left(x^{\frac{n+1-\lambda\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}}} \right) \\ &= \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{n+1} Xx^n \\ &= \lambda\sqrt{\lambda} X \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \\ &= \lambda\sqrt{\lambda} X C_1 x^n. \end{aligned}$$

donc X est un opérateur propre étendu de C_1 associé à la valeur propre étendue $\lambda\sqrt{\lambda} = \lambda^{3/2}$.

Théorème 26. Soit X_r un opérateur donné par $X_r = X_0 R$, X_0 défini par (4.3) et $R \in \{C_1\}'$.

Si $0 < \lambda \leq 1$, alors λ est une valeur propre étendue pour l'opérateur Césàro C_1 sur $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < \infty$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition pondéré X_r .

Démonstration 42. Nous avons $C_1 X_0 = \lambda X_0 C_1$ et $C_1 R = R C_1$, donc

$$\begin{aligned} C_1 X_r &= C_1 X_0 R \\ &= \lambda X_0 C_1 R \\ &= \lambda X_0 R C_1 \\ &= \lambda X_r C_1 \end{aligned}$$

□

4.5 Valeur et opérateur propres étendus pour C_1 sur l'espace de Hilbert.

Brown, Halmos et Shields [10] ont prouvé dans le cas hilbertien que C_1 est en effet un opérateur linéaire borné, et ils ont également prouvé que $I - C^*$ est unitairement équivalent à un changement unilatéral de la multiplicité un.

Rappelons qu'un opérateur linéaire borné S sur un espace complexe de Hilbert H est un changement unilatéral de la multiplicité à une condition qu'il y ait une base orthonormée (e_n) de H telle que

$$Se_n = e_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il est facile de voir que l'adjoint d'un tel changement unilatéral satisfait

$$S^*e_0 = 1 \quad \text{et} \quad S^*e_n = e_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Considérons un changement unilatéral de la multiplicité un $S \in B(L^2[0, 1])$ et un opérateur unitaire $U \in B(L^2[0, 1])$ de telle sorte que

$$I - C_1^* = U^*SU.$$

Nous avons

$$C_1 = U^*(I - S^*)U$$

et que les valeurs propres étendues sont conservées sous similitude en général, en vertu de l'équivalence unitaire en particulier, il en résulte que les valeurs propres étendues de C_1 sont précisément les valeurs propres étendues de $(I - S^*)$, et les opérateurs propres étendus de C_1 sont en correspondance un à un avec les opérateurs propres étendus de $(I - S^*)$, sous conjugaison avec U .

Si un opérateur non nul X et $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfait

$$(I - S^*)X = \lambda X(I - S^*)$$

alors l'opérateur

$$Y = U^*XU \quad \text{satisfait} \quad C_1Y = \lambda YC_1.$$

Lemme 8. [28] *Le spectre ponctuel de S^* est le disque unité ouvert \mathbb{D} . Plus précisément, chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ est une valeur propre simple de S^* , et un vecteur propre correspondant f est donné par l'expression*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.11)$$

Maintenant, nous décrivons l'ensemble des valeurs propres étendues pour $I - S^*$. Notre objectif est de montrer que l'intervalle $]0, 1]$ est contenu dans l'ensemble des valeurs propres étendues pour $I - S^*$. Nous démontrons qu'un opérateur propre étendu particulier est l'opérateur d'Euler. Il est commode d'avoir maintenant une digression sur l'opérateur d'Euler.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur d'Euler E_λ est défini sur ℓ^2 par

$$(E_\lambda f)(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} f(k), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Soit (μ_k) une suite de scalaires complexes et Δ désigne l'opérateur de différence défini par

$$\Delta \mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}. \quad (4.13)$$

Une matrice de Hausdorff est une matrice infinie $A = (a_{nk})$ dont les entrées sont données par l'expression

$$a_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad (4.14)$$

La suite (μ_k) est appelée suite de génération de la matrice A et de Hausdorff est déterminée par les éléments diagonaux de l'opérateur A .

L'opérateur associé à une matrice de Hausdorff $A = (a_{nk})$ est défini par l'expression

$$(Af)(n) = \sum_{k=0}^n a_{nk} f(k). \quad (4.15)$$

l'opérateur d'Euler E_λ , avec la génération de la suite $\mu_n = \lambda^n$. Dans [40] l'auteur a montré que E_λ est borné pour $1/2 < \lambda \leq 1$.

Théorème 27. [28] Si $0 < \lambda \leq 1$ alors λ est une valeur propre étendue pour $I - S^*$, et de plus l'opérateur d'Euler E_λ est un opérateur propre étendu correspondant.

Démonstration 43. Tout d'abord, pour $k = 0$, on a

$$E_\lambda e_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n e_n.$$

Donc, il résulte du lemme (4.11) que

$$(I - S^*)E_\lambda e_0 = \lambda E_\lambda (I - S^*)e_0.$$

Donc, pour $k \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} S^*E_\lambda e_k &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} e_{n-1} \\ &= \lambda^k e_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+1}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n+1-k} e_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_\lambda e_k - S^*E_\lambda e_k &= (I - S^*)E_\lambda e_k \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} e_n - \lambda^k e_{k-1} - \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+1}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n+1-k} e_n \\ &= -\lambda^k e_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} \left[\binom{n}{k} - \binom{n+1}{k} (1 - \lambda) \right] \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} e_n \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Pascal

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} (I - S^*)E_\lambda e_k &= -\lambda^k e_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} \left[\binom{n}{k} \lambda - \binom{n}{k-1} (1 - \lambda) \right] \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} e_n \\ &= -\lambda^k e_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^{k+1} (1 - \lambda)^{n-k} e_n - \lambda \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k-1} \lambda^{k-1} (1 - \lambda)^{n-(k-1)} e_n \\ &= \lambda \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} e_n - \lambda \left[\lambda^{k-1} e_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k-1} \lambda^{k-1} (1 - \lambda)^{n-(k-1)} e_n \right] \\ &= \lambda \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} e_n - \lambda \sum_{n=k-1}^{\infty} \binom{n}{k-1} \lambda^{k-1} (1 - \lambda)^{n-(k-1)} e_n \\ &= \lambda E_\lambda e_k - \lambda E_\lambda e_{k-1} \\ &= \lambda E_\lambda e_k - \lambda E_\lambda S^* e_k \\ &= \lambda E_\lambda (I - S^*) e_k. \end{aligned}$$

et

$$(I - S^*)E_\lambda e_k = \lambda E_\lambda (I - S^*)e_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

Nous avons déjà mentionné que Rhoades [40] a montré que E_λ est borné pour $1/2 < \lambda \leq 1$. Il a prouvé en fait $\|E_\lambda\| = \lambda^{-\frac{1}{2}}$.

Dans la proposition (15) ci-dessous E_λ est également borné pour $0 < \lambda \leq 1/2$ et d'ailleurs, $\|E_\lambda\| \leq (1 - \lambda)^{-\frac{1}{2}}$. Puisqu'il n'existe pas une preuve de ce fait dans la littérature, les auteurs dans [28] et Rhoades dans [40] ont introduit un argument qui repose sur un critère en utilisant le test Schur. Une preuve de ce critère, différent de celui d'origine, peut être trouvé dans le papier de Brown, Halmos et Shields [10], où il est appliqué pour montrer la bornitude des opérateurs de Cesàro discrets.

Lemme 9. (*Test de Schur*). Si $a_{nk} \geq 0$, $p_k > 0$, et si $\alpha, \beta > 0$ sont tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} p_k \leq \alpha p_n \quad (4.16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} p_n \leq \beta p_k \quad (4.17)$$

alors X est un opérateur linéaire borné avec $\|X\|^2 \leq \alpha\beta$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(Xf)(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} f(k). \quad (4.18)$$

Proposition 15. [28] Si $0 < \lambda \leq 1/2$ alors l'opérateur d'Euler E_λ est borné avec

$$\|E_\lambda\| \leq (1 - \lambda)^{-1/2}.$$

Démonstration 44. Nous allons appliquer le test Schur à la matrice infinie

$$a_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad (4.19)$$

Si nous fixons $p_k = 1$, il résulte du théorème binomial que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} p_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} = 1$$

D'autre part, en utilisant le développement en série géométrique

$$(1 - \lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k,$$

on a

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} (1 - \lambda)^{-1} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n - k)!} (1 - \lambda)^{(n-k)},$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} p_n &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n - k)!} (1 - \lambda)^{(n-k)} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} (1 - \lambda)^{-1} \\ &= \lambda^k (1 - \lambda)^{-k-1} \leq (1 - \lambda)^{-1}, \end{aligned}$$

et nous concluons que E_λ est borné avec $\|E_\lambda\| \leq (1 - \lambda)^{-1/2}$, .

□

Nous allons utiliser ce fait élémentaire qui peut être énoncé comme suit.

Lemme 10. Soit λ un nombre complexe non nul alors $|\lambda| + |1 - \lambda| \leq 1$ si et seulement si $\lambda \in]0, 1]$.

Démonstration 45. Montrons l'implication non triviale.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 1$ alors nous avons

$$|\lambda| + |1 - \lambda| = 2\lambda - 1 > 1,$$

et si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda < 0$ alors

$$|\lambda| + |1 - \lambda| = 1 - 2\lambda > 1,$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\text{Im}\lambda \neq 0$ alors

$$|\lambda| + |1 - \lambda| > 1,$$

parce que λ et $1 - \lambda$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} .

□

Proposition 16. *Si $\lambda \notin]0, 1]$, l'opérateur d'Euler E_λ est non borné.*

Démonstration 46. *Nous avons pour tout $n \geq 0$*

$$E_\lambda e_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} e_k.$$

Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} \|E_\lambda e_n\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} e_k \right\| \\ &\geq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |\lambda|^k |1-\lambda|^{n-k} \\ &= \frac{(|\lambda| + |1-\lambda|)^n}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 0$, alors il en résulte du lemme (10), $\|E_\lambda e_n\| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

Enfin, si $\lambda = 0$ d'après l'égalité (4.12), nous avons $(E_0 f)(n) = f(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que la suite constante $E_0 f$ appartient à l'espace de Hilbert complexe ℓ^2 lorsque $f(0) = 0$.

□

Chapitre 5

Valeur et opérateur propres étendus pour L'opérateur de Cesàro discret

5.1 L'opérateur de Cesàro discret sur les espaces de suites

Nous allons démontrer dans cette section que l'ensemble des valeurs propres étendues pour l'opérateur de Cesàro discret C_0 est l'intervalle $[1, \infty[$ lorsque $p = 2$, et qu'il se trouve dans l'intervalle $[1, \infty[$ lorsque $1 < p < \infty$.

Rappelons que l'opérateur de Cesàro discrète C_0 est défini sur l'espace de Banach complexe ℓ^p pour $1 < p < \infty$ par l'expression

$$(C_0 f)(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(k). \quad (5.1)$$

Un calcul simple montre que C_0^* l'adjoint de l'opérateur C_0 dans ℓ^q , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ est l'opérateur défini par

$$(C_0^* f)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f(k)}{k+1}. \quad (5.2)$$

Les matrices M_c et M_c^* associés à C_0 et C_0^* :

$$M_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$M_c^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

il s'ensuit que

$$M_c M_c^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

la différence $(C_0 + C_0^*) - (C_0 C_0^*)$ est l'opérateur diagonale D_0 donné par

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Comme

$$(1 - C_0)(1 - C_0^*) = 1 - D_0$$

Il est facile de prouver l'inégalité suivante $\|C_0\| \leq 2$.

En effet, si

$$f_\alpha(n) = \frac{1}{(n+1)^\alpha}, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

alors $f_\alpha \in \ell^2$ et $\|C_0^* f_\alpha\| \rightarrow 2 \|f_\alpha\|$ quand $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$.

Un calcul simple nous donne la preuve de cette dernière assertion.

Comme

$$(C_0^* f_\alpha)(m) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} \|C_0^* f_\alpha\|^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \right)^2 > \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{m+1}^{\infty} \frac{dx}{(x)^{\alpha+1}} \right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(m+1)^\alpha} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \|f_\alpha\|^2 \end{aligned}$$

Et cela implique l'assertion en passant à la limite quand $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$.

Lemme 11. *Si A est un opérateur avec $\|A\| \leq 1$ et $\|Af\| = \|f\|$ pour un vecteur non nul f alors $\|A^*g\| = \|g\|$ pour un vecteur non nul g*

Démonstration 47. *Soit $g = Af$ alors $\|f\| = \|g\|$. On a*

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \|Af\|^2 &= \langle Af, Af \rangle \\ &= \langle A^*Af, f \rangle \\ &\leq \|A^*Af\| \|f\| \leq \|f\|^2. \end{aligned}$$

il s'ensuit que $\|A^*Af\| = \|f\|$, d'où $\|A^*g\| = \|g\|$

□

Nous savons que le supremum $\|C_0 f\|$ (et donc de $\|C_0^* f\|$) pour les vecteurs f sur la sphère unitaire est 2, nous allons montrer que le supremum n'est pas atteint.

Comme $\|(1 - D_0) f\| < \|f\|$ sauf si $f = 0$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} \|(1 - C_0^*) f\|^2 &= \langle (1 - C_0)(1 - C_0^*) f, f \rangle \\ &\leq \|(1 - C_0)(1 - C_0^*) f\| \|f\| \\ &< \|f\|^2, \quad \text{sauf pour } f = 0. \end{aligned}$$

La paragraphe précédente est applicable et nous pouvons en déduire que les deux quantités $\|(1 - C_0) f\|$ et $\|(1 - C_0^*) f\|$ sont strictement inférieur à $\|f\|$ sauf quand $f = 0$. il en résulte bien sûr que $\|C_0 f\|$ et $\|C_0^* f\|$ sont strictement inférieur à $2\|f\|$ sauf quand $f = 0$.

Théorème 28. 1. Si $\|f\| = 1$ alors

$$\|(1 - C_0)f\| < 1 \quad \text{et} \quad \|(1 - C_0^*)f\| < 1$$

2. Le spectre ponctuel de C_0 est vide.

3. Si $|1 - \lambda| < 1$, alors λ est une valeur propre simple pour C_0^* .

4. Le spectre de C_0 est le disque fermé $\{\lambda : |1 - \lambda| \leq 1\}$.

5. Le spectre ponctuel de C_0^* est le disque ouvert $\{\lambda : |1 - \lambda| < 1\}$.

Démonstration 48. 1. Ce resultat est déjà démontré dans la dernière paragraphe.

2. Observons d'abord que si $C_0f = g$, alors $f(0) = g(0)$ et si $n \geq 1$, alors

$$C_0f(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(k) = g(n)$$

et

$$\sum_{k=0}^n f(k) = (n+1)g(n)$$

Et donc

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + \dots + f(n) &= (n+1)g(n) \\ f(0) + f(1) + \dots + f(n-1) &= ng(n-1) \end{aligned}$$

La soustraction,

$$f(n) = (n+1)g(n) - ng(n-1)$$

par conséquent, si $C_0f = \lambda f$ on obtient

$$f(n) = \lambda((n+1)f(n) - nf(n-1))$$

et alors

$$(\lambda(n+1) - 1)f(n) = \lambda nf(n-1)$$

Chaque fois que $n \geq 1$, si m est le plus petit entier pour lequel $f(m) \neq 0$, alors $\lambda = \frac{1}{m+1}$ de sorte que $0 < \lambda \leq 1$. Il en résulte que si $n \geq 1$ alors

$$|f(n)| = \left| \frac{\lambda nf(n-1)}{\lambda n - (1 - \lambda)} \right| \geq |f(n-1)|$$

Ce qui est impossible pour une fonction non nulle $f \in L^2$

3. Si $C_0^*f = g$ alors

$$\begin{aligned} \frac{f(n)}{n+1} + \frac{f(n+1)}{n+2} + \dots &= g(n) \\ \frac{f(n+1)}{n+2} + \frac{f(n+2)}{n+3} + \dots &= g(n+1) \end{aligned}$$

par soustraction, on trouve

$$f(n) = (n+1)(g(n) - g(n+1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et par conséquent, si $C_0^*f = \lambda f$ on obtient

$$f(n) = \lambda(n+1)(f(n) - f(n+1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et

$$\lambda(n+1)f(n+1) = (\lambda(n+1) - 1)f(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Il en résulte que 0 est pas une valeur propre de C_0^* , (si $\lambda = 0$, alors $f(n) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$) et il en résulte également que

$$f(n+1) = \left(1 - \frac{1}{\lambda(n+1)}\right)f(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cela implique que si $n \geq 1$ alors

$$f(n) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{\lambda j}\right) f(0).$$

Et nous pouvons conclure que toutes les valeurs propres sont simples. Supposons maintenant que $|1 - \lambda| < 1$, ou de façon équivalente que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) > \frac{1}{2}$. Il convient de réécrire la condition une fois de plus, si $\mu = \frac{1}{\lambda}$ alors la condition est $2\operatorname{Re}(\mu) = 1 + \epsilon$, pour ϵ un nombre positif.

On démontre que si cette condition est remplie et si

$$f(n) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\mu}{j}\right) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

alors $f \in \ell^2$. Comme

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{\mu}{j}\right|^2 &= 1 - \frac{2\operatorname{Re}(\mu)}{j} + \frac{|\mu|^2}{j^2} \\ &= 1 - \frac{1 + \epsilon}{j} + \frac{|\mu|^2}{j^2} \\ &\leq e^{\frac{|\mu|^2}{j^2} - \frac{1+\epsilon}{j}}. \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} |f(n)|^2 &\leq \frac{e^{|\mu|^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}}}{e^{(1+\epsilon) \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}}} \\ &< \frac{c}{e^{(1+\epsilon) \log(n)}} = \frac{c}{n^{(1+\epsilon)}} \end{aligned}$$

où $c = e^{|\mu|^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}}$. Ceci termine la preuve de (3).

4. Puisque $\|1 - C_0\| \leq 1$, le spectre de $(1 - C_0)$ est incluse dans le disque fermé $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$, par conséquent, le spectre de C_0 est inclu dans le disque fermé $\{\lambda : |1 - \lambda| \leq 1\}$.

Dans la paragraphe qui précède on suppose que le spectre de $1 - C_0^*$ est inclut dans le disque ouvert $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$, et donc la même chose est vraie pour le spectre de $1 - C_0$. Ceci implique que le spectre de C_0 est inclu dans le disque ouvert.

5. Compte tenu de ce qui était tout simplement prouvé la preuve de 5, et donc du théorème peut être complété en montrant que si $|1 - \lambda| = 1$ alors λ est pas une valeur propre de C_0^* ou de manière équivalente $1 - \lambda$ est pas une valeur propre de $1 - C_0^*$. Ceci est cependant une conséquence immédiate de (1).

Si $\|f\| = 1$ et $(1 - C_0^*)f = (1 - \lambda)f$ alors

$$\|(1 - C_0^*)f\| = |(1 - \lambda)|$$

et donc $|1 - \lambda|$ ne peut pas être égal à 1.

□

5.2 valeurs propres étendues de l'opérateur de Cesàro discret sur les espaces de suites

Rhoades [40] ont montré que C_0 est en effet un opérateur linéaire borné sur ℓ^p dont le spectre ponctuel est vide et il a prouvé le résultat suivant sur le spectre ponctuel de l'opérateur adjoint C_0^* .

Théorème 29. *Le spectre ponctuel de C_0^* sur l'espace de Banach ℓ^q complexe est le disque ouvert $D(\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$. En outre, chaque $z \in D(\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$ est*

une valeur propre simple pour C_0^* et un vecteur propre correspondant est la suite $h(z) = (h_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations

$$h_0(z) = 1, \quad h_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{kz}\right), \quad n \geq 1. \quad (5.7)$$

Notre premier objectif est de montrer que si λ est une valeur propre étendue pour C_0 sur ℓ^p alors λ est réel et $\lambda \geq 1$.

Théorème 30. [28] *L'adjoint de l'opérateur de Cesàro discret $C_0^* \in B(\ell^q)$ a un spectre ponctuel riche.*

Démonstration 49. *Remarquons que $\sigma_p(C_0^*) = D(\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$ est un ouvert connexe. Il est facile de voir que l'application $h : \sigma_p(C_0^*) \rightarrow \ell^q$ définie par l'équation (5.7) est analytique et $h(z) \in \ker(C_0^* - z)/\{0\}$.*

Il est connu que la famille de vecteurs propres $\{h(z) : z \in D(\frac{q}{2}, \frac{q}{2})\}$ est totale dans ℓ^q , d'où la famille de vecteurs propres $\{f(1/k) : k \in \mathcal{N}\}$ est totale dans ℓ^q . car $f_n(1/k) \neq 0$ si et seulement si $n < k$.

Et en appliquant, le lemme (6), on obtient le resultat désiré.

□

Corollaire 5. *Si λ est une valeur propre étendue pour l'opérateur de Cesàro discret C_0 sur ℓ^p alors λ est réelle et $\lambda \geq 1$.*

Démonstration 50. *Tout d'abord, nous avons $\lambda \neq 0$ parce que C_0 est injectif.*

Noton également que λ est une valeur propre étendue pour C_0 si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre étendue pour C_0^ , et par conséquent, il suffit de montrer que si λ est une valeur propre étendue pour C_0^* alors λ est réel et $0 < \lambda \leq 1$.*

Cela devient une comme du théorème (15) maintenant nous savons que C_0^ a un spectre ponctuel riche et que son spectre ponctuel est le disque $D(\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$.*

□

Notre prochain objectif est de montrer dans le cas hilbertien $p = 2$ que si λ est réel et $\lambda \geq 1$ alors λ est une valeur propre étendue pour C_0 . Kriete et Trutt [27] ont montré que C_0 est sous normal en utilisant la construction suivante :

Soit μ une mesure finie définie positive sur les sous-ensembles de Borel

du plan complexe avec support compact et soit $H^2(\mu)$ la fermeture des polynômes sur l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$.

Considérons l'opérateur de décalage M_z défini sur l'espace de Hilbert $H^2(\mu)$ par l'expression

$$(M_z f)(z) = zf(z).$$

Kriete et Trutt [27] ont montré qu'il existe une mesure finie définie positive sur les sous-ensembles de Borel du plan complexe et supporté sur $\overline{\mathbb{D}}$, et il existe un opérateur unitaire $U : \ell^2 \rightarrow H^2(\mu)$ de telle sorte que.

$$I - C_0 = U^* M_z U.$$

ou en d'autres termes,

$$C_0 = U^*(I - M_z)U.$$

Ensuite, les valeurs propres étendues de C_0 sont les valeurs propres étendues de $I - M_z$ et les opérateurs propres étendus de C_0 sont en correspondance un à un avec les opérateurs propres étendus de $I - M_z$ sous conjugaison avec U , qui est, si un opérateur non nul X satisfait

$$(I - M_z)X = \lambda X(I - M_z)$$

alors l'opérateur

$$Y = U^* X U \quad \text{satisfait} \quad C_0 Y = \lambda Y C_0.$$

Théorème 31. [28] *Si $\lambda \geq 1$ alors λ est une valeur propre étendue pour $I - M_z$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition X défini par l'expression*

$$(Xf)(z) = f\left(\frac{z + \lambda - 1}{\lambda}\right). \quad (5.8)$$

Démonstration 51. *Soit $f_n = X z^n = \left(\frac{z + \lambda - 1}{\lambda}\right)^n$. Nous avons*

$$f_{n+1} = \left(\frac{z + \lambda - 1}{\lambda}\right) f_n.$$

Et

$$\begin{aligned} \lambda f_{n+1} &= (z + \lambda - 1) f_n \\ &= (M_z + \lambda - 1) f_n \\ &= \lambda f_n - (I - M_z) f_n \end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$(I - M_z)f_n = \lambda(f_n - f_{n+1})$$

et

$$\begin{aligned} (I - M_z)Xz^n &= (I - M_z)f_n \\ &= \lambda(f_n - f_{n+1}) \\ &= \lambda(Xz^n - XM_zz^n) \\ &= \lambda X(z^n - M_zz^n) \\ &= \lambda X(I - M_z)z^n \end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble total dans $H^2(\mu)$, il vient $(I - M_z)X = \lambda X(I - M_z)$.

□

Corollaire 6. Si $\lambda \geq 1$ alors λ est une valeur propre étendue pour l'opérateur de Cesàro discret C_0 sur ℓ^2 .

5.3 Quelques propriétés

Théorème 32. Soit Q la racine carrée de X définie par (5.9).

Si $\lambda \geq 1$, alors $\sqrt{\lambda}$ est une valeur propre étendue pour l'opérateur $I - M_z$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition Q défini par l'expression

$$(Qf)(z) = f\left(\frac{z + \sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (5.9)$$

Démonstration 52. Premièrement, montrons que $X = Q^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} QQz^n &= Q\left(\frac{z + \sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}}\right)^n \\ &= \left(\frac{\frac{z + \sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}}\right)^n \\ &= \left(\frac{z + \lambda - 1}{\lambda}\right)^n \\ &= Xz^n. \end{aligned}$$

Montrons que Q est un opérateur propre étendu, on répète les mêmes étapes utilisées dans la démonstration du théorème (31), nous trouvons le résultat.

□

Chapitre 6

L'opérateur de Cesàro pondéré C_h

6.1 Introduction

Dans cette section, nous discutons l'opérateur de Cesàro pondéré sur l'espace ℓ^2 . Pour une suite $h = (h(n))_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres positifs, appelés poids et une suite $a = (a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres complexes, l'opérateur de Cesàro pondéré discret C_h est défini par

$$(C_h a)(n) = \frac{1}{H(n)} \sum_{k=0}^n h(k)a(k), \quad \text{avec} \quad H(n) = \sum_{k=0}^n h(k) \quad (6.1)$$

Soit $1 < p < \infty$ et

$$\ell^p(h) = \left\{ a = (a(n))_{n \in \mathbb{N}} : a(n) \in \mathbb{C}, \|a\|_{p,h}^p = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)|a(n)|^p < \infty \right\} \quad (6.2)$$

Il est bien connu que l'opérateur de Cesàro sur $\ell^p(h)$ est borné par

$$\|C_h\| \leq \frac{p}{p-1}$$

Voir [47]. Un calcul simple montre que l'opérateur adjoint C_h^* de C_h dans $\ell^q(h)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, est

$$(C_h^* a)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{h(k)a(k)}{H(k)}. \quad (6.3)$$

Dans l'espace de Hilbert $\ell^2(h)$ le produit scalaire est défini par

$$\langle a, b \rangle_h = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)a(n)\overline{b(n)}, \quad a, b \in \ell^2(h). \quad (6.4)$$

6.2 Sous normalité de C_h

Comme C_h et C_h^* sont des opérateurs dans un espace de suites, ils ont des représentations matricielles par rapport à la base $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $\ell^2(h)$

$$C_h = \begin{pmatrix} \frac{h(0)}{H(0)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{h(0)}{H(1)} & \frac{h(1)}{H(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{h(0)}{H(2)} & \frac{h(1)}{H(2)} & \frac{h(2)}{H(2)} & 0 & \cdots \\ \frac{h(0)}{H(3)} & \frac{h(1)}{H(3)} & \frac{h(2)}{H(3)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$C_h^* = \begin{pmatrix} \frac{h(0)}{H(0)} & \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Un calcul direct nous donne les représentations matricielles de C_h^{-1} et C_h^{*-1} par rapport à $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$:

$$C_h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{H(0)}{h(0)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-H(0)}{h(1)} & \frac{H(1)}{h(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{-H(1)}{h(2)} & \frac{H(2)}{h(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{-H(2)}{h(3)} & \frac{H(3)}{h(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

et

$$C_h^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{H(0)}{h(0)} & -\frac{H(0)}{h(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{H(1)}{h(1)} & -\frac{H(1)}{h(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{H(2)}{h(2)} & -\frac{H(2)}{h(2)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{H(3)}{h(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Théorème 33. [24] *L'opérateur de Cesàro pondéré C_h dans $\ell^2(h)$ est sous normal*

Démonstration 53. Soit $C_h^* = K_1 C_h$, où $K_1 = C_h^* C_h^{-1}$.

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots & 1 \\ -\frac{H(0)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots & 1 \\ 0 & -\frac{H(1)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{H(2)}{H(3)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Et pour chaque entier naturel n :

$$K_n = C_h^{*n} C_h^{-n} = C_h^{*(n-1)} K_1 C_h^{1-n}. \quad (6.10)$$

Dans [10], la positivité du T agissant sur ℓ^2 a été prouvé en considérant les déterminants de ses sections finies.

La forme bilinéaire $\langle \cdot, K_1 \cdot \rangle_h$ est définie pour toutes les suites

$$a, b \in \ell^2(h).$$

En utilisant les représentations vectorielles pour a et b , la représentation de la matrice K_1 et le produit scalaire défini en (6.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle a, K_1 b \rangle_h &= \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} h(0) & 0 & & \\ & h(1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \cdots \\ -\frac{H(0)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \\ \vdots \end{pmatrix}^t K_{1h} \begin{pmatrix} b(0) \\ b(1) \\ b(2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Avec

$$K_{1h} = \begin{pmatrix} \frac{h(0)h(1)}{H(1)} & \frac{h(0)h(2)}{H(2)} & \frac{h(0)h(3)}{H(3)} & \cdots \\ -\frac{h(1)H(0)}{H(1)} & \frac{h(1)h(2)}{H(2)} & \frac{h(1)h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & -\frac{h(2)H(1)}{H(2)} & \frac{h(2)h(3)}{H(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\langle e_i, K_1 e_i \rangle_h = \frac{h(i-1)h(i)}{H(i)} \geq 0, \quad i \geq 1.$$

Si $i = n$ alors

$$\langle e_n, K_1 e_n \rangle_h = h(n) \geq 0.$$

Ainsi que pour toutes $a \in \ell^2(h)$, $\langle a, K_1 a \rangle_h \geq 0$.

Et donc K_1 est définie positive.

Nous avons aussi C_h est définie positive donc C_h^{-1} est définie positive et ce pour tout entier naturel n , C_h^{-n} est définie positive.

De même pour C_h^* donc C_h^{*n} est définie positive. Et puisque, pour chaque entier naturel n : $K_n = C_h^{*n-1} K_1 C_h^{1-n}$ est définie positive.

D'après le théorème (7), l'opérateur C_h est sous normal.

□

6.3 Valeurs propres étendues de l'opérateur C_h

Nous allons démontrer dans cette section que l'ensemble des valeurs propres étendues pour l'opérateur de Cesàro pondéré est l'intervalle $[1, \infty)$

Théorème 34. [24]

1. Le spectre ponctuel de C_h est vide.
2. Si $|1 - \lambda| < 1$, alors λ est une valeur propre simple de C_h^* .
3. Le spectre de C_h est le disque fermé $\{\lambda : |1 - \lambda| \leq 1\}$.
4. Le spectre ponctuel de C_h^* est le disque ouvert $\{\lambda : |1 - \lambda| < 1\}$.

Démonstration 54. 1. On observe d'abord que si $C_h f = g$, alors

$$f(0) = g(0) \text{ et si } n \geq 1, \text{ alors}$$

$$C_h f(n) = \frac{1}{H(n)} \sum_{k=0}^n h(k) f(k) = g(n)$$

Et donc

$$\begin{aligned} \frac{h(0)f(0)}{H(n)} + \frac{h(1)f(1)}{H(n)} + \dots + \frac{h(n)f(n)}{H(n)} &= g(n) \\ \frac{h(0)f(0)}{H(n-1)} + \frac{h(1)f(1)}{H(n-1)} + \dots + \frac{h(n-1)f(n-1)}{H(n-1)} &= g(n-1) \end{aligned}$$

Et

$$h(n)f(n) = H(n)g(n) - H(n-1)g(n-1)$$

Avec

$$f(n) = \frac{H(n)g(n)}{h(n)} - \frac{H(n-1)g(n-1)}{h(n)}$$

par conséquent, si $C_h f = \lambda f$

$$f(n) = \lambda \left(\frac{H(n)f(n)}{h(n)} - \frac{H(n-1)f(n-1)}{h(n)} \right)$$

Où

$$\left(\lambda \frac{H(n)}{h(n)} - 1 \right) f(n) = \lambda \frac{H(n-1)f(n-1)}{h(n)}$$

Chaque fois que $n \geq 1$, si m est le plus petit entier pour lequel $f(m) \neq 0$, alors $\lambda = \frac{h(m)}{H(m)}$ de sorte que $0 < \lambda \leq 1$. Il en résulte que si $n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} |f(n)| &= \left| \frac{\lambda \frac{H(n-1)f(n-1)}{h(n)}}{\lambda \frac{H(n)}{h(n)} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda H(n-1)f(n-1)}{\lambda H(n) - h(n)} \right| \geq f(n-1) \end{aligned}$$

Ce qui est impossible pour une fonction non nulle $f \in \ell^2$.

2. On observe d'abord que

$$(C_h^* f)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{h(k)f(k)}{H(k)}$$

Si $C_h^* f = g$ alors

$$\begin{aligned} \frac{h(n)f(n)}{H(n)} + \frac{h(n+1)f(n+1)}{H(n+1)} + \dots &= g(n) \\ \frac{h(n+1)f(n+1)}{H(n+1)} + \frac{h(n+2)f(n+2)}{H(n+2)} + \dots &= g(n+1) \\ \implies f(n) &= \frac{H(n)g(n)}{h(n)} - \frac{H(n)g(n+1)}{h(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Par conséquent, si $C_h^* f = \lambda f$ alors

$$f(n) = \lambda \left(\frac{H(n)f(n)}{h(n)} - \frac{H(n)f(n+1)}{h(n)} \right)$$

Où

$$\lambda \frac{H(n)f(n+1)}{h(n)} = \left(\lambda \frac{H(n)}{h(n)} - 1 \right) f(n)$$

Il en résulte que 0 ne constitue pas une valeur propre de C_h^* (si $\lambda = 0$ alors $f(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) et il en résulte également que

$$f(n+1) = \left(1 - \frac{h(n)}{\lambda H(n)} \right) f(n).$$

Cela implique que si $n \geq 1$ alors

$$f(n) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{h(j)}{\lambda H(j)} \right) f(0).$$

Nous pouvons conclure que toutes les valeurs propres sont simples.

3. Puisque $\|I - C_h\| \leq 1$, le spectre de $(I - C_h)$ est inclus dans le disque fermé $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$, et par conséquent, le spectre de C_h est inclu dans le disque fermé $\{\lambda : |1 - \lambda| \leq 1\}$.

Dans la paragraphe qui précède on suppose que le spectre de $I - C_h^*$ inclu dans le disque ouvert $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$, et donc la même chose est vraie pour le spectre de $I - C_h$. Ceci implique que le spectre de C_h inclu dans le disque ouvert.

4. Compte tenu de ce qui était tout simplement prouvé la preuve de 4, et donc du théorème peut être complété en montrant que si $|1 - \lambda| = 1$ alors λ est pas une valeur propre de C_h^* ou de manière équivalente $1 - \lambda$ est pas une valeur propre de $I - C_h^*$.

□

Théorème 35. [24] L'adjoint de l'opérateur de Cesàro pondéré $C_h^* \in B(\ell^q)$ a un spectre ponctuel riche.

Démonstration 55. Remarquons que $\sigma_p(C_h^*) = D(q/2, q/2)$ est un ouvert connexe.

Chaque $z \in D(q/2, q/2)$ est une valeur propre simple pour C_h^* et un vecteur propre correspondant est la suite $f(z) = (f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations

$$f_0(z) = 1, \quad f_n(z) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{h(j)}{zH(j)} \right), \quad n \geq 1 \quad (6.11)$$

Il est facile de voir que l'application $f : \sigma_p(C_h^*) \longrightarrow \ell^q$ définie par (6.11) est analytique et $f(z) \in \ker(C_h^* - z) / \{0\}$.

La famille de vecteurs propres $\{f(z) : z \in D(q/2, q/2)\}$ est totale dans ℓ^q . En utilisant donc le lemme (6) pour avoir le résultat désiré.

□

Notre résultat est la suivante : si λ est une valeur propre étendue pour C_h^* sur ℓ^q alors λ est réelle et $0 < \lambda \leq 1$.

Lemme 12. [24] Si λ est une valeur propre étendue pour C_h sur ℓ^p alors λ est réel et $\lambda \geq 1$.

Démonstration 56. notons que λ est une valeur propre étendue pour C_h si et seulement si $1/\bar{\lambda}$ est une valeur propre étendue pour C_h^* .

□

Notre prochain objectif est de montrer dans le cas Hilbertien $p = 2$ que si λ est réel et $\lambda \geq 1$, alors λ est une valeur propre étendue pour C_h . Pour montrer que C_h est sous normal en utilisant la construction suivante. Soit μ une mesure positive finie définie sur les sous-ensembles de Borel du plan complexe avec support compact et $H^2(\mu)$ la fermeture des polynômes sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mu)$. Considérons l'opérateur de décalage M_z défini sur l'espace de Hilbert $H^2(\mu)$ par l'expression $(M_z f)(z) = zf(z)$, il existe une mesure positive finie définie sur les sous ensembles de Borel du plan complexe et soutenu sur \bar{D} , et il existe un opérateur unitaire $U : \ell^2 \longrightarrow H^2(\mu)$ tel que $I - C_h = U^* M_z U$, ou en d'autres termes

$$C_h = U^*(I - M_z)U$$

Ensuite, les valeurs propres étendues de C_h sont les valeurs propres étendues de $I - M_z$ et les opérateurs propres étendus de C_h sont en correspondance un à un avec les opérateurs propres étendus de $(I - M_z)$ sous conjugaison avec U , i.e. pour un opérateur non nul X satisfait $(I - M_z)X = \lambda X(I - M_z)$, alors l'opérateur $Y = U^* X U$ satisfait $C_h Y = \lambda Y C_h$.

Théorème 36. [24] Si $\lambda_k = \frac{H(k)}{h(k)} \geq 1$, alors λ_k est une valeur propre étendue pour $I - M_z$ et un opérateur propre étendu correspondant est l'opérateur de composition X_k défini par l'expression

$$(X_k f)(z) = f \left(\frac{H(k) - h(k)}{H(k)} + \frac{zh(k)}{H(k)} \right). \quad (6.12)$$

Où $H(k), h(k)$ défini par (6.1) et $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration 57. Soit $f_n = X_k z^n = \left(\frac{H(k) - h(k)}{H(k)} + \frac{zh(k)}{H(k)} \right)^n$.

Nous avons

$$f_{n+1} = \left(\frac{H(k) - h(k)}{H(k)} + \frac{zh(k)}{H(k)} \right) f_n$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{H(k)}{h(k)} f_{n+1} &= \left(\frac{H(k)}{h(k)} - 1 + z \right) f_n \\ &= \left(\frac{H(k)}{h(k)} - 1 + M_z \right) f_n \\ &= \frac{H(k)}{h(k)} f_n - (I - M_z) f_n \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$(I - M_z) f_n = \frac{H(k)}{h(k)} (f_n - f_{n+1})$$

Alors

$$\begin{aligned} (I - M_z) X_k z^n &= \frac{H(k)}{h(k)} (f_n - f_{n+1}) \\ &= \frac{H(k)}{h(k)} (X_k z^n - X_k M_z z^n) \\ &= \frac{H(k)}{h(k)} X_k (I - M_z) z^n, \end{aligned}$$

Et puisque la famille $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble total dans $H^2(\mu)$ et $\lambda_k = \frac{H(k)}{h(k)}$ il en résulte que

$$(I - M_z) X_k = \lambda_k X_k (I - M_z).$$

□

Corollaire 7. Si $\lambda_k = \frac{H(k)}{h(k)} \geq 1$ alors λ_k est une valeur propre étendue pour l'opérateur de Cesàro pondéré C_h dans ℓ^2 .

Bibliographie

- [1] Hasan Alkanjo. *On extended eigenvalues and extended eigenvectors of truncated shift*. Concrete Operators, 1 :19–27, 2013.
- [2] Constantin Apostol. *Universal quasinilpotent operators*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 25(2) :135–138, 1980.
- [3] Hari Bercovici. *Operator theory and arithmetic in H^∞* , volume 26 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [4] Animikh Biswas, Alan Lambert, and Srdjan Petrovic. *Extended eigenvalues and the Volterra operator*. Glasg. math. J.,44(3) :521-534,2002.
- [5] Animikh Biswas, Srdjan Petrovic. *On extended eigenvalues of operators*. Integral Equations Operator Theory, 55(2) :233-248,2006.
- [6] Paul S. Bourdon and Joel H. Shapiro. *Intertwining relations and extended eigenvalues for analytic Toeplitz operators*. Illinois J. Math., 52(3) :1007-1030,2008.
- [7] J. Bram, Subnormal operators, Duke Math. J., (1955), 75-94.
- [8] Scott Brown. *Connections between an operator and a compact operator that yield hyperinvariant subspaces*. J. Operator Theory, 1(1) :117–121, 1979.
- [9] Arlen Brown and P. R. Halmos. *Algebraic properties of Toeplitz operators*. J. Reine Angew. Math., 213 :89–102, 1963/1964.
- [10] A. Brown,P.R. Halmos, A. L. Shield. *Cesàro operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), 26 :125–137, 1965.
- [11] G. Cassier and H. Alkanjo. *Extended spectrum and extended eigenspaces of quasi-normal operators* , Math. FA. arXiv=1507-02901v2, 27 Nov 2015.

- [12] G. Cassier and H. Alkanjo. *Extended spectrum, extended eigenspaces and normal operators*. J. Math. Anal. Appl, 418(1) :305–316, 2014.
- [13] Manuel D. Contreras and Alfredo G. Hernández-Díaz. *Weighted composition operators on Hardy spaces*. J. Math. Anal. Appl., 263(1) :224–233, 2001.
- [14] John B. Conway, *The theory of subnormal operators*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume : 36, 1991.
- [15] John B. Conway. *Functions of one complex variable*. II, volume 159 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [16] John B. Conway. *A course in operator theory*, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [17] Carl C. Cowen. *The commutant of an analytic Toeplitz operator*. Trans. Amer. Math. Soc., 239 :1–31, 1978.
- [18] James A. Deddens. *Intertwining analytic Toeplitz operators*. Michigan Math. J., 18 :243–246, 1971.
- [19] James A. Deddens. *Analytic Toeplitz and composition operators*. Canad. J. Math., 24 :859–865, 1972.
- [20] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators*. Part I. Wiley Classics Library. John Wiley Sons, Inc., New York, 1988.
- [21] John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 236 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, first edition, 2007.
- [22] Paul Richard Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17.
- [23] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya. *Inequalities*, Cambridge University Press 1934.
- [24] A. Hechifa, A. Mansour. *The weighted Cesàro operator $C_h \in \ell^2(h)$ is subnormal*, (En préparation)
- [25] M. T. Karaev. *On extended eigenvalues and extended eigenvectors of some operator classes*. Proc. Amer. Math. Soc., 134(8) :2383–2392 (electronic), 2006.
- [26] H. W. Kim, R. Moore, and C. M. Pearcy. *A variation of Lomonosov's theorem*. J. Operator Theory, 2(1) :131–140, 1979.

- [27] T. L. Kriete, III and David Trutt. *The Cesàro operator in l^2 is subnormal*. Amer. J. Math., 93 :215–225, 1971.
- [28] M. Lacruz, F. Saavedra, S. Petrovic and O. Zabeti. *Extended eigenvalues for Cesàro operators*, Math. FA. Arxi=1403-4844V1
- [29] Alan Lambert. *Hyperinvariant subspaces and extended eigenvalues*. New York J. Math., 10 :83–88, 2004.
- [30] G. M. Leibowitz. *Spectra of finite range Cesàro operators*, University of Szeged 1971
- [31] V. Lomonosov. *Invariant subspaces for operators commuting with compact operators*. J. Operator Theory, 7(1) :213–214, 1973.
- [32] M. M. Malamud. *On reproducing subspaces of Volterra operators*. Dokl. Akad. Nauk, 351(4) :454–458, 1996.
- [33] M. M. Malamud. *Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators*. In Differential and integral operators (Regensburg, 1995), volume 102 of Oper. Theory Adv. Appl., pages 143–167. Birkhäuser, Basel, 1998.
- [34] A. Mansour, A. Hechifa, *Some interesting properties of finite continuous Cesàro operators*. AJMAA , Vol. 13, No. 1, Art. 10, pp. 1-6, 2016.
- [35] R. Nagel . *Towards a "Matrix theory" for unbounded operator matrices*, Math.Z, 201 (2009), 57-68.
- [36] Nikolai K. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading*. Vol.1 and 2, volume 92 and 93 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Model operators and systems, Translated from the French by Andreas Hartmann and revised by the author.
- [37] Vladimir Operstein. *Full Muntz theorem in $L_p[0, 1]$* . J. Approx. Theory, 85(2) :233–235, 1996.
- [38] Pierre Petitcunot. *Problèmes de similarité et spectre étendu d'un opérateur*. Thèse de doctorat, Université de Lille, 2008.
- [39] Srdjan Petrovic. *On the extended eigenvalues of some Volterra operators*. Integral Equations Operator Theory, 57(4) :593–598, 2007.
- [40] B. E. Rhoades, *Spectra of some Hausdorff operators*, University of Szeged, 1969

- [41] Marvin Rosenblum. *On the operator equation $BX - XA = Q$* . Duke Math. J., 23 :263–269, 1956.
- [42] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [43] John V. Ryff. *Subordinate H^p functions*. Duke Math. J., 33 :347–354, 1966.
- [44] Donald Sarason. *Free interpolation in the Nevanlinna class*. Linear and complex analysis, volume 226 of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, pages 145–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [45] A. L. Shields and L. J. Wallen. *The commutants of certain Hilbert space operators*. Indiana Univ. Math. J., 20 :777-788, 1970/1971.
- [46] Tavan T. Trent, *New conditions for subnormality* , Pacific Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 2, April, 1981
- [47] Julia Wagner, *On the cesàro operator in weighted l^2 sequence space and the generalized concept of normality*, Ann. Funct. Anal. 4 (2013), no. 2, 1-11