

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR - ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



Faculté: Sciences de l'ingénieur

Année: 2014

Département: Electronique

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle

Intitulée

Étude statistique de la diffraction des ondes
électromagnétiques par des surfaces rugueuses naturelles

Option: Télécommunication, instrumentation et traitement de l'information

Par: BERROUK Abla

DIRECTEUR DE THÈSE: LAFIFI Saddek Pr. Université de Annaba

DEVANT LE JURY

PRÉSIDENT: TOUMI Salah Pr. Université de Annaba

EXAMINATEURS: GHERS Mokhtar Pr. Université de Annaba

BOUFELFEL Ahmed Pr. Université de Guelma

SAOUCHI Kaddour MCA Université de Annaba

ملخص

ترتكز هذه الأطروحة على دراسة إحصائية لإنتشار الموجات الكهرومغناطيسية فوق بنيات متعددة الطبقات مشوهة عشوائيا. نقوم بدراسة هدفين رئيسيين، الأول يشتمل بنمذجة تحليلية للإنتشار فوق بنيات أحادية البعد، في حين أن الثاني يعتني بدراسة نفس المشكلة في حالة البنيات ثنائية الأبعاد. باستخدام طرق تقريبية، يكون الهدف تحديد المعادلات التحليلية للبعد الزاوي المنعكس في حالة أحادية البعد وكذا ثنائية البعد. هذه المعادلات تسمح فيما بعد من تقديم دراسة إحصائية جد مفصلة للحقول المنتشرة على مسافة بعيدة وتمييز معامل الازدواجية المنتشر، و يعرض في نفس الوقت كل من معادلات كثافة الاحتمال. و لأجل تقييم النتائج النظرية المتحصل عليها، نقوم بمحاكاة كمية لحالات محددة و خاصة، ونقوم أيضا بدراسة تأثير العديد من المعلمات على الإشارة المنتشرة. نعتني بتبيين أن الطرق المقترحة تعمم على وجه التحديد مشكلة الإنتشار وتؤدي إلى حل مناسب بالمقارنة مع الطرق الحالية.

Abstract

This thesis focuses on the statistical study of the diffraction of electromagnetic waves by randomly rough multilayer structures. Two main objectives are studied; the first consists in making an analytical modeling of diffraction by one-dimensional structures (1D), while the second concerns to study the same problem in the case of two-dimensional structures (2D). Using approached methods, the goal is to determine the analytical expressions of the amplitudes diffracted in the case monodimensional as much as two-dimensional. These expressions have made it possible thereafter to present a well detailed statistical study of the diffracted fields in far distance and to characterize the diffracted bistatic coefficient, and to expose in the same time the functions of the densities of probability. In order to evaluate our theoretical results, we make numerical simulations of the typical cases, and we study the influence of several parameters on the diffracted signal. We show that the methods suggested precisely generalize the problem of diffraction and lead to an appropriate adequate solution compared with the existing methods.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude statistique de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures multicouches rugueuses aléatoirement. Deux grands objectifs sont étudiés, le premier consiste à faire une modélisation analytique de la diffraction par des structures monodimensionnelles (1D), tandis que le deuxième concerne l'étude du même problème dans le cas des structures bidimensionnelles (2D). Utilisant des méthodes approchées, le but est la détermination des expressions analytiques des amplitudes diffractées dans le cas monodimensionnel autant que bidimensionnel. Ces expressions ont permis par la suite de présenter une étude statistique bien détaillée des champs diffractés à grande distance et de caractériser le coefficient bistatique diffracté, et d'exposer, en même temps, les fonctions des densités de probabilité. Afin d'évaluer nos résultats théoriques, nous faisons des simulations numériques des cas particuliers, et nous étudions l'influence de plusieurs paramètres sur le signal diffracté. Nous montrons que les méthodes proposées généralisent justement le problème de la diffraction et conduisent à une solution adéquate comparant aux méthodes existantes.

Remerciements

Toute ma reconnaissance va a mon encadreur qui avez efficacement dirigé au jour le jour ce travail et lui avez permis d'aboutir : Mon Professeur LAFIFI Saddek, Son écoute et sa confiance ont été des éléments moteurs dans l'accomplissement de cette thèse qui m'ont motivée et encouragée. Merci pour votre soutien.

Je témoigne ma sincère gratitude au professeur Richard Dusséaux qui avoir le mérite de réaliser une partie très importante de ce travail. Merci beaucoup pour votre participation.

Je tiens également à remercier le professeur TOUMI Salah président de jury et directeur de laboratoire d'étude et de recherche en instrumentation et en communication d'Annaba (L.E.R.I.C.A). Ses conseils précieux et ses encouragements au niveau de laboratoire durant les années de recherches ont été une raison de réussir.

J'exprime mes sincères et respectueux remerciements au professeur GHERS Mokhtar pour avoir accepté de juger ce travail et assurer la tâche d'examineur.

À BUFELFEL Ahmed Professeur à l'université du Guelma: je suis très touché de l'honneur que vous me faites en acceptant d'examiner cette thèse et de prendre part à ce jury.

J'adresse également tous mes remerciements au Monsieur SAOUCHI Kaddour pour avoir accepté de participer à ce jury et d'examiner mon travail.

J'exprime toute ma gratitude aux membres du laboratoire LERICA pour nos multiples discussions durant ces quelques années passées.

Et puis, bien sûr, je n'oublie pas tous les professeurs et les personnels du département d'électronique.

Je remercie également toute ma famille et particulièrement mon père et ma mère.

Liste des tableaux

<i>Tableau III.1. Paramètres physiques des milieux i.....</i>	<i>43</i>
<i>Tableau III.2. Paramètres statistiques des interfaces i.....</i>	<i>43</i>
<i>Tableau V.1. Permittivités relatives des différents milieux.....</i>	<i>83</i>
<i>Tableau V.2. Longueurs de corrélation dans le cas isotrope et anisotrope.....</i>	<i>84</i>

Liste des figures

Figure I.1. Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents	12
Figure I.2. Polarisation d'onde électromagnétique (a) polarisation horizontale, (b) polarisation verticale.....	13
Figure II.1. Profil d'une structure multicouche monodimensionnelle rugueuse aléatoirement.....	18
Figure III.1. Intensité cohérente en fonction d'angle d'incidence θ_0 par SPM et SSA (a) configuration 1: $\epsilon_1 = 0.036$, $\epsilon_2 = 0.027$, $\epsilon_3 = 0.0225$ (b) configuration 2: $\epsilon_1 = 0.060$, $\epsilon_2 = 0.045$, $\epsilon_3 = 0.0375$	44
Figure III.2. Intensité incohérente en fonction d'angle d'observation, en incidence normale (a) configuration 1: $\epsilon_1 = 0.036$, $\epsilon_2 = 0.027$, $\epsilon_3 = 0.0225$, (b) configuration 2: $\epsilon_1 = 0.060$, $\epsilon_2 = 0.045$, $\epsilon_3 = 0.0375$	45
Figure III.3. Intensité incohérente en fonction d'angle d'observation en incidence oblique, par SPM (a) polarisation $E_{//}$, (b) polarisation $H_{//}$	46
Figure III.4. Intensité incohérente en fonction d'angle d'observation en incidence oblique, par SSA (a) polarisation $E_{//}$, (b) polarisation $H_{//}$	47
Figure III.5. Effet de la corrélation sur l'intensité incohérente, polarisation $E_{//}$, pour $L \rightarrow \infty$, $\theta_0 = 60^\circ$ (a) par SPM (b) par SSA.....	48
Figure III.6. Effet de la corrélation sur l'intensité incohérente, polarisation $H_{//}$, pour $L \rightarrow \infty$, $\theta_0 = 60^\circ$ (a) par SPM (b) par SSA.....	49
Figure III.7. Intensité rétrodiffusée en fonction d'angle d'incidence par SPM et SSA. (a) configuration 1: $\epsilon_1 = 0.036$, $\epsilon_2 = 0.027$, $\epsilon_3 = 0.0225$, (b) configuration 2: $\epsilon_1 = 0.060$, $\epsilon_2 = 0.045$, $\epsilon_3 = 0.0375$	50
Figure III.8. Intensité rétrodiffusée en fonction d'angle d'incidence et l'effet d'épaisseur, $d_2 = 0.25$ (a) par SPM (b) par SSA	51
Figure III.9. Densité de probabilité de module pour différentes longueurs de déformation, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.25$, $l_1 = 0.3$, $l_2 = 0.4$, $l_3 = 0.5$, $\epsilon_1 = 0.036$, $\epsilon_2 = 0.027$, $\epsilon_3 = 0.255$, (a) en polarisation $E_{//}$, (b) en polarisation $H_{//}$	52
Figure III.10. Erreur relative entre la densité de probabilité de la phase et la loi uniforme pour différentes longueurs de déformation, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.25$, $l_1 = 0.3$, $l_2 = 0.4$, $l_3 = 0.5$, $\epsilon_1 = 0.036$, $\epsilon_2 = 0.027$, $\epsilon_3 = 0.255$ (a) en polarisation $E_{//}$, (b) en polarisation $H_{//}$	53

<i>Figure III.11. Schéma Effet de la corrélation sur la densité de probabilité du module, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.25$, $l_1 = 0.3$, $l_2 = 0.4$, $l_3 = 0.5$, $r_1 = 0.036$}, $r_2 = 0.027$},, $r_3 = 0.255$ (a) en polarisation $E_{//}$, (b) en polarisation $H_{//}$.....</i>	<i>54</i>
<i>Figure IV.1. Profil d'une structure multicouche bidimensionnelle rugueuse aléatoirement.....</i>	<i>58</i>
<i>Figure V.1. Intensité cohérente en fonction d'angle d'incidence (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv).....</i>	<i>85</i>
<i>Figure V.2. Effet de la longueur de déformation sur l'intensité incohérente, interfaces isotropes et non corrélées, (a) polarisation horizontale directe, (b) polarisation verticale directe, (c) polarisation horizontale croisée, (d) polarisation verticale croisée</i>	<i>86</i>
<i>Figure V.3. Effet de la longueur de déformation sur l'intensité incohérente, interfaces isotropes et corrélées, (a) polarisation horizontale directe, (b) polarisation verticale croisée</i>	<i>86</i>
<i>Figure V.4. Intensité incohérente pour différents angles d'incidence, interfaces isotropes et non corrélées, $w_0 = 0^\circ$, $w = 45^\circ$, $L \rightarrow \infty$, (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (hv).....</i>	<i>87</i>
<i>Figure V.5. Effet de l'angle d'incidence sur l'intensité incohérente en polarisation (vv), cas des interfaces isotropes (a) non corrélées, (b) corrélées</i>	<i>88</i>
<i>Figure V.6. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente en polarisation (hh), (a) par SPM, (b) par SSA</i>	<i>88</i>
<i>Figure V.7. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente en polarisation (hv), (a) par SPM, (b) par SSA</i>	<i>89</i>
<i>Figure V.8. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence, (a) en polarisation (vv), (b) en polarisation (hv)</i>	<i>89</i>
<i>Figure V.9. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (hh) (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes, (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes</i>	<i>91</i>
<i>Figure V.10. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (vv) (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes, (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes</i>	<i>92</i>
<i>Figure V.11. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (vh) (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes, (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes</i>	<i>93</i>

<i>Figure V.12. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (hv) (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes, (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes</i>	94
<i>Figure V.13. Intensité rétrodiffusée en fonction de l'angle d'incidence, interfaces isotropes, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.5$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.3$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.4$, $l_{x3} = l_{y3} = 0.5$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0.050$, $L \rightarrow \infty$, (a) cas des interfaces corrélées (b) cas des interfaces non Corrélées</i>	95
<i>Figure V.14. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité rétrodiffusée, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.5$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0.050$, $L \rightarrow \infty$, (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv)</i>	96
<i>Figure V.15. Effet de la hauteur quadratique moyenne sur l'intensité rétrodiffusée, interfaces isotropes et non corrélées, $d_1 = 0$, $d_2 = 0.35$, $d_3 = 0.5$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.3$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.4$, $l_{x3} = l_{y3} = 0.5$, $L \rightarrow \infty$, (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv)</i>	96
<i>Figure V.16. Densité de probabilité du module pour différentes longueurs de déformation, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.5$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.3$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.4$, $l_{x3} = l_{y3} = 0.5$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0.050$, (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv)</i>	97
<i>Figure V.17. Erreur relative entre la loi uniforme et la densité de probabilité de la phase pour différentes longueurs de déformation, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.5$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.3$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.4$, $l_{x3} = l_{y3} = 0.5$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0.050$, (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv)</i>	98
<i>Figure V.18. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur la densité de probabilité du module, $L = 20$. (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vh), (c) en polarisation (vv), (d) en polarisation (hv)</i>	99

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	3
CHAPITRE I: Équations de Maxwell et propagation des ondes électromagnétiques	
I.1 Introduction.....	7
I.2 Ondes électromagnétiques.....	7
I.3 Phénomène de diffraction et coefficients de Fresnel.....	13
I.4 Conclusion.....	15
CHAPITRE II: Champs diffractés par une structure multicouche monodimensionnelle rugueuse aléatoirement	
II.1 Introduction.....	17
II.2 Géométrie du problème.....	17
II.3 Amplitudes diffractées et développement de Rayleigh.....	20
II.4 Méthodes de résolution.....	24
II.5 Méthode de petite perturbation (SPM).....	25
II.6 Méthode de faible pente (SSA).....	30
CHAPITRE III: Étude statistique des champs diffractés par une structure multicouche 1D rugueuse aléatoirement	
III.1 Introduction.....	33
III.2 Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente basées sur SPM	33
III.3 Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente basées sur SSA.....	37
III.4 Densités de probabilité.....	39
III.5 Application numérique sur une structure 1D composée de quatre couches ($N=4$).....	42
III.6 Conclusion.....	54

CHAPITRE IV: Champs diffractés par une structure multicouche bidimensionnelle rugueuse aléatoirement

IV.1	Introduction	57
IV.2	Formulation du problème.....	57
IV.3	Expressions des champs diffractés.....	59
IV.4	Conditions aux limites	62
IV.5	Méthode de résolution (SPM).....	65
IV.6	Méthode de résolution (SSA).....	73

CHAPITRE V: Étude statistique des champs diffractés par une structure multicouche 2D rugueuse aléatoirement

V.1	Introduction.....	75
V.2	Propriétés statistiques des amplitudes et de l'intensité diffractée basées sur SPM	75
V.3	Intensité diffractée cohérente et incohérente basées sur SSA.....	80
V.4	Densités de probabilité.....	81
V.5	Application numérique sur une structure 2D composée de quatre couches (N=4).....	83
V.6	Conclusion.....	99

CONCLUSION GÉNÉRALE.....100

Annexe A. Variance, covariance de la partie réelle et imaginaire des fonctions aléatoires.....102

Annexe B. Cas particulier d'une structure de quatre couches 1D, (N=4).....105

Annexe C. Cas particulier d'une structure de quatre couches 2D, (N=4).....110

BIBLIOGRAPHIE.....117

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dès le début du siècle, l'étude du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses a connu une grande expansion dans des nombreux domaines tels que l'acoustique, l'optique, et la télédétection. Malgré la différence entre ces domaines, le principe de résolution de ce problème actuel reste le même.

Nous intéressons au domaine de la télédétection, où l'objectif est d'analyser l'écho radar après son interaction avec une surface de la terre (sol agricole, mer, désert...etc), et d'essayer d'obtenir sa conformation géométrique et ses paramètres caractéristiques, toutefois la résolution de ce problème inverse appelle d'abord à la résolution du problème direct.

Ce thème de recherche a été largement étudié par plusieurs chercheurs [1-14] dans le but de résoudre le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoirement. La modélisation de ce problème s'effectue soit par l'application des méthodes numériques, dites exactes, soit par des méthodes asymptotiques, dites approchées.

Référencé par [15, 16], un panorama des méthodes numériques a été exposé afin de résoudre le problème de la diffraction par une seule et par deux surfaces monodimensionnelles rugueuses aléatoirement. La diffraction par une seule surface a été aussi étudiée par la méthode exacte en coordonnées curvilignes non orthogonales qui est connue sous le nom de la méthode C [17, 18], et par l'application de la méthode des moments (MOM) [19, 20], aussi que par la méthode de Rayleigh [21]. Une série de quelques méthodes analytiques a été présentée dans [22, 23], où la diffraction par deux surfaces est étudiée dans le cas monodimensionnel [24], et dans le cas bidimensionnel [25] par l'application de la méthode analytique de petite perturbation (SPM, Small Perturbation Method), aussi par l'approximation de Kirchhoff (KA, Kirchhoff Approximation) [26, 27], et par l'approximation de faible pente (SSA, Small Slope Approximation) [28]. En plus, dans la référence [29] les auteurs ont étudié le cas de trois interfaces bidimensionnelles, mené d'une comparaison entre la méthode exacte de SEBCM (Stabilized Extended Boundary Condition Method) et la méthode approchée SPM. Plus récemment, la recherche se dirige vers la résolution du problème dans le cas des structures multicouches. En particulier l'étude proposée dans [30, 31] considère une recherche très proche de notre problème, bien que la différence soit montrée dans les raisonnements et les méthodes appliquées. Malgré cette riche avancée de la recherche, l'analyse des champs diffractés et la modélisation de la diffraction par des surfaces déformées aléatoirement reste néanmoins un sujet discutabile.

En effet, si le problème a été bien compris dans le cas d'une simple ou de deux surfaces, plates ou rugueuses, périodiquement ou aléatoirement, dans le cas monodimensionnel ou bien bidimensionnel, on a cependant essayé d'étudier le problème en un domaine plus large et plus développé que ceux présentés ci-dessus. On s'est donc intéressé dans cette thèse à proposer une modélisation analytique de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures multicouches rugueuses aléatoirement, en appliquant deux méthodes approchées, la méthode de petite perturbation et la méthode de faible pente. Nous réalisons notre étude en choisissant deux différentes géométries. Dans un premier temps, nous nous intéressons à la diffraction par des structures multicouches monodimensionnelles (1D), et nous étudions par la suite le problème le plus compliqué, de la diffraction par des structures bidimensionnelles (2D).

D'abord, pour bien comprendre le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures naturelles, il est nécessaire d'introduire les notions de propagation d'une onde électromagnétique. En effet, on ne peut pas dépasser les équations de Maxwell qui représentent la base de résolution de tous les problèmes de propagation des ondes, et que l'on trouve exposées dans tous les ouvrages d'électromagnétisme et d'optique [32-35]. Pour cela, dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions d'électromagnétisme et les fondements de la propagation dans l'espace et dans des milieux diélectriques. Ces notions électromagnétiques sont également rappelées comme point de départ de la résolution des problèmes qui sont étudiés par la suite. Nous présentons les conditions aux limites pour lesquelles on peut assurer le passage des ondes entre deux milieux différents. Mieux encore, nous déduisons brièvement le principe de Fresnel sur l'interaction des ondes électromagnétiques avec des structures planes.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la diffraction des ondes par des structures multicouches monodimensionnelles rugueuses aléatoirement. Nous présentons selon le développement de Rayleigh, les expressions des champs diffractés dans tous les milieux. Par l'application des conditions aux limites et en accord avec les méthodes SPM et SSA, qu'elles sont appliquées pour des hauteurs quadratiques faibles devant la longueur d'onde, nous cherchons à obtenir l'expression analytique des amplitudes des champs diffractés par une telle structure dans le cas d'absence et de présence de la rugosité.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude statistique détaillée des champs diffractés par la géométrie proposée. Ceci nous conduit au coefficient bistatique et à l'intensité cohérente et incohérente. De plus, notre étude est élargie en présentant la fonction de la densité de probabilité. Pour bien valider nos résultats analytiques, nous procédons à une application numérique d'un cas particulier d'une structure naturelle composée de quatre couches monodimensionnelles, et nous montrons l'effet de quelques paramètres sur l'amplitude du signal détecté. Afin de montrer l'efficacité et la précision de la méthode SPM, nous comparons nos résultats obtenus par cette dernière avec des résultats

numériques obtenus par l'approximation de faible pente (SSA), disponible au niveau de plusieurs littératures [28], [36-41].

Dans le quatrième chapitre, qui constitue l'esprit de cette thèse, nous étendons l'étude du problème monodimensionnel au problème bidimensionnel. En tenant compte des points développés dans le troisième chapitre, nous essayons de confirmer la validité des méthodes analytiques proposées de telle manière qu'elles puissent traiter le cas le plus compliqué. Ainsi, l'objectif de ce chapitre est de présenter une résolution analytique du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures bidimensionnelles rugueuses aléatoirement. En absence et en présence de rugosité, on montre les expressions des champs diffractés qui nous conduisent aux expressions analytiques des amplitudes diffractées en s'appuyant sur la méthode SPM et la méthode SSA, ces dernières nous permettent par la suite pour réaliser l'étude statistique.

Le cinquième chapitre est consacré à étudier statiquement les champs diffractés par des structures bidimensionnelles rugueuses aléatoirement. Afin de valider l'approche proposée, nous réalisons plusieurs simulations dans le cas d'une structure composée de quatre couches naturelles bidimensionnelles rugueuses aléatoirement, en faisant varier des grandeurs comme la hauteur de rugosité, la longueur de déformation, l'angle d'incidence ainsi que d'autres paramètres. Nous essayons par la suite d'exposer l'accord entre les deux méthodes SPM et SSA, et pour bien montrer l'efficacité de notre modèle, nous faisons une comparaison avec les résultats exposés dans [30].

Enfin, nous présentons dans la conclusion le travail effectué pendant les quatre années de recherche. Nous discutons les résultats obtenus lors de l'étude de la diffraction par des structures multicouches rugueuses aléatoirement. On présente un aperçu de tous les résultats exposés au niveau des chapitres, on montre l'efficacité et la validité de modèle proposé dans le cas des structures monodimensionnelles autant que bidimensionnelles et l'influence de quelques paramètres sur le rendement des informations radar détectées.

CHAPITRE I

Équations de Maxwell et propagation des ondes électromagnétiques

- I.1 Introduction
- I.2 Ondes électromagnétiques
- I.3 Phénomène de diffraction et coefficients de Fresnel
- I.4 Conclusion

I.1 Introduction

La découverte au XIX^e siècle que les ondes des champs électromagnétiques peuvent voyager dans l'espace ouvre la voie à l'évolution de plusieurs moyens, particulièrement, en télécommunication comme le télégraphe sans fil, la radio et la télévision. De plus, on doit la théorie selon laquelle la lumière est une onde électromagnétique au physicien écossais James Clerk Maxwell, qui allait permettre l'unification de tous les phénomènes de l'électricité et du magnétisme, incluant la prédiction théorique des ondes électromagnétiques. Ainsi, la théorie de l'électromagnétisme repose notamment sur quatre équations qui constituent un résumé brillant des phénomènes électromagnétiques, et qui sont connues sous l'appellation équations de Maxwell [8, 32], et qui sont tout aussi fondamentales que les lois de Newton.

Nous rappelons dans ce premier chapitre quelques notions d'électromagnétisme, nous nous intéressons aux équations de Maxwell. Puis nous donnons le comportement de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et dans les milieux diélectriques comme les surfaces naturelles, ensuite nous présentons un exemple qui permettra de comprendre les phénomènes de réflexion et de diffraction. Ces notions sont utilisées dans les chapitres ultérieurs lors de la modélisation du problème de la diffraction par des structures rugueuses.

I.2 Ondes électromagnétiques

Une onde électromagnétique est une onde ayant un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{H} , qui sont dirigés perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de la propagation de l'onde, pour cette raison ils sont dites transversales. Et d'après Maxwell, ces champs sont déterminés, dans le cas général, à partir des densités de charge et de courant, par quatre équations fondamentales, qui sont valables en tout point de l'espace et quel que soit le milieu. Dans cette section on s'intéresse à la présentation des équations de Maxwell sous leur forme différentielle.

I.2.1 Équations de Maxwell

- **L'équation de Maxwell-Faraday** : cette équation exprime le rotationnel du champ électrique en fonction de la dérivée temporelle du champ magnétique:

$$\overline{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

- **L'équation de Maxwell-Thomson** : cette équation relie la divergence du champ magnétique à un terme de source identiquement nul:

$$\text{Div}\vec{B} = 0 \quad (\text{I.2})$$

- **L'équation de Maxwell-Ampère** : L'équation de Maxwell-Ampère énonce que les champs magnétiques peuvent être générés de deux manières : par les courants électriques (c'est le théorème d'Ampère) et par la variation d'un champ électrique (c'est l'apport de Maxwell sur cette loi qu'on appelle le courant de déplacement), donc:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

- **L'équation de Maxwell-Gauss** : L'équation de Maxwell-Gauss donne la divergence du champ électrique en fonction de la densité de charge électrique:

$$\text{Div}\vec{D} = \dots \quad (\text{I.4})$$

Les vecteurs \vec{E} et \vec{H} désignent respectivement, le champ électrique et magnétique d'unité V/m (Volt/mètre) et A/m (Ampère/mètre). \vec{D} et \vec{B} désignent respectivement la densité de déplacement et de flux magnétique, exprimées en C/m² (Coulomb/mètre carré) et en W/m² (Weber/mètre carré ou bien aussi Tesla).

Les sources \dots et \vec{J} qui sont respectivement la densité de charge et de courant relient le champ électrique et magnétique d'unités C/m³ (Coulomb/mètre cube) et A/m² (Ampère/mètre carré).

On peut déduire à partir de (I.3) l'équation de conservation de la charge, et on écrit:

$$\text{Div}\vec{J} = -\frac{\partial \dots}{\partial t} \quad (\text{I.5})$$

I.2.2 Relations de constitution

Néanmoins, pour résoudre les équations de Maxwell précédentes qui sont différentielles, on doit les ajouter à des équations exprimant les corrélations existantes entre la densité de flux électrique \vec{D} et du champ électrique \vec{E} , et entre la densité de flux magnétique \vec{B} et du champ magnétique \vec{H} et aussi bien entre le courant électrique \vec{J} et le champ électrique \vec{E} . Ces relations s'appellent les relations de constitution, et dépendent de propriétés du milieu considéré, pour un milieu linéaire (un milieu où les relations de constitution sont linéaires en fonction de \vec{E} et \vec{H}), homogène (les propriétés du milieu sont les mêmes en tous points de l'espace), et isotrope (les propriétés physiques du milieu sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace), ces équations de constitution impliquent l'utilisation de trois constantes: ν (permittivité diélectrique), \sim (perméabilité magnétique) et \dagger (conductivité électrique), donc on écrit:

$$\vec{D} = \nu \vec{E} \quad (\text{I.6})$$

$$\vec{B} = \sim \vec{H} \quad (\text{I.7})$$

$$\vec{j} = \dagger \vec{E} \quad (\text{I.8})$$

Toutes ces équations précédentes, sont valables dans tous les milieux, si on est dans le vide, quand les ondes électromagnétiques peuvent se propager sans aucun support matériel, nous avons:

$$\nu = \nu_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ (Farad/mètre)} \quad (\text{I.9})$$

$$\sim = \sim_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ (Henri/mètre)} \quad (\text{I.10})$$

$$\dagger = 0 \quad (\text{I.11})$$

Pour un milieu diélectrique sans charge, isotrope et sans perte, ces constantes s'expriment par:

$$\nu_r = \nu / \nu_0 = n^2 \quad (\text{I.12})$$

$$\sim_r = \sim / \sim_0 \quad (\text{I.13})$$

Où ν_0 et \sim_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité dans le vide, ν_r et \sim_r sont respectivement la permittivité et la perméabilité relative du milieu diélectrique. n représente l'indice de réfraction du milieu défini en tant que ($n = c/\nu$), où ν est la vitesse de la lumière dans le milieu et c la vitesse constante de la lumière dans le vide ($c = 1/\sqrt{\nu_0 \sim_0}$). Comme la lumière se déplace la plus vite dans le vide ($n = 1$), l'indice de réfraction d'un milieu diélectrique est toujours égal ou supérieur à 1.

Finalement, en absence de charge et de courant électrique ($\dots = 0$ et $j = 0$), et supposant un milieu diélectrique isotrope, sans perte et non magnétique ($\sim \approx 1$) caractérisé par la grandeur ν_r , que nous allons considérer dans cette étude, on réécrit les équations de Maxwell où l'on tient compte des propriétés de ce milieu:

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.14})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\overline{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.16})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (\text{I.17})$$

Ces équations peuvent admettre des solutions non nulles. Cela signifie que le champ électromagnétique peut exister même en absence des charges.

I.2.3 Propagation d'onde électromagnétique et équation de Helmholtz

Les équations de Maxwell décrites précédemment (I.14-I.17) forment un ensemble d'équations aux dérivées partielles couplées, reliant les quatre grandeurs vectorielles fondamentales du champ électromagnétique. Si on souhaite cependant effectuer une étude directe de champ électrique et magnétique, on peut transformer les équations de Maxwell en des équations où ne figurent plus soit \vec{E} , soit \vec{H} , autrement dit des équations résolues en \vec{E} ou \vec{H} .

Partant de (I.1) et (I.7) on cherche à obtenir l'équation propre pour le champ électrique \vec{E} , en introduisant le rotationnel:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} \quad (\text{I.18})$$

Et; d'après (I.3), (I.6) et (I.18) on trouve que:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{I.19})$$

Sachant que l'identité vectorielle nous donne en outre que:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (\text{I.20})$$

On substitue (I.20) dans (I.19), on obtient l'équation de propagation du champ électrique \vec{E}

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.21})$$

Cette équation d'onde inhomogène montre qu'un champ électrique est produit par des charges et aussi par des courants électriques. En absence de ces termes de sources, on obtient une équation d'onde homogène de deuxième ordre, que l'on appelle équation de Helmholtz. Donc l'équation de propagation du champ électrique dans l'espace est donnée par:

$$\Delta \vec{E} - \nu_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.22})$$

De la même manière, et selon (I.3), (I.6) et (I.8), on obtient l'équation de propagation du champ magnétique:

$$\Delta \bar{H} - \nu_0 \sim_0 n^2 \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.23})$$

Les deux champs, électrique et magnétique, ont la même forme d'équation d'onde, comme il a été démontré dans (I.22) et (I.23), alors il est évident qu'ils admettent une solution de même type. Une solution élémentaire de ces équations est l'onde plane progressive qui présente l'onde la plus simple à manipuler dans la physique. Une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ , de pulsation ω ($\omega = 2\pi f$) et de vecteur d'onde \mathbf{k} , s'écrit dans le cadre d'un régime harmonique sous la forme:

$$\bar{E} = E_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \bar{r})} \quad (\text{I.24})$$

$$\bar{H} = H_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \bar{r})} \quad (\text{I.25})$$

Où \bar{r} est le vecteur directeur de l'onde et \mathbf{k} est le vecteur de propagation, E_0 et H_0 définissent les amplitudes complexes.

À noter qu'avec cette dépendance, la dérivé par rapport au temps équivaut à multiplier par $j\omega$ ($\partial/\partial t = j\omega$).

Finalement, les équations de Helmholtz (I.22) et (I.23) peuvent donc s'écrire sous la forme scalaire:

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad (\text{I.26})$$

$$\Delta H + k^2 H = 0 \quad (\text{I.27})$$

Où Δ représente le Laplacien scalaire.

Le nombre d'ondes k s'exprime dans le vide par:

$$k = \omega \sqrt{\nu_0 \sim_0} = \omega/c = 2\pi/\lambda \quad (\text{I.28})$$

Les champs, électrique et magnétique, sont reliés par l'impédance notée Z , qui est donnée par:

$$Z = \|E\|/\|H\| = \sqrt{\sim_0/\nu} \quad (\text{I.29})$$

On note que l'impédance dans le vide est $Z = 120\pi$ ohms.

I.2.4 Conditions aux limites

La plupart des problèmes électromagnétiques sont basés sur les équations de Maxwell. Ces équations sont valables dans tout l'espace infini. Pour pouvoir appliquer la théorie de l'électromagnétisme à des milieux qui sont finis, il faudra que les équations d'onde plane (I.26) et (I.27) des champs, électrique et magnétique, satisfassent aux conditions aux frontières, appelées aussi conditions aux limites entre les différents milieux, possédant des caractéristiques diélectriques différentes.

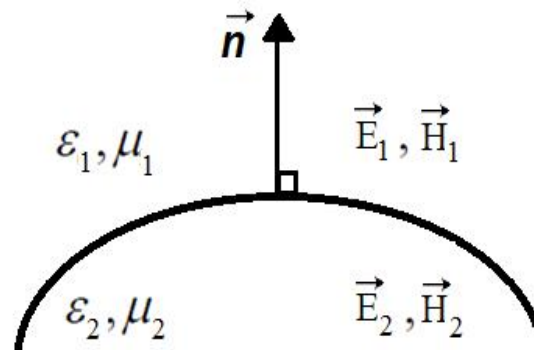


Figure I.1. Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents.

Considérons une surface qui sépare deux milieux différents, notons 1 et 2 soit homogènes et isotropes, présentée dans la *figure .I.1* [42]. Pour pouvoir décrire le passage du rayonnement du milieu 1 au milieu 2, on définit les conditions aux limites imposées au champ électrique et magnétique par la continuité des composantes normales et tangentielles.

- **La continuité des composantes normales**

Cette dernière est définie à partir du déplacement électrique \vec{D} et la densité de flux magnétique \vec{B}

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad (\text{I.30})$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (\text{I.31})$$

- **La continuité des composantes tangentielles**

Cette condition est écrite selon le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{H}

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (\text{I.32})$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (\text{I.33})$$

La normale \vec{n} est la direction perpendiculaire à la surface de séparation, on note que pour une surface non plane la normale dépend du point considéré.

I.2.5 Polarisation d'une onde plane

La propagation d'une onde plane incidente permet de définir deux types de polarisations, une polarisation transversale électrique notée (TE) appelée aussi polarisation horizontale (h) et notée généralement par E_{\perp} , ou le champ électrique de l'onde est perpendiculaire au plan d'incidence (*figure I.2 (a)*), et une polarisation transversale magnétique notée (TM) ou bien polarisation verticale (v) aussi notée H_{\perp} ; dans ce mode le champ magnétique de l'onde est perpendiculaire au plan d'incidence; c'est-à-dire que le champ électrique est dans le plan d'incidence (*figure I.2 (b)*).

Quand un champ linéaire incident (\vec{E}_i ou \vec{H}_i), est réfléchi sur une surface parfaitement lisse, les champs réfléchis (\vec{E}_r ou \vec{H}_r) et transmis (\vec{E}_t ou \vec{H}_t) gardent les mêmes caractéristiques de polarisation du champ incident. Cependant, si le champ incident est réfléchi sur une surface rugueuse, dans ce cas la polarisation des champs réfléchis et transmis montre deux composantes: une composante similaire à la polarisation du champ incident que l'on appelle polarisation directe et l'autre orthogonale que l'on appelle, polarisation croisée [15, 17, 22, 32].

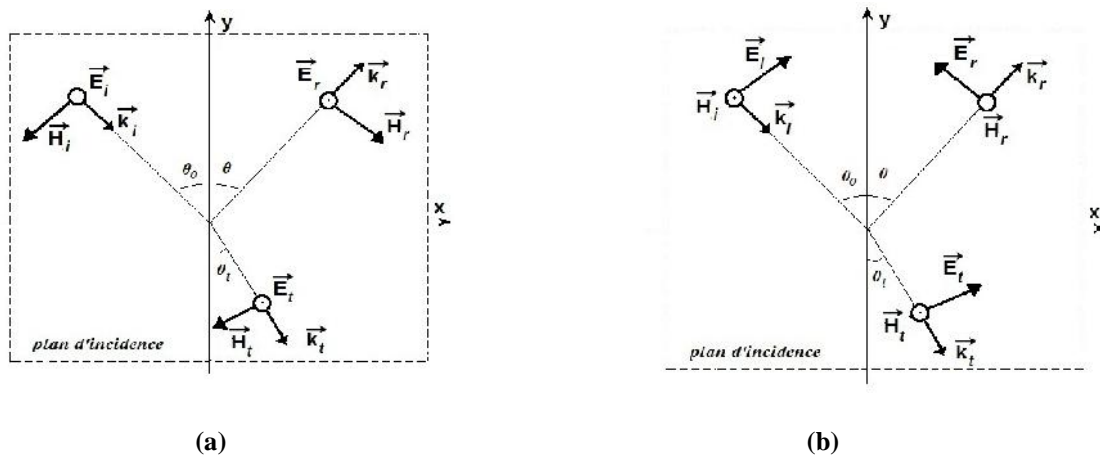


Figure I.2. Polarisation d'onde électromagnétique (a) polarisation horizontale, (b) polarisation verticale.

I.3 Phénomène de diffraction et coefficients de Fresnel

Imaginons qu'une onde plane électromagnétique qui vérifiait les équations de Maxwell (I.14-I.17) et les équations de continuités (I.30-I.33), rencontre un obstacle pendant sa propagation, en supposant une surface diélectrique séparée deux milieux de permittivité relative différentes. L'interaction avec cette surface peut produire certains phénomènes physiques très connus depuis des

siècles, on parle de la réflexion, et la diffraction. L'interprétation du phénomène de la diffraction soumise à la compréhension du phénomène de la réflexion.

Tout d'abord, lorsque l'onde incidente, dirigée par rapport à la normale selon un angle d'incidence oblique θ_0 , entre en collision avec une surface diélectrique parfaitement plane séparée deux milieux de permittivité relative différente notée ϵ_1 et ϵ_2 , elle donne naissance à une source secondaire. Cette source émet vers le milieu 1, une onde réfléchie selon un angle θ_r égale à la valeur absolue de l'angle d'incidence et a une amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente, et une onde transmise dirigée selon θ_t vers le milieu 2. Une telle réflexion est dite spéculaire. Ce phénomène obéit, géométriquement, à la loi de Snell-Descartes et les modifications de phase et d'amplitude sont données par les lois de Fresnel, qu'elles donnent les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde électromagnétique traversée d'une surface plane qui sépare deux milieux diélectriques différents. Les coefficients de Fresnel sont dépendants de la polarisation de l'onde incidente. En polarisation électrique $E_{//}$, les coefficients de réflexion $R_{E//}$ et de transmission $T_{E//}$ s'écrivent:

$$R_{E//} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_t} \quad (\text{I.34})$$

$$T_{E//} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_t} \quad (\text{I.35})$$

Et en polarisation magnétique $H_{//}$, on écrit les coefficients de réflexion $R_{H//}$ et de transmission $T_{H//}$:

$$R_{H//} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_t - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_t + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_0} \quad (\text{I.36})$$

$$T_{H//} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_t + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_0} \quad (\text{I.37})$$

Les équations (I.34)-(I.37) sont données pour un angle arbitraire d'incidence θ_0 (excepté $\theta_0 = 0$). Dans le cas d'une incidence normale où l'angle d'incidence θ_0 est nul, l'état où le vecteur d'onde incidente est parallèle à la normale de la surface. Il n'y a pas une distinction selon la polarisation, les coefficients de réflexion et de transmission s'expriment comme suit:

$$R = \frac{\sqrt{V_1} - \sqrt{V_2}}{\sqrt{V_1} + \sqrt{V_2}} \quad (\text{I.38})$$

$$T = \frac{2\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_1} + \sqrt{V_2}} \quad (\text{I.39})$$

Par contre, lorsque l'onde incidente tombe sur une surface qui possède des déformations (sinusoïdales ou aléatoires), on voit apparaître en plus de l'onde réfléchie, des ondes qui se propagent dans toutes les directions, que l'on appelle des ondes diffractées, ceci est la diffraction. L'analyse de ce dernier phénomène est assez compliquée puisqu'il n'obéit à aucune hypothèse. Alors on pose la question, comment on traduit ce type d'ondes? De ce fait, le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques est devenu très capital dans différents domaines et nécessite obligatoirement une résolution adéquate qui nous permet d'améliorer une multitude d'application. Dans le cadre de notre recherche, nous poursuivons notre étude en discutant des phénomènes de diffraction par des structures multicouches rugueuses aléatoirement dans un plan monodimensionnel (2D dans l'espace) et dans un plan bidimensionnel (3D dans l'espace).

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une présentation globale de quelques notions d'électromagnétisme, nous avons présenté les lois de réflexion de Snell Descartes, qui sont le point de départ dans tout ce qui suit. À partir de là, on peut ébaucher notre objectif qui consiste à modéliser analytiquement le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures multicouches rugueuses aléatoirement.

CHAPITRE II

Champs diffractés par une structure multicouche monodimensionnelle rugueuse aléatoirement

- II.1 Introduction
- II.2 Géométrie du problème
- II.3 Amplitudes diffractées et développement de Rayleigh
- II.4 Méthodes de résolution
- II.5 Méthode de petite perturbation (SPM)
- II.6 Méthode de faible pente (SSA)

II.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces naturelles a reçu une attention particulière du fait de son fort impact sur les systèmes radar et des télécommunications. Habituellement, des méthodes numériques sont considérées pour traiter ces problématiques, cependant par une telle méthode l'inconvénient majeur est le temps de réponse. Pour pallier ce problème, une approche asymptotique doit obligatoirement être considérée, celle-ci est basée sur des hypothèses mathématiques très complexes mais présente l'avantage d'être rapide.

Dans ce chapitre, on considère l'étude du problème de la diffraction par une structure composée de N couches monodimensionnelles qui possèdent des rugosités aléatoires. La principale difficulté pour résoudre ce problème est la détermination des amplitudes de diffraction. La modélisation du signal électromagnétique diffracté par une telle structure passe nécessairement par une bonne description géométrique du sol. Utilisant les principes de réflexion des ondes électromagnétiques par des structures naturelles, notre objectif dans ce chapitre est d'atteindre une résolution fiable du problème, afin d'obtenir les expressions des champs diffractés en appliquant la méthode approchée de petite perturbation (SPM, Small Perturbation Method) et la méthode de faible pente (SSA, Small Slope Approximation). Ces expressions nous conduisent, par la suite, au deuxième objectif, qui consiste à faire une étude statistique bien détaillée des champs diffractés. Nous étudions en détail le cas de la diffraction par des structures multicouches monodimensionnelles rugueuses aléatoirement puisque nous ferons le lien dans ce qui suit, entre le problème de la diffraction par des structures monodimensionnelles (1D) et bidimensionnelles (2D).

II.2 Géométrie du problème

Le problème à résoudre est illustré dans la *figure II.1*. Nous considérons une structure multicouches monodimensionnelles comprenant $N-1$ interface rugueuse aléatoirement d'une longueur de déformation de $-L/2$ à $+L/2$. Chaque couche est constituée d'un milieu linéaire homogène et isotrope. On repère le milieu i ($i = \overline{1..N}$) par sa permittivité relative v_i où ($v_i = n_i^2$). Toutes les grandeurs associées à ce milieu seront marquées par l'indice i . le milieu $i=1$ désigne le vide, caractérisé par une permittivité relative $v_1=1$. Chaque interface déformée aléatoirement est décrite par la fonction aléatoire $a_i(x)$. L'épaisseur d'une couche i ($i = \overline{2, N-1}$) est exprimée simplement par $d_i = u_{i+1} - u_i$ avec $u_1 = 0$.

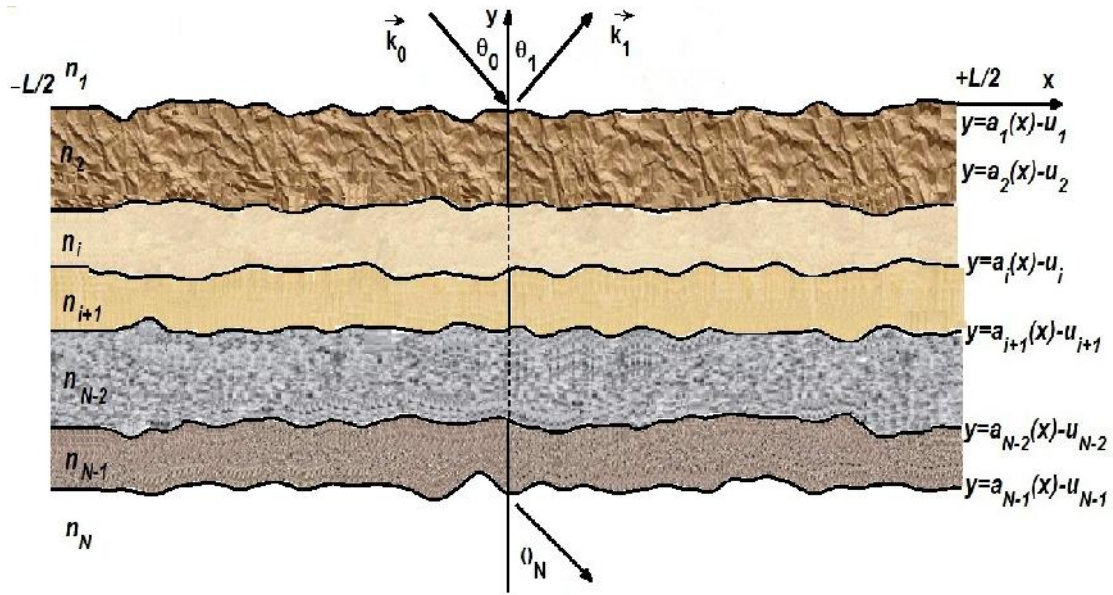


Figure II.1. Profil d'une structure multicouche monodimensionnelle rugueuse aléatoirement.

Nous supposons que le profil de chaque interface rugueuse illustré dans la *figure II.1*, est une réalisation d'un processus monodimensionnel, aléatoire, gaussien, ergodique et stationnaire au sens large (à l'ordre 2), et de moyenne nulle ($\langle a_i(x) \rangle = 0, \forall x$). L'opérateur $\langle \rangle$ désigne l'espérance mathématique qui présente la valeur moyenne prise sur un grand nombre d'échantillons des surfaces ayant des profils identiques. Les interfaces peuvent être totalement corrélées, partiellement corrélées ou non corrélées. On note la fonction gaussienne d'autocorrélation $R_{ii}(x)$ spécifiée à l'interface i et d'intercorrélation $R_{ij}(x)$ entre les interfaces i et j . Les fonctions aléatoires gaussiennes $a_i(x)$ s'expriment sous la forme du produit de convolution autrement dit à partir des relations de filtrage des bruits blancs non corrélés $N_j(x)$:

$$a_i(x) = h_i(x) * \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} N_j(x) \quad (\text{II.1})$$

Où :

$$\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^2 = 1 \quad (\text{II.2})$$

Le symbole * signifie l'opération de la convolution.

La fonction $h_i(x)$ indique les réponses impulsionnelles des filtres et est définie, dans le cas monodimensionnel, par la fonction :

$$h_i(x) = \dagger_i \sqrt{\frac{2}{\sqrt{f} l_i}} \exp\left(-\frac{2x^2}{l_i^2}\right) \quad (\text{II.3})$$

On note que, \dagger_i présente la hauteur quadratique moyenne de la rugosité de l'interface i , l_i présente la longueur de corrélation.

Selon les réponses impulsionnelles, on peut exprimer les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation statistiques des processus gaussiens $a_i(x)$ et $a_j(x)$ ($j = \overline{1, N}; j \neq i$) comme suit :

$$R_{ii}(x) = \langle a_i(x') a_i(x+x') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(x') h_i(x+x') dx' \quad (\text{II.4})$$

$$R_{ij}(x) = \langle a_i(x') a_j(x+x') \rangle = q_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(x') h_j(x+x') dx' \quad (\text{II.5})$$

Où q_{ij} indique le paramètre de mélange entre les deux interfaces i et j , et est donné par :

$$q_{i,j \neq i} = \sum_{k=1}^{N-1} p_{ik} p_{jk} \quad (\text{II.6})$$

D'après (II.3), les fonctions d'autocorrélation (II.4) et d'intercorrélation (II.5), sont notées :

$$R_{ii}(x) = \dagger_i^2 \exp\left(-\frac{x^2}{l_i^2}\right) \quad (\text{II.7})$$

$$R_{ij}(x) = q_{ij} \dagger_i \dagger_j \sqrt{\frac{2l_i l_j}{l_i^2 + l_j^2}} \exp\left(-\frac{2x^2}{l_i^2 + l_j^2}\right) \quad (\text{II.8})$$

Si le paramètre de mélange q_{ij} est nul, les interfaces i et j sont non corrélées. Elles sont parfaitement corrélées pour $l_i = l_j$ et $q_{ij} = \pm 1$, et partiellement corrélées dans les autres cas.

Dans le cas des surfaces corrélées (totalement ou partiellement), le coefficient de corrélation \dots_{ij} est apparu où sa valeur est toujours comprise entre -1 et +1, et sera noté à l'origine par :

$$\dots_{ij} = \frac{R_{ij}(0)}{\sqrt{R_{ii}(0) R_{jj}(0)}} \quad (\text{II.9})$$

Le spectre $\hat{R}_{ii}(\gamma)$ et l'interspectre $\hat{R}_{ij}(\gamma)$ de rugosité des interfaces sont obtenus à partir de la transformée de Fourier (TF) monodimensionnelle des équations gaussiennes (II.7) et (II.8), et sont aussi gaussiennes, on écrit donc:

$$\hat{R}_{ii}(\Gamma) = TF[R_{ii}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ii}(x) \exp(+j\Gamma x) = \dagger_i^2 l_i \sqrt{f} \exp[-\Gamma^2 \frac{(l_i^2)}{4}] \quad (\text{II.10})$$

$$\hat{R}_{ij}(\Gamma) = TF[R_{ij}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(x) \exp(+j\Gamma x) = q_{ij} \dagger_i \dagger_j \sqrt{f l_i l_j} \exp[-\Gamma^2 \frac{(l_i^2 + l_j^2)}{8}] \quad (\text{II.11})$$

Nous supposons maintenant que la structure proposée est éclairée, dans un plan monodimensionnel (2D dans l'espace) noté xOy , par une onde électromagnétique plane (E_{z0}, H_{z0}) de longueur d'onde λ portée par le vecteur d'onde \mathbf{k}_0 , produit avec l'axe Oy l'angle d'incidence θ_0 . Comme il a été expliqué dans la section (I.3), cette onde est réfléchiée dans la direction spéculaire selon les lois de Snell-Descartes si et seulement si la structure illuminée par une onde électromagnétique plane est parfaitement plane. Mais, si au contraire la structure est déformée ou bien rugueuse aléatoirement, les ondes sont diffusées dans des directions autres que la direction spéculaire ce qui engendre un problème très compliqué, le problème de la diffraction. Notre but dans la section suivante est de retrouver l'expression analytique des champs diffractés dans toutes les directions.

II.3 Amplitudes diffractées et développement de Rayleigh

II.3.1 Développement de Rayleigh

La principale difficulté à la résolution du problème de la diffraction par des surfaces déformées aléatoirement est la détermination des amplitudes diffractées en fonction des amplitudes incidentes. Une hypothèse très féconde a été introduite par Rayleigh à la fin du XIX^{ème} siècle, permettant de définir la rugosité d'une surface en fonction de sa géométrie et des caractéristiques de l'onde incidente. Ainsi, les champs diffractés par une structure rugueuse s'expriment sous la forme de développement de Rayleigh, obtenu à partir de la transformée de Fourier de l'équation de Helmholtz, qui définit que l'onde diffractée est formée par une somme d'onde plane montante et descendante. Ce développement peut ainsi vérifier les conditions aux limites ce qui est suffisant pour résoudre le problème complètement. Il est aussi important de noter que le développement de Rayleigh reste valable à tout point de l'espace [43].

II.3.2 Champ incident, diffracté et transmis

L'interaction de l'onde incidente avec la surface supérieure rugueuse produit une source secondaire qui va diffuser les ondes dans toutes les directions. Dans le milieu 1, on peut distinguer deux types de champs, un champ incident descendant qui contient l'onde incidente d'une amplitude $A_0(\Gamma_0)$ connue, et un champ diffracté qui contient des ondes diffractées montantes, d'amplitudes inconnues.

On considère par la suite des ondes monochromatiques ayant une dépendance temporelle $\exp(j\tilde{S}t)$. Le nombre d'ondes dans l'espace est défini par k_1 et l'impédance par Z_1 . On définit les grandeurs $Z_i = Z_1/n_i$ et $k_i = k_1 n_i$, qui désignent respectivement l'impédance et le nombre d'ondes dans le milieu i .

En champ lointain et en coordonnées cartésiennes, et à l'aide de l'équation de Helmholtz et de développement de Rayleigh, on va écrire les expressions des champs à chaque milieu.

- **Le champ incident**

Dans le milieu supérieur 1 (vide), le champ incident s'exprime par :

$$F_0(x, y) = \frac{A_0(r_0)}{\sqrt{L}} \exp[-j(r_0 x - S_0 y)] \quad (\text{II.12})$$

$F_0(x, y)$ signifie, en forme générale, le champ dans les deux modes de polarisation avec :

$$F_0(x, y) = \begin{cases} E_{z_0}(x, y) & \text{en mode } E_{//} \\ Z_1 H_{z_0}(x, y) & \text{en mode } H_{//} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Où le vecteur de propagation de l'onde incidente \mathbf{k}_0 , est défini par :

$$\mathbf{k}_0 = r_0 \mathbf{x} - S_0 \mathbf{y} \quad (\text{II.14})$$

\mathbf{x} et \mathbf{y} sont les vecteurs directeurs de l'axe Ox , Oy respectivement.

Avec :

$$\begin{cases} r_0 = k_1 \sin \theta_0 \\ S_0 = k_1 \cos \theta_0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Où θ_0 est l'angle d'incidence ($-f/2 \leq \theta_0 \leq +f/2$).

L'ajout du facteur $1/\sqrt{L}$ dans l'expression (II.12) nous permet d'avoir une puissance incidente P_0 indépendante de la longueur L de la déformation. Cette puissance est constante et est définie à partir du vecteur de Poynting [17, 22] :

$$P_0 = \frac{\cos \theta_0}{2Z_1} \quad (\text{II.16})$$

Cette grandeur est mesurée en Watt (W).

• **Le champ diffracté**

Le champ diffracté dans le milieu 1 porte seulement des ondes positives dans le sens $+y$ et est présenté sous la forme suivante :

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(r) \exp[-j(r x + S_1 y)] dr \quad (\text{II.17})$$

Le champ diffracté dans les milieux i ($i = \overline{2, N-1}$) est un mélange des ondes positives dans le sens $+y$ et négatives dans le sens $-y$, donc selon le développement de Rayleigh, on écrit :

$$F_i(x, y) = \frac{1}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} A_i^{(-)}(r) \exp[-j(r x - S_i y)] dr + \frac{1}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} A_i^{(+)}(r) \exp[-j(r x + S_i y)] dr \quad (\text{II.18})$$

• **Le champ transmis**

Dans le milieu N , le champ est transmis et le développement de Rayleigh ne fait intervenir que des ondes négatives dans le sens $-y$:

$$F_N(x, y) = \frac{1}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} A_N(r) \exp[-j(r x - S_N y)] dr \quad (\text{II.19})$$

Les vecteurs de propagation des ondes dans les milieux i , notés \mathbf{k}_i^\pm sont définis par :

$$\mathbf{k}_i^\pm = r \mathbf{x} \pm S_i \mathbf{y} \quad (\text{II.20})$$

Avec : $S_i = \sqrt{k_i^2 - r^2}$.

Dans le milieu i , pour une quantité de k_i réel et positif, et lorsque $|r| \leq k_i$, ainsi la constante de propagation S_i est réelle. L'onde plane garde les principales caractéristiques d'une onde plane dans le vide, en particulier son amplitude reste constante au cours de la propagation (il n'y a pas d'atténuation), et nous décrirons ce type d'ondes comme ondes planes propagatives. Quand k_i est imaginaire pur (réel négatif), et lorsque $|r| > k_i$, la constante S_i est imaginaire pure et les ondes sont évanescentes où l'amplitude d'onde varie d'un point à un autre [43].

On considère que la constante de propagation S_i est réelle, donc :

$$\begin{cases} r = k_i \sin \theta \\ S_i = k_i \cos \theta ; \quad \text{Im}(S_i) \leq 0 \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{f}{2}, \frac{f}{2} \right] \quad (\text{II.21})$$

Par la suite, les constantes de propagation S_i associées à Γ_0 sont notées $S_{i,0} = S_i(\Gamma_0)$, dans le milieu 1, $S_{1,0} = S_0$.

Les expressions des composantes, électrique E_z et magnétique H_z , se déduisent à partir des fonctions $F(x, y)$, les autres composantes du champ électromagnétique s'obtiennent aisément et résultant directement des équations de Maxwell.

En polarisation $E_{//}$, on obtient selon l'équation (I.13) :

$$\begin{aligned} H_x(x, y) &= -\frac{1}{jkZ} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ H_y(x, y) &= \frac{1}{jkZ} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Et en polarisation $H_{//}$, et selon l'équation (I.15) on a :

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{1}{jk} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ E_y(x, y) &= -\frac{1}{jk} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Notons que $F(x, y)$ est définie par l'expression (II.13).

La détermination des inconnues du problème qui sont les amplitudes de diffraction des développements de Rayleigh $A_i(\Gamma)$, $A_i^{(\pm)}(\Gamma)$ pour $(i = \overline{2, N-1})$ et $A_N(\Gamma)$, nécessite l'application des conditions aux limites sur la structure. Les continuités des composantes normales et tangentielles (I.30)-(I-33) des champs, électrique et magnétique, à l'interface $y = a_i(x) - u_i$, donnent :

$$\left\{ \begin{aligned} e_i [F_i(x, y)]_{y=a_i(x)-u_i} &= [F_{i+1}(x, y)]_{y=a_i(x)-u_i} \\ \left[\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y} - \dot{a}_i(x) \frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x} \right]_{y=a_i(x)-u_i} &= e_i \left[\frac{\partial F_{i+1}(x, y)}{\partial y} - \dot{a}_i(x) \frac{\partial F_{i+1}(x, y)}{\partial x} \right]_{y=a_i(x)-u_i} \end{aligned} \right. \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{En mode } E_{//} \\ n_i / n_{i+1} & \text{En mode } H_{//} \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

II.4 Méthodes de résolution

L'application des conditions aux limites sur les expressions des champs nous conduit à un système de deux équations dans le cas monodimensionnel (1D) et de quatre équations dans le cas bidimensionnel (2D). Toutefois, ces équations n'ont pas d'expressions explicites, contrairement au cas des surfaces planes, qui requièrent alors l'emploi des méthodes numériques "exactes" ou asymptotiques "approchées". Différentes simplifications ou hypothèses peuvent être retenues, mais le but reste le même, nous allons maintenant citer celles les plus usuelles pour résoudre le problème de la diffraction.

II.4.1 Méthodes exactes

Les méthodes exactes reposent toutes sur un principe identique. Les opérateurs de dérivées partielles intervenant dans les équations régissant la propagation des ondes sont simplifiés. La simplification dépend de la méthode utilisée. Cette catégorie de méthode est dite exacte, car elles fournissent des résultats exacts sous réserve d'une discrétisation suffisante. Leur avantage commun est leur robustesse et la possibilité d'intégrer des phénomènes complexes comme les milieux anisotropes ou dispersifs. En revanche, leur inconvénient commun est la lourdeur tant en temps de calcul qu'en espace mémoire.

Ces méthodes résolvent les équations complètes à l'aide d'une discrétisation des éléments, et sont utilisées pour résoudre les problèmes des conditions aux limites de façon numérique. La principale limitation des méthodes numériques est leur complexité qui croît très vite avec la taille de l'environnement considéré surtout dans des cas de propagation. Citons la Méthode des Moments (MoM) qui permet de modéliser des interactions sur des modèles de grande taille [44, 45], la méthode C [17, 42], la méthode des différences finies (FDTD) [46], ou encore la méthode de Monte-Carlo [47].

II.4.2 Méthodes asymptotiques

Ces méthodes sont basées sur des hypothèses simplificatrices, et non pas la solution exacte mais son développement asymptotique, on distingue alors des modèles appliqués quand la longueur d'onde est faible devant la hauteur de rugosité des interfaces ($k\uparrow \gg \}$). Citons l'approximation de Kirchhoff (AK) [23]; l'approximation de l'Optique Géométrique (OG) qui a l'inconvénient de prévoir des champs nuls dans la zone d'ombre géométrique ou ne pénètre aucun rayon, la Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD) qui est inventée dans les années 60 pour pallier ce défaut de (OG) [48, 49]. Signalant que ces méthodes ont le même inconvénient observé dans les modèles exacts en ce qui concerne le temps de calcul et l'espace de stockage mémoire; de plus elles manquent de précision.

Autres modèles appliqués quand la hauteur de rugosité est faible par rapport à la longueur d'onde ($k\uparrow \ll \}$), citons la méthode de petite perturbation (SPM, Small Perturbation Method) développée par Rice, la méthode de Rayleigh, et la méthode de faible pente (SSA, Small Slope Approximation) et ses différentes variantes.

L'intérêt de notre étude porte sur la résolution du problème de la diffraction en s'appuyant sur les deux méthodes approchées, SPM et SSA.

II.5 Méthode de petite perturbation (SPM)

La méthode de petite perturbation (SPM), est la méthode la plus ancienne et la plus utilisée dans la résolution du problème de la diffraction des ondes par des surfaces naturelles [50], comportant des petites rugosités, qu'elles respectent que la hauteur quadratique moyenne de rugosité est faible devant la longueur d'onde. Rayleigh [23] est le premier physicien qui introduit cette méthode pour résoudre les problèmes d'acoustique pour des surfaces sinusoïdales. Suivie par Fano [23] qui adapte cette méthode dans les réseaux optiques. Ensuite, Rice [23] a obtenu la formule explicite dans le premier et le deuxième ordre de perturbation (SPM1 et SPM2) pour des surfaces parfaitement conductrices et diélectriques monodimensionnelles. Par la suite, plusieurs physiciens ont développé les calculs dans l'ordre 1 et l'ordre 2 de perturbation et dans les deux polarisations dans différents domaines [23, 51].

Par la suite, nous étudierons la validité de cette méthode de perturbation pour modéliser le problème dans le cas des structures bidimensionnelles. Cette méthode sera appliquée à partir du développement de Rayleigh exprimant les champs diffractés dans les différents milieux (II.17)-(II.19), en vérifiant les conditions aux limites (II.24).

II.5.1 Principe générale

La méthode SPM repose sur le fait que les amplitudes de diffraction et les fonctions exponentielles seront représentées par leurs développements en séries de Taylor-Volterra [52] :

$$A_i(\mathbf{r}) = \sum_p A_i^{(p)}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.26})$$

$$\exp[\pm jS a_i(x)] = \sum_p \frac{[\pm jS a_i(x)]^p}{p!} \quad (\text{II.27})$$

Le symbole p indique l'ordre de perturbation. Dans notre étude, on s'intéresse à la résolution du problème de la diffraction à l'ordre zéro (absence de rugosité) et à l'ordre un (présence de rugosité). La solution obtenue à l'ordre 0 est toutefois une étape nécessaire à la construction de la solution à l'ordre 1, où les fonctions qui décrivent les interfaces i sont définies par:

$$\begin{cases} a_i(x) = 0 & , \text{à l'ordre zéro} \\ a_i(x) \neq 0 & , \text{à l'ordre un} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

II.5.2 Résolution à l'ordre zéro

À l'ordre zéro (absence de rugosité), les interfaces sont parfaitement lisses. Le contact de l'onde incidente avec ces dernières subit des phénomènes de réflexion et de réfraction. Les expressions montrées dans (II.24), nous permettant alors de déterminer les amplitudes de réflexion spéculaire dans le milieu i , on va montrer par la suite que ces amplitudes sont les coefficients de Fresnel.

Donc l'application des conditions aux limites à l'interface $y = -u_i$ permet d'écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} e_i A_i^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(+jS_{i0}u_i) + e_i A_i^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(-jS_{i0}u_i) \\ \quad = A_{i+1}^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(+jS_{i+10}u_i) + A_{i+1}^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(-jS_{i+10}u_i) \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

$$\begin{cases} -S_i A_i^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(+jS_{i0}u_i) + S_{0i} A_i^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(-jS_{i0}u_i) \\ \quad = -e_i S_{i+10} A_{i+1}^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(+jS_{i+10}u_i) + e_i S_{i+10} A_{i+1}^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \exp(-jS_{i+10}u_i) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

D'où la forme matricielle suivante qui relie les amplitudes dans le milieu i par celles du milieu $i+1$:

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \\ A_i^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{(i,i+1)}(\mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} A_{i+1}^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \\ A_{i+1}^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

La matrice qui relie les amplitudes d'ordre 0 des milieux i et $i+1$, s'exprime par $\mathbf{C}_{(i,i+1)}(\mathbf{r})$. Notant qu'à cet ordre de perturbation ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$). Et on écrit en mode $E_{//}$:

$$\mathbf{C}_{(i,i+1)E_{//}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{S_i + S_{i+1}}{2S_i} \exp[+j(S_{i+1} - S_i)u_i] & \frac{S_i - S_{i+1}}{2S_{i0}} \exp[-j(S_{i+1} + S_i)u_i] \\ \frac{S_i - S_{i+1}}{2S_i} \exp[+j(S_{i+1} + S_i)u_i] & \frac{S_i + S_{i+1}}{2S_i} \exp[-j(S_{i+1} - S_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Et, en mode $H_{//}$:

$$\mathbf{C}_{(i,i+1)H_{//}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{n_{i+1}^2 S_i + n_i^2 S_{i+1}}{2n_i n_{i+1} S_i} \exp[+j(S_{i+1} - S_i)u_i] & \frac{n_{i+1}^2 S_i - n_i^2 S_{i+1}}{2n_i n_{i+1} S_{i0}} \exp[-j(S_{i+1} + S_i)u_i] \\ \frac{n_{i+1}^2 S_i - n_i^2 S_{i+1}}{2n_i n_{i+1} S_i} \exp[+j(S_{i+1} + S_i)u_i] & \frac{n_{i+1}^2 S_i + n_i^2 S_{i+1}}{2n_i n_{i+1} S_i} \exp[-j(S_{i+1} - S_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Pour déterminer l'amplitude réfléchie sur l'interface (à l'altitude $y = 0$), il suffit de considérer toutes les réfractions subites par l'onde dans chacune des couches en partant de la couche la plus enterrée (à l'altitude $y = -u_{N-1}$). Cela peut se traduire par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0) \\ A_0(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{C}_{(i,i+1)}(\mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} 0 \\ A_N^{(0)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

La matrice de passage du milieu 1 au milieu N est le produit des matrices de réfraction des milieux successifs. C'est une matrice \mathbf{M} de dimension 2×2 qui vérifie :

$$\begin{bmatrix} A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0) \\ A_0(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1,N}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 0 \\ A_N^{(0)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,N}^{(+,+)}(\mathbf{r}_0) & M_{1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}_0) \\ M_{1,N}^{(-,+)}(\mathbf{r}_0) & M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A_N^{(0)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Avec :

$$\mathbf{M}_{1,N}(\mathbf{r}_0) = \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{C}_{(i,i+1)}(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.36})$$

Enfin, on déduit l'amplitude des ondes réfléchies $A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0)$ en $y = 0$ ($u_1 = 0$), et transmise $A_N^{(0)}(\mathbf{r}_0)$ en $y = -u_{N-1}$ qui présente respectivement le coefficient de réflexion et de transmission de Fresnel :

$$A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0) = \frac{M_{1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}_0)}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0)} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.37})$$

$$A_N^{(0)}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0)} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.38})$$

Selon (II.31), (II.34) et (II.36), les amplitudes des ondes dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) sont données par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \\ A_i^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{M}_{i,N}(\mathbf{r}_0)}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ A_0(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0)} \begin{bmatrix} M_{i,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}_0) \\ M_{i,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.39})$$

II.5.3 Résolution à l'ordre un

À cet ordre de perturbation, le terme de rugosité est apparu, considérant le système présenté dans la *Figure II.1*. La démarche de résolution du problème est celle suivie pour obtenir la résolution à l'ordre 0, néanmoins, la résolution à l'ordre 1 requiert plusieurs simplifications mathématiques. L'application des conditions aux limites (II.24) sur les expressions de Rayleigh (II.17)-(II.19) à l'interface $y = a_i(x) - u_i$, nous donne un système de deux équations :

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e_i \left(A_i^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(+jS_i y) + A_i^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(-jS_i y) \right) \exp(-j\mathbf{r} x) d\mathbf{r} \right]_{y=a_i(x)-u_i} \\
 &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_{i+1}^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(+jS_{i+1} y) + A_{i+1}^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(-jS_{i+1} y) \right) \exp(-j\mathbf{r} x) d\mathbf{r} \right]_{y=a_i(x)-u_i} \quad (\text{II.40})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left((S_i + r \dot{a}_i(x)) A_i^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(+jS_i y) - (S_i - r \dot{a}_i(x)) A_i^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(-jS_i y) \right) \exp(-j\mathbf{r} x) d\mathbf{r} \right]_{y=a_i(x)-u_i} \\
 &= e_i \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left((S_{i+1} + r \dot{a}_i(x)) A_{i+1}^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(+jS_{i+1} y) - (S_{i+1} - r \dot{a}_i(x)) A_{i+1}^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(-jS_{i+1} y) \right) \exp(-j\mathbf{r} x) d\mathbf{r} \right]_{y=a_i(x)-u_i} \quad (\text{II.41})
 \end{aligned}$$

Tenant en compte les expressions présentées dans (II.26), (II.27) et les expressions des amplitudes de diffraction à l'ordre 0. On obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_i^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{(i,i+1)}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} A_{i+1}^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_{i+1}^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} + j\hat{a}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (n_i^2 - n_{i+1}^2) \mathbf{D}_{(i)}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} A_{i+1}^{(+,0)}(\mathbf{r}_0) \\ A_{i+1}^{(-,0)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Où, en mode $E_{//}$:

$$\mathbf{D}_{(i)E_{//}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{k_0^2}{2S_i} \exp[-j(S_i - S_{i+10})u_i] & \frac{k_0^2}{2S_i} \exp[-j(S_i + S_{i+10})u_i] \\ -\frac{k_0^2}{2S_i} \exp[+j(S_i + S_{i+10})u_i] & -\frac{k_0^2}{2S_i} \exp[+j(S_i - S_{i+10})u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Et en mode $H_{//}$:

$$\mathbf{D}_{(i)H_{//}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{r_0 \Gamma + S_i S_{i+10}}{2n_i n_{i+1} S_i} \exp[-j(S_i - S_{i+10})u_i] & \frac{r_0 \Gamma - S_i S_{i+10}}{2n_i n_{i+1} S_i} \exp[-j(S_i + S_{i+10})u_i] \\ -\frac{r_0 \Gamma - S_i S_{i+10}}{2n_i n_{i+1} S_i} \exp[+j(S_i + S_{i+10})u_i] & -\frac{r_0 \Gamma + S_i S_{i+10}}{2n_i n_{i+1} S_i} \exp[+j(S_i - S_{i+10})u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{II.44})$$

D'après l'expression (II.39), l'expression (II.42) peut également s'écrire :

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_i^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{(i,i+1)}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} A_{i+1}^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_{i+1}^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} + j\hat{a}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (n_i^2 - n_{i+1}^2) \frac{\mathbf{D}_{(i)}(\mathbf{r})}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}_0) \\ M_{i+1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.45})$$

On simplifie cette expression, on écrit :

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_i^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{(i,i+1)}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} A_{i+1}^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_{i+1}^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} + j(n_i^2 - n_{i+1}^2) \hat{a}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} N_i^{(+)} \\ N_i^{(-)} \end{bmatrix} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.46})$$

L'équation de passage du milieu i au milieu N s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_i^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{i,N}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 0 \\ A_N^{(1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} + j \sum_{j=i}^{N-1} (n_j^2 - n_{j+1}^2) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{M}_{i,j}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} N_j^{(+)} \\ N_j^{(-)} \end{bmatrix} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.47})$$

Qu'on peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_i^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{i,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}) \\ M_{i,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} A_N^{(1)}(\mathbf{r}) + j \sum_{j=i}^{N-1} (n_j^2 - n_{j+1}^2) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} S_{i,j}^{(+)} \\ S_{i,j}^{(-)} \end{bmatrix} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.48})$$

Avec $N_i^{(\pm)}$ est donné par :

$$\begin{bmatrix} N_i^{(+)} \\ N_i^{(-)} \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0)} \begin{bmatrix} D_{(i)}^{(+,+)} M_{i+1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}_0) + D_{(i)}^{(+,-)} M_{i+1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0) \\ D_{(i)}^{(-,+)} M_{i+1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}_0) + D_{(i)}^{(-,-)} M_{i+1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

Et, la matrice $S_{i,j}^{(\pm)}$ est définie par :

$$\begin{bmatrix} S_{i,j}^{(+)} \\ S_{i,j}^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_j^{(+)} M_{i,j}^{(+,+)}(\mathbf{r}) + N_j^{(-)} M_{i,j}^{(+,-)}(\mathbf{r}) \\ N_j^{(+)} M_{i,j}^{(-,+)}(\mathbf{r}) + N_j^{(-)} M_{i,j}^{(-,-)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

À partir de l'expression (II.48), on peut déduire dans le cas perturbé (ordre un) les amplitudes des ondes diffractées dans le milieu 1, $A_1^{(1)}(\mathbf{r})$ et des ondes transmises dans le milieu N , $A_N^{(1)}(\mathbf{r})$. Qui sont liées aux amplitudes réfléchies dans le cas non perturbé (ordre 0). Pour $i = 1$, on écrit :

$$\begin{bmatrix} A_1^{(1)}(\mathbf{r}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}) \\ M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} A_N^{(1)}(\mathbf{r}) + j \sum_{j=1}^{N-1} (n_j^2 - n_{j+1}^2) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} S_{1,j}^{(+)} \\ S_{1,j}^{(-)} \end{bmatrix} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.51})$$

Ainsi, les amplitudes $A_1^{(1)}(\mathbf{r})$ et $A_N^{(1)}(\mathbf{r})$ sont obtenues :

$$A_1^{(1)}(\mathbf{r}) = j \sum_{j=1}^{N-1} (n_j^2 - n_{j+1}^2) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \left[S_{1,j}^{(+)} - \frac{M_{1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r})}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r})} S_{1,j}^{(-)} \right] A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.52})$$

$$A_N^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{j}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r})} \sum_{j=1}^{N-1} (n_j^2 - n_{j+1}^2) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) S_{1,j}^{(-)} A_0(\mathbf{r}_0) \quad (\text{II.53})$$

Finalement, d'après (II.48) et (II.53), les amplitudes $A_i^{(\pm,1)}(\mathbf{r})$ des ondes diffractées à l'ordre un dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) sont données par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} A_i^{(+,1)}(\mathbf{r}) \\ A_i^{(-,1)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \frac{jA_0(\mathbf{r}_0)}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} \sum_{j=i}^{N-1} (n_j^2 - n_{j+1}^2) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}) S_{i,j}^{(+)} - M_{i,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}) S_{1,j}^{(-)} \\ M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}) S_{i,j}^{(-)} - M_{i,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}) S_{1,j}^{(-)} \end{bmatrix} \\ - \sum_{j=1}^{i-1} (n_j^2 - n_{j+1}^2) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \begin{bmatrix} M_{i,N}^{(+,-)}(\mathbf{r}) \\ M_{i,N}^{(-,-)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} S_{1,j}^{(-)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.54})$$

II.6 Méthode de faible pente (SSA)

Le modèle de l'approximation des faibles pentes (SSA, Small Slope Approximation) a été développé par Voronovich [28, 36], aussi que par d'autres auteurs [7, 37-41]. Ce modèle inclut le domaine de la méthode SPM qui est seulement utilisé pour les faibles rugosités et le domaine de l'approximation de Kirchhoff qui est appliquée aux surfaces ayant une longue longueur de corrélation. La méthode SSA à l'ordre un est valable pour une surface qui possède des faibles pentes, c'est-à-dire telle qu'en chaque point, la normale à la surface ne s'écarte pas trop de la verticale.

Dans cette section, nous présentons la résolution du problème de la diffraction en introduisant la méthode SSA à l'ordre 1, nous chercherons par la suite la relation entre cette dernière et la méthode SPM.

II.6.1 Amplitudes diffractées

Selon la méthode SSA, les amplitudes diffractées par une structure multicouches monodimensionnelles, dans le milieu 1 et à l'ordre un de perturbation, s'expriment par [54] :

$$A_{1,SSA}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = A_0(\mathbf{r}_0) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{K_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{j(S_1 + S_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)x) \exp(j(S_1 + S_0)a_i(x)) dx \quad (\text{II.55})$$

Identifiant l'identité de la fonction Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)x) dx = 2\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{II.56})$$

On remarque que pour $a_i(x) \rightarrow 0$ et $L \rightarrow \infty$, l'expression des amplitudes diffractées obtenue par la méthode SSA (II.55) est similaire à celle obtenue par la méthode SPM à l'ordre 1 si:

$$A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0) = \frac{A_0(\mathbf{r}_0) \sum_{i=1}^{N-1} K_i(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)}{2jS_0} \quad (\text{II.57})$$

Ce chapitre a permis d'exposer les expressions analytiques des amplitudes des champs diffractés par une structure de N couches monodimensionnelles. Les amplitudes diffractées dans le milieu i font intervenir les caractéristiques du champ incident. On a étudié le cas des interfaces planes (ordre 0) et rugueuses (ordre 1). On note que les données présentées dans ce qui précède, sont indispensables afin de déduire, dans le chapitre suivant, la forme du signal diffracté et ses propriétés statistiques.

CHAPITRE III

Étude statistique des champs diffractés par une structure multicouche 1D rugueuse aléatoirement

- III.1 Introduction
- III.2 Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente basées sur SPM
- III.3 Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente basées sur SSA
- III.4 Densités de probabilité
- III.5 Application numérique sur une structure 1D composée de quatre couches ($N=4$)
- III.6 Conclusion

III.1 Introduction

L'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses nécessite la modélisation de ces surfaces. Pour cela, une approche probabiliste est utilisée. Les surfaces sont des processus aléatoires vérifiant certaines propriétés statistiques. Pour les surfaces que nous utilisons, la distribution des hauteurs est supposée gaussienne. De plus, les surfaces sont stationnaires spatialement, c'est-à-dire que les propriétés statistiques de la surface sont invariantes par translation des coordonnées spatiales. Bien que les surfaces rugueuses ne soient pas nécessairement gaussiennes, l'utilisation de statistiques gaussiennes permet de réduire la complexité associée au processus aléatoire. La description d'un processus aléatoire gaussien est donnée par sa moyenne et sa fonction de corrélation.

Dans ce chapitre, nous attirons l'attention sur les amplitudes diffractées dans le milieu 1, qu'elles sont intervenues à la définition des propriétés statistiques du signal détecté par un radar de télédétection. Nous procédons à une étude statistique détaillée afin d'obtenir l'expression analytique de l'intensité incohérente du signal diffracté sur une structure de N couches monodimensionnelles déformées aléatoirement, dans des différentes directions d'observation dans le demi-espace et dans les deux polarisations. Nous présentons, par la suite, la fonction de la densité de probabilité de l'intensité incohérente, de module et de la phase.

III.2 Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente basées sur SPM

À grande distance, la densité angulaire de puissance diffractée est dépend de l'amplitude diffractée dans le milieu 1, $A_{1,(E,H)}^{(1)}(r)$, et est donnée par [53] :

$$P(\theta) = \frac{\left| A_{1,(E,H)}^{(1)}(r) \right|^2 k_1 \cos^2 \theta}{4f Z_1} \quad (\text{III.1})$$

On rappelle que Z_1 et k_1 , définissent respectivement l'impédance et le nombre d'ondes dans le vide. Le coefficient bistatique de la diffraction $I_{(E,H)}$ dans les deux polarisations $E_{//}$ et $H_{//}$, s'exprime par le rapport entre la densité angulaire de puissance diffractée et la puissance incidente, à partir de (II.16) et (III.1), on écrit (avec $r = k_1 \sin \theta$) :

$$I_{(E,H)}(\theta) = \frac{P(\theta)}{P_0(\theta_0)} = \frac{\cos^2 \theta \left| A_{1,(E,H)}^{(1)}(k_1 \sin \theta) \right|^2}{\cos \theta_0} \quad (\text{III.2})$$

L'amplitude $A_{1,(E,H)}^{(1)}(k_1 \sin \theta)$ est une fonction aléatoire d'angle d'observation θ et de moyenne nulle $\langle A_{1,(E,H)}^{(1)}(k_1 \sin \theta) \rangle = 0$. L'amplitude totale diffractée dans le milieu 1 est une somme d'amplitudes

selon la réflexion spéculaire où ($n = n_0$) et d'amplitudes diffractées selon la réflexion diffusée où ($n \neq n_0$):

$$A_{1,SPM}^{(1)}(\mathbf{r}) = 2f A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0)u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + A_1^{(1)}(\mathbf{r}) \quad (\text{III.3})$$

L'amplitude $A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0)$ est donnée à l'ordre 0 par le coefficient de réflexion de Fresnel selon l'expression (II.37) quand la structure est plane, et l'amplitude diffractée $A_1^{(1)}(\mathbf{r})$ est donnée dans le cas d'une structure rugueuse par l'expression (II.52), et qui peut être aussi exprimée comme suit :

$$A_1^{(1)}(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}_0) \sum_{j=1}^{N-1} K_j(\mathbf{r}) \hat{a}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{III.4})$$

Où le coefficient complexe $K_j(\mathbf{r})$ dans le milieu 1 est donné par:

$$K_j(\mathbf{r}) = j(n_j^2 - n_{j+1}^2) \left[S_{1,j}^{(+)} - \frac{M_{1,N}^{(+,-)}(\mathbf{r})}{M_{1,N}^{(-,-)}(\mathbf{r})} S_{1,j}^{(-)} \right] \quad (\text{III.5})$$

Pour une structure plane (ordre 0), on obtient l'intensité cohérente $I_{c,(E,H)}^{SPM}(n)$, d'après l'amplitude $A_1^{(0)}(\mathbf{r}_0 = k \sin n_0)$ et l'expression (III.2), on écrit:

$$I_{c,(E,H)}^{SPM}(n) = \frac{\cos n_0}{\cos n} \left| A_{1,(E,H)}^{(0)}(k \sin n_0) \right|^2 2f u(k \sin n - k \sin n_0) \quad (\text{III.6})$$

Rappelons que $-f/2 \leq n_0 \leq +f/2$.

Dans le cas de la diffraction par une structure rugueuse (ordre 1), on définit l'intensité incohérente diffractée $I_{f,(E,H)}^{SPM}(n)$ selon l'amplitude $A_1^{(1)}(\mathbf{r} = k_1 \sin n)$ et l'expression (III.2), prenant en considération la relation [54] :

$$\langle I_{(E,H)}^{SPM}(n) \rangle = I_{c,(E,H)}^{SPM}(n) + I_{f,(E,H)}^{SPM}(n) \quad (\text{III.7})$$

Lorsque la surface est plane, le terme cohérent est maximal et le terme incohérent est nul, puisque toute l'énergie incidente est réfléchiée ou transmise dans la direction spéculaire. Mais, au contraire si la surface est rugueuse, le terme cohérent est atténué et peut être négligé, et le terme incohérent augmente. De ce fait, on identifie l'intensité incohérente diffractée comme la moyenne du coefficient bistatique, et on écrit :

$$\begin{aligned} I_{f,(E,H)}^{SPM}(n) &= \langle I_{(E,H)}^{SPM}(n) \rangle - \frac{\cos^2 n}{\cos n_0} \left| A_{1,(E,H)}^{(1)}(k_1 \sin n_0) \right|^2 \rangle \\ &= \frac{\cos^2 n}{\cos n_0} \left\{ \langle \text{Re}^2 [A_{1,(E,H)}^{(1)}(k_1 \sin n)] \rangle + \langle \text{Im}^2 [A_{1,(E,H)}^{(1)}(k_1 \sin n)] \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Où $-f/2 \leq \theta \leq +f/2$.

III.2.1 Variances et covariance de la partie réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction

L'expression (III.8) indique que l'intensité incohérente dépend de la variance de la partie réelle et imaginaire de l'amplitude diffractée, donc, une description détaillée de ces grandeurs statistique est obligatoire. D'après la relation (III.4), la partie réelle et la partie imaginaire de l'amplitude de diffraction à l'ordre 1 sont données sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Re}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})] &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \text{Re}(K_j^{(E,H)}) \text{Re}[\hat{a}_j(x)] - \text{Im}(K_j^{(E,H)}) \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \right\} \\ \text{Im}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})] &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \text{Im}(K_j^{(E,H)}) \text{Re}[\hat{a}_j(x)] + \text{Re}(K_j^{(E,H)}) \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Où: $x = r - r_0 = k_1(\sin \theta - \sin \theta_0)$.

La partie réelle et imaginaire de la transformée de Fourier monodimensionnelle des fonctions $\hat{a}_j(x)$ s'expriment par :

$$\begin{aligned} \text{Re}[\hat{a}_j(x)] &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} a_j(x) \cos(x x) dx \\ \text{Im}[\hat{a}_j(x)] &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} a_j(x) \sin(x x) dx \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

À partir de l'expression (III.9), nous remarquons que les variances et la covariance de la partie réelle et imaginaire de la fonction aléatoire $A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})$ dépendent des variances et covariances associées aux différentes grandeurs $\text{Re}[\hat{a}_j(x)]$ et $\text{Im}[\hat{a}_j(x)]$.

Nous rappelons que l'expression de la variance de la partie réelle et imaginaire est de la forme :

$$\begin{aligned} \dagger_{R(E,H)}^2 &= \langle \text{Re}^2[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})] \rangle + \langle \text{Re}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})] \rangle^2 \\ \dagger_{I(E,H)}^2 &= \langle \text{Im}^2[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})] \rangle + \langle \text{Im}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})] \rangle^2 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Et puisque les fonctions aléatoires gaussiennes qui décrivent les interfaces sont centrées et ont une moyenne nulle ($\langle a_i(x) \rangle = 0$), leurs transformées ont aussi une moyenne nulle alors $\langle \text{Re}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})] \rangle$ s'annule. Ainsi, nous obtenons les variances $\dagger_{R(E,H)}^2$ et $\dagger_{I(E,H)}^2$, et la covariance $X_{RI(E,H)}$ de la parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \dagger_{R(E,H)}^2 = & \langle \text{Re}^2[A_{1(E,H)}^{(1)}(r)] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \text{Re}^2(K_i^{(E,H)}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle + \text{Im}^2(K_i^{(E,H)}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \text{Re}(K_i^{(E,H)}) \text{Re}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle + \text{Im}(K_i^{(E,H)}) \text{Im}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle \right\} \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ -\text{Im}(K_i^{(E,H)}) \text{Re}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle - \text{Re}(K_i^{(E,H)}) \text{Im}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{aligned} \dagger_{I(E,H)}^2 = & \langle \text{Im}^2[A_{1(E,H)}^{(1)}(r)] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \text{Im}^2(K_i^{(E,H)}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle + \text{Re}^2(K_i^{(E,H)}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \text{Im}(K_i^{(E,H)}) \text{Im}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle + \text{Re}(K_i^{(E,H)}) \text{Re}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ +\text{Re}(K_i^{(E,H)}) \text{Im}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle + \text{Im}(K_i^{(E,H)}) \text{Re}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} X_{RI(E,H)} = & \langle \text{Re}[A_{1(E,H)}^{(1)}(r)] \text{Im}[A_{1(E,H)}^{(1)}(r)] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(K_i^{(E,H)}) \text{Im}(K_i^{(E,H)}) \left\{ \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle - \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \text{Re}(K_i^{(E,H)}) \text{Im}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle - \text{Im}(K_i^{(E,H)}) \text{Re}(K_j^{(E,H)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Pour obtenir les expressions de variance et de covariance des parties réelles et imaginaires de l'amplitude diffractée, nous déterminons en premier temps les variances de la partie réelle et imaginaire de la transformée de Fourier des fonctions $a_i(x)$ [55]. Après quelques calculs mathématiques (**Annexe A**), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle = & \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos(x x) R_{ii}(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}[x(L - |x|)] R_{ii}(x) dx \\ \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle = & \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos(x x) R_{ii}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}[x(L - |x|)] R_{ii}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Où: $\text{sinc}(x) = \sin x / x$.

Nous pouvons par ailleurs montrer que $\text{Re}[\hat{a}_i(x)]$ et $\text{Im}[\hat{a}_i(x)]$ sont non corrélées :

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \rangle = 0 \quad (\text{III.16})$$

Si les surfaces sont corrélées, les covariances associées à $\hat{a}_i(x)$ et $\hat{a}_j(x)$ ($i \neq j$) sont non nulles et on écrit :

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle = & \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos(x x) R_{ij}(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}[x(L - |x|)] R_{ij}(x) dx \\ \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle = & \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos(x x) R_{ij}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}[x(L - |x|)] R_{ij}(x) dx \\ \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle = & - \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \sin(x x) R_{ij}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Pour une valeur de Γ donnée, les relations (III.12) et (III.13) montrent que les variables aléatoires $\text{Re}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\Gamma)]$ et $\text{Im}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\Gamma)]$ présentent, dans le cas général, des variances différentes. La relation (III.14) indique que ces variables aléatoires sont corrélées quel que soit l'état corrélé ou non corrélé.

III.2.2 Comportements asymptotiques de variance, de covariance et de l'intensité incohérente

D'après (III.15) et (III.17), on démontre qu'en dehors de la réflexion spéculaire $x \neq 0$ et pour une extension infinie de la longueur de déformation ($L \rightarrow +\infty$), on a :

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle &= \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(x)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ii}(x)}{2} \\ \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle &= \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ij}(x) + \hat{R}_{ij}(-x)}{4} \\ \langle \text{Re}[\hat{a}_i(x)] \text{Im}[\hat{a}_j(x)] \rangle &= - \langle \text{Im}[\hat{a}_i(x)] \text{Re}[\hat{a}_j(x)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ij}(x) - \hat{R}_{ij}(-x)}{4j} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

En substituant (III.18) dans (III.12)-(III.14), nous démontrons que pour des interfaces corrélées ou non corrélées, les variables aléatoires $\text{Re}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\Gamma)]$ et $\text{Im}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\Gamma)]$ sont non corrélées ($X_{Rl(E,H)} = 0$) pour $L \rightarrow +\infty$, et présente la même variance :

$$\dagger_{R(E,H)}^2 = \dagger_{I(E,H)}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |K_i^{(E,H)}(\Gamma)|^2 \hat{R}_{ii}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \text{Re} \left[K_i^{(E,H)}(\Gamma) K_j^{*(E,H)}(\Gamma) \hat{R}_{ij}(x) \right] \right\} \quad (\text{III.19})$$

Finalement et compte tenu de la symétrie hermitienne de la fonction $\hat{R}_{ij}(\Gamma)$, nous montrons que l'intensité incohérente s'exprime sous la forme suivante :

$$I_{f,(E,H)}^{SSA}(\nu) = \frac{\cos^2 \nu}{\cos \nu_0} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |K_i^{(E,H)}(\Gamma)|^2 \hat{R}_{ii}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \text{Re} \left[K_i^{(E,H)}(\Gamma) K_j^{*(E,H)}(\Gamma) \hat{R}_{ij}(x) \right] \right\} \quad (\text{III.20})$$

III.3 Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente basées sur SSA

Selon l'expression (II.55), (III.2), et après calcul nous obtenons le coefficient bistatique [54] :

$$\langle I_{(E,H)}^{SSA}(\nu) \rangle = \frac{\cos^2 \nu}{\cos \nu_0 (S_1 + S_0)^2} \times \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} K_i(\Gamma) K_j^*(\Gamma) \exp \left(-\frac{\dagger_i^2 + \dagger_j^2}{2} (S_1 + S_0)^2 \right) N_{ij} \quad (\text{III.21})$$

Avec :

$$N_{ij} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} T(x) \exp(j(r - r_0)x) \exp\left((S_1 + S_0)^2 R_{ij}(x)\right) dx \quad (\text{III.22})$$

On définit la fonction triangulaire $T(x)$ par :

$$T(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{L} & \text{pour } |x| < L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Pour une fonction de corrélation d'énergie finie ($\lim_{x \rightarrow \infty} R_{ij}(x) = 0$), N_{ij} peut être écrit sous la forme suivante :

$$N_{ij} = 2fu(r - r_0) + \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{k_1^2 (\cos_{n_0} + \cos_n)^{2q}}{q!} TF[R_{ij}^q(x)](k_1 \sin_n - k_1 \sin_{n_0}) \quad (\text{III.24})$$

Où :

$$\exp\left((S_1 + S_0)^2 R_{ij}(x)\right) = 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} R_{ij}^q(x) \frac{(S_1 + S_0)^{2q}}{q!} \quad (\text{III.25})$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} T(x) \exp(j(r - r_0)x) dx = 2fu(r - r_0)$$

Le premier terme de l'expression (III.24), nous conduit dans la direction spéculaire à l'intensité cohérente $I_{c,(E,H)}^{SSA}(n)$:

$$I_{c,(E,H)}^{SSA}(n) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{N-1} K_i^{(E,H)}(k_1 \sin_{n_0}, k_1 \sin_n) \exp\left(-2(k_1 \cos_{n_0})^2 \dagger_i^2\right) \right|^2}{4\} k_1^2 \cos_{n_0}}{2fu(k_1 \sin_n - k_1 \sin_{n_0})} \quad (\text{III.26})$$

Le deuxième terme nous donne l'intensité incohérente $I_{f,(E,H)}^{SSA}(n)$:

$$I_{f,(E,H)}^{SSA}(n) = \frac{\cos^2_n}{\} k_1^2 \cos_{n_0} (\cos_n + \cos_{n_0})^2} \times \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} K_i^{(E,H)}(k \sin_n) K_j^{*(E,H)}(k_1 \sin_n) P_{ij}(n) \exp\left(-k^2 \frac{\dagger_i^2 + \dagger_j^2}{2} (\cos_n + \cos_{n_0})^2\right) \quad (\text{III.27})$$

Avec :

$$P_{ij}(n) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{k_1^2 (\cos_n + \cos_{n_0})^{2q}}{q!} TF[R_{ij}^q(x)](k_1 \sin_n - k_1 \sin_{n_0}) \quad (\text{III.28})$$

Les expressions (III.26) et (III.27) indiquent que dans le cas où les interfaces sont planes l'intensité cohérente obtenue par la méthode SSA dépend de la hauteur quadratique moyenne et ne dépend pas

des fonctions de corrélation. Tandis que l'intensité incohérente obtenue dans le cas de présence de rugosité dépend de la hauteur quadratique moyenne et des transformées de Fourier des fonctions de corrélation à la puissance q , $R_{ij}^q(x)$.

Pour cette raison-là, le domaine d'application de la méthode SSA diffère du cas des fonctions de corrélation gaussiennes que le cas de corrélation exponentielles. Dans notre étude, on ne considère que le cas des fonctions de corrélation gaussiennes, et on signale que les résultats que nous retirerons dans les simulations ne peuvent pas s'appliquer dans le cas des interfaces rugueuses avec des corrélations exponentielles.

Les transformées de Fourier des fonctions de corrélation $R_{ij}^q(x)$ se déduisent des expressions (II.10) et (II.11), sous la forme suivante :

$$TF[R_{ij}^q(x)](\mathbf{r}) = \left(q_{ij} \dagger_i \dagger_j \sqrt{\frac{2l_i l_j}{l_i^2 + l_j^2}} \right)^q \sqrt{\frac{f(l_i^2 + l_j^2)}{2q}} \exp\left[-\mathbf{r}^2 \frac{(l_i^2 + l_j^2)}{8q}\right] \quad (\text{III.29})$$

III.4 Densités de probabilité

Les champs diffractés sont gérés par les statistiques telles que la fonction de corrélation et la densité de probabilité (Probability Density Function, PDF) des hauteurs de la structure. Cette densité de probabilité est supposée gaussienne dans la plupart des cas.

L'intérêt des fonctions gaussiennes en physique est également dû à certaines de leurs propriétés mathématiques remarquables, ce qui entraîne notamment la conservation par opération linéaire. Par exemple les transformées de Fourier des fonctions gaussiennes $a_i(x)$ sont aussi des fonctions gaussiennes, aussi la combinaison linéaire des processus gaussiens est un processus gaussien.

En conséquence, les amplitudes de diffraction sont des processus gaussiens de la variable \mathbf{r} . Les parties, réelle $\text{Re}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})]$ et imaginaire $\text{Im}[A_{1(E,H)}^{(1)}(\mathbf{r})]$, de ces amplitudes qui sont deux variables aléatoires centrées sont, dans le cas général, corrélées et présentent des variances différentes. On peut raisonnablement approcher la statistique des hauteurs des interfaces rugueuses étudiées par une fonction de probabilité gaussienne.

III.4.1 Densité de probabilité conjointe d'amplitude diffractée complexe

L'intensité diffractée incohérente est définie en fonction des parties, réelle et imaginaire, de l'amplitude diffractée selon (III.8), alors pour obtenir la densité de probabilité de cette intensité incohérente, il faut d'abord déterminer celle des parties réelle et imaginaire. La densité de probabilité conjointe de l'amplitude diffractée s'exprime par [24, 55] :

$$P_{RI(E,H)}(x, y) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2(1 - \dots_{(E,H)}^2)} \left(\frac{x^2}{\dagger_{R(E,H)}^2} - \frac{2\dots_{(E,H)}xy}{\dagger_{R(E,H)}\dagger_{I(E,H)}} + \frac{y^2}{\dagger_{I(E,H)}^2} \right) \right]}{2f\dagger_{R(E,H)}\dagger_{I(E,H)}\sqrt{(1 - \dots_{(E,H)}^2)}} \quad (\text{III.30})$$

Où ... est le coefficient de corrélation qui est défini comme le rapport de la covariance donnée par (III.14) et le produit de la variance de la partie réelle et imaginaire donné par les expressions (III.12), (III.13) respectivement:

$$\dots_{(E,H)} = \frac{X_{RI(E,H)}}{\dagger_{R(E,H)}\dagger_{I(E,H)}} \quad (\text{III.31})$$

En transformation en coordonnées polaires, les parties ,réelle et imaginaire, peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \text{Re} \left[A_{I(E,H)}^{(1)}(r) \right] = M \cos(W) \\ \text{Im} \left[A_{I(E,H)}^{(1)}(r) \right] = M \sin(W) \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Où: $-f \leq W \leq f$, nous obtenons la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires M et W :

$$P_{MW(E,H)}(m, W) = m p_{RI(E,H)}(m \cos W, m \sin W) \quad (\text{III.33})$$

où m est le module avec $m \geq 0$, et W est la phase avec $-f \leq W \leq f$.

Après calcul, on écrit :

$$P_{MW(E,H)}(m, W) = \frac{m}{2f\dagger_{R(E,H)}\dagger_{I(E,H)}\sqrt{(1 - \dots_{(E,H)}^2)}} \times \exp \left[-\frac{m^2}{2(1 - \dots_{(E,H)}^2)} \left(\frac{\cos^2 W}{\dagger_{(E,H)}^2} - 2\dots_{(E,H)} \frac{\cos W \sin W}{\dagger_{R(E,H)}\dagger_{I(E,H)}} + \frac{\sin^2 W}{\dagger_{I(E,H)}^2} \right) \right] \quad (\text{III.34})$$

À partir de l'expression de la densité de probabilité conjointe, on cherche à déterminer les densités de probabilités du module et de la phase en utilisant des hypothèses mathématiques et trigonométriques.

III.4.2 Densité de probabilité du module

Afin de déterminer la densité de probabilité du module, nous intégrons l'expression (III.34) de la densité de probabilité conjointe par rapport à la phase W , donc :

$$P_{M(E,H)}(m) = \int_{-f}^{+f} p_{MW(E,H)}(m, W) dW \quad (\text{III.35})$$

On obtient après calculs l'expression de la densité de probabilité du module de l'amplitude diffractée défini pour $m \geq 0$. Cette densité obéit à une loi de Hoyt [24], et est donnée par :

$$p_{M(E,H)}(m) = \frac{m \cdot \exp \left[-\frac{m^2}{4(1 - \dots_{(E,H)}^2)} \left(\frac{1}{\dagger_{R(E,H)}^2} + \frac{1}{\dagger_{I(E,H)}^2} \right) \right]}{\dagger_{R(E,H)} \dagger_{I(E,H)} \sqrt{1 - \dots_{(E,H)}^2}} \times I_0 \left(\frac{m^2 g}{4(1 - \dots_{(E,H)}^2)} \right) \quad (\text{III.36})$$

On note que :

$$g = \sqrt{\left(\frac{1}{\dagger_{R(E,H)}^2} - \frac{1}{\dagger_{I(E,H)}^2} \right)^2 + \frac{4 \dots_{(E,H)}^2}{\dagger_{R(E,H)}^2 \dagger_{I(E,H)}^2}} \quad (\text{III.37})$$

I_0 représente la fonction de Bessel modifié d'ordre 0 avec :

$$I_0 \left(-\frac{m^2 g}{4(1 - \dots_{(E,H)}^2)} \right) = \frac{1}{2f} \int_{-f}^{+f} \exp \left(-\frac{m^2 g}{4(1 - \dots_{(E,H)}^2)} \cos(2w + \dots) \right) dw \quad (\text{III.38})$$

III.4.3 Densité de probabilité de la phase

En intégrant l'expression (III.34) par rapport au module m ($m \geq 0$) pour obtenir la densité de probabilité de la phase :

$$p_{W(E,H)}(w) = \int_0^{+\infty} p_{MW(E,H)}(m, w) dm \quad (\text{III.39})$$

D'où, la densité de probabilité de la phase est sous la forme suivante:

$$p_W(w) = \frac{1}{2f \dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)}} \frac{\sqrt{1 - \dots_{(ba)}^2}}{\left(\frac{\cos^2 w}{\dagger_{R(ba)}^2} - \frac{2 \dots_{(ba)} \cos w \sin w}{\dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)}} + \frac{\sin^2 w}{\dagger_{I(ba)}^2} \right)} \quad (\text{III.40})$$

III.4.4 Densité de probabilité de l'intensité incohérente

On peut déduire la densité de probabilité de l'intensité incohérente $p_{I_f(E,H)}(w)$ à partir de la densité de probabilité du module $p_{M(E,H)}(m)$ selon la relation suivante :

$$p_{I_f(E,H)}(w) = \frac{p_{M(E,H)}(m) \left(\sqrt{w} \cos_{n_0} / \cos^2_n \right)}{2 \sqrt{w \cos^2_n / \dots} \cos_{n_0}} \quad (\text{III.41})$$

Avec $w \geq 0$.

D'où :

$$P_{I_{f,(E,H)}}(w) = \frac{\} \cos_{\#0} \exp\left(-\frac{w\} \cos_{\#0}}{4(1-\dots_{(E,H)})^2 \cos^2_{\#}} \left(\frac{1}{\dagger_{R(E,H)}^2} + \frac{1}{\dagger_{I(E,H)}^2}\right)\right)}{2\dagger_{R(E,H)} \dagger_{I(E,H)} \cos^2_{\#} \sqrt{(1-\dots_{(E,H)})^2}} \times I_0\left(\frac{w\} \cos_{\#0}}{4(1-\dots_{(E,H)})^2 \cos^2_{\#}}\right) \quad (\text{III.42})$$

III.4.5 Comportements asymptotiques des densités de probabilité

Pour une extension infinie de la longueur de déformation ($L \rightarrow +\infty$), la covariance et le coefficient de corrélation donnés par les expressions (III.14) et (III.31) respectivement sont nuls, et les variances $\dagger_{R(E,H)}^2$ et $\dagger_{I(E,H)}^2$ sont égales selon (III.19). En conséquence, le module du champ diffracté à grande distance suit une loi de Rayleigh, l'intensité de diffraction suit une loi exponentielle et la phase est uniforme. Ce résultat est établi quel que soit l'état des interfaces, corrélées ou non corrélées. La forme des densités de probabilité ne permet donc pas de différencier l'état corrélé de l'état non corrélé. Donc, pour $L \rightarrow +\infty$, les expressions (III.36), (III.40) et (III.42) s'écrivent :

$$P_{M(E,H)}(m) = \frac{m}{\dagger_{R(E,H)}^2} \exp\left(-\frac{m^2}{2\dagger_{R(E,H)}^2}\right) \quad , \text{ pour } m \geq 0 \quad (\text{III.43})$$

$$P_{I_{f,(E,H)}}(w) = \frac{\} \cos_{\#0}}{2\dagger_{R(E,H)}^2 \cos^2_{\#}} \exp\left(-\frac{w\} \cos_{\#0}}{2\dagger_{R(E,H)}^2 \cos^2_{\#}}\right) \quad , \text{ pour } w \geq 0 \quad (\text{III.44})$$

$$P_{W(E,H)}(w) = \frac{1}{2f} \quad , \quad \text{ pour } w \in [-f; f] \quad (\text{III.45})$$

III.5 Application numérique sur une structure 1D composée de quatre couches ($N=4$)

Pour valider nos résultats, on s'intéresse aux surfaces naturelles, nous choisissons de faire notre application sur une structure composée de quatre couches naturelles ($N=4$) monodimensionnelles et rugueuses aléatoirement de longueur de déformation finie ou infinie [54]. On va présenter l'intensité diffractée recueillie par un radar de télédétection, en absence et en présence de rugosité dans les deux polarisations horizontale et verticale. On débute notre démonstration par le calcul des amplitudes diffractées dans le milieu 1, pour $N=4$, on se référera à (Annexe B) pour montrer le calcul détaillé de ces amplitudes à l'ordre 0 (absence de rugosité) et à l'ordre 1 (présence de rugosité).

Afin de confirmer nos résultats obtenus par la méthode SPM, nous les comparerons à ceux obtenus par la méthode SSA. En fait, nous montrerons l'influence de plusieurs paramètres sur l'intensité cohérente, incohérente et la densité de probabilité selon ces deux méthodes approchées.

III.5.1 Paramètres de simulation

Dans toutes les simulations on travaille dans la bande L, où la plage de la fréquence est entre 1 et 2 GHz, donc la longueur d'onde est entre 15 et 30 cm, ici la structure est illuminée par une onde plane électromagnétique de longueur $\lambda = 20\text{cm}$. On considère trois interfaces i caractérisées par des permittivités relatives v_1, v_2, v_3 (Tableau III.1) et séparées d'épaisseur $d_1 = 0.35\lambda$ et $d_2 = 0.25\lambda$. Ces interfaces sont caractérisées par des fonctions de corrélation et d'intercorrélation gaussiennes avec des longueurs de corrélation l_i , des hauteurs quadratiques moyennes \dagger_i . On considère deux configurations de la hauteur quadratique moyenne (Tableau III.2) :

	Milieu considéré	Permittivité relative
Milieu 1	air	$v_1 = 1$
Milieu 2	sol humide 15%	$v_2 = 6.26 - 0.52j$
Milieu 3	sol humide 20%	$v_3 = 8.45 - 0.85j$
Milieu 4	sol humide 25%	$v_4 = 11.3 - 1.27j$

Tableau III.1 Paramètres physiques des milieux i .

	Longueur de corrélation	Hauteur quadratique moyenne	
		Configuration 1	Configuration 2
Interface 1	$l_1 = 0.3\lambda$	$\dagger_1 = 0.036\lambda$	$\dagger_1 = 0.060\lambda$
Interface 2	$l_2 = 0.4\lambda$	$\dagger_2 = 0.027\lambda$	$\dagger_2 = 0.045\lambda$
Interface 3	$l_3 = 0.5\lambda$	$\dagger_3 = 0.0225\lambda$	$\dagger_3 = 0.0375\lambda$

Tableau III.2 Paramètres statistiques des interfaces i .

Notons que dans les deux configurations on propose que: $\dagger_2 = 3\dagger_1/4$, $\dagger_3 = 5\dagger_1/8$.

III.5.2 Intensité cohérente

La figure III.1 présente en incidence normale, l'intensité cohérente en fonction d'angle d'incidence θ_0 , menée d'une comparaison entre l'intensité obtenue par la méthode SPM, donnée par l'expression (III.6) et celle obtenue par la méthode SSA donnée par l'expression (III.26), en polarisation horizontale $E_{//}$ et en polarisation verticale $H_{//}$ pour la configuration 1 dans (a), et pour la configuration 2 dans (b).

Dans les deux méthodes SPM et SSA et dans les deux configurations, l'intensité est maximale en polarisation $E_{//}$ qu'en polarisation $H_{//}$. On peut remarquer clairement l'effet de l'angle de Brewster en polarisation $H_{//}$ qui est égal à l'angle d'incidence pour lequel l'intensité est minimale mais n'est pas nulle sous l'angle $\theta_{\text{Brewster}} = 68.2^\circ$. L'intensité cohérente obtenue par la méthode SPM est plus importante par rapport à celle obtenue par la méthode SSA dans les deux configurations. Contrairement à la méthode SSA, la méthode SPM ne dépend pas de la hauteur quadratique moyenne de rugosité, en fait, les résultats obtenus par la méthode SSA s'approchent de ceux obtenus par la

méthode SPM pour des valeurs minimales de la hauteur quadratique moyenne, et pour un angle supérieur à 65° les deux méthodes donnent presque les mêmes résultats.

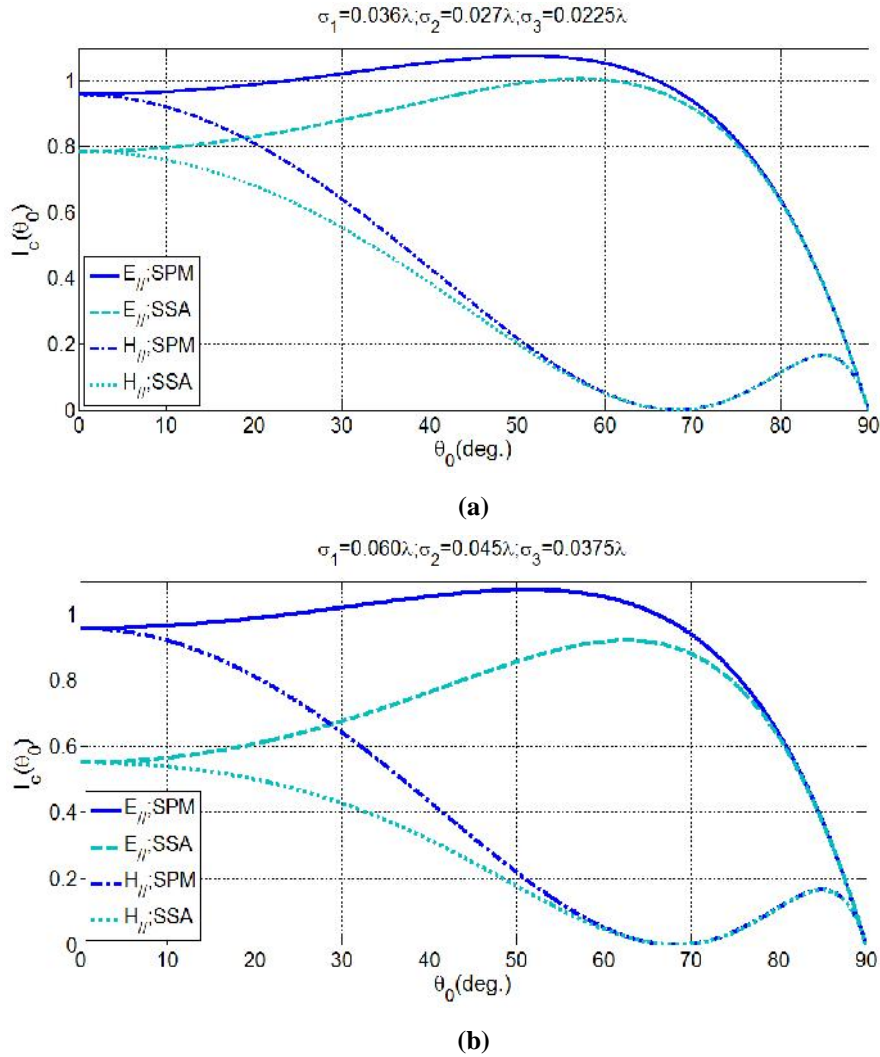


Figure III.1. Intensité cohérente en fonction d'angle d'incidence θ_0 par SPM et SSA (a) configuration 1 : $\sigma_1 = 0.036$, $\sigma_2 = 0.027$, $\sigma_3 = 0.0225$ (b) configuration 2 : $\sigma_1 = 0.060$, $\sigma_2 = 0.045$, $\sigma_3 = 0.0375$

III.5.3 Intensité incohérente

III.5.3.1 En incidence normale

La figure III.2 présente l'intensité incohérente en fonction de l'angle d'observation θ pour une incidence normale ($\theta_0 = 0^\circ$), considérant des interfaces non corrélées et pour une longueur de déformation infinie ($L \rightarrow \infty$). On montre une comparaison entre les résultats obtenus par les méthodes SPM et SSA donnés respectivement par (III.20) et (III.27), en polarisation horizontale $E_{//}$ et verticale $H_{//}$, dans (a) pour la première configuration et dans (b) pour la deuxième configuration.

Dans les deux configurations, on peut remarquer que pour une incidence normale les résultats obtenus par la méthode SPM sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode SSA, où cette dernière s'approche de la méthode SPM lorsque les valeurs de la hauteur quadratique moyenne diminuent. Et dans les deux

méthodes, les courbes sont symétriques et les amplitudes sont élevées en polarisation $H_{//}$ qu'en polarisation $E_{//}$.

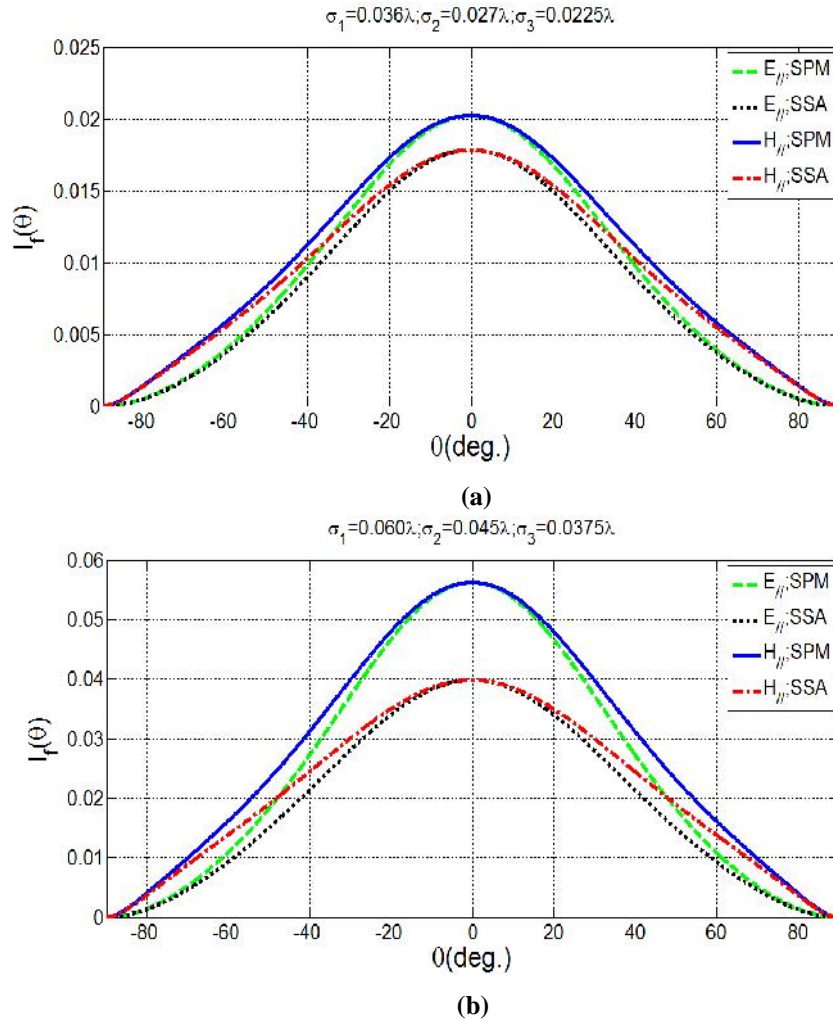


Figure III.2. Intensité incohérente en fonction d'angle d'observation, en incidence normale (a) configuration 1: $\sigma_1 = 0.036$, $\sigma_2 = 0.027$, $\sigma_3 = 0.0225$ (b) configuration 2: $\sigma_1 = 0.060$, $\sigma_2 = 0.045$, $\sigma_3 = 0.0375$.

III.5.3.2 En incidence oblique

La figure III.3 présente l'intensité incohérente obtenue par la méthode SPM en fonction d'angle d'observation en polarisation $E_{//}$ dans (a) et en polarisation $H_{//}$ dans (b), pour différentes valeurs d'angle d'incidence oblique, prenant: 20° , 30° , 45° , 60° , 75° . Considérant des interfaces non corrélées et pour une extension de déformation infinie ($L \rightarrow \infty$). La figure III.4 présente l'intensité incohérente obtenue par la méthode SSA en polarisation $E_{//}$ dans (a) et en polarisation $H_{//}$ dans (b).

On peut constater que pour une incidence oblique et dans les deux méthodes, l'intensité incohérente augmente par la diminution d'angle d'incidence dans les deux polarisations $E_{//}$ et $H_{//}$. Les résultats obtenus par la méthode SPM sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode SSA.

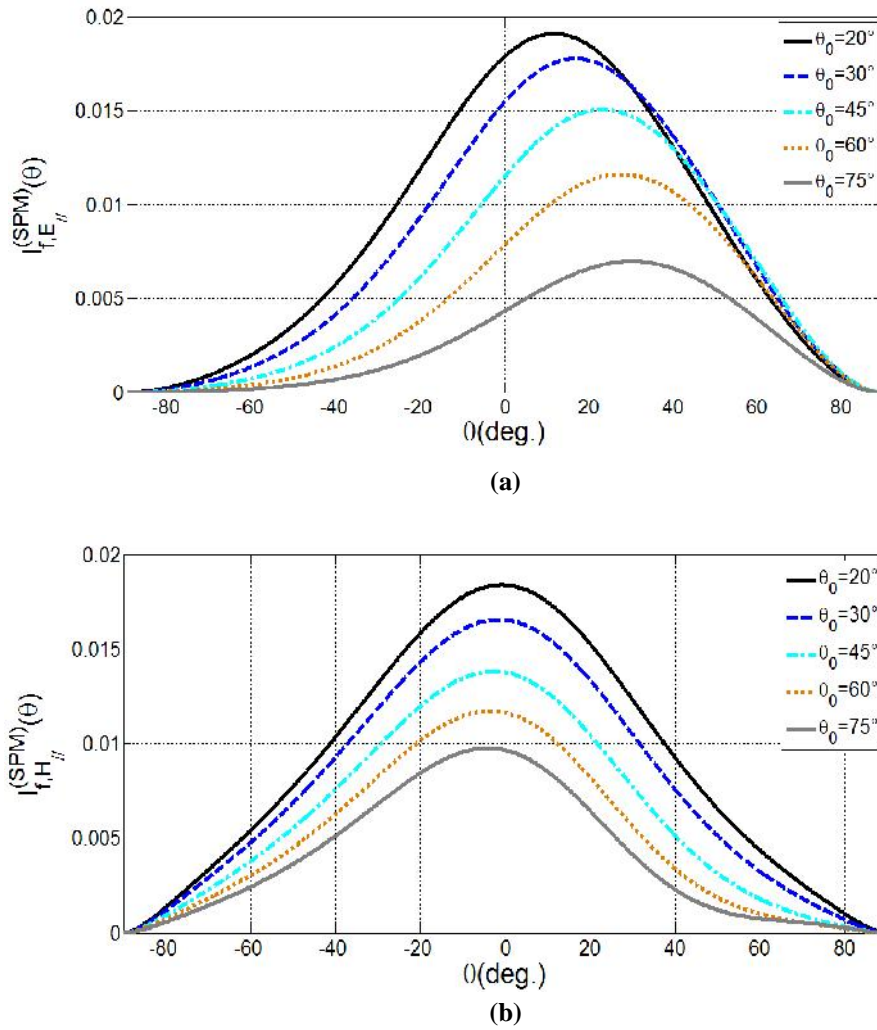


Figure III.3. Intensité incohérente en fonction d'angle d'observation en incidence oblique, par SPM
(a) polarisation $E_{//}$, (b) polarisation $H_{//}$

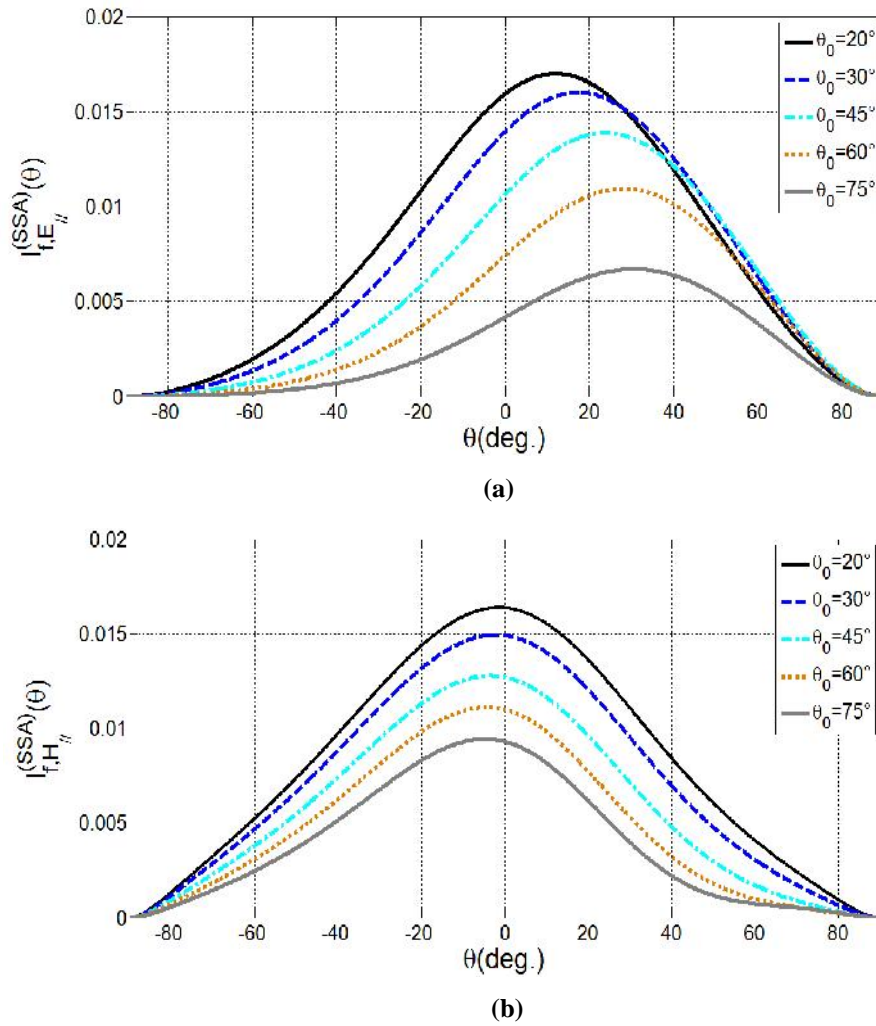


Figure III.4. Intensité incohérente en fonction d'angle d'observation en incidence oblique, par SSA (a) polarisation $E_{//}$, (b) polarisation $H_{//}$

III.5.3.3 Influence de la corrélation

La figure III.5 présente l'effet de la corrélation des interfaces sur l'intensité incohérente en fonction de l'angle d'observation en polarisation $E_{//}$, obtenue par la méthode SPM dans (a), et par la méthode SSA dans (b). Considérant pour une extension infinie, trois états des interfaces: non corrélées avec $q_{12} = 0; q_{13} = 0; q_{23} = 0$, corrélées avec $q_{12} = 1; q_{13} = 1; q_{23} = 1$ et partiellement corrélées avec $q_{12} = 1/\sqrt{3}; q_{13} = 1/\sqrt{3}; q_{23} = 1/\sqrt{3}$. La figure III.6 présente l'effet de la corrélation sur l'intensité incohérente en polarisation $H_{//}$ obtenue par la méthode SPM dans (a), et par la méthode SSA dans (b).

Dans les deux méthodes, on remarque que le paramètre de corrélation joue un rôle remarquable sur le changement d'amplitude de l'intensité incohérente, soit en polarisation $E_{//}$ ou $H_{//}$, l'amplitude est toujours plus élevée dans l'état des interfaces non corrélées que dans l'état corrélé (totalement ou

partiellement). Les résultats obtenus par la méthode SSA sont proches des résultats obtenus par la méthode SPM.

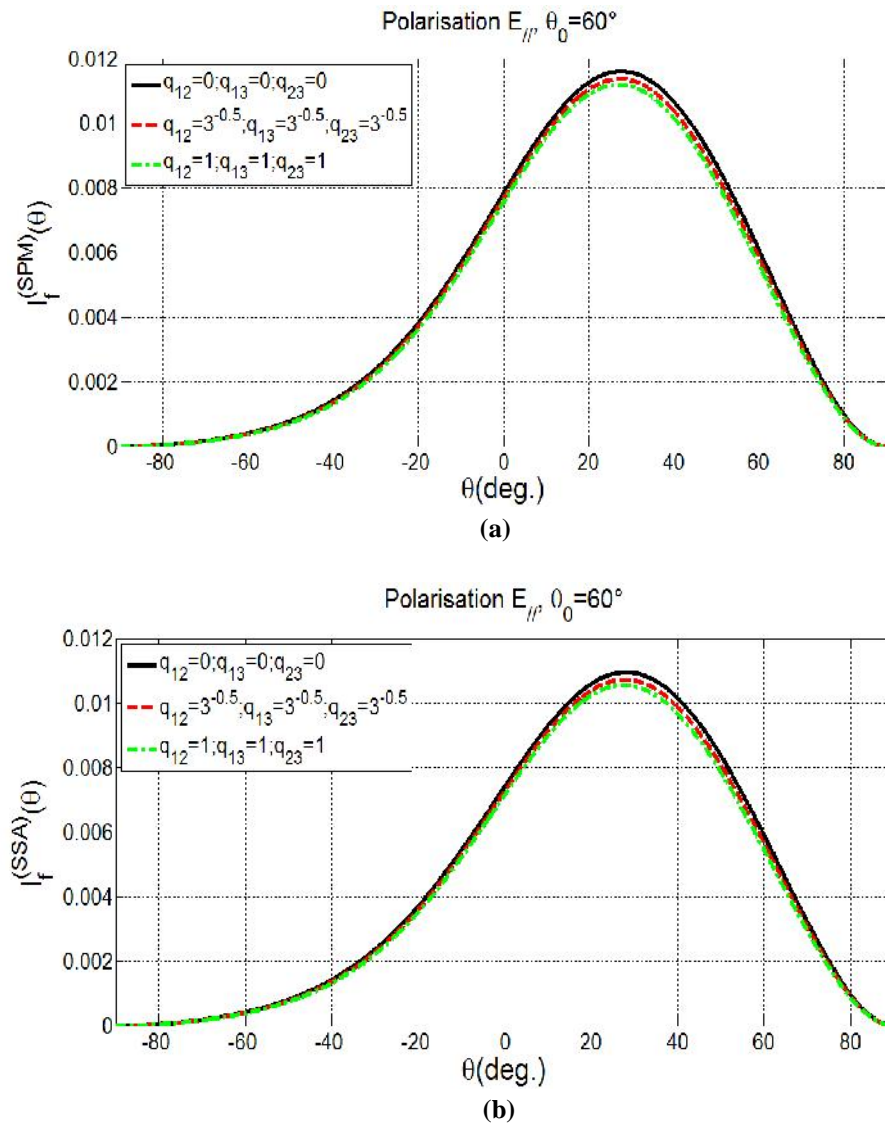


Figure III.5. Effet de la corrélation sur l'intensité incohérente, polarisation $E_{//}$, pour $L \rightarrow \infty$, $\theta_0 = 60^\circ$
 (a) par SPM (b) par SSA.

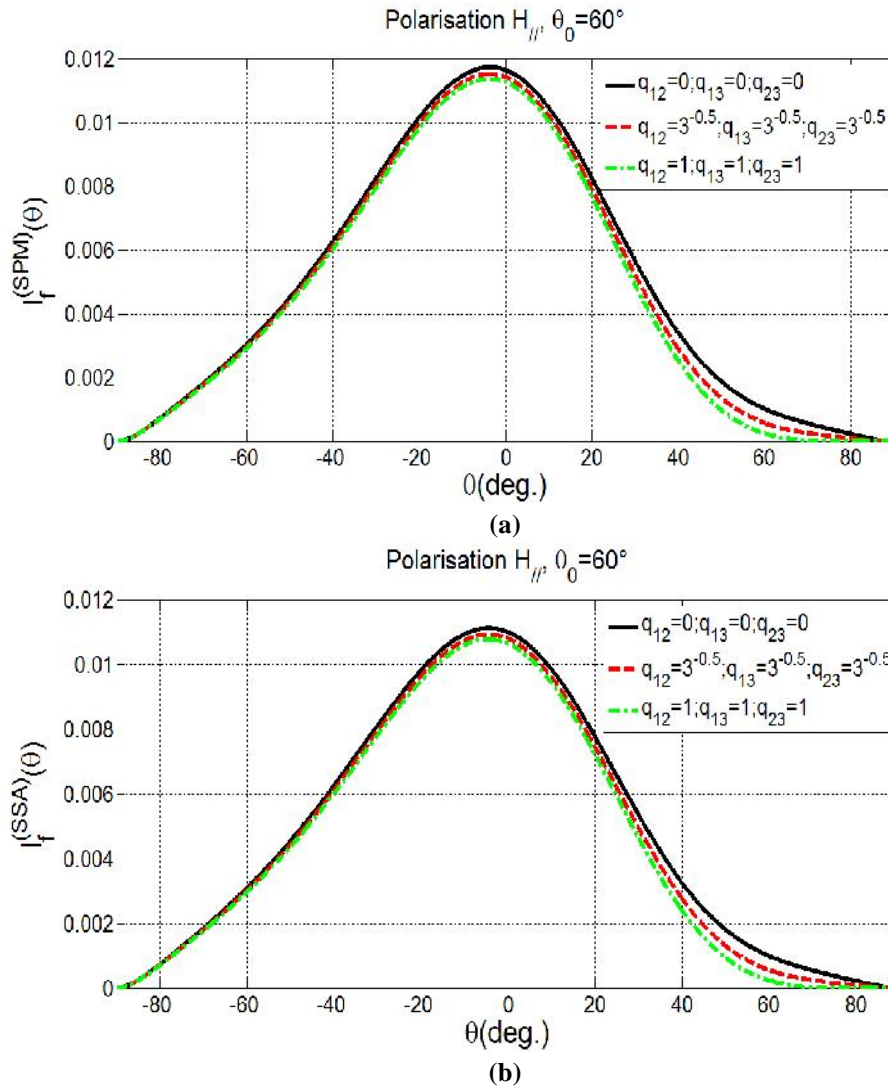


Figure III.6. Effet de la corrélation sur l'intensité incohérente, polarisation $H_{//}$, pour $L \rightarrow \infty$, $\theta_0 = 60^\circ$ (a) par SPM (b) par SSA.

III.5.4 Intensité rétrodiffusée

III.5.4.1 Influence de la hauteur quadratique moyenne

La figure III.7 présente l'intensité rétrodiffusée en fonction d'angle d'incidence dans (a) pour la configuration 1 et dans (b) pour la configuration 2, menée d'une comparaison entre les deux méthodes, SPM et SSA. En incidence normale ($\theta_0 = 0^\circ$), les amplitudes dans les deux polarisations sont égales et sont plus élevées dans la méthode SPM que dans la méthode SSA, néanmoins la méthode SSA s'approche de la méthode SPM pour une décroissance des valeurs de la hauteur quadratique moyenne \dagger_i et d'angle d'incidence θ_0 . En dehors de l'incidence normale, l'intensité rétrodiffusée obtenue en polarisation $H_{//}$ est supérieure par rapport à l'intensité obtenue en polarisation

$E_{//}$ dans les deux méthodes et dans les deux configurations. Pour un angle d'incidence supérieur à 44° les deux méthodes sont similaires.

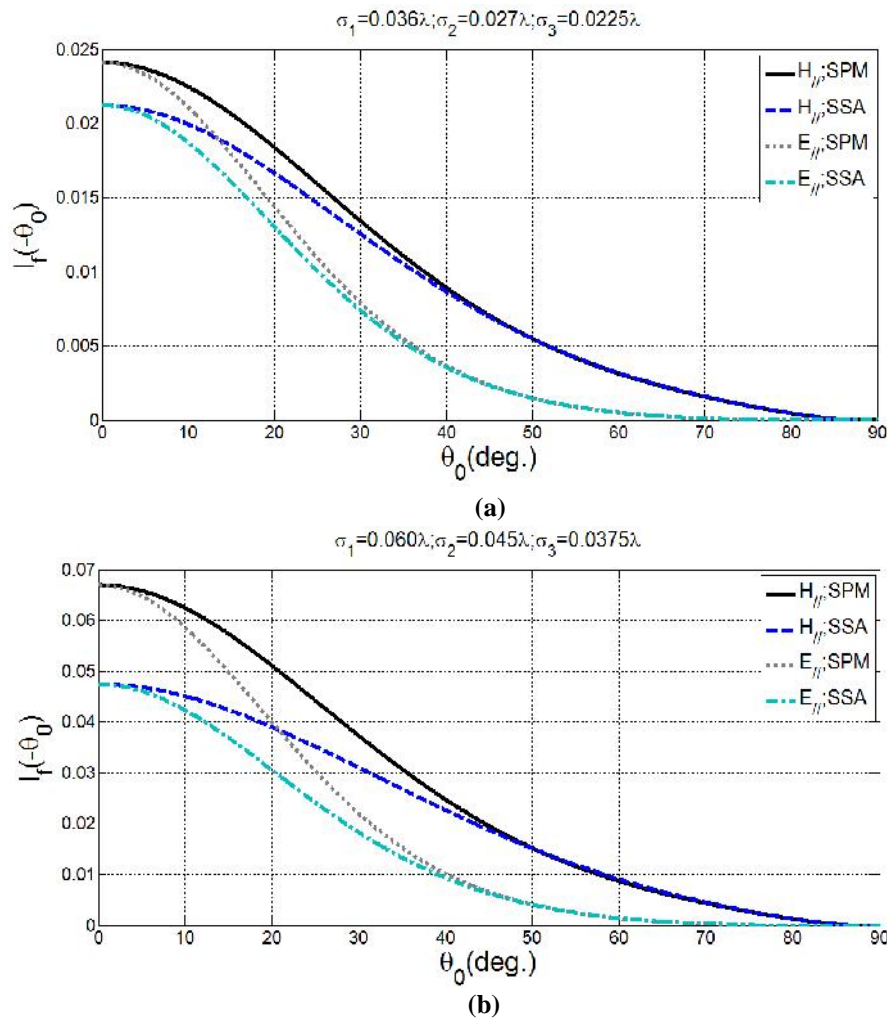


Figure III.7. Intensité rétrodiffusée en fonction d'angle d'incidence par SPM et SSA. (a) configuration 1: $\sigma_1 = 0.036$, $\sigma_2 = 0.027$, $\sigma_3 = 0.0225$ (b) configuration 2: $\sigma_1 = 0.060$, $\sigma_2 = 0.045$, $\sigma_3 = 0.0375$

III.5.4.2 Effet de l'épaisseur des couches

On montre dans la *figure III.8*, l'effet de l'épaisseur de la deuxième couche sur l'intensité rétrodiffusée dans les deux polarisations $E_{//}$ et $H_{//}$. On présente dans (a) les résultats obtenus par SPM et dans (b) les résultats obtenus par SSA. On considère pour la configuration 1 et pour une extension infinie, trois valeurs d'épaisseur d_1 : $\{0.30\}$, $\{0.35\}$ et $\{0.40\}$. L'épaisseur de la troisième couche est fixée, $d_2 = 0.25$. En incidence normale ($\theta_0 = 0^\circ$), nous remarquons que l'amplitude s'accroît avec la décroissance de l'épaisseur de la première couche, et l'amplitude en polarisation $E_{//}$ est égale à l'amplitude en polarisation $H_{//}$ dans les deux méthodes. En dehors de l'incidence normale, l'amplitude diminue avec l'augmentation de l'angle d'incidence et est plus élevée en polarisation $H_{//}$ qu'en

polarisation $E_{//}$. On peut observer que ce soit en polarisation $E_{//}$ ou $H_{//}$, pour un angle d'incidence supérieur à 50° , l'effet de l'épaisseur est presque négligé. Dans les deux polarisations, la méthode SPM est meilleure que la méthode SSA, et sont identiques pour un angle d'incidence supérieur à 40° .

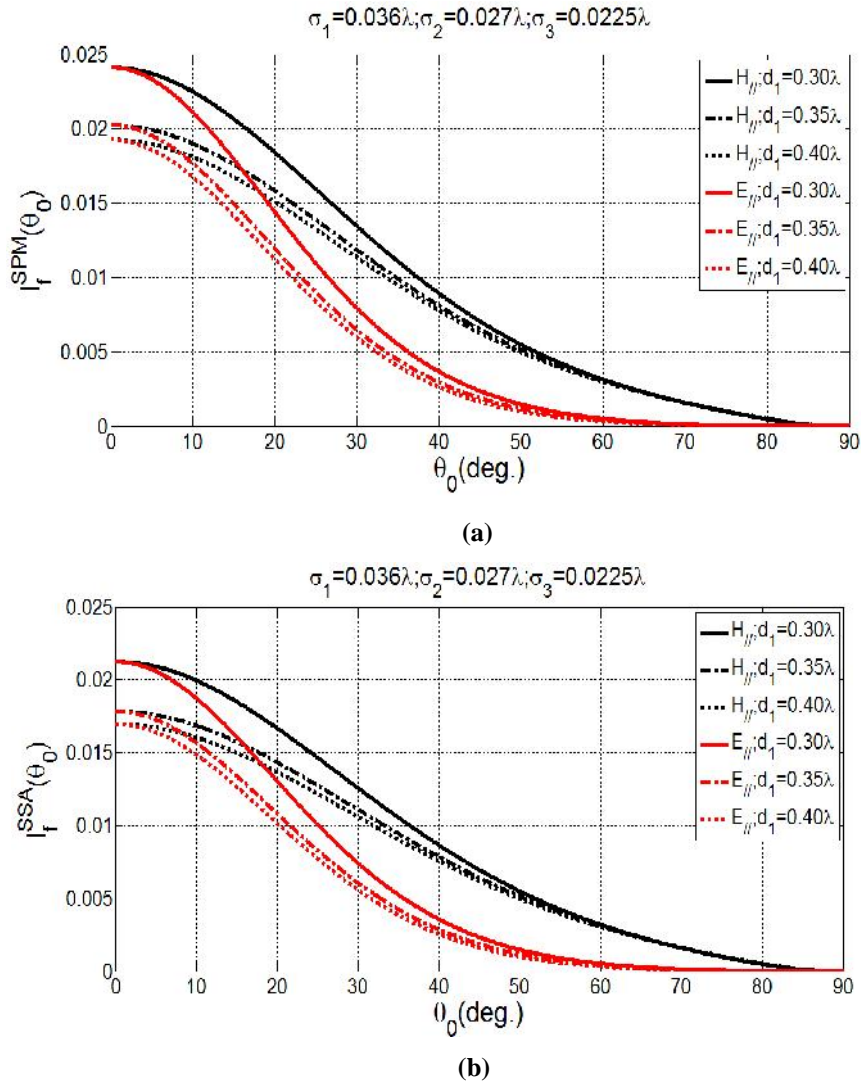


Figure III.8. Intensité rétrodiffusée en fonction d'angle d'incidence et l'effet d'épaisseur, $d_2 = 0.25$
(a) par SPM (b) par SSA

III.5.5 La densité de probabilité du module et de la phase

III.5.5.1 Influence de la longueur de déformation

La figure III.9 examine l'influence de la longueur de déformation sur la densité de probabilité du module en polarisation $E_{//}$ dans (a) et en polarisation $H_{//}$ dans (b). On considère différentes valeurs de longueur: $2\}$, $3\}$, $5\}$ et ∞ . Considérons les épaisseurs $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.25\}$, les longueurs de corrélation $l_1 = 0.3$, $l_2 = 0.4$, $l_3 = 0.5$, et les hauteurs quadratiques moyennes $\sigma_1 = 0.036$, $\sigma_2 = 0.027$, $\sigma_3 = 0.225$. Dans les deux polarisations, on peut montrer que pour une

longueur de déformation supérieure à 5}, la densité de probabilité suit la loi de Rayleigh pour une extension infinie (III.43).

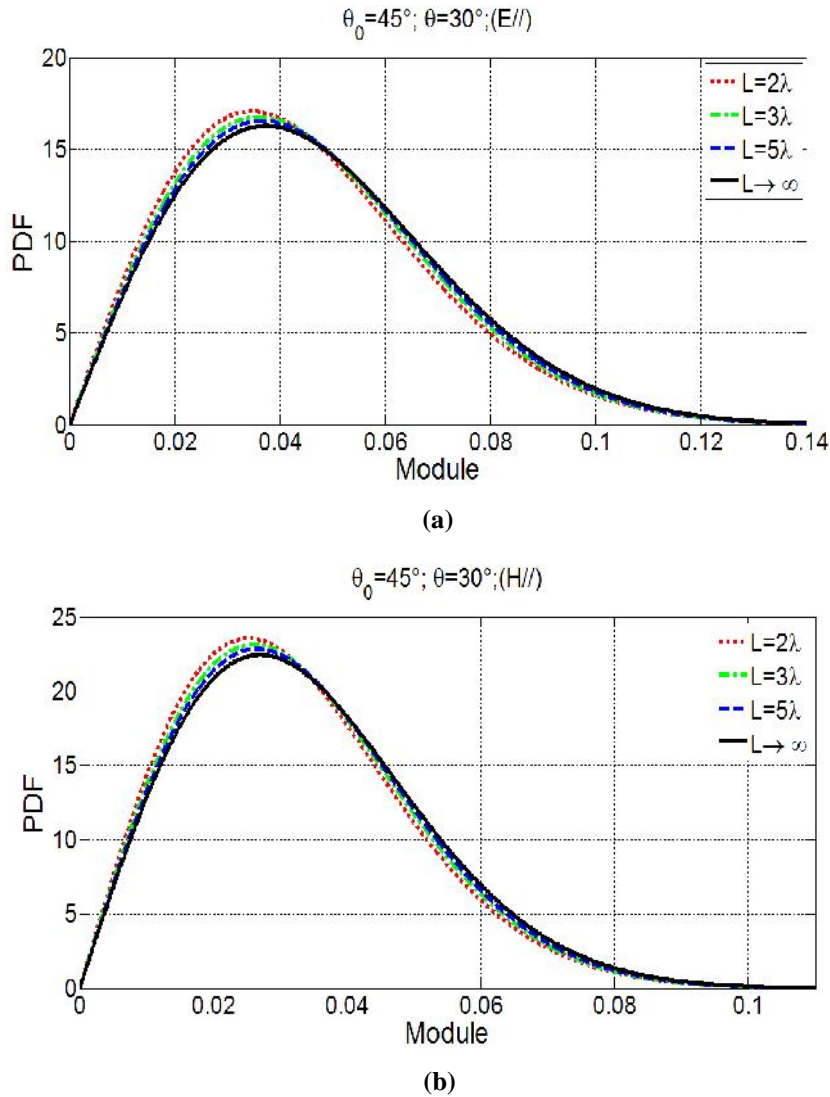


Figure III.9. Densité de probabilité de module pour différentes longueurs de déformation $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.25$, $l_1 = 0.3$, $l_2 = 0.4$, $l_3 = 0.5$, $\sigma_1 = 0.036$, $\sigma_2 = 0.027$, $\sigma_3 = 0.225$.
(a) en polarisation $E//$ (b) en polarisation $H//$

On présente dans la figure III.10 l'erreur relative moyenne entre la densité de probabilité de la phase donnée par l'expression (III.40) pour différentes valeurs de longueur de déformation L : 2λ , 6λ , 7λ , 10λ , et la loi uniforme donnée par l'expression (III.45), en polarisation $E//$ dans (a) et en polarisation $H//$ dans (b). On peut remarquer clairement dans les deux polarisations que pour une longueur de déformation supérieure à 10λ l'erreur relative est inférieure à 1% et la densité de probabilité de la phase est devenue uniforme, ce qui confirme les résultats théoriques.

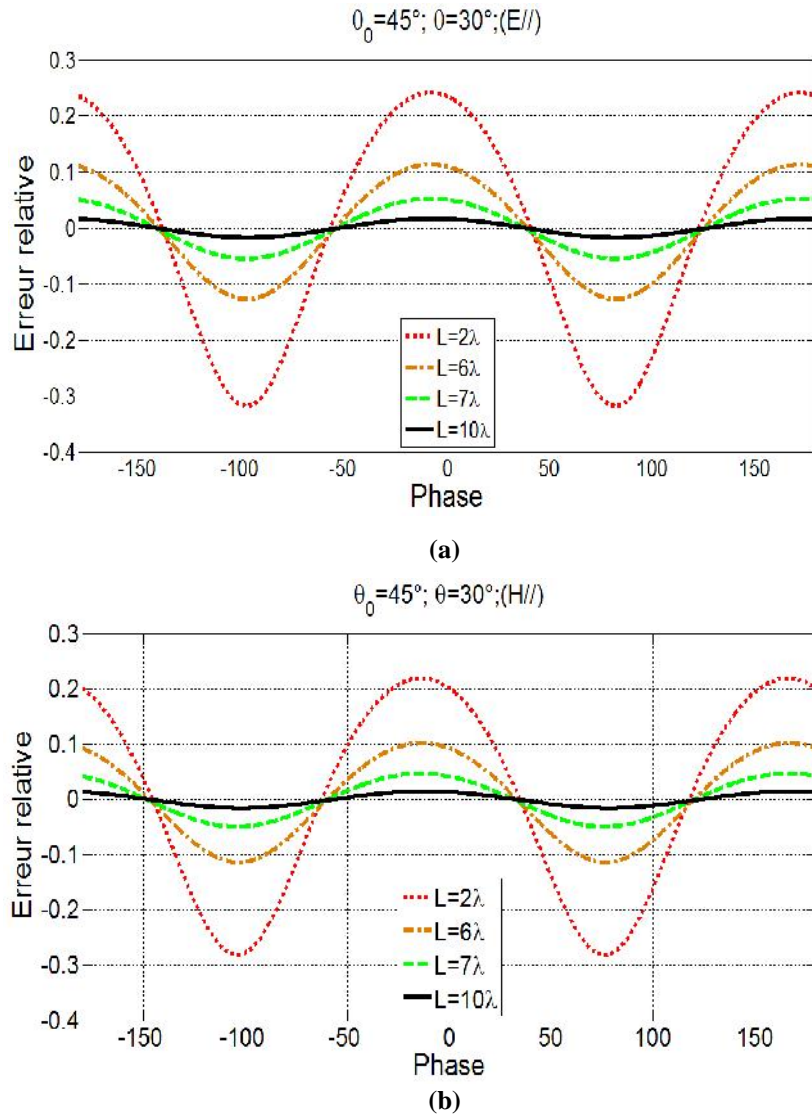


Figure III.10. Erreur relative entre la densité de probabilité de la phase et la loi uniforme pour différentes longueurs de déformation, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.25$, $l_1 = 0.3$, $l_2 = 0.4$, $l_3 = 0.5$, $\sigma_1 = 0.036$, $\sigma_2 = 0.027$, $\sigma_3 = 0.225$. (a) en polarisation $E_{//}$ (b) en polarisation $H_{//}$.

III.5.5.2 Influence de la corrélation des interfaces

La figure III.11, présente l'influence de la corrélation des trois interfaces sur la densité de probabilité du module en polarisation $E_{//}$ dans (a) et en polarisation $H_{//}$ dans (b). Nous considérons trois états des interfaces: non corrélées avec $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$, parfaitement corrélées avec $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 1$ et partiellement corrélées avec $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 1/\sqrt{3}$. Nous prenons la longueur de déformation $L = 30\lambda$. Nous remarquons que l'influence de la corrélation est plus remarquable en polarisation $H_{//}$ qu'en polarisation $E_{//}$. Dans les deux polarisations, la densité de probabilité est plus élevée dans le cas des interfaces parfaitement corrélées que dans l'état des interfaces partiellement corrélées ou non corrélées.

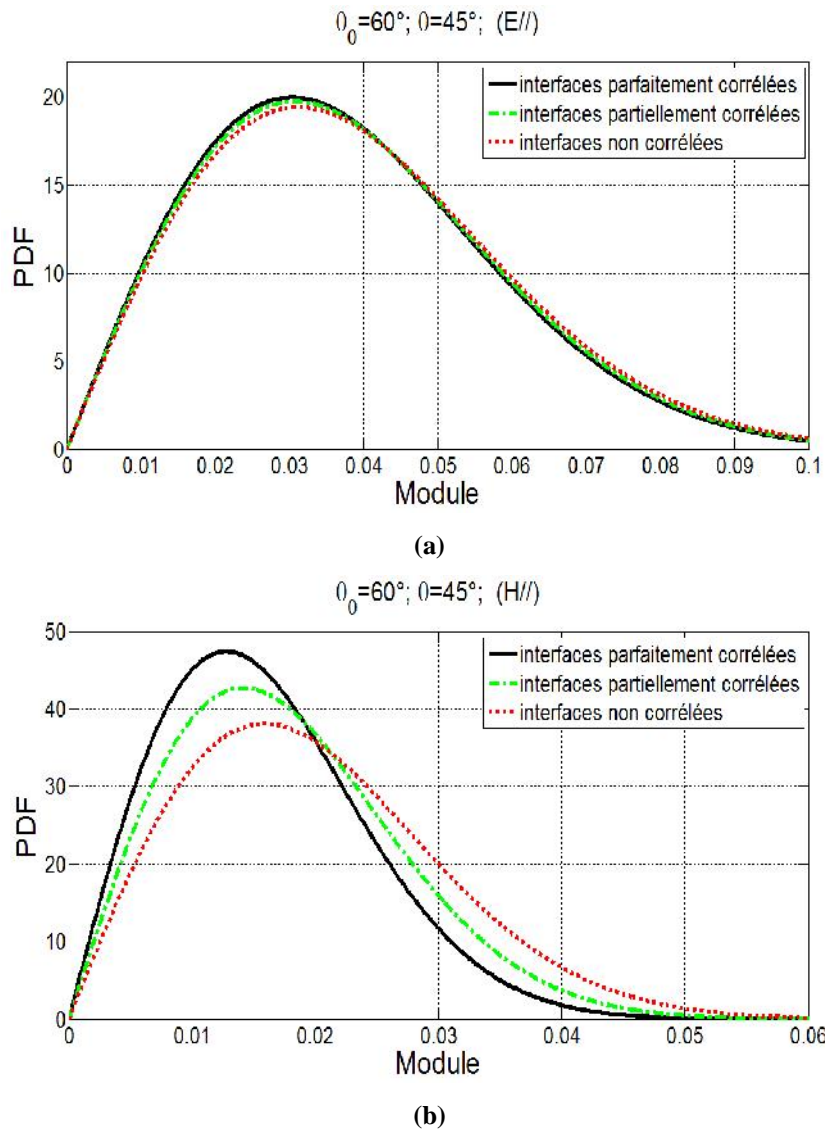


Figure III.11. Effet de la corrélation sur la densité de probabilité du module $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.25$,
 $l_1 = 0.3$, $l_2 = 0.4$, $l_3 = 0.5$, $\rho_1 = 0.036$, $\rho_2 = 0.027$, $\rho_3 = 0.225$.
 (a) en polarisation $E//$ (b) en polarisation $H//$.

III.6 Conclusion

Au cours des chapitres II et III, nous avons mis en place un modèle analytique afin de déterminer le champ de diffraction des ondes électromagnétiques par une structure multicouche monodimensionnelles possédant des rugosités aléatoires de longueur finie ou infinie. Ce modèle repose sur les équations de Maxwell, nous avons vu que le calcul de la diffraction par une telle géométrie au moyen des expressions de Rayleigh nécessite l'application des conditions aux limites. La résolution s'effectue par la méthode analytique de petite perturbation SPM à l'ordre 1, qui est étendu

aisément du cas non rugueux au cas rugueux, menée d'une comparaison avec la méthode de faible pente, SSA d'ordre 1.

Nous avons présenté notre problématique en montrant quelques applications numériques de la diffraction par une géométrie composée de quatre couches naturelles monodimensionnelles. Nous avons aussi montré l'influence de l'angle d'incidence et du paramètre de corrélation sur l'intensité incohérente du signal détecté, en plus, l'effet de l'épaisseur des couches sur l'intensité rétrodiffusée. Nos résultats obtenus par la méthode SPM sont très satisfaisants en comparaison de ceux obtenus par la méthode SSA. Les résultats numériques de quelques cas particuliers montrent que les deux modèles sont convergents pour des valeurs minimales des hauteurs de rugosité des interfaces. Ainsi, le problème de la diffraction par des structures monodimensionnelles rugueuses aléatoirement a été résolu, ceci nous permet d'étendre ce modèle pour la résolution du problème de la diffraction par des structures bidimensionnelles rugueuses aléatoirement.

CHAPITRE IV

Champs diffractés par une structure multicouche bidimensionnelle rugueuse aléatoirement

- IV.1 Introduction
- IV.2 Formulation du problème
- IV.3 Expressions des champs diffractés
- IV.4 Conditions aux limites
- IV.5 Méthode de résolution SPM
- IV.6 Méthode de résolution SSA

IV.1 Introduction

Passons maintenant à l'étude de la diffraction dans des cas plus compliqués que celui présenté dans ce qui précède. Afin de confirmer la validité des méthodes proposées pour la modélisation analytique du problème de la diffraction par des structures multicouches déformées aléatoirement, nous traitons l'extension du problème 1D au problème 2D.

Le présent chapitre est focalisé sur la modélisation analytique du problème de la diffraction par une structure composée de N couches bidimensionnelles d'interfaces rugueuses aléatoirement en utilisant les approximations SPM et SSA. Les notations appliquées restent les mêmes, comme celles présentées dans le chapitre II. Sauf que la particularité de l'étude du problème 2D dans le plan (Oxyz) est que, la fonction qui décrit la surface rugueuse est une fonction bidimensionnelle $z = a_i(x, y)$ au lieu de la fonction monodimensionnelle $y = a_i(x)$ dans le cas du problème 1D dans le plan (xOy). Aussi et contrairement au problème 1D, la polarisation des champs diffractés est composée de deux composantes, une directe et l'autre croisée. On présente les amplitudes des champs diffractés dans le cas non perturbé autant que dans le cas perturbé.

IV2 Formulation du problème

Nous commençons cette section en décrivant la géométrie dans laquelle notre problème sera posé. La structure est un empilement de plusieurs interfaces bidimensionnelles et non parallèles (*Figure IV.1*). Ces interfaces sont des plans aléatoirement déformés de dimensions $L \times L$. Chaque deux interfaces successives sont séparées par une couche d'épaisseur $d_i = u_{i+1} - u_i$ avec $u_1 = 0$. La fonction $a_i(x, y)$ décrit l'interface i séparant les deux couches i et $i+1$.

Nous considérons les mêmes propriétés statistiques proposées dans l'étude du cas d'une structure monodimensionnelle, les fonctions décrivant les interfaces sont des processus aléatoires gaussiens centrés de moyenne nulle ($\langle a_i(x, y) \rangle = 0, \forall x, y$), et stationnaires à l'ordre 2. Pour les applications, nous considérons le cas où les interfaces aléatoires présentent des fonctions de corrélation gaussiennes. Les interfaces peuvent être corrélées ou non corrélées, isotropes ou anisotropes [56].

$$\hat{R}_{ii}(r, s) = \dagger_i^2 l_{xi} l_{yi} f \exp \left[-\frac{l_{xi}^2 r^2 + l_{yi}^2 s^2}{4} \right] \quad (\text{IV.4})$$

$$\hat{R}_{ij}(r, s) = q_{ij} \dagger_i \dagger_j f \sqrt{l_{xi} l_{xj} l_{yi} l_{yj}} \exp \left[-\frac{(l_{xi}^2 + l_{xj}^2) r^2 + (l_{yi}^2 + l_{yj}^2) s^2}{8} \right] \quad (\text{IV.5})$$

Où $\hat{R}_{ii}(r, s)$ et $\hat{R}_{ij}(r, s)$ représentent respectivement les transformées de Fourier bidimensionnelles des fonctions $R_{ii}(r, s)$ et $R_{ij}(r, s)$.

IV.3 Expressions des champs diffractés

Dans cette section on va présenter les expressions des champs diffractés dans les milieux i , sur une telle géométrie et dans les deux polarisations, horizontale et verticale. Donc, une description de champ incident semble nécessaire afin de déterminer par la suite les expressions des champs diffractés.

IV.3.1 Champ incident

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé (Oxyz), muni d'une base orthonormée (\mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z}). La structure présentée dans la *Figure.IV.1*, est éclairée dans l'air par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . Cette onde est portée par son vecteur d'ondes \mathbf{k}_0 , qui est repéré dans l'espace par l'angle de site θ_0 par rapport à l'axe (Oz) et l'angle azimut ω_0 dans le plan (xOy), et est noté par :

$$\mathbf{k}_0 = \gamma_0 \mathbf{x} + s_0 \mathbf{y} - \chi_0 \mathbf{z} \quad (\text{IV.6})$$

Avec :

$$\begin{cases} \gamma_0 = k_1 \sin \theta_0 \cos \omega_0 \\ s_0 = k_1 \sin \theta_0 \sin \omega_0 \\ \chi_0 = k_1 \cos \theta_0 \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

Où: $-\frac{f}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{+f}{2}$ et $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$.

On considère la dépendance temporelle $\exp(j\tilde{S}t)$. Le milieu 1 est assimilé au vide. On note Z_1 l'impédance du vide, et k_1 le nombre d'onde. Puisque l'onde incidente est une onde plane, \mathbf{k}_0 est perpendiculaire au champ incident, et nous pouvons décomposer le vecteur champ électrique incident \mathbf{E}_0 en deux vecteurs unités \mathbf{h}_0 et \mathbf{v}_0 dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Notons que $(\mathbf{v}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{k}_0/k_1)$ est un système orthogonal. Les deux vecteurs \mathbf{h}_0 et \mathbf{v}_0 représentent la polarisation horizontale ($\mathbf{E}_{//}$) et verticale ($\mathbf{H}_{//}$) respectivement et sont obtenus à partir de la définition du vectoriel, et selon (IV.7) on a défini les composantes (γ_0, s_0, χ_0) du vecteur d'onde \mathbf{k}_0 , ainsi :

$$\mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + s_0^2}} (s_0 \mathbf{x} - r_0 \mathbf{y}) \quad (\text{IV.8})$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_0 \wedge \frac{\mathbf{k}_0}{k_1} = \frac{x_0}{k_1 \sqrt{r_0^2 + s_0^2}} (r_0 \mathbf{x} + s_0 \mathbf{y}) + \frac{\sqrt{r_0^2 + s_0^2}}{k_1} \mathbf{z} \quad (\text{IV.9})$$

Sachant que l'expression du vecteur du champ magnétique dans chaque milieu est donnée par :

$$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{k_i Z_i} \wedge \mathbf{E}_i \quad (\text{IV.10})$$

Les expressions du champ électrique et magnétique incident peuvent s'écrire :

$$\mathbf{E}_0 = [A_{0(h)}(r_0, s_0) \mathbf{h}_0 + A_{0(v)}(r_0, s_0) \mathbf{v}_0] \exp(-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{IV.11})$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{Z_1} (-A_{0(h)}(r_0, s_0) \mathbf{v}_0 + A_{0(v)}(r_0, s_0) \mathbf{h}_0) \exp(-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{IV.12})$$

Pour simplifier, on va noter, dans tout ce qui suit, l'amplitude de l'onde incidente par le symbole $A_{0(h,v)}$ au lieu de $A_{0(h,v)}(r_0, s_0)$.

Le vecteur directeur \mathbf{r} de l'onde incidente est donné par :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z} \quad (\text{IV.13})$$

On note qu'en polarisation horizontale (h) ou ($E_{//}$) on a $A_{0(h)} = 1$, $A_{0(v)} = 0$, et en polarisation verticale (v) ou ($H_{//}$) on a $A_{0(h)} = 0$ et $A_{0(v)} = 1$.

IV.3.2 Champs diffractés

Les champs diffractés dans les différents milieux s'expriment sous la forme de développements de Rayleigh en 2D. Les champs diffractés sont présentés comme une somme d'ondes se propageant dans le sens positif (onde montante) et dans le sens négatif (onde descendante).

Les champs, électrique et magnétique, diffractés dans le milieu 1 qui représente le vide, sont donnés dans le sens positif $+z$, sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{1(h)} \mathbf{h}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{v}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\tau ds \quad (\text{IV.14})$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4f^2 Z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{1(h)} \mathbf{v}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{h}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\tau ds \quad (\text{IV.15})$$

Les champs électriques et magnétiques diffractés dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) sont représentés par des ondes se déplaçant dans le sens positif $+z$ et négatif $-z$, et on écrit :

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(A_{i(h)}^- \mathbf{h}_i^- + A_{i(v)}^- \mathbf{v}_i^-) \exp(-j\mathbf{k}_i^- \cdot \mathbf{r}) + (A_{i(h)}^+ \mathbf{h}_i^+ + A_{i(v)}^+ \mathbf{v}_i^+) \exp(-j\mathbf{k}_i^+ \cdot \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} d\mathbf{s} \quad (\text{IV.16})$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{4f^2 Z_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(-A_{i(h)}^- \mathbf{v}_i^- + A_{i(v)}^- \mathbf{h}_i^-) \exp(-j\mathbf{k}_i^- \cdot \mathbf{r}) + (-A_{i(h)}^+ \mathbf{v}_i^+ + A_{i(v)}^+ \mathbf{h}_i^+) \exp(-j\mathbf{k}_i^+ \cdot \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} d\mathbf{s} \quad (\text{IV.17})$$

IV.3.3 Champ transmis

Dans le milieu N , on distingue que des ondes se déplacent dans le sens négatif $-z$, alors :

$$\mathbf{E}_N = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{N(h)} \mathbf{h}_N^- + A_{N(v)} \mathbf{v}_N^-) \exp(-j\mathbf{k}_N^- \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{s} \quad (\text{IV.18})$$

$$\mathbf{H}_N = \frac{1}{4f^2 Z_N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{N(h)} \mathbf{v}_N^- + A_{N(v)} \mathbf{h}_N^-) \exp(-j\mathbf{k}_N^- \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{s} \quad (\text{IV.19})$$

Les vecteurs de propagation \mathbf{k}_i^\pm dans le milieu i sont définis par :

$$\mathbf{k}_i^\pm = r\mathbf{x} + s\mathbf{y} \pm \chi_i \mathbf{z} \quad (\text{IV.20})$$

Avec:

$$\begin{cases} r = k_i \sin_\theta \cos\omega \\ s = k_i \sin_\theta \sin\omega \\ \chi_i = \sqrt{k_i^2 - s^2 - r^2} = k_i \cos_\theta \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

Où: $\frac{-f}{2} \leq \theta \leq \frac{+f}{2}$ et $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Pour que les ondes soient propagatives, les constantes de propagation χ_i doivent présenter une partie imaginaire inférieure ou égale à zéro $\text{Im}(\chi_i) \leq 0$. Les constantes de propagation associées à (Γ_0, S_0) sont notées $\chi_{i,0} = \chi_i(\Gamma_0, S_0)$ avec $\chi_0 = \chi_{1,0}$ dans le milieu 1.

On note que $(\mathbf{v}_i^\pm, \mathbf{h}_i^\pm, \mathbf{k}_i^\pm / k_i)$ est un système orthogonal. On exprime les vecteurs unités \mathbf{h}_i^\pm et \mathbf{v}_i^\pm , qui composent l'onde diffractée, comme suit (ici, les composantes du vecteur \mathbf{k}_i^\pm sont $(r, s, \pm\chi_i)$) :

$$\mathbf{h}_i^\pm = \frac{\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2}} (s\mathbf{x} - r\mathbf{y}) \quad (\text{IV.22})$$

$$\mathbf{v}_i^\pm = \mathbf{h}_i^\pm \wedge \frac{\mathbf{k}_i^\pm}{k_i} = \frac{\mp \chi_i}{k_i \sqrt{r^2 + s^2}} (r\mathbf{x} + s\mathbf{y}) + \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{k_i} \mathbf{z} \quad (\text{IV.23})$$

IV.4 Conditions aux limites

Les expressions des champs (IV.14)-(IV.19) des développements de Rayleigh contiennent les amplitudes diffractées, $A_{1(h,v)}$ dans le milieu 1, $A_{i(h,v)}^\pm$ dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) et $A_{N(h,v)}$ dans le milieu N , représentant les inconnues de notre problème. La résolution de ces dernières nous permet d'atteindre l'objectif de notre étude et de résoudre le problème de la diffraction par des systèmes de N couches bidimensionnelles rugueuses aléatoirement.

Pour les calculer, nous utilisons les conditions aux limites sur les deux interfaces successives i et $i+1$. La continuité des champs, électrique et magnétique, tangentiels à l'interface rugueuse $z = a_i(x, y) - u_i$ est exprimée par les deux relations suivantes :

$$[\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{E}_i]_{z=a_i(x,y)-u_i} = [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{E}_{i+1}]_{z=a_i(x,y)-u_i} \quad (\text{IV.24})$$

$$[\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{H}_i]_{z=a_i(x,y)-u_i} = [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{H}_{i+1}]_{z=a_i(x,y)-u_i} \quad (\text{IV.25})$$

Avec \mathbf{n}_i est le vecteur unitaire normal à l'interface i , et son expression s'écrit :

$$\mathbf{n}_i = \frac{-a_{ix}\mathbf{x} - a_{iy}\mathbf{y} + \mathbf{z}}{\sqrt{1 + a_{ix}^2 + a_{iy}^2}} \quad (\text{IV.26})$$

Où: $a_{ix} = \partial a_i(x, y) / \partial x$ et $a_{iy} = \partial a_i(x, y) / \partial y$

On définit d'après (IV.22), (IV.23) et (IV.26), les deux produits vectoriels suivants :

$$\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{h}_{i,i+1}^\pm = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{ix}^2 + a_{iy}^2} \sqrt{r^2 + s^2}} \left[r\mathbf{x} + s\mathbf{y} + (r a_{ix} + s a_{iy})\mathbf{z} \right] \quad (\text{IV.27})$$

$$\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{v}_{i,i+1}^\pm = \frac{\left\{ \left[\pm \chi_{i,i+1} s - (r^2 + s^2) a_{iy} \right] \mathbf{x} + \left[\mp \chi_{i,i+1} r + (r^2 + s^2) a_{ix} \right] \mathbf{y} \mp \chi_{i,i+1} (r a_{iy} - s a_{ix}) \mathbf{z} \right\}}{k_{i,i+1} \sqrt{1 + a_{ix}^2 + a_{iy}^2} \sqrt{r^2 + s^2}} \quad (\text{IV.28})$$

En rapportant (IV.14)-(IV.19), (IV.27) et (IV.28) dans les expressions des conditions aux limites (IV.24) et (IV.25), à l'interface $z = a_i(x, y) - u_i$ (dans ce qui suit on écrit $z = a_i - u_i$), on obtient deux équations vectorielles :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{A_{i(h)}^-}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp[+j\chi_i(a_i - u_i)] + \frac{A_{i(h)}^+}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp[-j\chi_i(a_i - u_i)] \right] \left[r\mathbf{x} + s\mathbf{y} + (ra_{ix} + sa_{iy})\mathbf{z} \right] \right. \\
 & + \frac{A_{i(v)}^-}{k_i} \exp[+j\chi_i(a_i - u_i)] \left[-\left(\frac{\chi_i s}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\chi_i r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} + \frac{\chi_i}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \\
 & \left. + \frac{A_{i(v)}^+}{k_i} \exp[-j\chi_i(a_i - u_i)] \left[\left(\frac{\chi_i s}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\chi_i r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} - \frac{\chi_i}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \right\} \exp[-j(r x + s y)] dr ds \\
 & = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{A_{i+1(h)}^-}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp[+j\chi_{i+1}(a_i - u_i)] + \frac{A_{i+1(h)}^+}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp[-j\chi_{i+1}(a_i - u_i)] \right] \left[r\mathbf{x} + s\mathbf{y} + (ra_{ix} + sa_{iy})\mathbf{z} \right] \right. \\
 & + \frac{A_{i+1(v)}^-}{k_{i+1}} \exp[+j\chi_{i+1}(a_i - u_i)] \left[\left(-\frac{\chi_{i+1} s}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\chi_{i+1} r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} + \frac{\chi_{i+1}}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \\
 & \left. + \frac{A_{i+1(v)}^+}{k_{i+1}} \exp[-j\chi_{i+1}(a_i - u_i)] \left[\left(\frac{\chi_{i+1} s}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\chi_{i+1} r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} - \frac{\chi_{i+1}}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \right\} \exp[-j(r x + s y)] dr ds
 \end{aligned} \tag{IV.29}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{A_{i(v)}^-}{Z_i \sqrt{r^2 + s^2}} \exp[+j\chi_i(a_i - u_i)] + \frac{A_{i(v)}^+}{Z_i \sqrt{r^2 + s^2}} \exp[-j\chi_i(a_i - u_i)] \right] \left[r\mathbf{x} + s\mathbf{y} + (ra_{ix} + sa_{iy})\mathbf{z} \right] \right. \\
 & - \frac{A_{i(h)}^- \exp[+j\chi_i(a_i - u_i)]}{k_i Z_i} \left[-\left(\frac{\chi_i s}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\chi_i r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} + \frac{\chi_i}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \\
 & - \frac{A_{i(h)}^+ \exp[-j\chi_i(a_i - u_i)]}{k_i Z_i} \left[\left(\frac{\chi_i s}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\chi_i r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} - \frac{\chi_i}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \left. \right\} \exp[-j(r x + s y)] dr ds \\
 & = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{A_{i+1(v)}^-}{Z_{i+1} \sqrt{r^2 + s^2}} \exp[+j\chi_{i+1}(a_i - u_i)] + \frac{A_{i+1(v)}^+}{Z_{i+1} \sqrt{r^2 + s^2}} \exp[-j\chi_{i+1}(a_i - u_i)] \right] \left[r\mathbf{x} + s\mathbf{y} + (ra_{ix} + sa_{iy})\mathbf{z} \right] \right. \\
 & - \frac{A_{i+1(h)}^- \exp[+j\chi_{i+1}(a_i - u_i)]}{k_{i+1} Z_{i+1}} \left[-\left(\frac{\chi_{i+1} s}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\chi_{i+1} r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} + \frac{\chi_{i+1}}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \\
 & - \frac{A_{i+1(h)}^+ \exp[-j\chi_{i+1}(a_i - u_i)]}{k_{i+1} Z_{i+1}} \left[\left(\frac{\chi_{i+1} s}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\chi_{i+1} r}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{ix} \right) \mathbf{y} - \frac{\chi_{i+1}}{\sqrt{r^2 + s^2}} (ra_{iy} - sa_{ix}) \mathbf{z} \right] \left. \right\} \exp[-j(r x + s y)] dr ds
 \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Ces équations vectorielles peuvent être écrites en tant que trois équations scalaires pour chaque équation vectorielle suivant les directions \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} . On note que les équations scalaires linéaires pour les directions \mathbf{x} et \mathbf{y} sont indépendantes, alors que les équations scalaires linéaires pour des directions \mathbf{z} ne sont pas indépendantes. Ainsi, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{r A_{i(h)}^+}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) + \left(\frac{\chi_i s}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(v)}^+}{k_i} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) \right. \\
 & \left. + \frac{r A_{i(h)}^-}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) - \left(\frac{\chi_i s}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(v)}^-}{k_i} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) \right] \exp[-j(r x + s y)] dr ds \\
 & = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{r A_{i+1(h)}^+}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) + \left(\frac{\chi_{i+1} s}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(v)}^+}{k_{i+1}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) \right. \\
 & \left. + \frac{r A_{i+1(h)}^-}{\sqrt{r^2 + s^2}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) - \left(\frac{\chi_{i+1} s}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \sqrt{r^2 + s^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(v)}^-}{k_{i+1}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(r x + s y)] dr ds
 \end{aligned} \tag{IV.31}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{S A_{i(h)}^+}{\sqrt{r^2 + S^2}} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) - \left(\frac{\chi_i \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} - \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(v)}^+}{k_i} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) \right. \\
 & \left. + \frac{S A_{i(h)}^-}{\sqrt{r^2 + S^2}} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) + \left(\frac{\chi_i \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} + \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(v)}^-}{k_i} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) \right] \exp[-j(r x + S y)] dr ds \\
 & = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{S A_{i+1(h)}^+}{\sqrt{r^2 + S^2}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) - \left(\frac{\chi_{i+1} \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} - \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(v)}^+}{k_{i+1}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) \right. \\
 & \left. + \frac{S A_{i+1(h)}^-}{\sqrt{r^2 + S^2}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) + \left(\frac{\chi_{i+1} \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} + \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(v)}^-}{k_{i+1}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(r x + S y)] dr ds
 \end{aligned} \tag{IV.32}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[- \left(\frac{\chi_i S}{\sqrt{r^2 + S^2}} - \sqrt{r^2 + S^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(h)}^+}{k_i Z_i} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) + \frac{r A_{i(v)}^+}{Z_i \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\chi_i S}{\sqrt{r^2 + S^2}} + \sqrt{r^2 + S^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(h)}^-}{k_i Z_i} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) + \frac{r A_{i(v)}^-}{Z_i \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) \right] \exp[-j(r x + S y)] dr ds \\
 & = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[- \left(\frac{\chi_{i+1} S}{\sqrt{r^2 + S^2}} - \sqrt{r^2 + S^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(h)}^+}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) + \frac{r A_{i+1(v)}^+}{Z_{i+1} \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\chi_{i+1} S}{\sqrt{r^2 + S^2}} + \sqrt{r^2 + S^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(h)}^-}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) + \frac{r A_{i+1(v)}^-}{Z_{i+1} \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(r x + S y)] dr ds
 \end{aligned} \tag{IV.33}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\chi_i \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} - \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(h)}^+}{k_i Z_i} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) + \frac{S A_{i(v)}^+}{Z_i \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(+j\chi_i u_i) \exp(-j\chi_i a_i) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\chi_i \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} + \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(h)}^-}{k_i Z_i} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) + \frac{S A_{i(v)}^-}{Z_i \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(-j\chi_i u_i) \exp(+j\chi_i a_i) \right] \exp[-j(r x + S y)] dr ds \\
 & = \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\chi_{i+1} \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} - \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(h)}^+}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) + \frac{r A_{i+1(v)}^+}{Z_{i+1} \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) \exp(-j\chi_{i+1} a_i) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\chi_{i+1} \Gamma}{\sqrt{r^2 + S^2}} + \sqrt{r^2 + S^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(h)}^-}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) + \frac{S A_{i+1(v)}^-}{Z_{i+1} \sqrt{r^2 + S^2}} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \exp(+j\chi_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(r x + S y)] dr ds
 \end{aligned} \tag{IV.34}$$

Selon la forme actuelle des équations (IV.31)-(IV.34), il paraît impossible d'extraire les inconnues du problème. Alors, on doit s'appuyer sur une méthode capable de changer ce système d'équations irrésolues en un système d'équations résoluble. Les méthodes proposées sont les mêmes que celles appliquées pour résoudre le problème présenté dans le chapitre II. On a vu qu'il est assuré que la méthode de petite perturbation (SPM), nous permet d'atteindre les expressions analytiques des amplitudes de diffraction dans le cas d'un système monodimensionnel, et qu'elle peut étendre du cas non rugueux au cas rugueux. On va essayer dans la section suivante d'examiner la validité de cette méthode pour la résolution de problème dans un système bidimensionnel et d'assurer le rapprochement avec la méthode SSA.

IV.5 Méthode de résolution (SPM)

On prend en considération les définitions présentées dans la section (II.5.1), et de la dimension de notre structure (2D), on peut écrire :

$$A_{i(h,v)}^{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sum_p A_{i(h,v)}^{\pm(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \quad (\text{IV.35})$$

$$\exp[\pm j\chi_{i,i+1} a_i(x, y)] = \sum_p \frac{[\pm j\chi_{i,i+1} a_i(x, y)]^p}{p!} \quad (\text{IV.36})$$

IV.5.1 Résolution dans le cas non rugueux (ordre zéro)

Avant de résoudre le problème de la diffraction par le système perturbé, nous devons passer d'abord par le cas d'un système non perturbé. À l'ordre zéro, les interfaces sont parfaitement lisses, et les fonctions qui décrivent les interfaces sont nulles ($a_i(x, y) = 0$). Selon les équations (IV.31) et (IV.34), on peut aisément atteindre les amplitudes cohérentes de diffraction à l'ordre zéro dans le milieu i . L'application de ces conditions à l'interface $z = -u_i$ nous permet d'écrire le système d'équations non couplées (les deux champs sont indépendants) dans les deux polarisations :

En polarisation horizontale $E_{//}$

$$\begin{cases} A_{i(h)}^{+(0)} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(h)}^{-(0)} \exp(-j\chi_i u_i) = A_{i+1(h)}^{+(0)} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(h)}^{-(0)} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \\ \chi_i A_{i(h)}^{+(0)} \exp(+j\chi_i u_i) - \chi_i A_{i(h)}^{-(0)} \exp(-j\chi_i u_i) = \chi_{i+1} A_{i+1(h)}^{+(0)} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - \chi_{i+1} A_{i+1(h)}^{-(0)} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \end{cases} \quad (\text{IV.37})$$

En polarisation verticale $H_{//}$

$$\begin{cases} k_i A_{i(v)}^{+(0)} \exp(+j\chi_i u_i) + k_i A_{i(v)}^{-(0)} \exp(-j\chi_i u_i) = k_{i+1} A_{i+1(v)}^{+(0)} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + k_{i+1} A_{i+1(v)}^{-(0)} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \\ \frac{\chi_i}{k_i} A_{i(v)}^{+(0)} \exp(+j\chi_i u_i) - \frac{\chi_i}{k_i} A_{i(v)}^{-(0)} \exp(-j\chi_i u_i) = \frac{\chi_{i+1}}{k_{i+1}} A_{i+1(v)}^{+(0)} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - \frac{\chi_{i+1}}{k_{i+1}} A_{i+1(v)}^{-(0)} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

D'où la forme matricielle suivante dans les deux polarisations :

$$\begin{bmatrix} A_{i(h,v)}^{(+,0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \\ A_{i(h,v)}^{(-,0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \begin{bmatrix} A_{i+1(h,v)}^{(+,0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \\ A_{i+1(h,v)}^{(-,0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

$\mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ (ici $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \mathbf{s} = \mathbf{s}_0$) est la matrice définie en polarisation $E_{//}$ par :

$$\mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h)}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{\chi_i + \chi_{i+1}}{2\chi_i} \exp[+j(\chi_{i+1} - \chi_i)u_i] & \frac{\chi_i - \chi_{i+1}}{2\chi_{i0}} \exp[-j(\chi_{i+1} + \chi_i)u_i] \\ \frac{\chi_i - \chi_{i+1}}{2\chi_i} \exp[+j(\chi_{i+1} + \chi_i)u_i] & \frac{\chi_i + \chi_{i+1}}{2\chi_i} \exp[-j(\chi_{i+1} - \chi_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

Et en polarisation $H_{//}$ par :

$$\mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(v)}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{k_{i+1}^2 \chi_i + k_i^2 \chi_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \chi_i} \exp[+j(\chi_{i+1} - \chi_i)u_i] & \frac{k_{i+1}^2 \chi_i - k_i^2 \chi_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \chi_i} \exp[-j(\chi_{i+1} + \chi_i)u_i] \\ \frac{k_{i+1}^2 \chi_i - k_i^2 \chi_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \chi_i} \exp[+j(\chi_{i+1} + \chi_i)u_i] & \frac{k_{i+1}^2 \chi_i + k_i^2 \chi_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \chi_i} \exp[-j(\chi_{i+1} - \chi_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.41})$$

IV.5.1.1 Amplitudes réfléchies et transmises (milieu 1 et N)

On a montré précédemment qu'on observe, en absence de rugosité, le phénomène de la réflexion spéculaire. De ce fait, à l'ordre 0, on cherche à obtenir que l'amplitude des ondes réfléchie dans le milieu 1, dans le sens positif et l'amplitude transmise dans le milieu N dans le sens négatif. En suivant les mêmes étapes présentées dans la section (II.5.2), on obtient :

$$\begin{bmatrix} A_{1(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \\ A_{0(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1,N}^{(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \begin{bmatrix} 0 \\ A_{N(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

Où :

$$\mathbf{M}_{1,N}^{(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) = \begin{bmatrix} M_{1,N}^{11(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) & M_{1,N}^{12(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \\ M_{1,N}^{21(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) & M_{1,N}^{22(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \quad (\text{IV.43})$$

Enfin, on déduit à l'ordre 0, dans la polarisation horizontale et verticale, l'amplitude des ondes réfléchies $A_{1(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)$ dans le milieu 1 en $z = 0$, et transmise $A_{N(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)$ dans le milieu N en $z = -u_{N-1}$. Ces amplitudes présentent les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel. On écrit :

$$A_{1(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) = \frac{M_{1,N}^{12(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)} A_{0(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \quad (\text{IV.44})$$

$$A_{N(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) = \frac{1}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)} A_{0(h,v)}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \quad (\text{IV.45})$$

IV.5.1.2 Amplitudes réfléchies dans le milieu i

Dans le milieu i les ondes sont réfléchies dans les deux sens, positif et négatif. D'après (IV.39), (IV.42) et (IV.43), les amplitudes des ondes dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) sont données par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_{i(h,v)}^{+(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0) \\ A_{i(h,v)}^{-(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0) \end{bmatrix} &= \frac{\mathbf{M}_{i,N}^{(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0)}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{0(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0)} \begin{bmatrix} M_{i,N}^{12(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0) \\ M_{i,N}^{22(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0) \end{bmatrix} A_{0(h,v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0)
\end{aligned} \tag{IV.46}$$

Dans le cas non perturbé (ordre 0), on a aisément obtenu les amplitudes, réfléchies dans le milieu 1 et i , et transmise dans le milieu N . Contrairement au cas perturbé (ordre 1) qui nécessite de s'appuyer sur plusieurs simplifications mathématiques, comme on va montrer dans la section suivante.

IV.5.2 Résolution dans le cas rugueux (ordre un)

On considère maintenant le système illustré dans la *figure.IV.1*, on cherche à obtenir les amplitudes des ondes diffractées qu'elles soient indispensables pour atteindre l'intensité diffractée à chaque direction d'observation. Donc pour arriver à ces amplitudes, nous commençons dans un premier temps à appliquer les principes (IV.35) et (IV.36) de la méthode de petite perturbation SPM dans le système d'équations (IV.31)-(IV.34), on obtient après plusieurs simplifications mathématiques, le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma}{\mathbf{t}} \left(A_{i(h)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(h)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i) \right) + \frac{\chi_i \mathbf{S}}{\mathbf{t} k_i} \left(A_{i(v)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) - A_{i(v)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i) \right) \right] \exp[-j(\mathbf{r}x + \mathbf{S}y)] d\mathbf{r} d\mathbf{S} \\
&= \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma}{\mathbf{t}} \left(A_{i+1(h)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(h)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) + \frac{\chi_{i+1} \mathbf{S}}{\mathbf{t} k_{i+1}} \left(A_{i+1(v)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - A_{i+1(v)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + j a_i \left(\frac{\chi_i^2 \mathbf{S}}{\mathbf{t} k_i} \left(A_{i(v)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(v)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i) \right) - \frac{\chi_{i+1}^2 \mathbf{S}}{\mathbf{t} k_{i+1}} \left(A_{i+1(v)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(v)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + a_{iy} \left(\frac{(\mathbf{r}^2 + \mathbf{S}^2)}{\mathbf{t} k_i} \left(A_{i(v)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(v)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i) \right) - \frac{(\mathbf{r}^2 + \mathbf{S}^2)}{\mathbf{t} k_{i+1}} \left(A_{i+1(v)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(v)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) \right) \right] \exp[-j(\mathbf{r}x + \mathbf{S}y)] d\mathbf{r} d\mathbf{S}
\end{aligned} \tag{IV.47}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{t}} \left(A_{i(h)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(h)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i) \right) - \frac{\chi_i \Gamma}{\mathbf{t} k_i} \left(A_{i(v)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) - A_{i(v)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i) \right) \right] \exp[-j(\mathbf{r}x + \mathbf{S}y)] d\mathbf{r} d\mathbf{S} \\
&= \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{t}} \left(A_{i+1(h)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(h)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) - \frac{\chi_{i+1} \Gamma}{\mathbf{t} k_{i+1}} \left(A_{i+1(v)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - A_{i+1(v)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) \right. \\
&\quad \left. - j a_i \left(\frac{\chi_i^2 \Gamma}{\mathbf{t} k_i} \left(A_{i(v)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(v)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i) \right) - \frac{\chi_{i+1}^2 \Gamma}{\mathbf{t} k_{i+1}} \left(A_{i+1(v)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(v)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - a_{ix} \left(\frac{(\mathbf{r}^2 + \mathbf{S}^2)}{\mathbf{t} k_i} \left(A_{i(v)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(v)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i) \right) - \frac{(\mathbf{r}^2 + \mathbf{S}^2)}{\mathbf{t} k_{i+1}} \left(A_{i+1(v)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(v)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i) \right) \right) \right] \exp[-j(\mathbf{r}x + \mathbf{S}y)] d\mathbf{r} d\mathbf{S}
\end{aligned} \tag{IV.48}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\chi_i S}{t} (A_{i(h)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) - A_{i(h)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i)) + \frac{k_i \Gamma}{t} (A_{i(v)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(v)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i)) \right] \exp[-j(r x + s y)] d\tau ds \\
&= \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\begin{aligned} & -\frac{\chi_{i+1} S}{t} (A_{i+1(h)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - A_{i+1(h)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) + \frac{k_{i+1} \Gamma}{t} (A_{i+1(v)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(v)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) \\ & -j\alpha_i \left(\frac{\chi_i^2 S}{t} (A_{i(h)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(h)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i)) - \frac{\chi_{i+1}^2 S}{t} (A_{i+1(h)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(h)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) \right) \\ & +j\alpha_i \left(\frac{k_i \Gamma \chi_i}{t} (A_{i(v)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) - A_{i(v)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i)) - \frac{k_{i+1} \Gamma \chi_{i+1}}{t} (A_{i+1(v)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - A_{i+1(v)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) \right) \end{aligned} \right] \exp[-j(r x + s y)] d\tau ds
\end{aligned} \tag{IV.49}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\chi_i \Gamma}{t} (A_{i(h)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) - A_{i(h)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i)) + \frac{k_i S}{t} (A_{i(v)}^{+1} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(v)}^{-1} \exp(-j\chi_i u_i)) \right] \exp[-j(r x + s y)] d\tau ds \\
&= \frac{1}{4f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\begin{aligned} & \frac{\chi_{i+1} \Gamma}{t} (A_{i+1(h)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - A_{i+1(h)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) + \frac{k_{i+1} S}{t} (A_{i+1(v)}^{+1} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(v)}^{-1} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) \\ & +j\alpha_i \left(\frac{\chi_i^2 \Gamma}{t} (A_{i(h)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) + A_{i(h)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i)) - \frac{\chi_{i+1}^2 \Gamma}{t} (A_{i+1(h)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) + A_{i+1(h)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) \right) \\ & +j\alpha_i \left(\frac{k_i S \chi_i}{t} (A_{i(v)}^{+0} \exp(+j\chi_i u_i) - A_{i(v)}^{-0} \exp(-j\chi_i u_i)) - \frac{k_{i+1} S \chi_{i+1}}{t} (A_{i+1(v)}^{+0} \exp(+j\chi_{i+1} u_i) - A_{i+1(v)}^{-0} \exp(-j\chi_{i+1} u_i)) \right) \end{aligned} \right] \exp[-j(r x + s y)] d\tau ds
\end{aligned} \tag{IV.50}$$

Où $t = \sqrt{r^2 + s^2}$.

En utilisant la relation suivante de la transformée de Fourier, on note que u est la fonction Dirac :

$$\begin{aligned}
& TF \{ a_i(x, y) . TF^{-1} [G(r, s) u(r - r_0) u(s - s_0)] \} \\
&= \hat{a}_i(r, s) * [G(r, s) u(r - r_0) u(s - s_0)] \\
&= \hat{a}_i(r - r_0, s - s_0) G(r_0, s_0)
\end{aligned} \tag{IV.51}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
TF [a_{ix}(x, y)] &= -j(r - r_0) \hat{a}_i(' , \langle) \\
TF [a_{iy}(x, y)] &= -j(s - s_0) \hat{a}_i(' , \langle)
\end{aligned} \tag{IV.52}$$

où: $' = r - r_0$ $\langle = s - s_0$, et $\hat{a}_i(r, s)$ représente la transformée de fourrier de la fonction $a_i(x, y)$ divisées par \sqrt{L} .

D'après les expressions (IV.21), (IV.39)-(IV.41), (IV.43) et (IV.46), on aura un système matriciel, qui peut déduire l'expression analytique des amplitudes diffractées à l'ordre 1 de perturbation dans les deux polarisations. En polarisation horizontale $E_{//}$ on écrit :

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+1}(r, s) \\ A_{i(h)}^{-1}(r, s) \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,h}(r, s) \begin{pmatrix} A_{i+1(h)}^{+1}(r, s) \\ A_{i+1(h)}^{-1}(r, s) \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(' , \langle) \begin{bmatrix} \frac{D_i^{hh}(r, s)}{M_{1,N}^{22(h)}(r_0, s_0)} \left[M_{i+1,N}^{12,h}(r_0, s_0) \right] A_{0(h)}(r_0, s_0) \\ + \frac{D_i^{hv}(r, s)}{M_{1,N}^{22(v)}(r_0, s_0)} \left[M_{i+1,N}^{12,v}(r_0, s_0) \right] A_{0(v)}(r_0, s_0) \end{bmatrix}
\end{pmatrix} \tag{IV.53}$$

Et, en polarisation verticale $H_{//}$ on a :

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \\ A_{i(v)}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \begin{pmatrix} A_{i+1(v)}^{+1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \\ A_{i+1(v)}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(\cdot, \cdot) \begin{bmatrix} \frac{D_i^{vh}(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{M_{1,N}^{22(h)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,h}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \\ M_{i+1,N}^{22,h}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} A_{0(h)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \\ + \frac{D_i^{vv}(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{M_{1,N}^{22(v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \\ M_{i+1,N}^{22,v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} A_{0(v)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.54})$$

On définit en polarisation horizontale les matrices :

$$\begin{cases} D_i^{hh} = \frac{\cos(\xi - \xi_0)}{2\chi_i} \begin{pmatrix} \exp[+j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] & \exp[-j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] \\ -\exp[+j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] & -\exp[-j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] \end{pmatrix} \\ D_i^{hv} = \frac{\chi_{0i+1} \sin(\xi - \xi_0)}{2\chi_i k_{i+1}} \begin{pmatrix} -\exp[+j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] & \exp[-j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] \\ \exp[+j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] & -\exp[-j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

Et, en polarisation verticale :

$$\begin{cases} D_i^{vh} = \frac{\sin(\xi - \xi_0)}{2k_i} \begin{pmatrix} \exp[+j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] & \exp[-j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] \\ \exp[+j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] & \exp[-j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] \end{pmatrix} \\ D_i^{vv} = \frac{1}{2\chi_i k_i k_{i+1}} \begin{pmatrix} y^+ \cdot \exp[+j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] & -y^- \cdot \exp[-j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] \\ y^- \cdot \exp[+j(\chi_{0i+1} + \chi_i)u_i] & -y^+ \cdot \exp[-j(\chi_{0i+1} - \chi_i)u_i] \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

Avec :

$$\begin{cases} y^+ = (t t_0 + \chi_i \chi_{0i+1} \cos(\xi - \xi_0)) \\ y^- = (-t t_0 + \chi_i \chi_{0i+1} \cos(\xi - \xi_0)) \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

Et :

$$\begin{cases} \cos(\xi - \xi_0) = \sin\{\sin\{\xi_0\} + \cos\{\xi_0\}\cos\{\xi\} = \frac{(s s_0 + r r_0)}{t_0 t} \\ \sin(\xi - \xi_0) = \sin\{\cos\{\xi_0\} - \cos\{\xi\}\sin\{\xi_0\} = \frac{(s r_0 - r s_0)}{t_0 t} \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

Les expressions (IV.53) et (IV.54), qui relient les amplitudes des ondes diffractées dans le milieu i avec celles de milieu $i+1$ et avec les amplitudes de l'onde incidente, peuvent s'écrire :

En polarisation horizontale $E_{//}$:

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+,1} \\ A_{i(h)}^{-,1} \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,h} \begin{pmatrix} A_{i+1(h)}^{+,1} \\ A_{i+1(h)}^{-,1} \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(' , \langle) \left[\begin{pmatrix} N_{i,hh}^+ \\ N_{i,hh}^- \end{pmatrix} A_{0(h)} + \begin{pmatrix} N_{i,hv}^+ \\ N_{i,hv}^- \end{pmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (IV.59)$$

Avec :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} N_{i,hh}^+ \\ N_{i,hh}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(h)}(r_0, s_0)} \begin{pmatrix} D_i^{11,hh} M_{i+1,N}^{12,h}(r_0, s_0) + D_i^{12,hh} M_{i+1,N}^{22,h}(r_0, s_0) \\ D_i^{21,hh} M_{i+1,N}^{12,h}(r_0, s_0) + D_i^{22,hh} M_{i+1,N}^{22,h}(r_0, s_0) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} N_{i,hv}^+ \\ N_{i,hv}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(v)}(r_0, s_0)} \begin{pmatrix} D_i^{11,hv} M_{i+1,N}^{12,v}(r_0, s_0) + D_i^{12,hv} M_{i+1,N}^{22,v}(r_0, s_0) \\ D_i^{21,hv} M_{i+1,N}^{12,v}(r_0, s_0) + D_i^{22,hv} M_{i+1,N}^{22,v}(r_0, s_0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (IV.60)$$

Et en polarisation verticale $H_{//}$ par :

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+,1} \\ A_{i(v)}^{-,1} \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,v} \begin{pmatrix} A_{i+1(v)}^{+,1} \\ A_{i+1(v)}^{-,1} \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(' , \langle) \left[\begin{pmatrix} N_{i,vh}^+ \\ N_{i,vh}^- \end{pmatrix} A_{0(h)} + \begin{pmatrix} N_{i,vv}^+ \\ N_{i,vv}^- \end{pmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (IV.61)$$

Avec :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} N_{i,vh}^+ \\ N_{i,vh}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(h)}(r_0, s_0)} \begin{pmatrix} D_i^{11,vh} M_{i+1,N}^{12,h}(r_0, s_0) + D_i^{12,vh} M_{i+1,N}^{22,h}(r_0, s_0) \\ D_i^{21,vh} M_{i+1,N}^{12,h}(r_0, s_0) + D_i^{22,vh} M_{i+1,N}^{22,h}(r_0, s_0) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} N_{i,vv}^+ \\ N_{i,vv}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(v)}(r_0, s_0)} \begin{pmatrix} D_i^{11,vv} M_{i+1,N}^{12,v}(r_0, s_0) + D_i^{12,vv} M_{i+1,N}^{22,v}(r_0, s_0) \\ D_i^{21,vv} M_{i+1,N}^{12,v}(r_0, s_0) + D_i^{22,vv} M_{i+1,N}^{22,v}(r_0, s_0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (IV.62)$$

IV.5.2.1 Amplitudes diffractées et transmises (milieu 1 et N)

Selon les expressions (IV.59) et (IV.61), on peut obtenir l'équation qui permet d'assurer le passage de milieu i vers le milieu N . Ainsi, on écrit :

En polarisation horizontale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+,1} \\ A_{i(h)}^{-,1} \end{pmatrix} = M_{i,N}^{1,h} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{N(h)}^{-,1} \end{pmatrix} + j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , \langle) \left[\begin{pmatrix} S_{i,j}^{+,hh} \\ S_{i,j}^{-,hh} \end{pmatrix} A_{0(h)} + \begin{pmatrix} S_{i,j}^{+,hv} \\ S_{i,j}^{-,hv} \end{pmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (IV.63)$$

Avec :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hh} \\ S_{i,j}^{-,hh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,hh}^+ M_{i,j}^{11,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,hh}^- M_{i,j}^{12,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \\ N_{j,hh}^+ M_{i,j}^{21,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,hh}^- M_{i,j}^{22,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hv} \\ S_{i,j}^{-,hv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,hv}^+ M_{i,j}^{11,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,hv}^- M_{i,j}^{12,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \\ N_{j,hv}^+ M_{i,j}^{21,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,hv}^- M_{i,j}^{22,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.64})$$

Et en polarisation verticale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+,1} \\ A_{i(v)}^{-,1} \end{pmatrix} = M_{i,N}^{1,v} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{N(v)}^{-,1} \end{pmatrix} + j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \cdot) \left[\begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vh} \\ S_{i,j}^{-,vh} \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vv} \\ S_{i,j}^{-,vv} \end{bmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.65})$$

Avec :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vh} \\ S_{i,j}^{-,vh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,vh}^+ M_{i,j}^{11,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,vh}^- M_{i,j}^{12,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \\ N_{j,vh}^+ M_{i,j}^{21,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,vh}^- M_{i,j}^{22,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vv} \\ S_{i,j}^{-,vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,vv}^+ M_{i,j}^{11,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,vv}^- M_{i,j}^{12,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \\ N_{j,vv}^+ M_{i,j}^{21,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + N_{j,vv}^- M_{i,j}^{22,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.66})$$

Arrivé à ces expressions (IV.63) et (IV.65), on peut maintenant déduire dans le cas d'un système de multicouches bidimensionnelles rugueuses aléatoirement les amplitudes diffractées dans le milieu 1 et N . On pose simplement que $i = 1$, on obtient les amplitudes diffractées $A_{1(h,v)}^{+,1}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dans le milieu 1, et les amplitudes transmises $A_{N(h,v)}^{-,1}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dans le milieu N , dans les deux polarisations.

En polarisation horizontale on obtient :

$$A_{1(h)}^{+,1} = j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \cdot) \left[\left(S_{1,j}^{+,hh} - \frac{M_{1,N}^{12,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{M_{1,N}^{22,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s})} S_{1,j}^{-,hh} \right) A_{0(h)} + \left(S_{1,j}^{+,hv} - \frac{M_{1,N}^{12,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{M_{1,N}^{22,h}(\mathbf{r}, \mathbf{s})} S_{1,j}^{-,hv} \right) A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.67})$$

$$A_{N(h)}^{-,1} = -j \frac{1}{M_{1,N}^{22,h}} \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \cdot) \left[S_{1,j}^{-,hh} A_{0(h)} + S_{1,j}^{-,hv} A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.68})$$

Et en polarisation verticale :

$$A_{1(v)}^{+,1} = j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \cdot) \left[\left(S_{1,j}^{+,vh} - \frac{M_{1,N}^{12,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{M_{1,N}^{22,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s})} S_{1,j}^{-,vh} \right) A_{0(h)} + \left(S_{1,j}^{+,vv} - \frac{M_{1,N}^{12,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{M_{1,N}^{22,v}(\mathbf{r}, \mathbf{s})} S_{1,j}^{-,vv} \right) A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.69})$$

$$A_{N(v)}^{-,1} = -\frac{j}{M_{1,N}^{22,v}} \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \cdot) \left[S_{1,j}^{-,vh} A_{0(h)} + S_{1,j}^{-,vv} A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.70})$$

IV.5.2.2 Amplitudes diffractées dans le milieu i

Finalement, d'après (IV.63), (IV.65) et (IV.67)-(IV.70), les amplitudes diffractées à l'ordre 1 dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) de la géométrie étudiée, sont données par les expressions suivantes :

En polarisation horizontale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+,1} \\ A_{i(h)}^{-,1} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{+,hh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{12,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hh} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{-,hh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{22,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hh} \end{array} \right] A_{0(h)} \\ + \left[\begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{+,hv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{12,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hv} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{-,hv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{22,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hv} \end{array} \right] A_{0(v)} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.71})$$

Et en polarisation verticale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+,1} \\ A_{i(v)}^{-,1} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{+,vv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{12,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vv} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{-,vv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{22,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vv} \end{array} \right] A_{0(v)} \\ + \left[\begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{+,vh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{12,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vh} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) S_{i,j}^{-,vh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(' , <) \frac{M_{i,N}^{22,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vh} \end{array} \right] A_{0(h)} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.72})$$

Nous remarquons selon (IV.71) et (IV.72), que l'amplitude diffractée au-dessus de la surface est représentée par une somme de deux composantes l'une correspondant à la polarisation directe $A_{i(bb)}^{\pm 1}$ et l'autre à la polarisation croisée $A_{i(ba)}^{\pm 1}$. D'une façon générale, nous déduisons l'expression de l'amplitude de diffraction pour $(b, a \in \{h, v\}; b \neq a)$:

$$A_{i(b)}^{\pm 1} = A_{i(bb)}^{\pm 1} A_{0(b)} + A_{i(ba)}^{\pm 1} A_{0(a)} \quad (\text{IV.73})$$

Les amplitudes complexes $A_{i(bb)}^{\pm 1}$ (avec $b = h$ ou $b = v$) et $A_{i(ba)}^{\pm 1}$ (avec $a = v$ pour $b = h$ ou $a = h$ pour $b = v$) sont données par :

$$\begin{bmatrix} A_{i(bb)}^{+(1)} \\ A_{i(bb)}^{-(1)} \end{bmatrix} = j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \langle) \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,bb} \\ S_{i,j}^{-,bb} \end{bmatrix} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \langle) \begin{bmatrix} M_{i,N}^{12,b}(\mathbf{r}, \mathbf{S}) \\ M_{i,N}^{22,b}(\mathbf{r}, \mathbf{S}) \end{bmatrix} \frac{S_{1,j}^{-,bb}}{M_{1,N}^{22,b}(\mathbf{r}, \mathbf{S})} \quad (\text{IV.74})$$

$$\begin{bmatrix} A_{i(ba)}^{+(1)} \\ A_{i(ba)}^{-(1)} \end{bmatrix} = j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \langle) \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,ba} \\ S_{i,j}^{-,ba} \end{bmatrix} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\cdot, \langle) \begin{bmatrix} M_{i,N}^{12,b}(\mathbf{r}, \mathbf{S}) \\ M_{i,N}^{22,b}(\mathbf{r}, \mathbf{S}) \end{bmatrix} \frac{S_{1,j}^{-,ba}}{M_{1,N}^{22,b}(\mathbf{r}, \mathbf{S})}$$

IV.6 Méthode de résolution (SSA)

Par l'utilisation de la méthode SSA, les amplitudes diffractées par une structure multicouche bidimensionnelles rugueuses aléatoirement, sont exprimées de la forme suivante :

$$A_{1(ba)}^{(+1),SSA} = A_{0(a)} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{K_{i(ba)}}{j(x_1 + x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j'x) \exp(jy) \cdot \exp[j(x_1 + x_0) a_i(x, y)] dx dy \quad (\text{IV.75})$$

Selon (II.56) on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j'x) dx = 2f_u(\cdot) \quad (\text{IV.76})$$

On peut noter que quand $a_i(x, y) \rightarrow 0$ et $L \rightarrow \infty$, les amplitudes diffractées obtenues par la méthode SSA (IV.75) sont identiques aux amplitudes obtenues par la méthode SPM à l'ordre 1 si :

$$A_{1(a)}^{+(0)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{K_{i(aa)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{S}_0)}{2j\lambda_0} & \text{si } (a) = (b) \\ 0 & \text{si } (a) \neq (b) \end{cases} \quad (\text{IV.77})$$

Au cours de ce chapitre, on a déterminé les champs diffractés par une structure multicouche bidimensionnelle rugueuse aléatoirement. On a réussi à modéliser analytiquement la diffraction par une structure 2D. On a éprouvé l'extension des deux méthodes proposées du cas rugueux au cas non rugueux, et du problème 1D au problème 2D. On a obtenu les coefficients complexes des amplitudes diffractées dans le milieu i , qui sont appliqués dans le chapitre suivant afin de caractériser les propriétés statistiques du signal diffracté, puis utilisés lors des applications numériques.

CHAPITRE V

Étude statistique des champs diffractés par une structure multicouche 2D rugueuse aléatoirement

- V.1 Introduction
- V.2 Propriétés statistiques des amplitudes et de l'intensité diffractée basées sur SPM
- V.3 Intensité diffractée cohérente et incohérente basée sur SSA
- V.4 Densités de probabilité
- V.5 Application numérique sur une structure 2D composée de quatre couches ($N=4$)
- V.6 Conclusion

V.1 Introduction

Une étude statistique des champs diffractés par une structure composée de N couches déformées aléatoirement est obligatoire afin de comprendre le comportement du signal capté. Dans un premier temps, nous allons présenter dans ce chapitre les propriétés statistiques telles que l'intensité cohérente et incohérente du signal diffracté et sa densité de probabilité de module et de la phase, dans le cas d'une extension finie et infinie.

Nous nous intéressons par la suite, à l'étude d'un cas particulier d'une structure composé de quatre couches bidimensionnelles rugueuses aléatoirement. Nous exhibons l'influence de plusieurs paramètres sur l'intensité diffractée cohérente et incohérente, et sur la densité de probabilité tels que la longueur de déformation des interfaces, l'angle d'observation, la hauteur de rugosité, l'isotropie et la corrélation des interfaces, ainsi que d'autres applications menées en comparaison avec la méthode SSA.

V.2 Propriétés statistiques des amplitudes et de l'intensité diffractée basées sur SPM

Les propriétés statistiques d'une structure de N couches bidimensionnelles telles que l'intensité cohérente, incohérente et la densité de probabilité de l'intensité incohérente, de module et de la phase, ont les mêmes expressions des propriétés statistiques obtenues dans le cas d'une structure de N couches monodimensionnelles. Cependant, la différence apparaît dans les amplitudes diffractées, autrement dit, dans les variances et les covariances de la partie réelle et imaginaire de ces amplitudes. Dans le cas 1D, les ondes diffractées se propagent selon des polarisations directes (horizontale ou verticale) et selon des polarisations directes (hh ou vv) et croisées (vh ou hv) dans le cas 2D.

Les amplitudes diffractées obtenues par la méthode SPM, $A_{1(ba)}^{+, (SPM)}$, au-dessus de la surface bidimensionnelle (dans le milieu 1), où l'indice (a) donne la polarisation de l'onde incidente et (b) donne la polarisation de l'onde diffractée avec ($b, a \in \{h, v\}$), s'écrivent :

$$A_{1(ba)}^{+, (SPM)}(r, s) = 4f^2 A_{1(a)}^{+(0)}(r_0, s_0) u(\cdot) u(\cdot) + A_{1(ba)}^{+(1)}(r, s) \quad (V.1)$$

Le premier terme d'addition $A_{1(a)}^{+(0)}$ définit l'amplitude donnée à l'ordre 0 par (IV.44), nous conduit à l'intensité cohérente, et le deuxième terme $A_{1(ba)}^{+(1)}$ nous conduit à l'intensité incohérente et s'exprime d'après (IV.67) et (IV.69) sous la forme :

$$A_{1(ba)}^{+(1)}(r, s) = \sum_{i=1}^{N-1} K_i^{(+, ba)}(r, s) \hat{a}_i(r - r_0, s - s_0) \quad (V.2)$$

Où le coefficient complexe est défini par :

$$K_i^{(+,ba)}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \left[S_{1,i}^{+,ba} - \frac{M_{i,N}^{12,b}(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{M_{1,N}^{22,b}(\mathbf{r}, \mathbf{s})} S_{1,j}^{-,ba} \right] \quad (\text{V.3})$$

V.2.1 Intensité cohérente

D'après le coefficient bistatique qui dépend principalement du rapport de la puissance diffractée par la structure bidimensionnelle sous la direction (θ, φ) , avec θ son angle au zénith et φ son angle d'azimut, à la puissance incidente, on obtient l'intensité cohérente $I_{c,(a)}^{(SPM)}(\theta, \varphi)$ à l'ordre 0. Cette intensité s'exprime par :

$$I_{c,(a)}^{(SPM)}(\theta, \varphi) = \frac{\cos^2 \theta_0}{\gamma^2} \left| A_{(a)}^{+(0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \right|^2 4f^2 u(\theta) u(\varphi) \quad (\text{V.4})$$

Rappelons qu'à cet ordre de perturbation (ordre 0), l'onde diffractée se propage de la même polarisation de l'onde incidente, pour cela la détection sera faite seulement dans les deux polarisations directes, horizontale (hh) et verticale (vv).

V.2.2 Intensité incohérente

L'amplitude $A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r} = k_1 \sin \theta \cos \varphi, \mathbf{s} = k_1 \sin \theta \sin \varphi)$ est une fonction aléatoire des angles d'observations (θ, φ) . Puisque la fonction gaussienne qui décrit l'interface i est centrée de moyenne nulle ($\langle a_i(x, y) \rangle = 0, \forall x, y$), nous déduisons que l'amplitude de diffraction est une variable aléatoire centrée ($\langle A_{1(ba)}^{+(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \rangle = 0$). Pour une structure bidimensionnelle, l'intensité incohérente à l'ordre 1 de perturbation noté $I_{f,(ba)}^{SPM}(\theta, \varphi)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{f,(ba)}^{SPM}(\theta, \varphi) &= \frac{\cos^2 \theta}{\gamma^2 \cos^2 \theta_0} \langle \left| A_{1(ba)}^{+(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \right|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0} \left\{ \langle \text{Re}^2 \left[A_{1(ba)}^{+(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \right] \rangle + \langle \text{Im}^2 \left[A_{1(ba)}^{+(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \right] \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

où : $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

V.2.2.1 Variances et covariances de la partie réelle et imaginaire de l'amplitude diffractée

Tenant en compte des expressions présentées dans la section (III.2.1), nous suivons les mêmes étapes de calculs mais pour le cas bidimensionnel. Nous obtenons des expressions des variances et des covariances des fonctions aléatoires bidimensionnelles $A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, de la forme :

$$\begin{aligned}
 \dagger^2_{R(ba)} = & \langle \text{Re}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \text{Re}^2(K_i^{(\pm,ba)}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle + \text{Im}^2(K_i^{(\pm,ba)}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \text{Re}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle + \text{Im}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle \right\} \\
 & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ -\text{Im}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle + \text{Re}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle \right\}
 \end{aligned} \tag{V.6}$$

$$\begin{aligned}
 \dagger^2_{I(ba)} = & \langle \text{Im}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \text{Im}^2(K_i^{(\pm,ba)}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle + \text{Re}^2(K_i^{(\pm,ba)}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \text{Im}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle + \text{Re}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ +\text{Re}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle + \text{Im}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle \right\}
 \end{aligned} \tag{V.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{R(ba)} = & \langle \text{Re}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \text{Im}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Im}(K_i^{(\pm,ba)}) \left\{ \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle - \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \text{Re}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle - \text{Im}(K_i^{(\pm,ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm,ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle \right\}
 \end{aligned} \tag{V.8}$$

Ces expressions montrent que les variances et les covariances de la partie réelle et imaginaire de la fonction aléatoire $A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dépendent des variances et des covariances associées aux différentes grandeurs $\text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)]$ et $\text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)]$. Pour déterminer ces dernières, nous procédons aux mêmes calculs présentés dans (**Annexe A**), et puisque nous étudions le problème 2D, nous remplaçons la simple intégrale en double intégrale. Après calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \dagger^2_{R\hat{a}_i} = & \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[(' (x) + \langle (y)] dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(' (L - |x|)) \sin c(\langle (L - |y|)) dx dy \\
 \dagger^2_{I\hat{a}_i} = & \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[(' (x) + \langle (y)] dx dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(' (L - |x|)) \sin c(\langle (L - |y|)) dx dy
 \end{aligned} \tag{V.9}$$

Nous pouvons par ailleurs montrer que $\text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)]$ et $\text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)]$ sont non corrélées :

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle = 0 \tag{V.10}$$

Le même raisonnement pour les covariances $\langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle$, $\langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle$, $\langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle$, $\langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle$ associées

à $\hat{a}_i(' , \langle)$ et $\hat{a}_j(' , \langle)$ où ($i \neq j$), qui sont non nulles si les surfaces sont corrélées et on trouve les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[(' (x) + \langle (y))] dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(' (L - |x|)) \sin c(\langle (L - |y|)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[(' (x) + \langle (y))] dx dy \\ &- \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(' (L - |x|)) \sin c(\langle (L - |y|)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle &= - \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin[(' x + \langle y)] dx dy \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

V.2.2.2 Comportements asymptotiques de variance, de covariance et de l'intensité incohérente

D'après (V.9) et (V.11)-(V.13), on utilise la formule d'Euler et la transformée de Fourier, on obtient pour $L \rightarrow \infty$:

$$\langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle = \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(' , \langle)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ii}(' , \langle)}{2} \quad (\text{V.14})$$

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle = \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ij}(' , \langle) + \hat{R}_{ij}(-' , -\langle)}{4} \quad (\text{V.15})$$

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Im}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle = - \langle \text{Im}[\hat{a}_i(' , \langle)] \text{Re}[\hat{a}_j(' , \langle)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ij}(' , \langle) - \hat{R}_{ij}(-' , -\langle)}{4j} \quad (\text{V.16})$$

En substituant les expressions (V.14)-(V.16) dans (V.6)- (V.8), ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \dagger_{R(ba)}^2 = \langle \text{Re}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(' , \langle) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} &\text{Re} \left(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(+, ba)} \right) \left(\hat{R}_{ij}(' , \langle) + \hat{R}_{ij}(-' , -\langle) \right) \\ &+ \text{Im} \left(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(+, ba)} \right) \left(\hat{R}_{ij}(' , \langle) - \hat{R}_{ij}(-' , -\langle) \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

$$\dagger_{I(ba)}^2 = \langle \text{Im}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\prime, \langle) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} & \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\prime, \langle) + \hat{R}_{ij}(\prime, -\langle)) \\ & + \text{Im}(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\prime, \langle) - \hat{R}_{ij}(\prime, -\langle)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.18})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{RI(ba)} &= \langle \text{Re}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \text{Im}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \left[\text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) - \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \right] (\hat{R}_{ij}(\prime, \langle) + \hat{R}_{ij}(\prime, -\langle)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned} \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) &= \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) + \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \\ \text{Im}(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(\pm, ba)}) &= j \left[\text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) - \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \right] \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

Pour une extension infinie de la longueur de déformation ($L \rightarrow +\infty$), Nous démontrons que ce soit dans le cas des interfaces corrélées ou non corrélées, les variables aléatoires $\text{Re}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})]$ et $\text{Im}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s})]$ sont non corrélées ($X_{RI(ba)} = 0$) et présentent la même variance :

$$\dagger_{R(ba)}^2 = \dagger_{I(ba)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\prime, \langle) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} & \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\prime, \langle) + \hat{R}_{ij}(\prime, -\langle)) \\ & + \text{Im}(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\prime, \langle) - \hat{R}_{ij}(\prime, -\langle)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.21})$$

À partir de (IV.4) et (IV.5), et compte tenu de la symétrie hermitienne de la fonction $\hat{R}_{ij}(\prime, \langle)$ on aboutit à l'égalité suivante :

$$\dagger_{R(ba)}^2 = \dagger_{I(ba)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\prime, \langle) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) \hat{R}_{ij}(\prime, \langle) \right\} \quad (\text{V.22})$$

Nous montrons que l'intensité incohérente s'exprime sous la forme suivante :

$$I_{f,(ba)}^{SPM}(n, W) = \frac{1}{\cos^2 n} \frac{\cos^2 n}{\cos n_0} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\prime, \langle) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) \hat{R}_{ij}(\prime, \langle) \right\} \quad (\text{V.23})$$

V.3 Intensité diffractée cohérente et incohérente basée sur SSA

Le coefficient bistatique dans le cas bidimensionnel est défini par :

$$\langle I_{(ba)}^{SSA}(n, W) \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n \langle |A_{1,(ba)}^{(+1),SSA}(r, s)|^2 \rangle}{\}^2 L^2 \cos n_0 |A_{0(a)}|^2} \quad (V.24)$$

Substituant (IV.75) dans (V.24), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle I_{(ba)}^{SSA}(n, W) \rangle &= \frac{\cos^2 n}{\}^2 \cos n_0 (x_1 + x_0)^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} K_{i,(ba)}(r, s) K_{j,(ba)}^*(r, s) \\ &\times \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \exp[j'(x' - x'')] \exp[j(y' - y'')] M_{ij} dx' dx'' dy' dy'' \end{aligned} \quad (V.25)$$

Où :

$$M_{ij} = \langle \exp\{(x_1 + x_0)[a_i(x', y') - a_j(x'', y'')]\} \rangle \quad (V.26)$$

Pour une distribution gaussienne, le terme d'intercorrélacion M_{ij} s'exprime comme suit :

$$M_{ij} = \exp\left[-\frac{\dagger_i^2 + \dagger_j^2}{2}(x_1 + x_0)^2\right] \exp\left[(x_1 + x_0)^2 R_{ij}(x' - x'', y' - y'')\right] \quad (V.27)$$

Par changement de variable ($x = x' - x''$ et $y = y' - y''$), nous obtenons pour une fonction de corrélation d'énergie finie ($\lim_{x, y \rightarrow \pm\infty} R_{ij}(x, y) = 0$), le coefficient bistatique :

$$\begin{aligned} \langle I_{(ba)}^{SSA}(n, W) \rangle &= \frac{\cos^2 n}{\}^2 \cos n_0 (x_1 + x_0)^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} K_{i,(ba)}(r, s) K_{j,(ba)}^*(r, s) \\ &\times \exp\left[-\frac{\dagger_i^2 + \dagger_j^2}{2}(x_1 + x_0)^2\right] N_{ij} \end{aligned} \quad (V.28)$$

Où :

$$N_{ij} = 4f^2 u(\dagger) u(\langle) + P_{ij} \quad (V.29)$$

Avec :

$$P_{ij} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(x_1 + x_0)^{2q}}{q!} TF[R_{ij}^q(x, y)](\dagger, \langle) \quad (V.30)$$

Le premier terme $4f^2 u(\dagger) u(\langle)$ de l'expression (V.29), nous conduit à l'intensité cohérente :

$$I_{c,(ba)}^{SSA}(\mathbf{r}) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{N-1} K_{i,(ba)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0) \exp(-2\chi_0^2 \dagger_i^2) \right|^2}{4\}^2 k_1^2 \cos_{n_0}} 4f^2 u(\mathbf{r}) u(\mathbf{s}) \quad (\text{V.31})$$

Le deuxième terme nous donne l'intensité incohérente $I_{f,(ba)}^{SSA}(\mathbf{r}, \mathbf{W})$:

$$I_{f,(ba)}^{SSA}(\mathbf{r}, \mathbf{W}) = \frac{\chi_1^2}{4f^2 \cos_{n_0} (\chi_1 + \chi_0)^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} K_{i,(ba)}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \cdot K_{j,(ba)}^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \exp\left[-\frac{\dagger_i^2 + \dagger_j^2}{2} (\chi_1 + \chi_0)^2\right] P_{ij} \quad (\text{V.32})$$

V.4 Densités de probabilité

Les champs diffractés par des structures 2D obéissent aux mêmes lois de probabilité que les champs diffractés par des structures 1D, et de même ceux diffractés par une simple interface que de deux interfaces [24, 56]. De plus pour une extension infinie l'expression de la densité de probabilité ne permet pas de différencier l'état corrélé de l'état non corrélé et le cas isotrope du cas anisotrope, la forme des densités de probabilité ne permet pas non plus de différencier la simple surface du milieu stratifié (seuls changent les paramètres de ces lois).

V.4.1 Densité de probabilité conjointe de la partie réelle et imaginaire

La densité de probabilité conjointe de la partie réelle et imaginaire de l'amplitude diffractée par une structure 2D est sous la forme :

$$p_{RI(ba)}(x, y) = \frac{1}{2f \dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)} \sqrt{(1 - \dots_{(ba)}^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \dots_{(ba)}^2)} \left(\frac{x^2}{\dagger_{R(ba)}^2} - \frac{2\dots_{(ba)}xy}{\dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)}} + \frac{y^2}{\dagger_{I(ba)}^2} \right)\right] \quad (\text{V.33})$$

Où le coefficient de corrélation $\dots_{(ba)}$ est donné par:

$$\dots_{(E,H)} = \frac{\chi_{RI(E,H)}}{\dagger_{R(E,H)} \dagger_{I(E,H)}} \quad (\text{V.34})$$

En coordonnées polaires, nous obtenons la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires M et W :

$$p_{MW}(m, W) = \frac{m}{2f \dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)} \sqrt{(1 - \dots_{(ba)}^2)}} \exp\left[-\frac{m^2}{2(1 - \dots_{(ba)}^2)} \left(\frac{\cos^2 W}{\dagger_{R(ba)}^2} - \frac{2\dots_{(ba)} \cos W \sin W}{\dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)}} + \frac{\sin^2 W}{\dagger_{I(ba)}^2} \right)\right] \quad (\text{V.35})$$

Où m définit le module, et w définit la phase.

V.4.2 Densité de probabilité de module, de la phase, et de l'intensité incohérente

Nous référons à la section (III.3.1), et selon (V.35), il est possible d'établir les expressions des densités de probabilité suivantes :

- **Densité de probabilité de module**

La densité de probabilité du module de l'amplitude de diffraction définie pour $m \geq 0$ est donnée par l'intégration de l'expression (V.35) par rapport à la phase :

$$p_M(m) = \frac{m}{\dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)} \sqrt{(1 - \dots_{ba}^2)}} \exp\left(-\frac{m^2}{4(1 - \dots_{ba}^2)} \left(\frac{1}{\dagger_{R(ba)}^2} + \frac{1}{\dagger_{I(ba)}^2}\right)\right) \times I_0\left(-\frac{m^2}{4(1 - \dots_{ba}^2)} \sqrt{\left(\frac{1}{\dagger_{R(ba)}^2} - \frac{1}{\dagger_{I(ba)}^2}\right)^2 + \frac{4 \dots_{ba}^2}{\dagger_{R(ba)}^2 \dagger_{I(ba)}^2}}\right) \quad (\text{V.36})$$

La fonction de Bessel I_0 d'ordre 0 est donnée selon l'expression (III.38).

- **Densité de probabilité de la phase**

L'intégration de (V.35) par rapport au module nous donne la densité de probabilité de la phase :

$$p_W(w) = \frac{1}{2f \dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)}} \frac{\sqrt{(1 - \dots_{ba}^2)}}{\left(\frac{\cos w^2}{\dagger_{R(ba)}^2} - \frac{2 \dots_{ba} \cos w \sin w}{\dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)}} + \frac{\sin w^2}{\dagger_{I(ba)}^2}\right)} \quad (\text{V.37})$$

- **Densité de probabilité de l'intensité incohérente**

À partir de (V.36) et tenant compte de la relation (III.41), nous obtenons :

$$p_{I_f^{(ba)}}(w) = \frac{\} \cos_{\# 0}}{2 \dagger_{R(ba)} \dagger_{I(ba)} \cos^2_{\#} \sqrt{(1 - \dots_{ba}^2)}} \exp\left(-\frac{w \} \cos_{\# 0}}{4(1 - \dots_{ba}^2) \cos^2_{\#}} \left(\frac{1}{\dagger_{R(ba)}^2} + \frac{1}{\dagger_{I(ba)}^2}\right)\right) \times I_0\left(-\frac{w \} \cos_{\# 0}}{4(1 - \dots_{ba}^2) \cos^2_{\#}} \sqrt{\left(\frac{1}{\dagger_{R(ba)}^2} - \frac{1}{\dagger_{I(ba)}^2}\right)^2 + \frac{4 \dots_{ba}^2}{\dagger_{R(ba)}^2 \dagger_{I(ba)}^2}}\right) \quad (\text{V.38})$$

V.4.3 Comportements asymptotiques des densités de probabilité

Quand $L \rightarrow +\infty$, la covariance $\chi_{(ba)}$ et le coefficient de corrélation $\dots_{(ba)}$ sont nuls et d'après (V.22) les variances $\dagger_{R(ba)}^2$ et $\dagger_{I(ba)}^2$ sont égaux, en conséquence, le module du champ diffracté à grande distance suit une loi de Rayleigh, l'intensité de diffraction suit une loi exponentielle et la phase

est uniforme. Ce résultat est établi pour des interfaces corrélées ou non corrélées. Donc pour une extension infinie, les expressions (V.36)-(V.38) deviennent :

$$p_M(m) = \frac{m}{\dagger_{R(ba)}^2} \exp\left(-\frac{m^2}{2\dagger_{R(ba)}^2}\right), \text{ pour } m \geq 0 \quad (\text{V.39})$$

$$p_{f^{(ba)}}(w) = \frac{\} \cos_{\# 0}}{2\dagger_{R(ba)}^2 \cos^2_{\#}} \exp\left(-\frac{w\} \cos_{\# 0}}{2\dagger_{R(ba)}^2 \cos^2_{\#}}\right), \text{ pour } w \geq 0 \quad (\text{V.40})$$

$$p_W(w) = \frac{1}{2f}, \text{ pour } w \in [-f, f] \quad (\text{V.41})$$

V.5 Application numérique sur une structure 2D composée de quatre couches (N=4)

Dans cette section, nous réaliserons notre simulation sur une structure naturelle bidimensionnelle composée de quatre couches rugueuses aléatoirement de longueur de déformation finie ou infinie, nous chercherons à évaluer l'intensité du champ diffracté. Pour cela, nous calculons d'abord pour N=4 les amplitudes diffractées, et nous précisons celles diffractées dans le milieu 1 (**Annexe C**) en raison de leur intervention dans l'obtention du signal diffracté.

V.5.1 Paramètres de simulation

Dans toutes les simulations, nous considérons une structure composée de quatre couches air/neige/sol argileux/rock, éclairé par une onde incidente de longueur fixée à 30 cm (bande de fréquence L). Chaque milieu est caractérisé par sa permittivité relative v_i résumée dans (*Tableau V.1*). Ces données sont retirées de la référence [30].

	Milieu considéré	Permittivité relative
Milieu 1	air	$v_1 = 1$
Milieu 2	neige	$v_2 = 3$
Milieu 3	sol argileux	$v_3 = 9.5 - i0.00055$
Milieu 4	rock	$v_4 = 20.5 - i2.55$

Tableau V.1. Permittivités relatives des différents milieux.

La distance entre la couche air /neige est $d_1 = 0.35\}$, et entre la couche neige/sol argileux est $d_2 = 0.5\}$. Les trois interfaces sont caractérisées par des fonctions de corrélation et d'intercorrélation gaussiennes et se définissent par des hauteurs quadratiques moyennes \dagger_i (choisissant différentes valeurs d'une simulation à une autre) des longueurs de corrélation l_{x_i}, l_{y_i} , les interfaces peuvent être

isotropes ou anisotropes (Tableau V.2). Les interfaces sont corrélées pour $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 1$ et non corrélées pour $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$, notant que dans les deux cas $q_{11} = q_{22} = q_{33} = 1$.

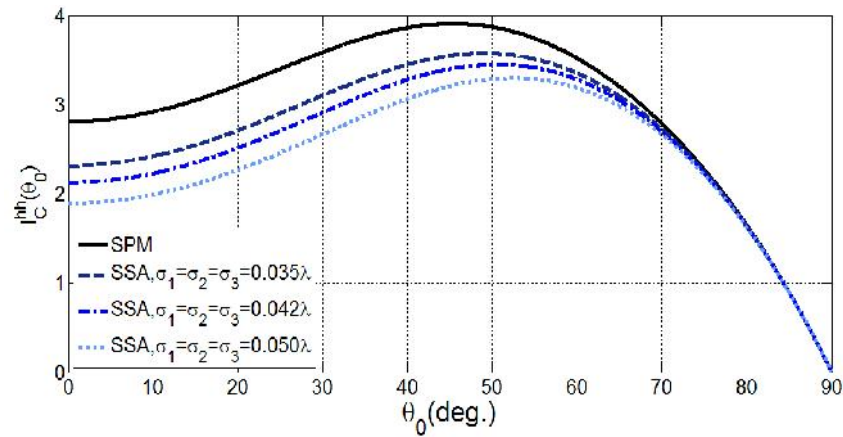
	Longueur de corrélation	
	Cas isotrope	Cas anisotrope
Interface 1	$l_{x1} = l_{y1} = 0.3\}$	$l_{x1} = 0.3\}, l_{y1} = 0.6\}$
Interface 2	$l_{x2} = l_{y2} = 0.4\}$	$l_{x2} = 0.4\}, l_{y2} = 0.8\}$
Interface 3	$l_{x3} = l_{y3} = 0.5\}$	$l_{x3} = 0.5\}, l_{y3} = 1.0\}$

Tableau V.2. Longueur de corrélation dans le cas isotrope et anisotrope.

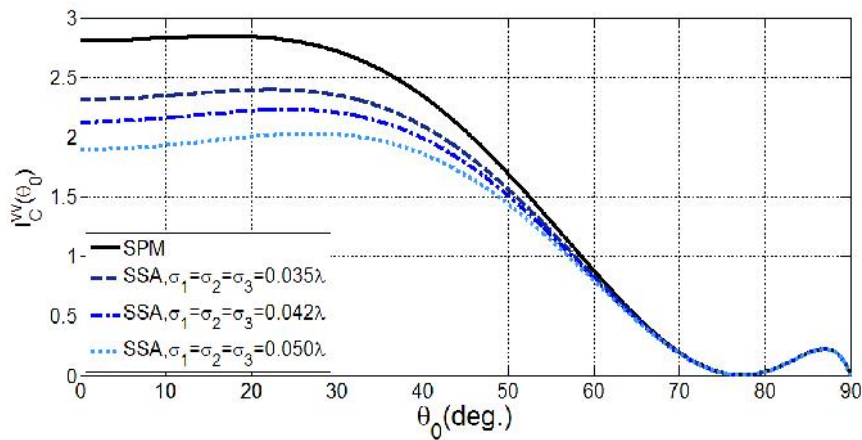
V.5.2 Intensité cohérente

En titre de comparaison entre les deux méthodes SPM et SSA proposées dans le chapitre précédent, nous considérons d'abord le cas où les interfaces bidimensionnelles sont planes, autrement dit nous présentons le phénomène de la réflexion spéculaire où $n = n_0$. La figure V.1 présente l'intensité cohérente donnée par l'expression (V.4) en fonction de l'angle d'observation en polarisation directe horizontale dans (a), et en polarisation directe verticale dans (b).

On note que l'intensité cohérente obtenue en polarisation directe (hh) est plus grande qu'en polarisation (vv). On peut observer clairement, l'effet de l'angle de Brewster en polarisation (vv) où l'intensité cohérente est minimale mais non nulle avec $n_{Brewster} = 77.25^\circ$. Prenons trois configurations de la hauteur quadratique moyenne, $\dagger_1 = \dagger_2 = \dagger_3 = 0.050\}$ dans la première, $\dagger_1 = \dagger_2 = \dagger_3 = 0.042\}$ dans la deuxième, et $\dagger_1 = \dagger_2 = \dagger_3 = 0.035\}$ dans la troisième. On remarque que lorsque la valeur de la hauteur de rugosité et d'angle d'incidence diminue, il y a une bonne approche entre les deux méthodes dans les deux polarisations.



(a)



(b)

Figure V.1. Intensité cohérente en fonction d'angle d'incidence
(a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv)

V.5.3 Intensité incohérente

V.5.3.1 Influence de la longueur de déformation L

Pour étudier l'impact de la longueur de déformation sur l'intensité incohérente obtenue par la méthode SPM donnée par l'expression (V.5), la *figure V.2* donne l'intensité incohérente en fonction de l'angle d'incidence en prenant différentes valeurs de la longueur de déformation: 2λ , 6λ , 10λ et l'infini en polarisation horizontale directe (hh) dans (a). Nous présentons l'intensité incohérente en polarisation verticale directe (vv) dans (b), en polarisation horizontale croisée (vh) dans (c) et en polarisation verticale croisée (hv) dans (d). On considère le cas des interfaces isotropes et non corrélées. Nous fixons $\theta_0 = 30^\circ$, $w_0 = 0^\circ$, $w = 45^\circ$. On peut remarquer que lorsque la longueur de déformation est supérieure à dix fois la longueur d'onde, l'intensité s'approche du comportement asymptotique pour une extension infinie donnée par l'expression (V.23). L'amplitude est plus importante dans la polarisation verticale directe et croisée que dans la polarisation horizontale. Ces remarques restent

aussi valables pour des interfaces isotropes et corrélées présentées dans la *figure V.3* en polarisation (hh) dans **(a)** et en (hv) dans **(b)**.

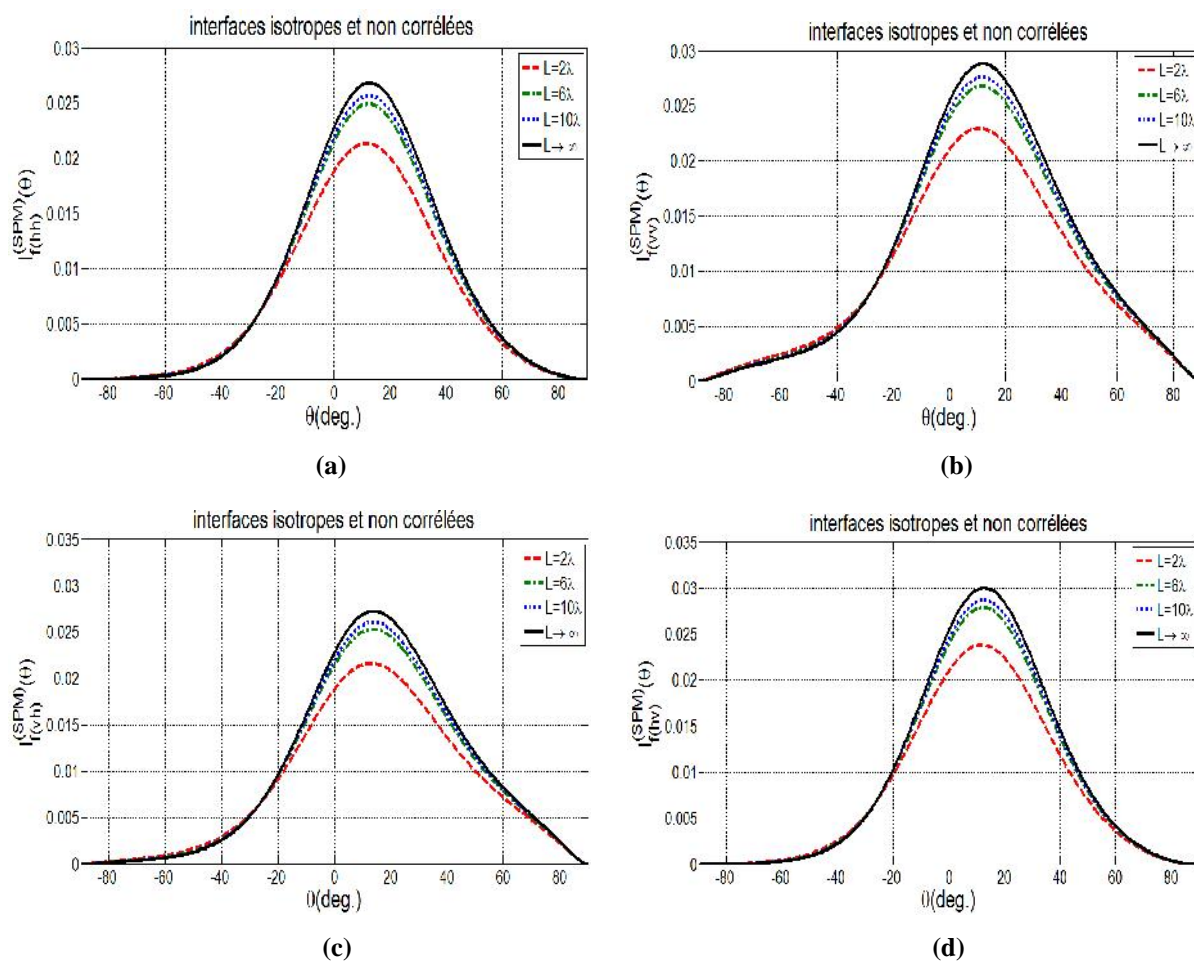


Figure V.2. Effet de la longueur de déformation sur l'intensité incohérente, interfaces isotropes et non corrélées, **(a)** polarisation horizontale directe, **(b)** polarisation verticale directe, **(c)** polarisation horizontale croisée, **(d)** polarisation verticale croisée.

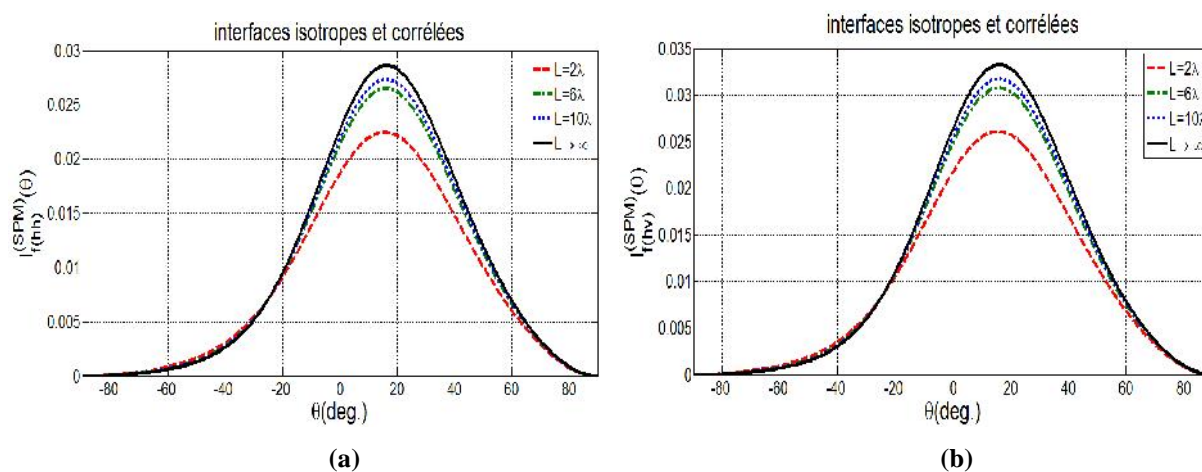


Figure V.3. Effet de la longueur de déformation sur l'intensité incohérente, interfaces isotropes et corrélées, **(a)** polarisation horizontale directe, **(b)** polarisation verticale croisée.

V.5.3.2 Influence de l'angle d'incidence θ_0

La figure V.4 montre l'intensité incohérente obtenue par la méthode SPM donnée par l'expression (V.23) en fonction de l'angle d'observation pour différents angles d'incidence prenant : 20° , 30° , 45° , 60° , 75° . Considérant des interfaces isotropes et non corrélées et pour une longueur de déformation $L \rightarrow \infty$, on présente les diagrammes en polarisation horizontale directe (hh) dans (a), et en polarisation verticale croisée (hv) dans (b). On peut constater que l'intensité augmente par la diminution de l'angle d'incidence dans les deux polarisations. L'intensité est supérieure en incidence verticale qu'en incidence horizontale.

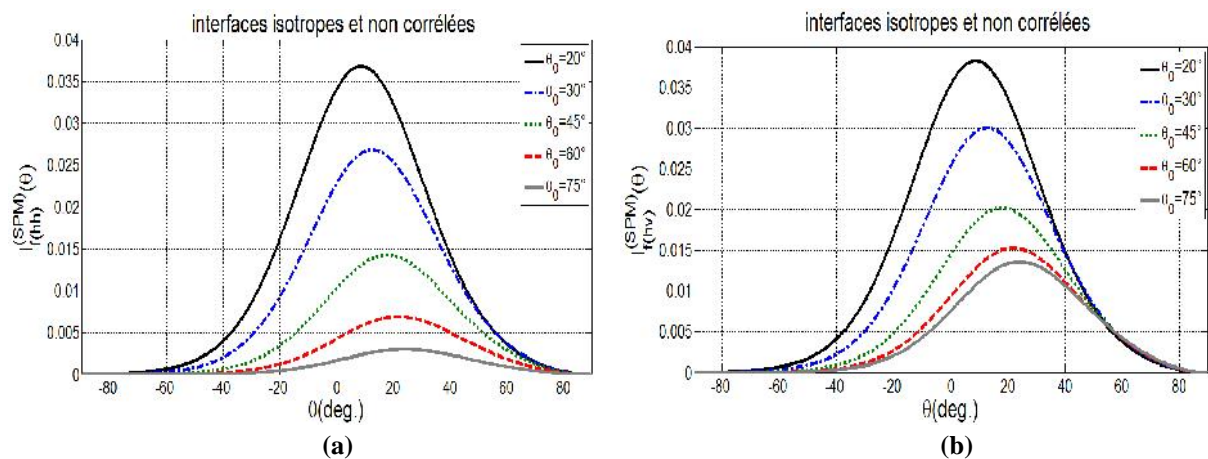


Figure V.4. Intensité incohérente pour différente angle d'incidence, interfaces isotropes et non corrélées, $w_0 = 0^\circ$, $w = 45^\circ$, $L \rightarrow \infty$, (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (hv).

La figure V.5 présente l'intensité incohérente en fonction de l'angle d'observation obtenue pour différents angles d'incidence en polarisation (vv). Nous considérons des interfaces isotropes, non corrélées dans (a) et des interfaces isotropes et corrélées dans (b). On peut remarquer que dans les deux cas des interfaces isotropes corrélées et isotropes non corrélées, l'intensité est maximale lorsque l'angle d'incidence est minimal. Néanmoins, les courbes en polarisation (vv) et dans le cas isotrope et non corrélées, donnent presque, la même valeur d'intensité incohérente dans un angle d'incidence égal à 45° et par contre pour un angle supérieur à cette dernière l'intensité est élevée lorsque l'angle d'incidence augmente.

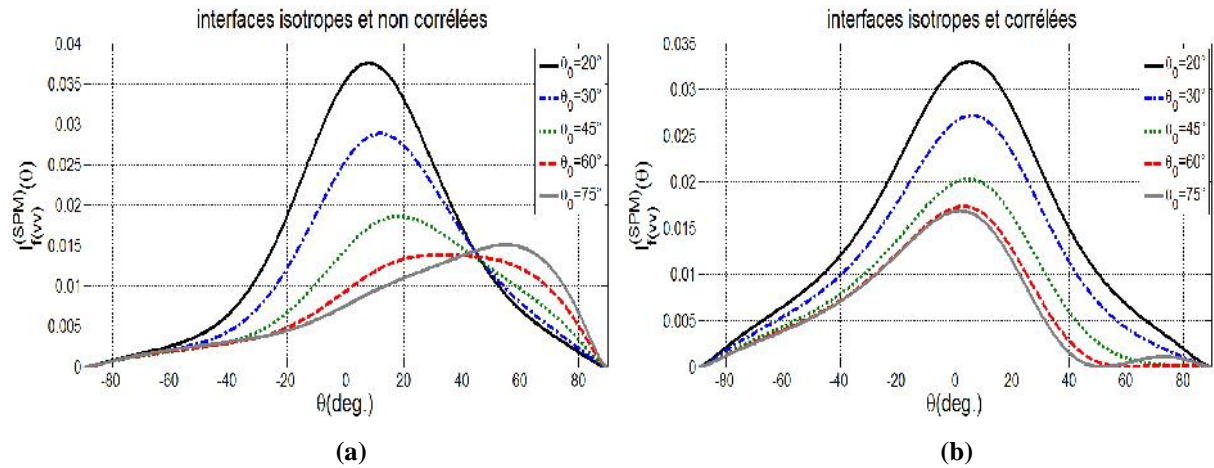


Figure V.5. Effet de l'angle d'incidence sur l'intensité incohérente en polarisation (vv), cas des interfaces isotropes (a) non corrélées, (b) corrélées.

V.5.3.3 Influence de la corrélation et de l'isotropie

Pour une extension infinie, la figure V.6 présente, dans le plan d'incidence et en polarisation horizontale directe (hh), l'effet de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente obtenue par la méthode SPM dans (a) et par la méthode SSA dans (b). La figure V.7 montre l'effet de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente en polarisation verticale croisée (hv), par la méthode SPM dans (a) et par la méthode SSA dans (b) avec $\theta_0 = 45^\circ$, $\phi_0 = 0^\circ$, $\psi = 45^\circ$. On peut montrer que quel que soit l'état des interfaces corrélées ou non corrélées et quelle que soit la polarisation horizontale ou verticale directe ou croisée, l'intensité incohérente obtenue dans le cas anisotrope est toujours supérieure à celle obtenue dans le cas isotrope, aussi l'intensité est toujours élevée dans le cas des interfaces corrélées que dans le cas non corrélé. Les amplitudes pour une incidence verticale et n'est élevée que pour une incidence horizontale. Les résultats observés dans la figure V.6 et la figure V.7 sont un autre indicateur de la ressemblance des deux méthodes SPM et SSA.

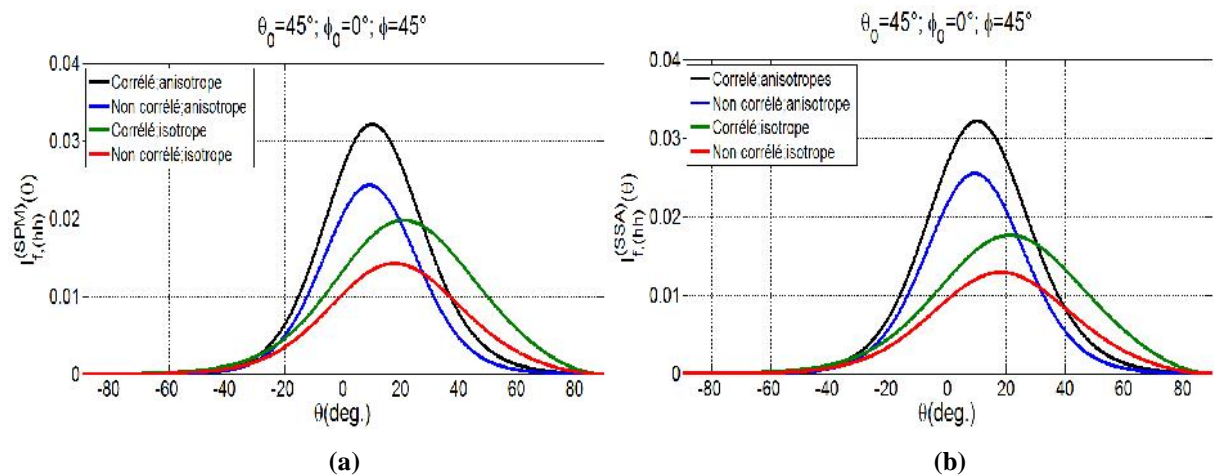


Figure V.6. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente en polarisation (hh), (a) par SPM, (b) par SSA.

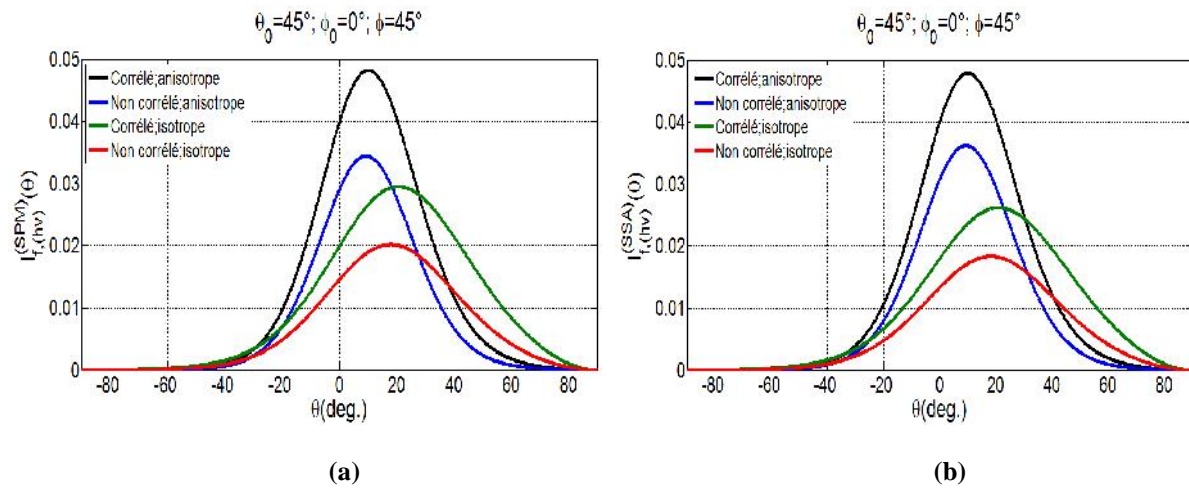


Figure V.7. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente en polarisation (hv), (a) par SPM, (b) par SSA.

La figure V.8 présente, dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence, l'influence de la corrélation et l'isotropie sur l'intensité incohérente obtenue par la méthode SPM en polarisation (vv) dans (a), et en polarisation (hv) dans (b), avec $\theta_0 = 45^\circ$, $\phi_0 = 45^\circ$, $\psi = 135^\circ$. On montre que l'allure de l'intensité est symétrique dans le cas des interfaces isotrope et asymétrique dans le cas des interfaces anisotropes dans les deux états corrélés ou non corrélés.

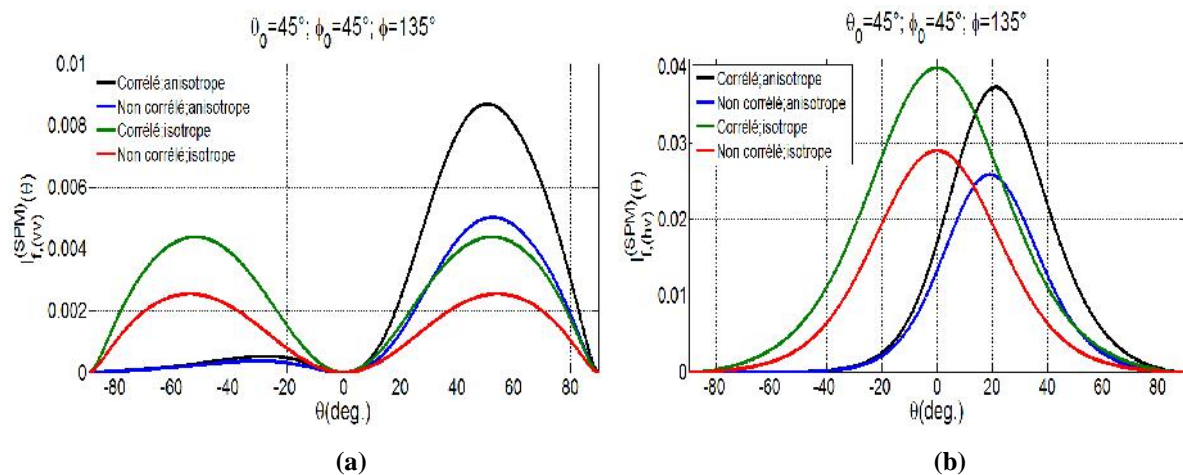


Figure V.8. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence, (a) en polarisation (vv), (b) en polarisation (hv).

V.5.3.4 Influence de la rugosité des interfaces

Pour étudier l'impact de la rugosité sur l'intensité incohérente nous présentons une comparaison entre les valeurs d'intensité, obtenus par la méthode SPM, pour différents états de rugosité des interfaces dans toutes les polarisations. Nous considérons les mêmes paramètres présentés dans [30], les

épaisseurs $d_1 = 1.15$, $d_2 = 2.8$, les hauteurs quadratiques moyennes $k_1 \dagger_1 = k_1 \dagger_2 = k_1 \dagger_3 = 0.05$.

Les longueurs de corrélation dans le cas des interfaces isotropes sont données par $k_1 l_{x1} = k_1 l_{y1} = 1.5$,

$k_1 l_{x2} = k_1 l_{y2} = 1.5$ et $k_1 l_{x3} = k_1 l_{y3} = 1.5$, et dans le cas des interfaces anisotropes, nous supposons que :

$k_1 l_{x1} = 1.5$, $k_1 l_{y1} = 3$, $k_1 l_{x2} = 1.5$, $k_1 l_{y2} = 3$, $k_1 l_{x3} = 1.5$ et $k_1 l_{y3} = 3$. Avec $\theta_0 = 45^\circ$, $w = 0^\circ$, $w_0 = 45^\circ$.

Ainsi, considérant les paramètres ci-dessus, on présente dans la *figure V.9*, l'intensité incohérente en fonction de l'angle d'incidence en polarisation (*hh*), on montre dans cette figure la différence des amplitudes diffractées prenant plusieurs états de rugosité: le cas d'une structure composée de trois interfaces bidimensionnelles rugueuses aléatoirement, le cas où la 1^{ère}, la 2^{ème} ou bien la 3^{ème} interface est seulement rugueuse et les deux autres sont planes, et le cas d'une structure composée d'une simple interface bidimensionnelle rugueuse. Nous exposons le cas des interfaces corrélées et isotropes dans **(a)**, non corrélées et isotropes dans **(b)**, corrélées et anisotropes dans **(c)** et non corrélées et anisotropes dans **(d)**.

On peut remarquer clairement d'après **(a)** et **(b)** que dans le cas des interfaces isotropes, l'amplitude change uniquement dans le cas où les trois interfaces sont simultanément rugueuses et l'intensité est plus élevée dans le cas corrélé que dans le cas non corrélé. L'allure de l'intensité dans les autres états de déformation garde la même forme dans le cas corrélé comme dans le cas non corrélé. Dans le cas des interfaces anisotropes, on peut constater le même phénomène d'après **(c)** et **(d)**. Aussi, les résultats obtenus dans le cas des interfaces anisotropes sont meilleurs que ceux obtenus dans le cas isotrope.

Les mêmes remarques sont également observées dans les autres polarisations, qui sont présentées dans les *figure V.10*, en polarisation (*vv*), *figure V.11* en polarisation (*vh*), et *figure V.12* en polarisation (*hv*).

Pareillement à la méthode SPM, les simulations effectuées par la méthode SSA donnent les mêmes résultats. La comparaison des diagrammes obtenus par les deux méthodes SPM et SSA avec ceux de référence [30] est très satisfaisante. Tenons compte que l'auteur a étudié le cas des interfaces isotropes et non corrélées et a utilisé le coefficient rétrodiffusé radar ($4f \cos \theta_0$) dans le calcul du coefficient bistatique.

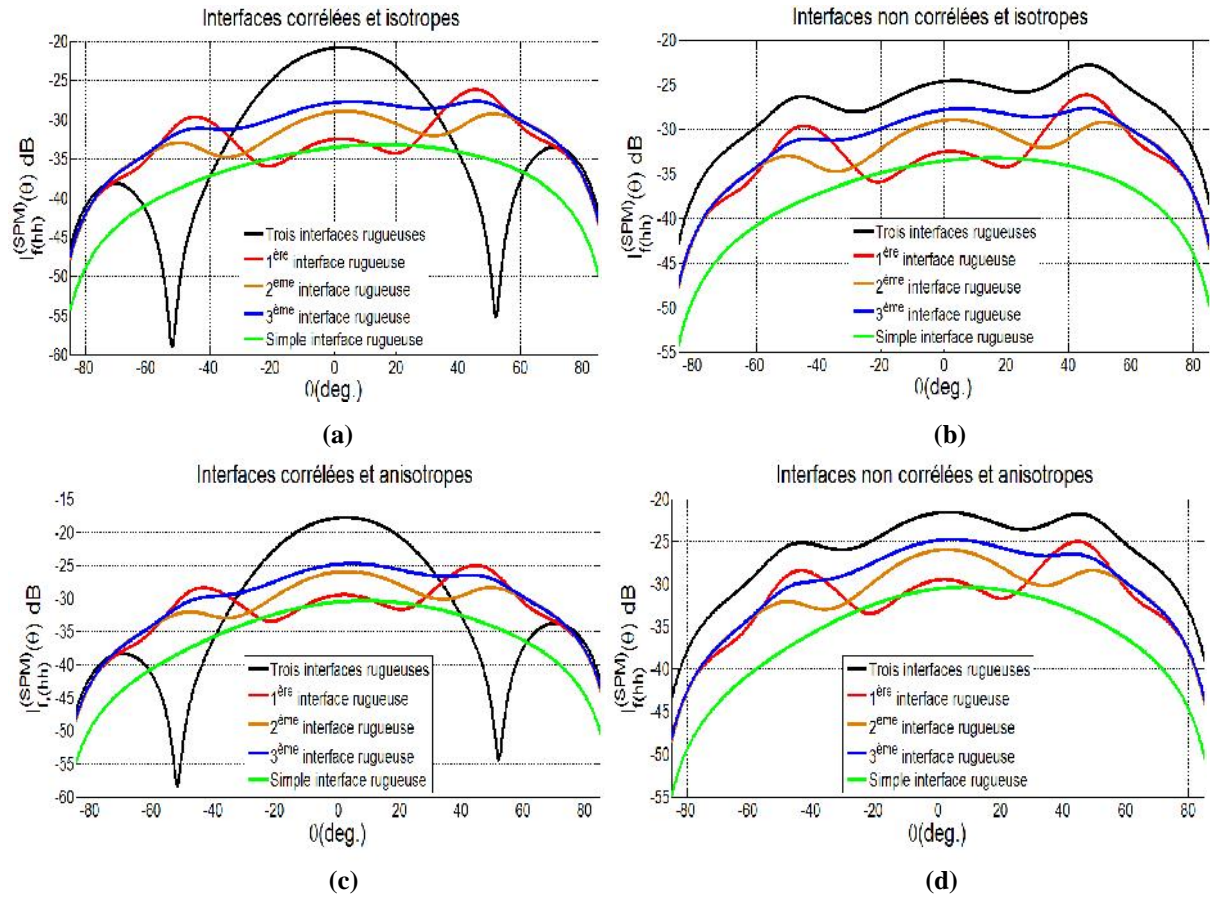


Figure V.9. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (hh)
 (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes,
 (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes.

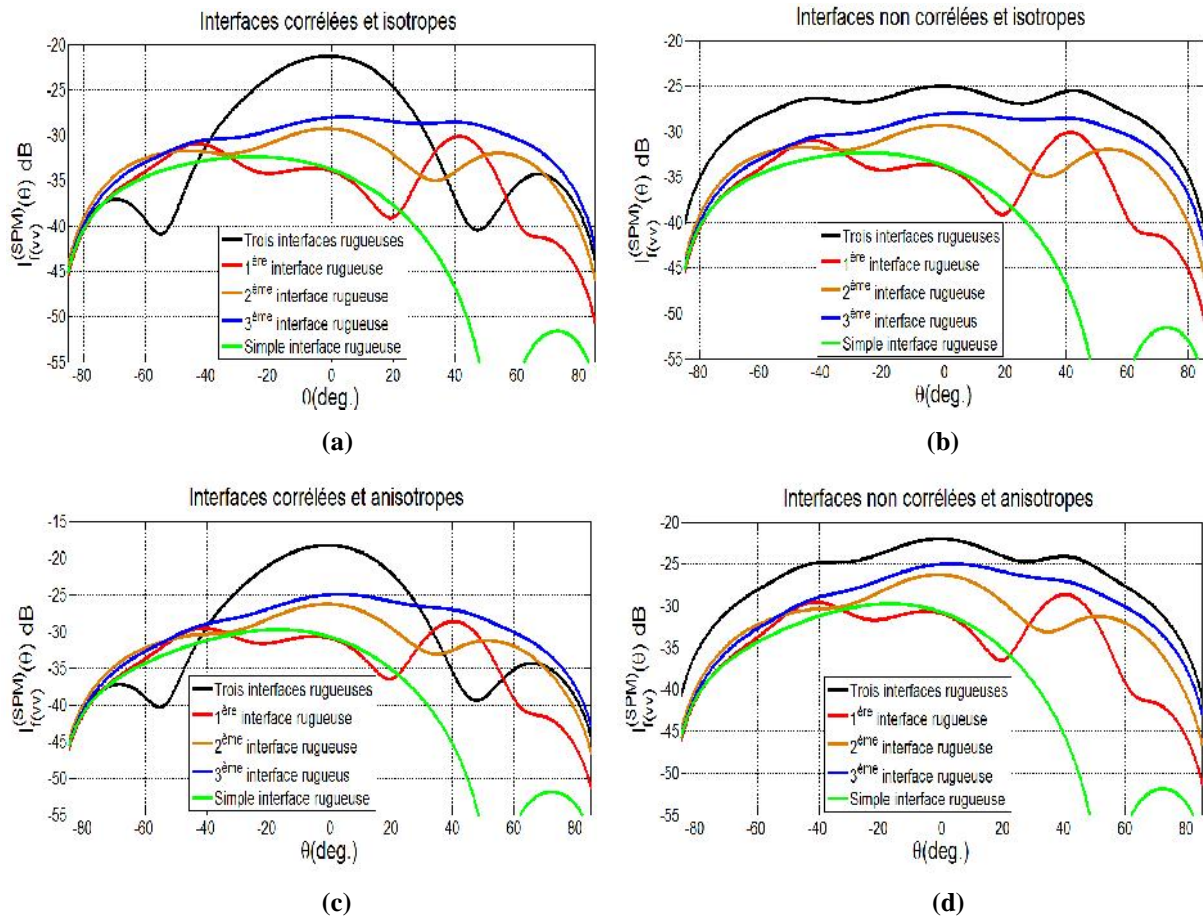


Figure V.10. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (vv)
 (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes,
 (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes.

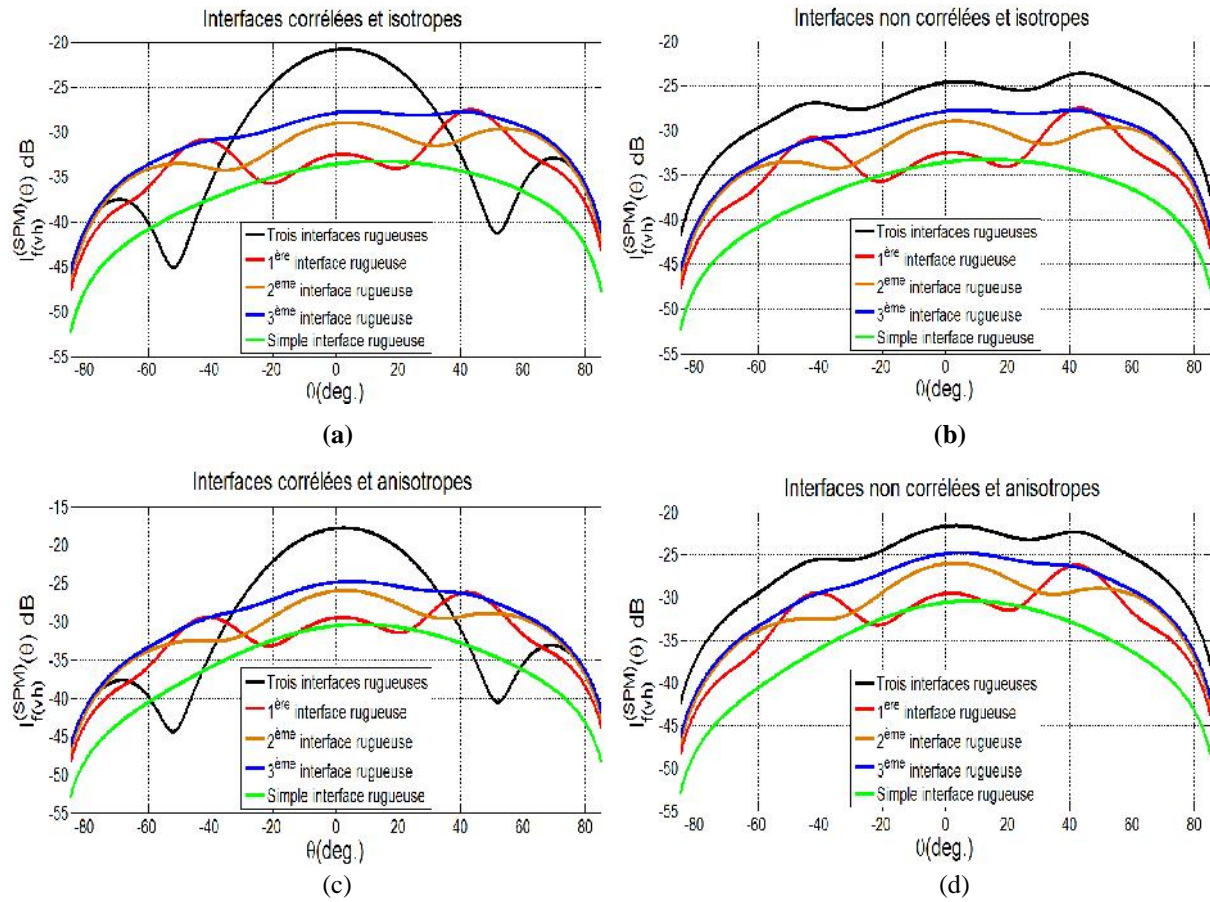


Figure V.11. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (vh)
 (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes,
 (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes.

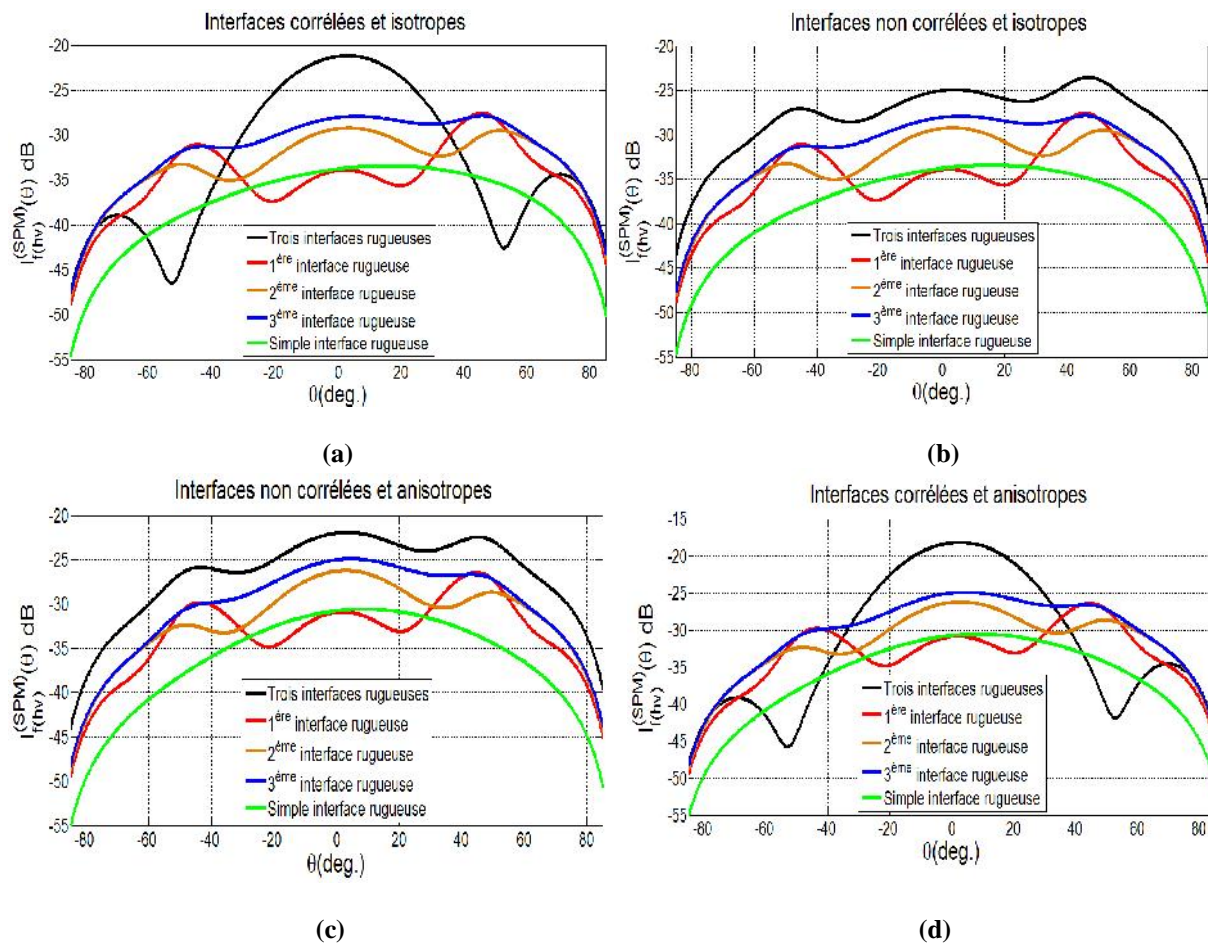


Figure V.12. Effet de rugosité des interfaces sur l'intensité incohérente en polarisation (hv)
 (a) corrélées et isotropes, (b) non corrélées et isotropes,
 (c) corrélées et anisotropes, (d) non corrélées et anisotropes.

V.5.4 Intensité rétrodiffusée

V.5.4.1 Comparaison entre SPM et SSA

La figure V.13 présente l'intensité rétrodiffusée en fonction de l'angle d'incidence avec $\theta_i = -\theta_0, W_0 = W = 0^\circ$, menée d'une comparaison entre les résultats obtenus par les méthodes SPM et SSA dans les deux polarisations directes (hh) et (vv), on considère le cas des interfaces isotropes et non corrélées dans (a) et des interfaces isotropes et corrélées dans (b). On note, dans les deux méthodes SPM et SSA et dans les deux polarisations directes, que l'intensité rétrodiffusée est décroissante quand l'angle d'incidence est croissant et l'amplitude est élevée en polarisation (vv) qu'en polarisation (hh). Les résultats obtenus par la méthode SPM sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode SSA et pour un angle d'incidence supérieur à 30° , les deux méthodes sont similaires. L'intensité rétrodiffusée est plus grande dans le cas non corrélé que dans le cas corrélé.

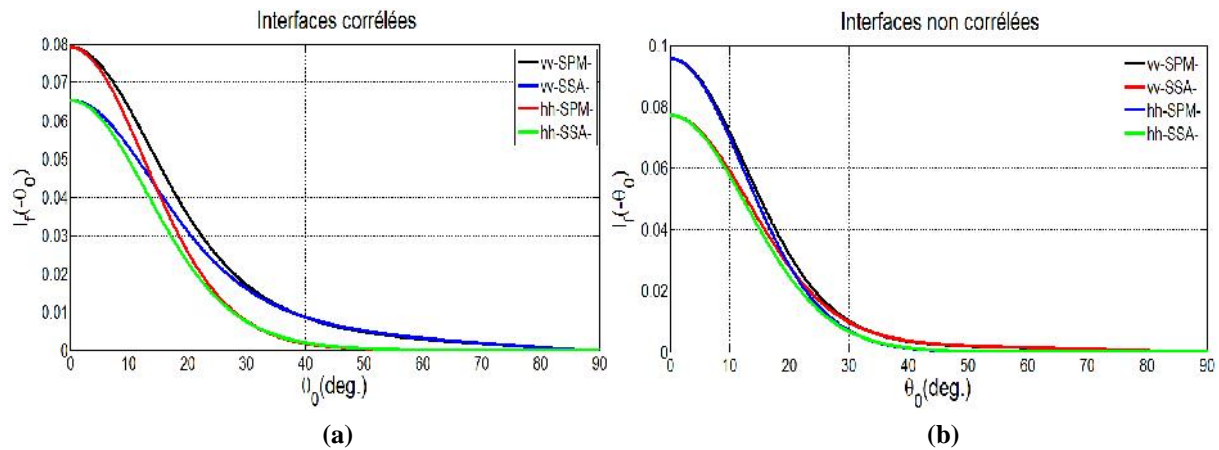


Figure V.13. Intensité rétrodiffusée en fonction de l'angle d'incidence, interfaces isotropes, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.5$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.3$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.4$, $l_{x3} = l_{y3} = 0.5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.050$, $L \rightarrow \infty$.
(a) cas des interfaces corrélées (b) cas des interfaces non corrélées

V.5.4.2 Influence de la corrélation et de l'isotropie

La figure V.14 montre l'influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité rétrodiffusée obtenue par la méthode SPM en polarisation (hh) dans (a) et en polarisation (vv) dans (b).

On montre que l'intensité rétrodiffusée est plutôt supérieure dans les cas anisotropes que dans les cas isotropes et dans les cas non corrélés que dans les cas corrélés. En polarisation (hh), on remarque que pour un angle d'observation supérieur à 20° , les allures dans le cas anisotrope non corrélé et anisotrope corrélé sont superposées: Même remarque dans le cas isotrope. On voit en polarisation (vv) que pour un angle d'observation inférieur à 18° , les amplitudes sont plus élevées dans le cas non corrélé que dans le cas corrélé et dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. Par contre pour un angle d'observation supérieur à 18° , on note que les amplitudes sont plus élevées dans le cas corrélé que dans le cas non corrélé.

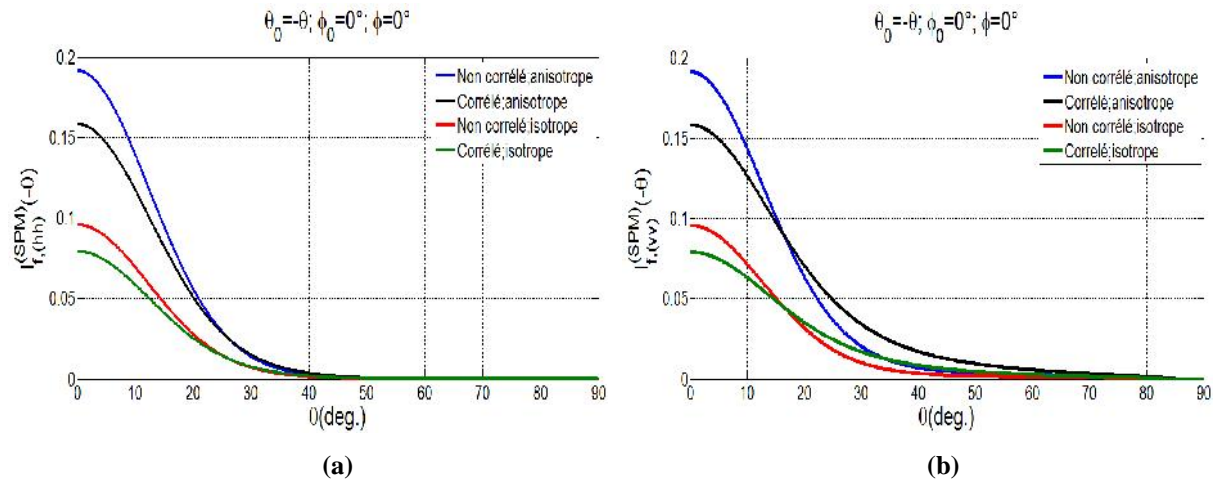


Figure V.14. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité rétrodiffusée

$$d_1 = 0.35, d_2 = 0.5, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.050, L \rightarrow \infty.$$

(a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv)

V.5.4.3 Effet de la hauteur quadratique moyenne

La figure V.15 présente l'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de la hauteur quadratique moyenne \dagger_i en polarisation (hh) dans (a), et en polarisation (vv) dans (b). On considère le cas des interfaces isotropes et non corrélées. D'après les deux figures, on constate que lorsque la hauteur quadratique moyenne diminue les résultats obtenus par la méthode SSA sont presque les mêmes qu'avec la méthode SPM, ce qui confirme nos résultats théoriques. D'autre part les deux figures montrent qu'en polarisation (hh), l'intensité rétrodiffusée s'annule pour un angle d'incidence supérieur à 40° et pour un angle supérieur à 55° en polarisation (vv).

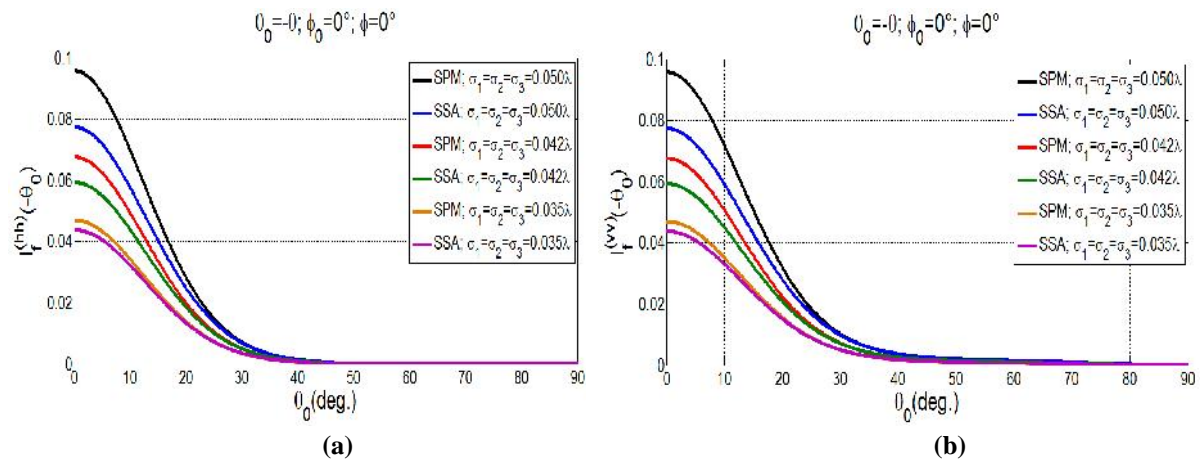


Figure V.15. Effet de la hauteur quadratique moyenne sur l'intensité rétrodiffusée, interfaces isotropes et non corrélées, $d_1 = 0.35, d_2 = 0.5, l_{x1} = l_{y1} = 0.3, l_{x2} = l_{y2} = 0.4, l_{x3} = l_{y3} = 0.5, L \rightarrow \infty.$

(a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv).

V.5.5 La densité de probabilité du module et de la phase

V.5.5.1 Influence de la longueur de déformation

La figure V.16 donne la densité de probabilité du module donnée par l'expression (V.36), en polarisation (hh) dans (a) et en polarisation (vv) dans (b), pour différentes longueurs de déformation L : 2λ , 6λ , 10λ et l'infini. L'angle d'incidence θ_0 est fixé à 45° et l'angle d'observation à 30° . Nous considérons des interfaces isotropes et non corrélées. On peut remarquer que pour une longueur de déformation supérieure à 10λ , la densité de probabilité du module s'approche de la loi de Rayleigh pour une extension infinie donnée par l'expression (V.30). Aussi, la densité de probabilité du module est supérieure en polarisation (hh) qu'en polarisation (vv).

Les mêmes remarques sont exprimées dans le cas d'une structure composée de trois couches monodimensionnelles rugueuses aléatoirement [24] et pour des couches bidimensionnelles [56], où la densité de probabilité garde la même allure dans le cas d'une structure composée de quatre couches comme dans une structure composée de trois couches, avec un changement des amplitudes. Ces résultats confirment que la densité de probabilité ne différencie pas l'état isotrope de l'état anisotrope et le cas corrélé du cas non corrélé.

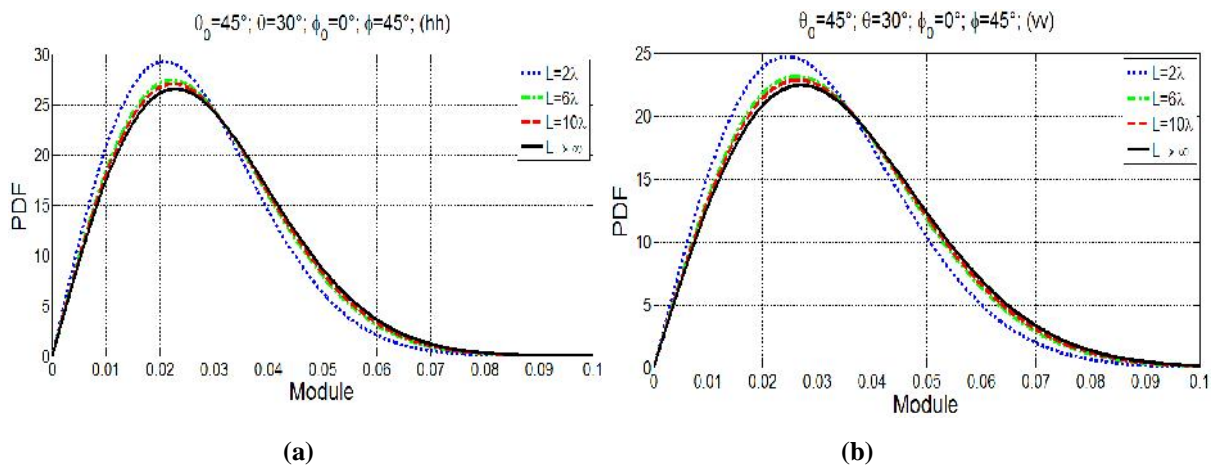


Figure V.16. Densité de probabilité du module pour différentes longueurs de déformation, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.5$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.3$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.4$, $l_{x3} = l_{y3} = 0.5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.050$.
(a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv).

On considère des interfaces isotropes et non corrélées avec $\theta_0 = 45^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $w_0 = 0^\circ$, $w = 45^\circ$. On donne dans la figure V.17 l'erreur relative entre la loi uniforme donnée par l'expression (V.41) et la densité de probabilité de la phase obtenue pour des interfaces d'extension finie donnée par l'expression (V.37), pour différentes valeurs de longueur de déformation: 2λ , 4λ , 5λ , 7λ et 10λ , en polarisation (hh) dans (a) et en polarisation (vv) dans (b).

On montre dans les deux polarisations que pour une longueur de déformation supérieure à dix fois la longueur d'onde, l'erreur relative est minimale et la densité de probabilité suit la loi uniforme.

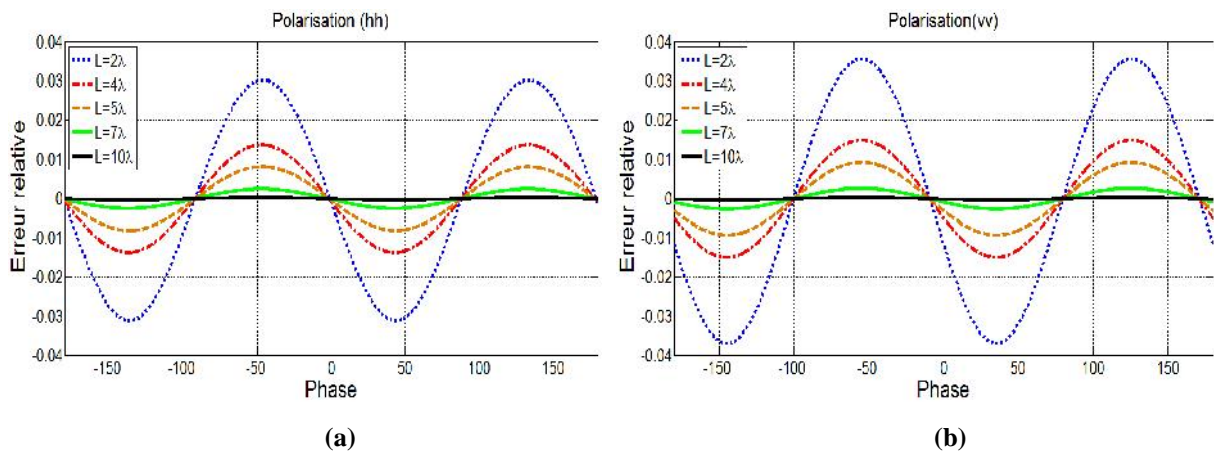


Figure V.17. Erreur relative entre la loi uniforme et la densité de probabilité de la phase pour différentes longueurs de déformation $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.5$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.3$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.4$, $l_{x3} = l_{y3} = 0.5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.050$. (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv).

V.5.5.2 Effet de la corrélation et de l'isotropie

La figure V.18 montre l'influence de la corrélation et l'isotropie sur la densité de probabilité du module pour une incidence horizontale en polarisation horizontale directe (hh) dans (a) et en polarisation horizontale croisée (vh) dans (b), et pour une incidence verticale, en polarisation verticale directe (vv) dans (c) et en polarisation verticale croisée (hv) dans (d). Considérons une longueur de déformation égale à 20λ et avec $\theta_0 = 45^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $w_0 = 0^\circ$, $w = 45^\circ$.

D'après les figures, on peut remarquer que la densité de probabilité du module en polarisation horizontale directe (hh) et croisée (vh) et en polarisation verticale croisée (hv) est supérieure dans le cas des interfaces non corrélées que dans le cas corrélé. Par contre, en polarisation verticale directe (vv), elle est supérieure dans le cas corrélé que dans le cas non corrélé. Dans les deux incidences (horizontale ou verticale), on note que quel que soit le cas des interfaces corrélées ou non corrélées la densité de probabilité est plus élevée dans le cas des interfaces anisotropes que dans le cas isotrope.

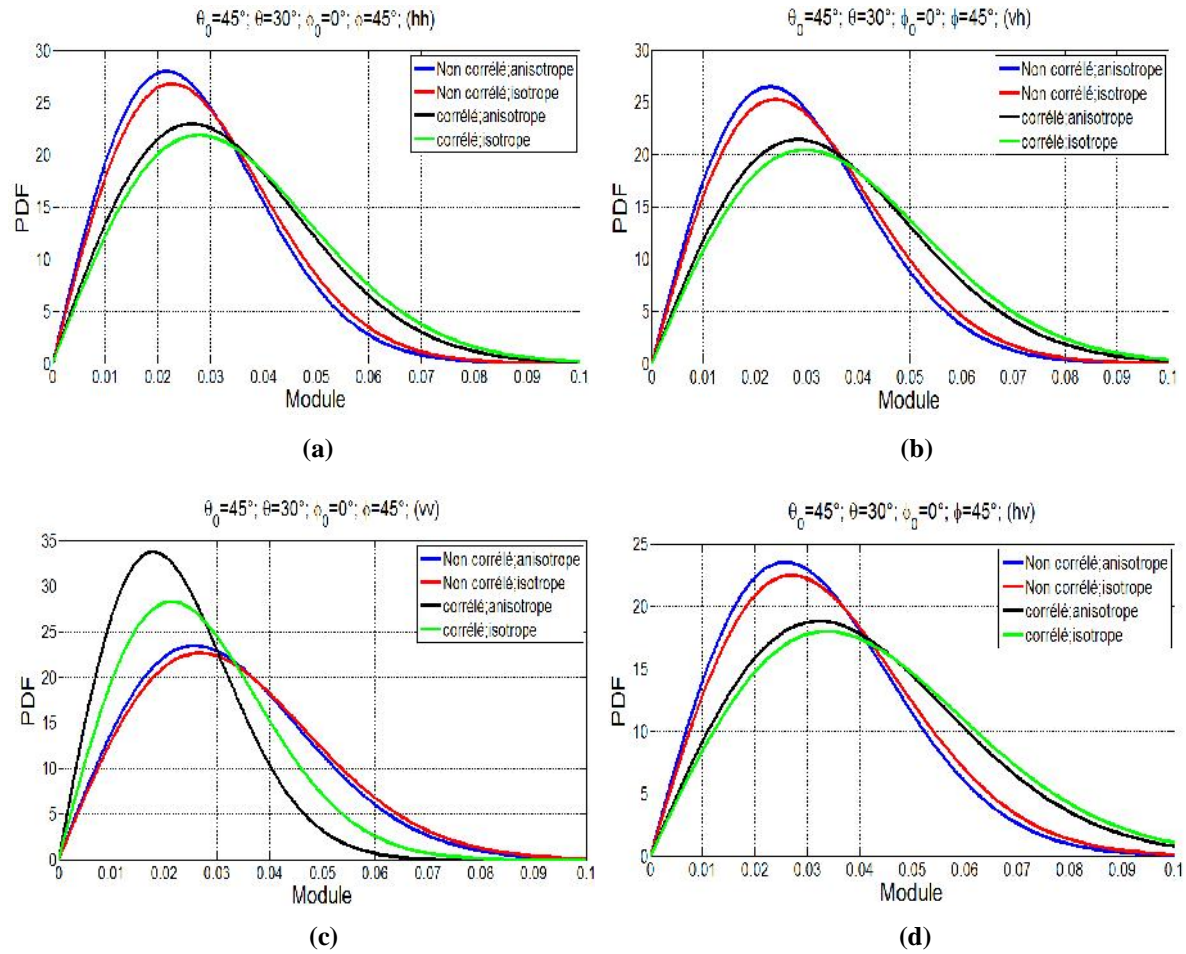


Figure V.18. Influence de la corrélation et de l'isotropie sur la densité de probabilité du module, $L = 20$
 (a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vh), (c) en polarisation (vv), (d) en polarisation (hv)

V.6 Conclusion

Après la résolution du problème de la diffraction par des structures multicouche monodimensionnelles nous avons déterminé au cours des chapitres IV et V, la solution du problème capital pour des cas plus compliqués. En fait, nous avons étudié le problème de la diffraction par des structures bidimensionnelles rugueuses aléatoirement dans les deux directions, on se basant sur des méthodes analytiques appliquées pour des hauteurs quadratiques moyennes faibles devant la longueur d'onde. Par l'application des conditions aux limites et des hypothèses mathématiques nous avons obtenu les expressions des champs diffractés. Ainsi nous avons réalisé une étude statistique bien détaillée sur l'intensité diffractée soit pour des interfaces planes (ordre 0) ou rugueuses (ordre 1); autrement dit nous sommes arrivés à modéliser analytiquement le problème de la diffraction par des structures bidimensionnelles rugueuses aléatoirement. Nous montrons au niveau des différentes simulations la validité des deux méthodes SPM et SSA dans le cas d'un problème 2D.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les travaux présentés dans cette thèse ont pour objectif la détermination du signal diffracté adapté aux besoins d'un radar de télédétection. Nous avons proposé une étude qui conduit à la résolution du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures naturelles multicouches. Cette étude possède l'avantage d'être analytique et permet de passer de manière continue du cas non perturbé (structure lisse) au cas perturbé (structure rugueuse).

Selon les équations de Maxwell, le comportement des ondes électromagnétiques dans l'espace et dans des milieux diélectriques. On a mis les conditions aux limites sur lesquelles on assure le passage des ondes par deux milieux différents. On a ensuite introduit une brève description au problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures rugueuses. Il a semblé intéressant de présenter les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel, ces derniers permettent la résolution du problème dans le cas non rugueux.

Nous nous sommes intéressées à l'étude du problème de la diffraction par des structures multicouches monodimensionnelles (1D) rugueuses aléatoirement. Après avoir présenté les expressions des champs diffractés selon le développement de Rayleigh, et par l'application des conditions aux limites, l'objectif a été la modélisation analytique du problème de la diffraction par une structure de 1D. Parmi les méthodes approchées existantes, nous avons choisi la méthode de petite perturbation (SPM) et la méthode de faible pente à l'ordre 1 (SSA1), qui sont appliquées lorsque la hauteur quadratique moyenne est faible devant la longueur d'onde, nous avons ainsi déterminé les amplitudes des champs diffractés en absence et en présence de rugosité pour deux polarisations.

Nous avons poursuivi avec une étude statistique détaillée des champs diffractés, autrement dit nous avons présenté les propriétés statistiques telles que l'intensité cohérente et incohérente. Ensuite l'étude a été développée en présentant les densités de probabilité, du module, de la phase et de l'intensité incohérente. Considérant un cas particulier d'une structure composé de quatre couches naturelles, nous avons exposé, dans les simulations effectuées, l'influence de l'angle d'incidence, la longueur de déformation, et de la hauteur de rugosité ainsi que la corrélation des interfaces sur l'intensité cohérente et incohérente. La comparaison entre les résultats obtenus par la méthode SPM et ceux obtenus par la méthode SSA, a montré que les deux méthodes proposées donnent des résultats proches et satisfaisants.

Nous avons étudié le problème le plus difficile est celui de la diffraction par des structures multicouches bidimensionnelles (2D) rugueuses aléatoirement. En appliquant les conditions aux limites et les deux méthodes SPM et SSA, nous avons obtenu les amplitudes diffractées par la géométrie étudiée, en absence et en présence de rugosité. Considérant un cas particulier d'une structure composé de quatre couches naturelles 2D, nous avons exposé, dans les simulations effectuées l'influence de plusieurs paramètres sur l'intensité incohérente tels que la hauteur de rugosité, la longueur de déformation, l'angle d'incidence ainsi que l'effet de corrélation et de l'isotropie. La comparaison avec les résultats présentés dans la référence [33], est satisfaisante.

Les méthodes proposées dans la résolution du problème de la diffraction soit par des structures monodimensionnelles ou bidimensionnelles ont fourni des résultats encourageants. Il est noté qu'il y avait un très bon accord entre les deux méthodes, et pour des hauteurs de rugosité faibles, les résultats obtenus par la méthode SSA s'approchent de ceux obtenus par la méthode SPM. Cette remarque est valable dans le cas monodimensionnel autant que bidimensionnel. On notera que cet accord a été vérifié pour des interfaces planes autant que rugueuses. Cela signifie que nous avons pu mettre en avant un modèle analytique pour la résolution du problème de la diffraction par des structures rugueuses monodimensionnelles et bidimensionnelles. Ces travaux ont apporté une contribution à l'interprétation des données des radars de télédétection, et ils ouvrent dans le futur plusieurs perspectives.

Annexe A

Variance, covariance de la partie réelle et imaginaire des fonctions aléatoires

L'obtention de l'intensité incohérente du champ diffracté par une structure monodimensionnelle (1D) ou bidimensionnelle (2D) rugueuse aléatoirement, nécessite d'abord le calcul des variances et covariance des amplitudes diffractées. Ces dernières sont aussi liées au calcul des variances et de covariance de la partie réelle et imaginaire de la transformée de Fourier des fonctions aléatoires qui décrivent les interfaces rugueuses.

A.1 Problème 1D

Dans le cas où les interfaces rugueuses sont monodimensionnelles, on suppose que $a_i(x)$ sont les fonctions monodimensionnelles qui décrivent ces interfaces. Les fonctions $\hat{a}_i(\gamma)$ représentent ces transformées de Fourier monodimensionnelles. Les parties réelles et imaginaires des transformées de Fourier s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Re}[\hat{a}_i(\gamma)] &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x) \cos(\gamma x) dx \\ \text{Im}[\hat{a}_i(\gamma)] &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x) \sin(\gamma x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Les expressions de variance et de covariance de la partie réelle et imaginaire des transformées de Fourier des fonctions monodimensionnelles sont données sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{Ra}^2 = \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(\gamma)] \rangle &= \frac{1}{L} \left\langle \left(\int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x) \cos(\gamma x) dx \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \langle a_i(x) a_i(x') \rangle \cos(\gamma x) \cos(\gamma x') dx dx' \\ \sigma_{Ia}^2 = \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(\gamma)] \rangle &= \frac{1}{L} \left\langle \left(\int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x) \sin(\gamma x) dx \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \langle a_i(x) a_i(x') \rangle \sin(\gamma x) \sin(\gamma x') dx dx' \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Selon les relations trigonométriques, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \langle a_i(x) a_i(x') \rangle [\cos \gamma(x'-x) + \cos \gamma(x'+x)] dx dx' \\ \sigma_{Ia}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \langle a_i(x) a_i(x') \rangle [\cos \gamma(x'-x) - \cos \gamma(x'+x)] dx dx' \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

On pose que $x' - x = \kappa$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-\kappa-L/2}^{\kappa+L/2} \langle a_i(x) a_i(x+\kappa) \rangle [\cos(\gamma\kappa) + \cos\gamma(2x+\kappa)] dx d\kappa \\ \sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-\kappa-L/2}^{\kappa+L/2} \langle a_i(x) a_i(x+\kappa) \rangle [\cos(\gamma\kappa) - \cos\gamma(2x+\kappa)] dx d\kappa\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

En se rappelant que $a_i(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-L/2, +L/2]$, et en supposant que la largeur des zones de transition entre les zones planes et la zone modulée de la surface sont petites devant la largeur de la surface (pour assurer la continuité des dérivées première et seconde), $\langle a_i(x) a_i(x+\kappa) \rangle$ peut être remplacée par la fonction d'autocorrélation $R_{ii}(\kappa)$ pour $\kappa \in [-L, +L]$. Cette quantité s'annulant ailleurs, nous intervertissons l'ordre des intégrations, il vient pour la variance de la partie réelle :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{ii}(\kappa) \cos(\gamma\kappa) \int_{-\kappa-L/2}^{L/2} dx d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{ii}(\kappa) \cos(\gamma\kappa) \int_{-L/2}^{-\kappa+L/2} dx d\kappa \\ &+ \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{ii}(\kappa) \int_{-\kappa-L/2}^{L/2} \cos\gamma(2x+\kappa) dx d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{ii}(\kappa) \int_{-L/2}^{-\kappa+L/2} \cos\gamma(2x+\kappa) dx d\kappa\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

Encore :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^0 \left(1 + \frac{\kappa}{L}\right) R_{ii}(\kappa) \cos(\gamma\kappa) d\kappa + \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{\kappa}{L}\right) R_{ii}(\kappa) \cos(\gamma\kappa) d\kappa \\ &+ \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{ii}(\kappa) \left[\frac{\sin\gamma(2x+\kappa)}{2\gamma} \right]_{-\kappa-L/2}^{L/2} d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{ii}(\kappa) \left[\frac{\sin\gamma(2x+\kappa)}{2\gamma} \right]_{-L/2}^{-\kappa+L/2} d\kappa\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{ii}(\kappa) \cos(\gamma\kappa) d\kappa \\ &+ \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{ii}(\kappa) \left[\frac{\sin\gamma(L+\kappa)}{\gamma} \right] d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{ii}(\kappa) \left[\frac{\sin\gamma(L-\kappa)}{\gamma} \right] d\kappa\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Où encore :

$$\sigma_{Ra}^2 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{ii}(\kappa) \cos\gamma\kappa d\kappa + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L R_{ii}(\kappa) \left[\frac{\sin\gamma(L-|\kappa|)}{\gamma} \right] d\kappa\quad (\text{A.8})$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(\gamma)] \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos(\gamma x) R_{ii}(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}[\gamma(L-|x|)] R_{ii}(x) dx \\ \sigma_{ia}^2 &= \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(\gamma)] \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos(\gamma x) R_{ii}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}[\gamma(L-|x|)] R_{ii}(x) dx\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

A.1 Problème 2D

Dans le cas où les interfaces rugueuses sont bidimensionnelles, $\hat{a}_i(\zeta, \xi)$ sont les transformées de Fourier des fonctions bidimensionnelles $a_i(x, y)$ qui décrivent ces interfaces. Ainsi, les parties réelles et imaginaires de ces transformées s'écrivent :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x, y) \cos(\zeta x + \xi y) dx dy \\ \operatorname{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x, y) \sin(\zeta x + \xi y) dx dy\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

Les variances et la covariance de la partie réelle et imaginaire des transformées Fourier $\hat{a}_i(\zeta, \xi)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{R}a_i}^2 &= \langle \operatorname{Re}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{1}{L} \left\langle \left(\int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x, y) \cos(\zeta x + \xi y) dx dy \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{-L/2} \int_{-L/2}^{-L/2} \int_{-L/2}^{-L/2} \int_{-L/2}^{-L/2} \langle a_i(x, y) a_i(x', y') \rangle \cos(\zeta x + \xi y) \cos(\zeta x' + \xi y') dx dy dx' dy' \\ \sigma_{\hat{I}a_i}^2 &= \langle \operatorname{Im}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{1}{L} \left\langle \left(\int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} a_i(x, y) \sin(\zeta x + \xi y) dx dy \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{-L/2} \int_{-L/2}^{-L/2} \int_{-L/2}^{-L/2} \int_{-L/2}^{-L/2} \langle a_i(x, y) a_i(x', y') \rangle \sin(\zeta x + \xi y) \sin(\zeta x' + \xi y') dx dy dx' dy'\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Suivent les mêmes principes présentés dans le cas 1D, avec quelques changements, nous obtenons les variances et les covariances de la partie réelle et imaginaire des fonctions bidimensionnelles $\hat{a}_i(\zeta, \xi)$ dans le cas du problème 2D, qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{R}a_i}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[\zeta(x) + \xi(y)] dx dy + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(\zeta(L - |x|)) \sin c(\xi(L - |y|)) dx dy \\ \sigma_{\hat{I}a_i}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[\zeta(x) + \xi(y)] dx dy - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(\zeta(L - |x|)) \sin c(\xi(L - |y|)) dx dy\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

Annexe B Cas particulier d'une structure de quatre couches 1D, ($N=4$)

B.1. Amplitudes diffractées:

Selon la méthode de petite perturbation (SPM), nous pouvons présenter analytiquement les amplitudes diffractées en absence de rugosité (ordre 0) et en présence de rugosité (ordre 1). Nous choisissons une structure composée de quatre couches monodimensionnelles rugueuses aléatoirement. Pour $N=4$ nous déterminons dans ce qui suit les amplitudes diffractées dans le milieu 1, vu de leurs interventions dans l'obtention de l'intensité de signal détecté.

B.2. Résolution à l'ordre zéro

Dans le cas où la structure est parfaitement plane, les expressions des amplitudes à l'ordre zéro dans le milieu 1, s'écrivent :

$$A_{1(E,H)}^{(0)}(\alpha_0) = \frac{M_{1,4}^{(+,-)}(\alpha_0)}{M_{1,4}^{(-,-)}(\alpha_0)} A_0(\alpha_0) \quad (\text{B.1})$$

Avec :

$$\left(\frac{M_{1,4}^{(+,-)}(\alpha_0)}{M_{1,4}^{(-,-)}(\alpha_0)} \right) = \frac{\exp(-j\beta_{4,0}u_3)}{2e_1e_2e_3\beta_{1,0}\beta_{2,0}\beta_{3,0}} \times \left(\begin{array}{l} \beta_{2,0}\beta_{3,0}(\beta_{1,0} - e_1^2e_2^2\beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) + (e_1^2e_3^2\beta_{2,0}^2\beta_{4,0} - e_2^2\beta_{1,0}\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \\ -j(\beta_{2,0}(e_1^2e_2^2\beta_{3,0}^2 - e_3^2\beta_{1,0}\beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) + \beta_{3,0}(e_1^2\beta_{2,0}^2 - e_2^2e_3^2\beta_{1,0}\beta_{4,0})\sin(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2)) \\ \beta_{2,0}\beta_{3,0}(\beta_{1,0} + e_1^2e_2^2\beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) - (e_1^2e_3^2\beta_{2,0}^2\beta_{4,0} + e_2^2\beta_{1,0}\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \\ +j(\beta_{2,0}(e_3^2\beta_{1,0}\beta_{4,0} + e_1^2e_2^2\beta_{3,0}^2)\cos(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) + \beta_{3,0}(e_2^2e_3^2\beta_{1,0}\beta_{4,0} + e_1^2\beta_{2,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2)) \end{array} \right) \quad (\text{B.2})$$

On trouve l'amplitude réfléchie dans le milieu 1 :

En mode $E_{//}$

$$A_{1(E)}^{(0)}(\alpha_0) = \frac{1}{r_E(\alpha_0)} \left(\begin{array}{l} \beta_{2,0}\beta_{3,0}(\beta_{1,0} - \beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) + (\beta_{2,0}^2\beta_{4,0} - \beta_{1,0}\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \\ -j(\beta_{2,0}(\beta_{3,0}^2 - \beta_{1,0}\beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) + \beta_{3,0}(\beta_{2,0}^2 - \beta_{1,0}\beta_{4,0})\sin(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2)) \end{array} \right) A_0(\alpha_0) \quad (\text{B.3})$$

En mode $H_{//}$

$$A_{1(H)}^{(0)}(\alpha_0) = \frac{1}{r_H(\alpha_0)} \times \left(\begin{array}{l} \beta_{2,0}\beta_{3,0}n_2^2n_3^2(n_2^2\beta_{1,0} - n_1^2\beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) + (n_1^2n_3^4\beta_{2,0}^2\beta_{4,0} - n_2^4n_4^2\beta_{1,0}\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \\ -j(n_2^2\beta_{2,0}(n_1^2n_4^2\beta_{3,0}^2 - n_3^4\beta_{1,0}\beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) + n_3^2\beta_{3,0}(n_1^2n_4^2\beta_{2,0}^2 - n_2^4\beta_{1,0}\beta_{4,0})\sin(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2)) \end{array} \right) A_0(\alpha_0) \quad (\text{B.4})$$

Où :

$$r_E(\alpha_0) = \left(\begin{array}{l} \beta_{2,0}\beta_{3,0}(\beta_{1,0} + \beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) \\ -(\beta_{2,0}^2\beta_{4,0} + \beta_{1,0}\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \end{array} \right) + j \left(\begin{array}{l} \beta_{2,0}(\beta_{1,0}\beta_{4,0} + \beta_{3,0}^2)\cos(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \\ +\beta_{3,0}(\beta_{1,0}\beta_{4,0} + \beta_{2,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) \end{array} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$r_H(\alpha_0) = \left(\begin{array}{l} n_2^2n_3^2\beta_{2,0}\beta_{3,0}(n_2^2\beta_{1,0} + n_1^2\beta_{4,0})\cos(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) \\ - (n_1^2n_3^4\beta_{2,0}^2\beta_{4,0} + n_2^4n_4^2\beta_{1,0}\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \end{array} \right) + j \left(\begin{array}{l} n_2^2\beta_{2,0}(n_3^4\beta_{1,0}\beta_{4,0} + n_1^2n_4^2\beta_{3,0}^2)\cos(\beta_{2,0}d_1)\sin(\beta_{3,0}d_2) \\ +n_3^2\beta_{3,0}(n_2^4\beta_{1,0}\beta_{4,0} + n_1^2n_4^2\beta_{2,0}^2)\sin(\beta_{2,0}d_1)\cos(\beta_{3,0}d_2) \end{array} \right) \quad (\text{B.6})$$

B.3. Résolution à l'ordre un

Les ondes réfléchies dans le milieu 1 dans le cas d'une structure rugueuse, ont pour expression:

$$A_{1(E,H)}^{(1)}(\alpha) = \sum_{j=1}^3 K_j^{(E,H)} \widehat{a}_j(\alpha - \alpha_0) A_0(\alpha_0) \quad (\text{B.7})$$

$$K_j^{(E,H)}(\alpha) = j(n_j^2 - n_{j+1}^2) \left(S_{1,j}^{(+)} - \frac{M_{1,N}^{(+,-)}(\alpha)}{M_{1,N}^{(-,-)}(\alpha)} S_{1,j}^{(-)} \right)$$

Avec, en mode $E_{//}$:

$$\left(\begin{array}{l} S_{1,1}^{(+)} \\ S_{1,1}^{(-)} \end{array} \right)_{E_{//}} = \frac{k_0^2\beta_{1,0}}{\beta_1 r_E(\alpha_0)} \left(\begin{array}{l} \beta_{2,0}\beta_{3,0}\cos(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_{2,0}d_1) - \beta_{3,0}^2\sin(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_{2,0}d_1) \\ +j(\beta_{3,0}\beta_{4,0}\cos(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_{2,0}d_1) + \beta_{2,0}\beta_{4,0}\sin(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_{2,0}d_1)) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\left(\begin{array}{l} S_{1,2}^{(+)} \\ S_{1,2}^{(-)} \end{array} \right)_{E_{//}} = \frac{k_0^2\beta_{1,0}\beta_{2,0}(\beta_{3,0}\cos(\beta_{3,0}d_2) + j\beta_{4,0}\sin(\beta_{3,0}d_2))}{\beta_1\beta_2 r_E(\alpha_0)} \left(\begin{array}{l} \beta_2\cos(\beta_2d_1) - j\beta_1\sin(\beta_2d_1) \\ -\beta_2\cos(\beta_2d_1) - j\beta_1\sin(\beta_2d_1) \end{array} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\left(\begin{array}{l} S_{1,3}^{(+)} \\ S_{1,3}^{(-)} \end{array} \right)_{E_{//}} = \frac{k_0^2\beta_{1,0}\beta_{2,0}\beta_{3,0}}{\beta_1\beta_2\beta_3 r_E(\alpha_0)} \left(\begin{array}{l} \beta_2(\beta_3\cos(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2) - \beta_2\sin(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2)) \\ -j\beta_1(\beta_2\cos(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2) + \beta_3\sin(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2)) \\ -\beta_2(\beta_3\cos(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2) - \beta_2\sin(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2)) \\ -j\beta_1(\beta_2\cos(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2) + \beta_3\sin(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2)) \end{array} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{pmatrix} M_{1,4}^{(+,-)}(\alpha) \\ M_{1,4}^{(-,-)}(\alpha) \end{pmatrix}_{E_{II}} = \frac{\exp(-j\beta_4 u_3)}{2\beta_1\beta_2\beta_3} \begin{pmatrix} \beta_2\beta_3(\beta_1 - \beta_4)\cos(\beta_2 d_1)\cos(\beta_3 d_2) + (\beta_2^2\beta_4 - \beta_1\beta_3^2)\sin(\beta_2 d_1)\sin(\beta_3 d_2) \\ -j(\beta_2(\beta_3^2 - \beta_1\beta_4)\cos(\beta_2 d_1)\sin(\beta_3 d_2) + \beta_3(\beta_2^2 - \beta_1\beta_4)\sin(\beta_2 d_1)\cos(\beta_3 d_2)) \\ \beta_2\beta_3(\beta_1 + \beta_4)\cos(\beta_2 d_1)\cos(\beta_3 d_2) - (\beta_2^2\beta_4 + \beta_1\beta_3^2)\sin(\beta_2 d_1)\sin(\beta_3 d_2) \\ +j(\beta_2(\beta_1\beta_4 + \beta_3^2)\cos(\beta_2 d_1)\sin(\beta_3 d_2) + \beta_3(\beta_1\beta_4 + \beta_2^2)\sin(\beta_2 d_1)\cos(\beta_3 d_2)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

En mode H_{II}, on a :

$$\begin{pmatrix} S_{1,1}^{(+)} \\ S_{1,1}^{(-)} \end{pmatrix}_{H_{II}} = \frac{\beta_{1,0}}{\beta_1 r_H(\alpha_0)} \times \begin{pmatrix} n_3^2\beta_{2,0}\beta_{3,0}(n_4^2\alpha_0\alpha - n_2^2\beta_1\beta_{4,0})\cos(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_{2,0}d_1) - (n_2^2n_4^2\beta_{3,0}^2\alpha_0\alpha - n_3^4\beta_1\beta_{2,0}^2\beta_{4,0})\sin(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_{2,0}d_1) \\ +j(n_3^2\beta_{3,0}(n_2^2\beta_{4,0}\alpha_0\alpha - n_4^2\beta_1\beta_{2,0}^2)\cos(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_{2,0}d_1) + \beta_{2,0}(n_3^4\beta_{4,0}\alpha_0\alpha - n_2^2n_4^2\beta_1\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_{2,0}d_1)) \\ -n_3^2\beta_{2,0}\beta_{3,0}(n_4^2\alpha_0\alpha + n_2^2\beta_1\beta_{4,0})\cos(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_{2,0}d_1) + (n_2^2n_4^2\beta_{3,0}^2\alpha_0\alpha + n_3^4\beta_1\beta_{2,0}^2\beta_{4,0})\sin(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_{2,0}d_1) \\ -j(n_3^2\beta_{3,0}(n_2^2\beta_{4,0}\alpha_0\alpha + n_4^2\beta_1\beta_{2,0}^2)\cos(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_{2,0}d_1) + \beta_{2,0}(n_3^4\beta_{4,0}\alpha_0\alpha + n_2^2n_4^2\beta_1\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_{2,0}d_1)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,2}^{(+)} \\ S_{1,2}^{(-)} \end{pmatrix}_{H_{II}} = \frac{\beta_{1,0}\beta_{2,0}}{\beta_1\beta_2 r_H(\alpha_0)} \times \begin{pmatrix} \beta_2\beta_{3,0}(n_4^2n_1^2\alpha_0\alpha - n_3^2n_2^2\beta_1\beta_{4,0})\cos(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_2 d_1) + (n_3^2n_2^2\beta_1\beta_{4,0}\alpha_0\alpha - n_4^2n_1^2\beta_2^2\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_2 d_1) \\ -j(\beta_{3,0}(n_4^2n_2^2\beta_1\alpha_0\alpha - n_3^2n_1^2\beta_2^2\beta_{4,0})\cos(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_2 d_1) + \beta_2(n_4^2n_2^2\beta_1\beta_{3,0}^2 - n_3^2n_1^2\beta_{4,0}\alpha_0\alpha)\sin(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_2 d_1)) \\ -\beta_2\beta_{3,0}(n_4^2n_1^2\alpha_0\alpha + n_3^2n_2^2\beta_1\beta_{4,0})\cos(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_2 d_1) + (n_3^2n_2^2\beta_1\beta_{4,0}\alpha_0\alpha + n_4^2n_1^2\beta_2^2\beta_{3,0}^2)\sin(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_2 d_1) \\ -j(\beta_{3,0}(n_4^2n_2^2\beta_1\alpha_0\alpha + n_3^2n_1^2\beta_2^2\beta_{4,0})\cos(\beta_{3,0}d_2)\sin(\beta_2 d_1) + \beta_2(n_4^2n_2^2\beta_1\beta_{3,0}^2 + n_3^2n_1^2\beta_{4,0}\alpha_0\alpha)\sin(\beta_{3,0}d_2)\cos(\beta_2 d_1)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,3}^{(+)} \\ S_{1,3}^{(-)} \end{pmatrix}_{H_{II}} = \frac{\beta_{1,0}\beta_{2,0}\beta_{3,0}}{\beta_1\beta_2\beta_3 r_H(\alpha_0)} \times \begin{pmatrix} -n_2^2\beta_2\beta_3(n_3^2\beta_1\beta_{4,0} - n_1^2\alpha_0\alpha)\cos(\beta_3 d_2)\cos(\beta_2 d_1) + (n_2^4\beta_1\beta_3^2\beta_{4,0} - n_1^2n_3^2\beta_2^2\alpha_0\alpha)\sin(\beta_3 d_2)\sin(\beta_2 d_1) \\ +j(\beta_3(n_1^2n_3^2\beta_2^2\beta_{4,0} - n_2^4\beta_1\alpha_0\alpha)\cos(\beta_3 d_2)\sin(\beta_2 d_1) + n_2^2\beta_2(n_1^2\beta_3^2\beta_{4,0} - n_3^2\beta_1\alpha_0\alpha)\sin(\beta_3 d_2)\cos(\beta_2 d_1)) \\ -n_2^2\beta_2\beta_3(n_3^2\beta_1\beta_{4,0} + n_1^2\alpha_0\alpha)\cos(\beta_3 d_2)\cos(\beta_2 d_1) + (n_2^4\beta_1\beta_3^2\beta_{4,0} + n_1^2n_3^2\beta_2^2\alpha_0\alpha)\sin(\beta_3 d_2)\sin(\beta_2 d_1) \\ -j(\beta_3(n_1^2n_3^2\beta_2^2\beta_{4,0} + n_2^4\beta_1\alpha_0\alpha)\cos(\beta_3 d_2)\sin(\beta_2 d_1) + jn_2^2\beta_2(n_1^2\beta_3^2\beta_{4,0} + n_3^2\beta_1\alpha_0\alpha)\sin(\beta_3 d_2)\cos(\beta_2 d_1)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} M_{1,4}^{(+,-)}(\alpha) \\ M_{1,4}^{(-,-)}(\alpha) \end{array} \right)_{H//} &= \frac{\exp(-j\beta_4 u_3)}{2n_1 n_2^2 n_3^2 n_4 \beta_1 \beta_2 \beta_3} \\ &\times \left(\begin{array}{c} n_2^2 n_3^2 \beta_2 \beta_3 (n_4^2 \beta_1 - n_1^2 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2) + (n_1^2 n_3^4 \beta_2^2 \beta_4 - n_4^2 n_2^4 \beta_1 \beta_3^2) \sin(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) \\ -j(n_2^2 \beta_2 (n_1^2 n_4^2 \beta_3^2 - n_3^4 \beta_1 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) + n_3^2 \beta_3 (n_1^2 n_4^2 \beta_2^2 - n_2^4 \beta_1 \beta_4) \sin(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2)) \\ n_2^2 n_3^2 \beta_2 \beta_3 (n_4^2 \beta_1 + n_1^2 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2) - (n_1^2 n_3^4 \beta_2^2 \beta_4 + n_4^2 n_2^4 \beta_1 \beta_3^2) \sin(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) \\ +j(n_2^2 \beta_2 (n_1^2 n_4^2 \beta_3^2 + n_3^4 \beta_1 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) + n_3^2 \beta_3 (n_1^2 n_4^2 \beta_2^2 + n_2^4 \beta_1 \beta_4) \sin(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2)) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Donc, les coefficients complexes $K_j^{(E,H)}(\alpha)$ s'écrivent :

En mode E//

$$\begin{aligned} K_1^{(E)}(\alpha) &= \frac{jk_0^2 \beta_{1,0} (n_1^2 - n_2^2)}{r_E(\alpha_0) r_E(\alpha)} \left(\begin{array}{c} \beta_{3,0} (\beta_{2,0} \cos(\beta_{2,0} d_1) \cos(\beta_{3,0} d_2) - \beta_{3,0} \sin \beta_{2,0} u_2 \sin(\beta_{3,0} d_2)) \\ +j\beta_{4,0} (\beta_{2,0} \cos(\beta_{2,0} d_1) \sin(\beta_{3,0} d_2) + \beta_{3,0} \sin(\beta_{2,0} d_1) \cos(\beta_{3,0} d_2)) \end{array} \right) \\ &\times \left(\begin{array}{c} \beta_3 (\beta_2 \cos(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2) - \beta_3 \sin(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2)) \\ j\beta_4 (\beta_2 \cos(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) + \beta_3 \sin(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2)) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} K_2^{(E)}(\alpha) &= \frac{j2k_0^2 \beta_{1,0} \beta_{2,0} \beta_2 (n_2^2 - n_3^2)}{r_E(\alpha_0) r_E(\alpha)} (\beta_{3,0} \cos(\beta_{3,0} d_2) + j\beta_{4,0} \sin(\beta_{3,0} d_2)) \\ &\times (\beta_3 \cos(\beta_3 d_2) + j\beta_4 \sin(\beta_3 d_2)) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$K_3^{(E)}(\alpha) = \frac{j2k_0^2 \beta_{1,0} \beta_{2,0} \beta_{3,0} \beta_2 \beta_3 (n_3^2 - n_4^2)}{r_E(\alpha_0) r_E(\alpha)} \quad (\text{C.18})$$

Et en mode H//

$$\begin{aligned} K_1^{(H)}(\alpha) &= \frac{j\beta_{1,0} (n_1^2 - n_2^2)}{\beta_1 r_H(\alpha_0) r_H(\alpha)} \\ &\times \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} n_3^2 \beta_{3,0} (n_4^2 \beta_{2,0} \alpha_0 \alpha - n_2^2 \beta_1 \beta_{2,0} \beta_{4,0}) \cos(\beta_{3,0} d_2) \cos(\beta_{2,0} d_1) - (n_2^2 n_4^2 \beta_{3,0}^2 \alpha_0 \alpha - n_3^4 \beta_1 \beta_{2,0}^2 \beta_{4,0}) \sin(\beta_{3,0} d_2) \sin(\beta_{2,0} d_1) \\ +j n_3^2 \beta_{3,0} (n_2^2 \beta_{4,0} \alpha_0 \alpha - n_4^2 \beta_1 \beta_{2,0}^2) \cos(\beta_{3,0} d_2) \sin(\beta_{2,0} d_1) + j\beta_{2,0} (n_3^4 \beta_{4,0} \alpha_0 \alpha - n_2^2 n_4^2 \beta_1 \beta_{3,0}^2) \sin(\beta_{3,0} d_2) \cos(\beta_{2,0} d_1) \end{array} \right) \\ \times \left(\begin{array}{c} n_2^2 n_3^2 \beta_2 \beta_3 (n_4^2 \beta_1 + n_1^2 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2) - (n_1^2 n_3^4 \beta_2^2 \beta_4 + n_4^2 n_2^4 \beta_1 \beta_3^2) \sin(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) \\ +j n_2^2 \beta_2 (n_1^2 n_4^2 \beta_3^2 + n_3^4 \beta_1 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) + j n_3^2 \beta_3 (n_1^2 n_4^2 \beta_2^2 + n_2^4 \beta_1 \beta_4) \sin(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2) \end{array} \right) \\ + \left(\begin{array}{c} n_3^2 \beta_{3,0} (n_4^2 \beta_{2,0} \alpha_0 \alpha + n_2^2 \beta_1 \beta_{2,0} \beta_{4,0}) \cos(\beta_{3,0} d_2) \cos(\beta_{2,0} d_1) - (n_2^2 n_4^2 \beta_{3,0}^2 \alpha_0 \alpha + n_3^4 \beta_1 \beta_{2,0}^2 \beta_{4,0}) \sin(\beta_{3,0} d_2) \sin(\beta_{2,0} d_1) \\ +j n_3^2 \beta_{3,0} (n_2^2 \beta_{4,0} \alpha_0 \alpha + n_4^2 \beta_1 \beta_{2,0}^2) \cos(\beta_{3,0} d_2) \sin(\beta_{2,0} d_1) + j\beta_{2,0} (n_3^4 \beta_{4,0} \alpha_0 \alpha + n_2^2 n_4^2 \beta_1 \beta_{3,0}^2) \sin(\beta_{3,0} d_2) \cos(\beta_{2,0} d_1) \end{array} \right) \\ \times \left(\begin{array}{c} n_2^2 n_3^2 \beta_2 \beta_3 (n_4^2 \beta_1 - n_1^2 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2) + (n_1^2 n_3^4 \beta_2^2 \beta_4 - n_4^2 n_2^4 \beta_1 \beta_3^2) \sin(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) \\ -j n_2^2 \beta_2 (n_1^2 n_4^2 \beta_3^2 - n_3^4 \beta_1 \beta_4) \cos(\beta_2 d_1) \sin(\beta_3 d_2) - j n_3^2 \beta_3 (n_1^2 n_4^2 \beta_2^2 - n_2^4 \beta_1 \beta_4) \sin(\beta_2 d_1) \cos(\beta_3 d_2) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$K_2^{(H)}(\alpha) = \frac{2jn_1^2n_2^2\beta_{1,0}\beta_{2,0}\beta_2(n_2^2 - n_3^2)}{r_H(\alpha_0)r_H(\alpha)} \times \begin{pmatrix} n_3^2\beta_3\beta_{3,0}(n_4^4\alpha_0\alpha - n_3^2n_2^2\beta_4\beta_{4,0})\cos(\beta_3d_2)\cos(\beta_{3,0}d_2) \\ + (n_2^2n_4^4\beta_3^2\beta_{30}^2 - n_3^6\beta_4\beta_{40}\alpha_0\alpha)\sin(\beta_3d_2)\sin(\beta_{3,0}d_2) \\ jn_3^2n_4^2\beta_{3,0}(n_3^2\beta_4\alpha_0\alpha - n_2^2\beta_3^2\beta_{4,0})\sin(\beta_3d_2)\cos(\beta_{3,0}d_2) \\ + jn_3^2n_4^2\beta_3(n_3^2\beta_{4,0}\alpha_0\alpha - n_2^2\beta_4\beta_{3,0}^2)\cos(\beta_3d_2)\sin(\beta_{3,0}d_2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$K_3^{(H)}(\alpha) = \frac{2jn_1^2n_2^4n_3^2\beta_{1,0}\beta_{2,0}\beta_{3,0}\beta_2\beta_3(n_3^2 - n_4^2)(n_4^2\alpha_0\alpha - n_3^2\beta_4\beta_{4,0})}{r_H(\alpha_0)r_H(\alpha)} \quad (\text{B.21})$$

Avec :

$$r_E(\alpha) = \beta_2\beta_3(\beta_1 + \beta_4)\cos(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2) - (\beta_2^2\beta_4 + \beta_1\beta_3^2)\sin(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2) \\ + j(\beta_2(\beta_1\beta_4 + \beta_3^2)\cos(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2) + \beta_3(\beta_1\beta_4 + \beta_2^2)\sin(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2)) \quad (\text{B.22})$$

Et :

$$r_H(\alpha) = n_2^2n_3^2\beta_2\beta_3(n_4^2\beta_1 + n_1^2\beta_4)\cos(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2) - (n_1^2n_4^4\beta_2^2\beta_4 + n_4^2n_2^4\beta_1\beta_3^2)\sin(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2) \\ + j(n_2^2\beta_2(n_1^2n_4^2\beta_3^2 + n_3^4\beta_1\beta_4)\cos(\beta_2d_1)\sin(\beta_3d_2) + n_3^2\beta_3(n_1^2n_4^2\beta_2^2 + n_2^4\beta_1\beta_4)\sin(\beta_2d_1)\cos(\beta_3d_2)) \quad (\text{B.23})$$

Annexe C Cas particulier d'une structure de quatre couches 2D, (N=4)

C.1 Amplitudes diffractées

Dans le cas étudié du problème de la diffraction par des structures bidimensionnelles rugueuses aléatoirement, nous choisissons dans nos simulations une structure composée de quatre couches naturelles et bidimensionnelles (N=4). Nous calculons dans ce qui suit les amplitudes diffractées dans le milieu 1, en absence de rugosité (ordre 0) et en présence de rugosité (ordre 1), obtenues par la méthode SPM.

C.2 Résolution à l'ordre zéro

L'amplitude réfléchie dans le milieu 1 en absence de rugosité s'écrit pour les deux polarisations:

$$A_{1(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{M_{1,N}^{12(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)} A_{0(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{C.1})$$

En polarisation horizontale on a:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{(1,4)}^{12,h}(\alpha_0, \beta_0) \\ \mathbf{M}_{(1,4)}^{22,h}(\alpha_0, \beta_0) \end{pmatrix} = \frac{\exp(-j\gamma_{4,0}u_{3,0})}{2\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}} \times \begin{pmatrix} (\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0} - \gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2) + (\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} - \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ -j((\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}^2 - \gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) + (\gamma_{2,0}^2\gamma_{3,0} - \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2)) \\ (\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0} + \gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2) - (\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} + \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ + j((\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{4,0} + \gamma_{2,0}\gamma_{3,0}^2)\cos(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) + (\gamma_{2,0}^2\gamma_{3,0} + \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Donc:

$$A_{1(h)}^{(0)} = \frac{1}{r_h(\gamma_0)} \times \begin{pmatrix} \gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(\gamma_{1,0} - \gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2) + (\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} - \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ -j(\gamma_{2,0}(\gamma_{3,0}^2 - \gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) + \gamma_{3,0}(\gamma_{2,0}^2 - \gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2)) \end{pmatrix} A_{0(h)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{C.3})$$

Et en polarisation verticale, on a:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{(1,4)}^{12,v}(\alpha_0, \beta_0) \\ \mathbf{M}_{(1,4)}^{22,v}(\alpha_0, \beta_0) \end{pmatrix} = \frac{\exp(-j\gamma_{4,0}u_3)}{2k_1\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}k_2^2k_3^2k_4} \times \begin{pmatrix} k_2^2k_3^2\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(k_4^2\gamma_{1,0} - k_1^2\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1) + (k_1^2k_3^4\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} - k_2^4k_4^2\gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) \\ -j(k_3^2\gamma_{3,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{2,0}^2 - k_2^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) + k_2^2\gamma_{2,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{3,0}^2 - k_3^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1)) \\ k_2^2k_3^2\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(\gamma_{1,0}k_4^2 + k_1^2\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1) - (k_1^2k_3^4\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} + k_2^4k_4^2\gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) \\ +j(k_3^2\gamma_{3,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{2,0}^2 + k_2^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) + k_2^2\gamma_{2,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{3,0}^2 + k_3^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Donc:

$$A_{1(v)}^{(0)} = \frac{1}{r_v(\gamma_0)} \times \begin{pmatrix} k_2^2k_3^2\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(k_4^2\gamma_{1,0} - k_1^2\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1) + (k_1^2k_3^4\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} - k_2^4k_4^2\gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) \\ -j(k_3^2\gamma_{3,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{2,0}^2 - k_2^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) + k_2^2\gamma_{2,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{3,0}^2 - k_3^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1)) \end{pmatrix} A_{0(v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{C.5})$$

Où :

$$r_h(\gamma_0) = \gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(\gamma_{1,0} + \gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2) - (\gamma_{2,0}^2\gamma_4 + \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ + j(\gamma_{2,0}(\gamma_{1,0}\gamma_{4,0} + \gamma_{3,0}^2)\cos(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) + \gamma_{3,0}(\gamma_{2,0}^2 + \gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2)) \quad (\text{C.6})$$

$$r_v(\gamma_0) = k_2^2k_3^2\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(\gamma_{1,0}k_4^2 + k_1^2\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1) - (k_1^2k_3^4\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} + k_2^4k_4^2\gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) \\ + j(k_3^2\gamma_{3,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{2,0}^2 + k_2^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{3,0}d_2)\sin(\gamma_{2,0}d_1) + k_2^2\gamma_{2,0}(k_1^2k_4^2\gamma_{3,0}^2 + k_3^4\gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{3,0}d_2)\cos(\gamma_{2,0}d_1)) \quad (\text{C.7})$$

C.3. Résolution à l'ordre un

En présence de rugosité, on calcule pour $N=4$, les amplitudes diffractées dans le milieu 1:

En polarisation horizontale:

$$A_{1(h)}^{\pm,1} = j \sum_{j=1}^3 (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[\left(S_{1,j}^{+,hh} - \frac{M_{1,4}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,hh} \right) A_{0(h)} + \left(S_{1,j}^{+,hv} - \frac{M_{1,4}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,hv} \right) A_{0(v)} \right] \quad (\text{C.8})$$

Où:

$$K_j^{(\pm, hh)} = j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{1,j}^{\pm, hh} - \frac{M_{1,4}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, hh} \right] \\ K_j^{(\pm, hv)} = j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{1,j}^{\pm, hv} - \frac{M_{1,4}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, hv} \right] \quad (\text{C.9})$$

Et:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{(1,4)}^{(h)12}(\alpha, \beta) \\ \mathbf{M}_{(1,4)}^{(h)22}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \frac{\exp(-j\gamma_4 u_3)}{2\gamma_1\gamma_2\gamma_3} \begin{pmatrix} (\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \gamma_2\gamma_3\gamma_4) \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) + (\gamma_2^2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_3^2) \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) \\ -j((\gamma_2\gamma_3^2 - \gamma_1\gamma_2\gamma_4) \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + (\gamma_2^2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_3\gamma_4) \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \\ (\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4) \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) - (\gamma_2^2\gamma_4 + \gamma_1\gamma_3^2) \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) \\ +j((\gamma_1\gamma_2\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3^2) \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + (\gamma_2^2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_3\gamma_4) \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Avec

$$\begin{pmatrix} S_{1,1}^{+,hh} \\ S_{1,1}^{-,hh} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{\gamma_1 r_h(\gamma_0)} \begin{pmatrix} \gamma_{3,0} \gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) - \gamma_{3,0}^2 \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \\ +j[\gamma_{4,0} \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + \gamma_{4,0} \gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,2}^{+,hh} \\ S_{1,2}^{-,hh} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \cos(\varphi - \varphi_0) [\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0} d_2) + j\gamma_{4,0} \sin(\gamma_{3,0} d_2)]}{\gamma_1 \gamma_2 r_h(\gamma_0)} \begin{pmatrix} \gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) - j\gamma_1 \sin(\gamma_2 d_1) \\ -\gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) - j\gamma_1 \sin(\gamma_2 d_1) \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,3}^{+,hh} \\ S_{1,3}^{-,hh} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 r_h(\gamma_0)} \begin{pmatrix} \gamma_2 (\gamma_3 \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) - \gamma_2 \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2)) \\ -j\gamma_1 (\gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + \gamma_3 \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \\ -\gamma_2 (\gamma_3 \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) - \gamma_2 \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2)) \\ -j\gamma_1 (\gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + \gamma_3 \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,1}^{+,hv} \\ S_{1,1}^{-,hv} \end{pmatrix} = \frac{k_1 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \sin(\varphi - \varphi_0)}{\gamma_1 r_v(\gamma_0)} \begin{pmatrix} k_3^2 \gamma_{4,0} (k_2^2 \gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0} d_2) \cos(\gamma_{2,0} d_1) - k_3^2 \gamma_{2,0} \sin(\gamma_{3,0} d_2) \sin(\gamma_{2,0} d_1)) \\ +jk_4^2 \gamma_{3,0} (k_2^2 \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{3,0} d_2) \cos(\gamma_{2,0} d_1) + k_3^2 \gamma_{2,0} \cos(\gamma_{3,0} d_2) \sin(\gamma_{2,0} d_1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,2}^{+,hv} \\ S_{1,2}^{-,hv} \end{pmatrix} = \frac{k_1 k_2^2 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} \sin(\varphi - \varphi_0) (k_3^2 \gamma_{4,0} \cos(\gamma_{3,0} d_2) + jk_4^2 \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{3,0} d_2))}{\gamma_1 \gamma_2 r_v(\gamma_0)} \begin{pmatrix} -j\gamma_1 \sin(\gamma_2 d_1) + \gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) \\ -j\gamma_1 \sin(\gamma_2 d_1) - \gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,3}^{+,hv} \\ S_{1,3}^{-,hv} \end{pmatrix} = \frac{k_1 k_2^2 k_3^2 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} \gamma_{4,0} \sin(\varphi - \varphi_0)}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 r_v(\gamma_0)} \begin{pmatrix} \gamma_2 (\gamma_3 \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - \gamma_2 \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)) \\ -j\gamma_1 (\gamma_2 \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) + \gamma_3 \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)) \\ -\gamma_2 (\gamma_3 \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - \gamma_2 \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)) \\ -j\gamma_1 (\gamma_2 \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) + \gamma_3 \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Donc, après calcul nous obtenons les coefficients complexes:

$$K_1^{(+,hh)} = \frac{2j(k_1^2 - k_2^2)\gamma_{1,0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_h(\gamma)} \left(\begin{aligned} &\gamma_{3,0} \left(\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) - \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2) \right) \\ &+ j\gamma_{4,0} \left(\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2) + \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) \right) \end{aligned} \right) \\ \times \left(\begin{aligned} &\gamma_3 \left(\gamma_2 \cos(\gamma_2d_1) \cos(\gamma_3d_2) - \gamma_3 \sin(\gamma_2d_1) \sin(\gamma_3d_2) \right) \\ &+ j\gamma_4 \left(\gamma_2 \cos(\gamma_2d_1) \sin(\gamma_3d_2) + \gamma_3 \sin(\gamma_2d_1) \cos(\gamma_3d_2) \right) \end{aligned} \right) \quad (C.17)$$

$$K_2^{(+,hh)} = \frac{2j(k_2^2 - k_3^2)\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_2 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_h(\gamma)} \left(\begin{aligned} &\left(\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) + j\gamma_{4,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \right) \\ &\times \left(\gamma_3 \cos(\gamma_3d_2) + j\gamma_4 \sin(\gamma_3d_2) \right) \end{aligned} \right) \quad (C.18)$$

$$K_3^{(+,hh)} = \frac{2j(k_3^2 - k_4^2)\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_2\gamma_3 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_h(\gamma)} \quad (C.19)$$

$$K_1^{(+,hv)} = \frac{2j(k_1^2 - k_2^2)k_1\gamma_{1,0}\gamma_{2,0} \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_v(\gamma_0)r_h(\gamma)} \left(\begin{aligned} &k_3^2\gamma_{4,0} \left(k_2^2\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) \cos(\gamma_{2,0}d_1) - k_3^2\gamma_{2,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \sin(\gamma_{2,0}d_1) \right) \\ &+ jk_4^2\gamma_{3,0} \left(k_2^2\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \cos(\gamma_{2,0}d_1) + k_3^2\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) \sin(\gamma_{2,0}d_1) \right) \end{aligned} \right) \\ \times \left(\begin{aligned} &\gamma_3 \left(\gamma_2 \cos(\gamma_2d_1) \cos(\gamma_3d_2) - \gamma_3 \sin(\gamma_2d_1) \sin(\gamma_3d_2) \right) \\ &+ j\gamma_4 \left(\gamma_2 \cos(\gamma_2d_1) \sin(\gamma_3d_2) + \gamma_3 \sin(\gamma_2d_1) \cos(\gamma_3d_2) \right) \end{aligned} \right) \quad (C.20)$$

$$K_2^{(+,hv)} = \frac{2j(k_2^2 - k_3^2)k_1k_2^2\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_2 \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_v(\gamma_0)r_h(\gamma)} \left(\begin{aligned} &k_3^2\gamma_{4,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) + jk_4^2\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ &\times \left(\gamma_3 \cos(\gamma_3d_2) + j\gamma_4 \sin(\gamma_3d_2) \right) \end{aligned} \right) \quad (C.21)$$

$$K_3^{(+,hv)} = \frac{2j(k_3^2 - k_4^2)k_1k_2^2k_3^2\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_{4,0}\gamma_2\gamma_3 \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_v(\gamma_0)r_h(\gamma)} \quad (C.22)$$

Et en polarisation verticale, les amplitudes dans le milieu 1 pour (N=4) s'écrivent:

$$A_{1(v)}^{+,1} = j \sum_{j=1}^3 (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[\left(S_{1,j}^{+,vh} - \frac{M_{1,4}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,vh} \right) A_{0(h)} + \left(S_{1,j}^{+,v} - \frac{M_{1,4}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,v} \right) A_{0(v)} \right] \quad (C.23)$$

Où:

$$\begin{aligned}
K_j^{(\pm, vv)} &= j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{i,j}^{\pm, vv} - \frac{M_{i,N}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, vv} \right] \\
K_j^{(\pm, vh)} &= j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{i,j}^{\pm, vh} - \frac{M_{i,N}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, vh} \right]
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Et:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{(1,4)}^{(v)12}(\alpha, \beta) \\ \mathbf{M}_{(1,4)}^{(v)22}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \frac{\exp(-j\gamma_4 u_3)}{2k_1\gamma_1\gamma_2\gamma_3 k_2^2 k_3^2 k_4} \begin{pmatrix} k_2^2 k_3^2 \gamma_2 \gamma_3 (k_4^2 \gamma_1 - k_1^2 \gamma_4) \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) + (k_1^2 k_3^4 \gamma_2^2 \gamma_4 - k_2^4 k_4^2 \gamma_1 \gamma_3^2) \sin \gamma_3 (\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) \\ -j(k_3^2 \gamma_3 (k_1^2 k_4^2 \gamma_2^2 - k_2^4 \gamma_1 \gamma_4) \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) + k_2^2 \gamma_2 (k_1^2 k_4^2 \gamma_3^2 - k_3^4 \gamma_1 \gamma_4) \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1)) \\ k_2^2 k_3^2 \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_1 k_4^2 + k_1^2 \gamma_4) \cos \gamma_3 (\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - (k_1^2 k_3^4 \gamma_2^2 \gamma_4 + k_2^4 k_4^2 \gamma_1 \gamma_3^2) \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) \\ + j(k_3^2 \gamma_3 (k_1^2 k_4^2 \gamma_2^2 + k_2^4 \gamma_1 \gamma_4) \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) + k_2^2 \gamma_2 (k_1^2 k_4^2 \gamma_3^2 + k_3^4 \gamma_1 \gamma_4) \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1)) \end{pmatrix} \tag{C.25}$$

Avec:

$$\begin{pmatrix} S_{1,1}^{+, vv} \\ S_{1,1}^{-, vv} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0}}{\gamma_1 r_v(\gamma_0)} \begin{pmatrix} k_3^2 \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} (\chi \chi_0 k_4^2 - k_2^2 \gamma_{4,0} \gamma_1 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) - (\chi \chi_0 k_2^2 k_4^2 \gamma_{3,0}^2 - k_3^4 \gamma_1 \gamma_{2,0}^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \\ + j(k_3^2 \gamma_{3,0} (\chi \chi_0 k_2^2 \gamma_{4,0} - k_2^2 \gamma_1 \gamma_{2,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + \gamma_{2,0} (\chi \chi_0 k_3^4 \gamma_{4,0} - k_2^2 k_4^2 \gamma_1 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \\ -k_3^2 \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} (\chi \chi_0 k_4^2 + k_2^2 \gamma_{4,0} \gamma_1 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + (\chi \chi_0 k_2^2 k_4^2 \gamma_{3,0}^2 + k_3^4 \gamma_1 \gamma_{2,0}^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \\ -j(k_3^2 \gamma_{3,0} (\chi \chi_0 k_2^2 \gamma_{4,0} + k_2^2 \gamma_1 \gamma_{2,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + \gamma_{2,0} (\chi \chi_0 k_3^4 \gamma_{4,0} + k_2^2 k_4^2 \gamma_1 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \end{pmatrix} \tag{C.26}$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,2}^{+, vv} \\ S_{1,2}^{-, vv} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0} \gamma_{2,0}}{\gamma_1 \gamma_2 r_v(\gamma_0)} \begin{pmatrix} \gamma_2 \gamma_{3,0} (k_1^2 k_4^2 \chi \chi_0 - k_2^2 k_3^2 \gamma_1 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + (k_2^2 k_3^2 \gamma_1 \gamma_{4,0} \chi \chi_0 - k_1^2 k_4^2 \gamma_2^2 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \\ + j(\gamma_2 (k_1^2 k_3^2 \gamma_{4,0} \chi \chi_0 - k_2^2 k_4^2 \gamma_1 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) - \gamma_{3,0} (k_2^2 k_4^2 \gamma_1 \chi \chi_0 - k_1^2 k_3^2 \gamma_2^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2)) \\ -\gamma_2 \gamma_{3,0} (k_1^2 k_4^2 \chi \chi_0 + k_2^2 k_3^2 \gamma_1 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + (k_2^2 k_3^2 \gamma_1 \gamma_{4,0} \chi \chi_0 + k_1^2 k_4^2 \gamma_2^2 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \\ -j(\gamma_2 (k_1^2 k_3^2 \chi \chi_0 \gamma_{4,0} + k_2^2 k_4^2 \gamma_1 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) + \gamma_{3,0} (k_2^2 k_4^2 \gamma_1 \chi \chi_0 + k_1^2 k_3^2 \gamma_2^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2)) \end{pmatrix} \tag{C.27}$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,3}^{+, vv} \\ S_{1,3}^{-, vv} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_{3,0}}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 r_v(\gamma_0)} \begin{pmatrix} k_2^2 \gamma_2 \gamma_3 (k_1^2 \chi \chi_0 - k_3^2 \gamma_1 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - (k_3^2 k_1^2 \gamma_2^2 \chi \chi_0 - k_2^4 \gamma_1 \gamma_3^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) \\ + j[k_2^2 \gamma_2 (-k_3^2 \gamma_1 \chi \chi_0 + k_1^2 \gamma_3^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) + \gamma_3 (-k_2^4 \gamma_1 \chi \chi_0 + k_3^2 k_1^2 \gamma_2^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)] \\ -k_2^2 \gamma_2 \gamma_3 (k_1^2 \chi \chi_0 + k_3^2 \gamma_1 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) + (k_3^2 k_1^2 \gamma_2^2 \chi \chi_0 + k_2^4 \gamma_1 \gamma_3^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) \\ -j[k_2^2 \gamma_2 (k_3^2 \gamma_1 \chi \chi_0 + k_1^2 \gamma_3^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) + \gamma_3 (k_2^4 \gamma_1 \chi \chi_0 + k_3^2 k_1^2 \gamma_2^2 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)] \end{pmatrix} \tag{C.28}$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,1}^{+, vh} \\ S_{1,1}^{-, vh} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0} \sin(\varphi - \varphi_0)}{k_1 r_h(\gamma_0)} \begin{pmatrix} \gamma_{3,0} (\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) - \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \\ + j\gamma_{4,0} (\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + \gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{C.29}$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,2}^{+, vh} \\ S_{1,2}^{-, vh} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \sin(\varphi - \varphi_0) (\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0} d_2) + j\gamma_{4,0} \sin(\gamma_{3,0} d_2))}{k_1 k_2^2 \gamma_1 r_h(\gamma_0)} \begin{pmatrix} k_2^2 \gamma_1 \cos(\gamma_2 d_1) - jk_1^2 \gamma_2 \sin(\gamma_2 d_1) \\ k_2^2 \gamma_1 \cos(\gamma_2 d_1) + jk_1^2 \gamma_2 \sin(\gamma_2 d_1) \end{pmatrix} \tag{C.30}$$

$$\begin{pmatrix} S_{1,3}^{+,vh} \\ S_{1,3}^{-,vh} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0} \sin(\varphi - \varphi_0)}{2\gamma_1\gamma_2k_1k_2^2k_3^2r_h(\gamma_0)} \begin{pmatrix} k_2^2\gamma_1(k_3^2\gamma_2 \cos(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1) - \gamma_3k_2^2 \sin(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1)) \\ -jk_1^2\gamma_2(k_2^2\gamma_3 \sin(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1) + k_3^2\gamma_2 \cos(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1)) \\ k_2^2\gamma_1(k_3^2\gamma_2 \cos(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1) - \gamma_3k_2^2 \sin(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1)) \\ +jk_1^2\gamma_2(k_2^2\gamma_3 \sin(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1) + k_3^2\gamma_2 \cos(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1)) \end{pmatrix} \quad (C.31)$$

Donc nous obtenons les coefficients complexes qui nous conduisent aux amplitudes dans le milieu 1:

$$K_1^{(+,vv)} = \frac{j2\gamma_{1,0}(k_1^2 - k_2^2)}{r_v(\gamma_0)r_v(\gamma)} \begin{pmatrix} k_2^2\chi\chi_0 \left[k_4^2\gamma_3(k_3^2\gamma_2 \cos(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1) - k_2^2\gamma_3 \sin(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1)) \right. \\ \left. + jk_3^2\gamma_4(k_3^2\gamma_2 \sin(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1) + k_2^2\gamma_3 \cos(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1)) \right] \\ \times \left[k_4^2\gamma_{3,0}(k_3^2\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) - k_2^2\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2)) \right. \\ \left. + jk_3^2\gamma_{4,0}(k_2^2\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) + k_3^2\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2)) \right] \\ -k_1^2\gamma_2\gamma_{2,0} \cos(\varphi - \varphi_0) \left[k_3^2\gamma_4(k_2^2\gamma_3 \cos(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1) - k_3^2\gamma_2 \sin(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1)) \right. \\ \left. + jk_4^2\gamma_3(k_3^2\gamma_2 \cos(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_2d_1) + k_2^2\gamma_3 \sin(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_2d_1)) \right] \\ \times \left[k_3^2\gamma_{4,0}(k_2^2\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) - k_3^2\gamma_{2,0} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2)) \right. \\ \left. + jk_4^2\gamma_{3,0} \left[k_2^2\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2) + k_3^2\gamma_{2,0} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) \right] \right] \end{pmatrix} \quad (C.32)$$

$$K_2^{(+,vv)} = \frac{2jk_1^2k_2^2\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_2(k_2^2 - k_3^2)}{r_v(\gamma_0)r_v(\gamma)} \begin{pmatrix} \left(k_3^2\gamma_3\gamma_{3,0}(k_4^2\chi\chi_0 - k_2^2k_3^2\gamma_4\gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_{3,0}d_2) \right) \\ + \left(-k_3^6\gamma_4\gamma_{4,0}\chi\chi_0 + k_2^2k_4^4\gamma_3^2\gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0) \right) \sin(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ + jk_3^2k_4^2 \left(\gamma_{3,0}(k_3^2\gamma_4\chi\chi_0 - k_2^2\gamma_{40}\gamma_3^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_3d_2) \cos(\gamma_{3,0}d_2) \right) \\ + \gamma_3(k_3^2\gamma_{4,0}\chi\chi_0 - k_2^2\gamma_4\gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3d_2) \sin(\gamma_{3,0}d_2) \end{pmatrix} \quad (C.33)$$

$$K_3^{(+,vv)} = \frac{j2\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_2\gamma_3k_1^2k_2^4k_3^2(k_3^2 - k_4^2)(k_4^2\chi\chi_0 - k_3^2\gamma_4\gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0))}{r_v(\gamma_0)r_v(\gamma)} \quad (C.34)$$

$$K_1^{(+,vh)} = \frac{2jk_1\gamma_{1,0}\gamma_2(k_1^2 - k_2^2) \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_v(\gamma)} \begin{pmatrix} \gamma_{3,0}(\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) - \gamma_{30} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2)) \\ + j\gamma_{4,0}(\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0}d_1) \cos(\gamma_{3,0}d_2) + \gamma_{20} \cos(\gamma_{2,0}d_1) \sin(\gamma_{3,0}d_2)) \\ \times \left(k_3^2\gamma_4(k_2^2\gamma_3 \cos(\gamma_2d_1) \cos(\gamma_3d_2) - k_3^2\gamma_2 \sin(\gamma_2d_1) \sin(\gamma_3d_2)) \right) \\ + jk_4^2\gamma_3(k_2^2\gamma_3 \cos(\gamma_2d_1) \sin(\gamma_3d_2) + k_3^2\gamma_2 \sin(\gamma_2d_1) \cos(\gamma_3d_2)) \end{pmatrix} \quad (C.35)$$

$$K_2^{(+,vh)} = j \frac{2k_1 k_2^2 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_2 \gamma_3 (k_2^2 - k_3^2) \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0) r_v(\gamma)} \left(\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0} d_2) + j \gamma_{40} \sin(\gamma_{3,0} d_2) \right) \times \left(k_3^2 \gamma_4 \cos(\gamma_3 d_2) + j k_4^2 \gamma_3 \sin(\gamma_3 d_2) \right) \quad (\text{C.36})$$

$$K_3^{(+,vh)} = \frac{j 2 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 k_1 k_2^2 k_3^2 (k_3^2 - k_4^2) \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0) r_v(\gamma)} \quad (\text{C.37})$$

On note que:

$$r_h(\gamma) = \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_4) \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) - (\gamma_2^2 \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_3^2) \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + j (\gamma_2 (\gamma_1 \gamma_4 + \gamma_3^2) \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + \gamma_3 (\gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_4) \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \quad (\text{C.38})$$

$$r_v(\gamma) = k_2^2 k_3^2 \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_1 k_4^2 + k_1^2 \gamma_4) \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - (k_1^2 k_3^4 \gamma_2^2 \gamma_4 + k_2^4 k_4^2 \gamma_1 \gamma_3^2) \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) + j (k_3^2 \gamma_3 (k_1^2 k_4^2 \gamma_2^2 + k_2^4 \gamma_1 \gamma_4) \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) + k_2^2 \gamma_2 (k_1^2 k_4^2 \gamma_3^2 + k_3^4 \gamma_1 \gamma_4) \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1)) \quad (\text{C.39})$$

Bibliographie

- [1] **T. Lurton**, "Modélisation et simulation de l'interaction entre onde électromagnétique et surfaces de la mer", Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne de Ohio State, 2010.
- [2] **Y. DEMARTY**, "Modélisation cohérente de la diffusion électromagnétique par des surfaces de mer tridimensionnelles en incidence rasante: Application aux radars HF à ondes de surface", Thèse de doctorat, Université PIERRE ET MARIE CURIE, 2008.
- [3] **A. GINESTET**, "Modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique sur des scène de grande taille par résolution de l'équation parabolique 3D vectorielle", Thèse de doctorat, Université de TOULOUSE III, 2007.
- [4] **N. BALIN**, "Étude de méthodes de couplage pour la résolution des équations de Maxwell Application au calcul de la signature radar d'aéronefs par hybridation de méthodes exactes et asymptotiques", Thèse de doctorat, École Doctorale de l'Université Paul Sabatier, TOULOUSE, 2005.
- [5] **A. MARTINI**, "Télé-détection d'un couvert neigeux en milieux alpins à partir de données SAR polarimétriques multi-fréquentielles et multi-temporelles", Thèse de doctorat, Université de RENNES, 2005.
- [6] **S. TAY**, "Analyse et modélisation de l'utilisation de signaux GNSS en environnement marin", Thèse de doctorat, l'Université Européenne de BRETAGNE, 2012.
- [7] **Vincent GRAS**, " caractérisation de la signature radar de la surface océanique et son application à la détection d'objets flottants", Thèse de doctorat, Université de RENNE, 2008.
- [8] **Y. BENNANI**, "Signature Électromagnétique Bistatique d'une cible complexe intégrée dans son environnement: Application à l'imagerie ISAR d'une scène maritime", Thèse de Doctorat, Université de BRETAGNE OCCIDENTALE, 2012.
- [9] **R. KHAIRI**, "Modélisation de la diffusion électromagnétique par les vagues côtières déferlantes", Thèse de Doctorat, Université de BRETAGNE OCCIDENTALE, 2013.
- [10] **A. TABATABAEENEJAD**, "Forward and Inverse Models of Electromagnetic Scattering From Layered Media With Rough Interfaces", Thèse de Doctorat, Université MICHIGAN, 2008.
- [11] **N. PINEL, N. DéCHAMPS, and Christophe Bourlier**, "Modeling of the Bistatic Electromagnetic Scattering From Sea Surfaces Covered in Oil for Microwave Applications", IEEE Transactions on Geoscience And Remote Sensing , Vol. 46, No. 2, 2008.
- [12] **N. DéCHAMPS, N. DE BEAUCOUDREY, C. BOURLIER, and S. TOUTAIN**, "Fast numerical method for electromagnetic scattering by rough layered interfaces: Propagation-inside-layer expansion method", Journal Optical Society of America, Vol.23, No.2, 2006.
- [13] **J. LI, L. X. GUO, and H. ZENG**, "FDTD method investigation on the polarimetric scattering from 2-D rough surface", Progress In Electromagnetics Research, PIER 101, 173-188, 2010.
- [14] **Yu Liang, Xiang Hua Zeng, Li-Xin Guo, and Zhen-Sen Wu**, " An investigation on numerical characterization of scattering from target in a dielectric rough soil surface", Progress In Electromagnetics Research, PIER, Vol. 139, 423-444, 2013.

- [15] **N. DÉCHAMPS**, "Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles", Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004.
- [16] **K. F. Warnick and Weng Cho Chew**, "Numerical simulation methods for rough surface scattering", *Waves in Random Media*, 11:1, R1-R30, 2001.
- [17] **K. AIT BRAHIM**, "Diffusion des ondes électromagnétique par des surfaces rugueuses aléatoires naturelles: Méthode exacte en coordonnées curvilignes et Principe du faible couplage", Thèse de doctorat, Université de Versailles, 2007.
- [18] **C. BAUDIER, R. DUSSÉAUX, K. S. EDEE and G. GRANET**, "Scattering of a plane wave by one-dimensional dielectric random rough surfaces-study with the curvilinear coordinate method", *Waves Random Media* 14 , 61–74, 2004.
- [19] **A.Q. WANG, L.X. GUO, Y.W. WEI, and J. MA**, "Higher Order Method Of Moments For Bistatic Scattering From 2D PEC Rough Surface With Geometric Modeling By NURBS Surface", *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 130, 85-104, 2012.
- [20] **R. DUSSÉAUX, R. de OLIVEIRA**, " Scattering of a plane wave by a 1-dimentional rough surface study in a nonorthogonal coordinate system", *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 34, 63–88, 2001.
- [21] **C. BAUDIER and R. DUSSÉAUX**, "Scattering of an $E_{//}$ - polarized plane wave by one-dimensional rough surfaces: Numerical applicability domain of a Rayleigh method in the far-field zone", *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 34, 1–27, 2001.
- [22] **N. PINEL**, "Étude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles: Application à une mer recouverte de pétrole", Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2006.
- [23] **T. M. ELFOUHAILY, C.A. GUÉRIN** , "A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces", *Waves Random Media*, 14, R1–R40, 2004.
- [24] **S. AFIFI, R. DUSSÉAUX, and R. de OLIVEIRA**, "Statistical distribution of the field scattered by rough layered interfaces: formulae derived from the small perturbation method", *Waves in Random and Complex Media* Vol. 20, No. 1, 1–22, 2010.
- [25] **S. AFIFI, R. DUSSÉAUX**, "On the co-polarized phase difference of rough layered surfaces : formulae derived from the small perturbation method", *IEEE transaction on antennas and propagation*, Vol.59, No.7, 2011.
- [26] **A. TABATABAEENEJAD , X. DUAN, and M. MOGHADDAM**, "Coherent scattering of electromagnetic waves from two-layer rough surfaces within the Kirchhoff regime", *IEEE transaction on geoscience and remote sensing*, 2013.
- [27] **R. WANG, L. X. GUO**, "Numerical simulation of wave scattering from two-layered rough interface", *Progress In Electromagnetics Research B, PIER B*, Vol. 10, 163-175, 2008.
- [28] **A. VORONOVICH** , "Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces", *Waves in Random Media*, 4:3, 337-367, 1994.
- [29] **X. DUAN, M. MOGHADDAM**, "Bistatic vector 3-D scattering from layered rough surfaces using stabilized extended boundary condition method", *IEEE transaction on geoscience and remote sensing*, Vol. 51, No. 5, 2013.

- [30] **P. IMPERATOR, A. IODICE and D. RICCIO**, "Electromagnetic Wave Scattering From Layered Structures With an Arbitrary Number of Rough Interfaces", IEEE transaction on geoscience and remote sensing, Vol. 47, No. 4, 2009.
- [31] **Chao Wu, Xiaojuan Zhang, Guangyou fang**, "Bistatic scattering from three-dimensional layered structures with multilayer rough interfaces", IEEE geoscience and remote sensing letters, Vol. 11, No. 3, 2014.
- [32] **D. COURJON and C. BAINIER**, "*Le champ proche optique: Théorie et applications*", Springer -Verlag France et France Télécom R&D, Paris, 2001.
- [33] **Keqian Zhang, Dejie Li**, "*Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics*", Second Edition, Springer, 1998.
- [34] **M. BORN, E. WOLF**, "*Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*", Seventh Edition, University of Cambridge, 1999.
- [35] **Jean van bladel**, "*electromagnetic fields*", deuxième édition, IEEE Antennas and Propagation Society, 2007.
- [36] **A. VORONOVICH**, "Non-local small-slope approximation for wave scattering from rough surfaces", Waves in Random Media, 6:2, 151-167, 1996.
- [37] **C. BOURLIER, G. BERGINC**, "Microwave analytical backscattering models from randomly rough anisotropic sea surface-comparison with experimental data in C and KU bands", Progress In Electromagnetics Research, PIER 37, 31–78, 2002.
- [38] **G. BERGINC**, "Small-Slope Approximation method: A further study of vector wave scattering from two-dimensional surfaces and comparison with experimental data", Progress In Electromagnetics Research, PIER 37, 251–287, 2002.
- [39] **M. S. GILBERT, J. T. JOHNSON**, "A study of the higher-order small-slope approximation for scattering from a Gaussian rough surface", Waves in Random Media, 13:2, 137-149, 2003.
- [40] **G. BERGINC and C. BOURRELY**, "The Small-Slope Approximation method applied to a three-dimensional slab with rough boundaries", Progress In Electromagnetics Research, PIER 73, 131–211, 2007.
- [41] **C. BOURLIER, N. DÉCHAMPS, and G. BERGINC**, "Comparison of Asymptotic Backscattering Models (SSA, WCA, and LCA) From One-Dimensional Gaussian Ocean-Like Surfaces", IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 53, NO. 5, 2005.
- [42] **M. KOUALI**, "La diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse", Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2012.
- [43] **C. BAUDIER**, "Diffraction d'ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires : méthode approchée de Rayleigh et méthode exacte en coordonnées non-orthogonales", Thèse de doctorat, Université de Versailles, 2002.
- [44] **H. T. CHEN and G.Q. ZHU**, "Model the electromagnetic scattering from three-dimensional PEC object buried under rough ground by MOM and modified PO hybrid method", Progress In Electromagnetics Research, PIER 77, 15–27, 2007.

-
- [45] **Lin Li, Tian Lin Dong, and Qing Xia Li**, " A hybrid method of scattering from a dielectric target above a rough surface: TE case", *Progress In Electromagnetics Research M*, Vol. 31, 71-83, 2013.
- [46] **L. KUZU, V. DEMIR and A. Z. ELSHERBENI**, " Electromagnetic scattering from arbitrarily shaped chiral objects using the finite difference frequency domain method", *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 67, 1–24, 2007.
- [47] **G. VIENNOT** , "Utilisation de techniques d'imagerie de synthèse pour le calcul de la propagation des champs électromagnétiques", Thèse de doctorat, Université de LIMOGES, 2012.
- [48] **D. BOUCHE, F. MOLINET**, *méthodes asymptotiques en électromagnétisme*, Springer-Verlag, 1994.
- [49] **M. NAVEED, Q. A. NAQVI**, "Scattering of electromagnetic plane wave by a perfectly conducting slit and a PEMC parallel cylinder", *Progress In Electromagnetics Research M*, Vol. 1, 45-58, 2008.
- [50] **Y. BRELET and C. BOURLIER**, "SPM numerical results from an effective surface impedance for a one-dimensional perfectly-conducting rough sea surface", *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 81, 413–436, 2008.
- [51] **Z. W. LIN, X. J. ZHANG, and G. Y. FANG**, "Theoretical model of electromagnetic scattering from 3D multi-layer dielectric media with slightly rough surfaces", *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 96, 37-62, 2009.
- [52] **M. A. DEMIR**, "Perturbation theory of electromagnetic scattering from layered media with rough interfaces", Thèse de doctorat, Université de Ohio State, 2007.
- [53] **G. GRANET, K. EDEE, and D. FELBACQ**, "Scattering of a plane wave by rough surfaces: a new curvilinear coordinate system based approach", *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 37, 235–250, 2002.
- [54] **A. BERROUK, R. DUSSÉAUX, and S. AFIFI**, "Electromagnetic Wave Scattering from Rough Layered Interfaces: Analysis with the Small Perturbation Method and the Small Slope Approximation", *PIER*, *Progress In Electromagnetics Research B*, Vol. 57, 177-190, 2014.
- [55] **S. AFIFI, R. DUSSÉAUX**, "Statistical study of radiation loss from planar optical waveguides: the curvilinear coordinate method and the small perturbation method ", *Journal of Optical Society of America*, Vol. 27, No. 5, 1171-1183, 2010.
- [56] **S. AFIFI, R. DUSSÉAUX**, "Scattering by Anisotropic Rough Layered 2D Interfaces", *IEEE Transactions on antennas and propagation*, Vol. 60, NO. 11, 2012.

ملخص

ترتكز هذه الأطروحة على دراسة إحصائية لإنتشار الموجات الكهرومغناطيسية فوق بنيات متعددة الطبقات مشوهة عشوائيا. نقوم بدراسة هدفين رئيسيين، الأول يشتمل بنمذجة تحليلية للإنتشار فوق بنيات أحادية البعد، في حين أن الثاني يعتني بدراسة نفس المشكلة في حالة البنيات ثنائية الأبعاد. باستخدام طرق تقريبية، يكون الهدف تحديد المعادلات التحليلية للبعد الزاوي المنعكس في حالة أحادية البعد وكذا ثنائية البعد. هذه المعادلات تسمح فيما بعد من تقديم دراسة إحصائية جد مفصلة للحقول المنتشرة على مسافة بعيدة وتمييز معامل الازدواجية المنتشر، و يعرض في نفس الوقت كل من معادلات كثافة الاحتمال. و لأجل تقييم النتائج النظرية المتحصل عليها، نقوم بمحاكاة كمية لحالات محددة و خاصة، ونقوم أيضا بدراسة تأثير العديد من المعلمات على الإشارة المنتشرة. نعتني بتبيين أن الطرق المقترحة تعمم على وجه التحديد مشكلة الإنتشار وتؤدي إلى حل مناسب بالمقارنة مع الطرق الحالية.

Abstract

This thesis focuses on the statistical study of the diffraction of electromagnetic waves by randomly rough multilayer structures. Two main objectives are studied; the first consists in making an analytical modeling of diffraction by one-dimensional structures (1D), while the second concerns to study the same problem in the case of two-dimensional structures (2D). Using approached methods, the goal is to determine the analytical expressions of the amplitudes diffracted in the case monodimensional as much as two-dimensional. These expressions have made it possible thereafter to present a well detailed statistical study of the diffracted fields in far distance and to characterize the diffracted bistatic coefficient, and to expose in the same time the functions of the densities of probability. In order to evaluate our theoretical results, we make numerical simulations of the typical cases, and we study the influence of several parameters on the diffracted signal. We show that the methods suggested precisely generalize the problem of diffraction and lead to an appropriate adequate solution compared with the existing methods.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude statistique de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures multicouches rugueuses aléatoirement. Deux grands objectifs sont étudiés, le premier consiste à faire une modélisation analytique de la diffraction par des structures monodimensionnelles (1D), tandis que le deuxième concerne l'étude du même problème dans le cas des structures bidimensionnelles (2D). Utilisant des méthodes approchées, le but est la détermination des expressions analytiques des amplitudes diffractées dans le cas monodimensionnel autant que bidimensionnel. Ces expressions ont permis par la suite de présenter une étude statistique bien détaillée des champs diffractés à grande distance et de caractériser le coefficient bistatique diffracté, et d'exposer, en même temps, les fonctions des densités de probabilité. Afin d'évaluer nos résultats théoriques, nous faisons des simulations numériques des cas particuliers, et nous étudions l'influence de plusieurs paramètres sur le signal diffracté. Nous montrons que les méthodes proposées généralisent justement le problème de la diffraction et conduisent à une solution adéquate comparant aux méthodes existantes.