

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



جامعة باجي مختار- عنابة
كلية علوم الهندسة
قسم الإلكترونيك

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR D'ÉTAT EN ELECTRONIQUE

Option : Traitement du signal

Par

Salim SBAA

Etude des techniques de détection des variations spectrales par la réallocation de la représentation énergétique temps-fréquence

Devant le jury composé de

DOGHMANE Noureddine	Professeur	Président	Univ. Annaba
BEDDA Mouldi	Professeur	Rapporteur	Univ. Annaba
BENOUARETH Mohamed	Maître de Conférences	Examineur	Univ. Annaba
ABBASSI Hadj-Ahmed	Professeur	Examineur	Univ. Annaba
BOUKROUCHE A. H.	Maître de Conférences	Examineur	Univ. Guelma

-2006-

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de recherche le Professeur Mouldi BEDDA d'avoir accepté pendant toute ma formation de me diriger tout au long de mes recherches de graduation et post graduation, et sincèrement pour toute sa patience communicatrice et ses orientations.

Mes sincères remerciements vont aussi au Professeur N.DOGHMANE de l'Université de ANNABA, d'avoir accepté de présider ce Jury.

Je porte beaucoup d'admiration également à Mr M.BENOUARETH, Maître de Conférences de l'Université de ANNABA d'avoir accepté de porter ces remarques instructives à cette thèse.

Je remercie également messieurs les examinateurs le Professeur H.A.ABBASSI de l'Université de ANNABA et Dr A.H.BOUKROUCHE, Maître de Conférences de l'Université de GUELMA, d'avoir accepté d'être aussi de ce Jury.

Pour mes travaux au laboratoire de LAMIH de Valenciennes (France), je n'oublie pas de porter mes reconnaissances au Professeur A.TALEB.AHMED pour ces orientations scientifiques de recherches.

Pour ces encouragements scientifiques, je tiens à porter mes reconnaissances à Mr BENAKCHA Abdelhamid, Maître de conférence de l'université de Biskra.

*A la mémoire de mes parents
A ma famille, ma femme, et mes quatre enfants*

ملخص

معظم الإشارات الفيزيائية تنتمي إلى صنف الإشارات متعددة المركبات المستقرة بالتجزئة. تتكون من عدة مركبات جيبية أين يتغير التواتر والسعة خلال الزمن. إن التحويل الكلاسيكي لـ *Fourier* يبدو غير قادر على كشف هذه التغيرات بدلالة الزمن، بالمقابل يمكن أن تُعطيَّ الطرق زمن تواتر وزمن سلم نتائج معتبرة لهذه المشكلة. في عملنا هذا، نقدم تقنية لكشف هذه التغيرات الطيفية بالتعويض ثنائية بالتمثيل الطاقوي زمن تواتر. تسمح طريقة التعويض ثنائية للتحويلات بتجميع (بتركيز) جيد لتوزيع الطاقة، وبحساب دليل الإستقرارية على المسافات الثنائية الأبعاد للصورة زمن تواتر للإشارة التي تم تعويضها ثانية، يمكننا إذن كشف هذه التغيرات. من بين التمثيلات الطاقوية للتحويلات زمن تواتر، يمكن اختيار الصورة الطيفية وطريقة التعويض ثنائية بالتمثيل الطاقوي لهذه المهمة.

الكلمات المفتاحية: كثافة الطاقة، الصورة الطيفية، التعويض ثنائية، كشف، إشارة غير مستقرة، إشارة الكلام، المسافات، دليل الإستقرارية.

RESUME

La plupart des signaux physiques appartiennent à la classe des signaux multi composantes stationnaires par morceaux. Ces signaux sont constitués de plusieurs composantes sinusoïdales dont la fréquence et l'amplitude varient au cours du temps. La transformation classique de *Fourier* s'avère inapte à déceler ces variations en fonction du temps. Par contre, les méthodes temps fréquence et temps échelle peuvent apporter des solutions importantes à ce problème. Dans notre travail, on présente une technique de détection de ces variations spectrales par la réallocation de la représentation énergétique temps fréquence. La technique de réallocation des transformations permet de bien focaliser la distribution d'énergie et, par calcul d'un indice de stationnarité sur les distances bidimensionnelles de l'image temps fréquence réalloué du signal, on pourra alors détecter ces variations. Parmi les représentations énergétiques des transformations temps fréquence, le spectrogramme et sa version réallouée peuvent être sélectionnés pour cette mission.

Mots clé : densité d'énergie, spectrogramme, réallocation, détection, signal non stationnaire, signal parole, distances, indice de stationnarité.

ABSTRACT

The majority of the physical signals belong to the class of the multicomponent signals stationary per pieces. These signals are composed of several sinusoidal components whose frequency and amplitude vary in the course of time. The traditional *Fourier* transformation proves to be inapt to detect these variations according to time, on the other hand the methods time frequency and time scale can produce considerable results to this problem. In our work, we present a technique of detection of the spectral variations by reassignment of the time frequency energy representation. The reassignment technique of the transformations makes it possible to focus well the energy distribution and, by calculation of a stationarity index on the two-dimensional distances from the reassigned time frequency image of the signal, we will be then able to detect these variations. Among the energy representations of the time frequency transformations, the spectrogram and its reassigned version can be selected for this mission.

Key words: power density, spectrogram, reassignment, detection, nonstationary signal, speech signal, distances, stationarity index.

LISTE DES FIGURES

- Figure 1.1** : (extrait [1]) présente sur l'axe des ordonnées l'évolution de la distance instantanée D_t des deux TFRs des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, l'axe des abscisses est l'axe du temps 6
- Figure 1.2** : Deux sous images I_1, I_2 de la TFR de face commune à l'instant t et chacune d'elles de largeur p 7
- Figure 1.3** : (extrait [1]) présente sur l'axe des ordonnées l'indice de stationnarité des signaux mono composant $x_1(t), x_2(t)$, l'axe des abscisses est l'axe du temps. $L_{sp}=61, p=5$ 8
- Figure 1.4** : (extrait [1]) présente sur l'axe des ordonnées l'indice de stationnarité des signaux multi composant $x_3(t), x_4(t)$, l'axe des abscisses est l'axe du temps. $L_{sp}=61, p=5$ 8
- Figure 1.5** : (extrait [7]) présente l'indice de stationnarité du signal test avec un SNR de 6 dB 10
- Figure 1.6** : (extrait [7]) présente l'indice modifié de stationnarité du signal test avec un SNR de 6 dB 10
- Figure 1.7** : (extrait [12]) présente l'indice de détection dans le plan temps échelle (à gauche) l'indice de détection pour le plan temps fréquence (à droite) 16
- Figure 3.1** : (a) : Impulsion centrée, (b) la cwt de l'impulsion par Haar, échelle (1:64) 37
- Figure 3.2** : (a) : Impulsion décalée, (b) la cwt de l'impulsion décalée par Haar, échelle (1:64) 38
- Figure 3.3** : (a) : Impulsion décalée, (b) ondelette de Haar inversée et centrée à l'instant de l'impulsion à l'échelle $a_0=16$ 39
- Figure 3.4** : Quelques formes d'ondelettes 40
- Figure 3.5** : Résolution temps-fréquence (a). Résolution temps échelle (b) 42
- Figure 3.6** : Décomposition pyramidale a_i, et, d_i sont respectivement, les approximations et les détails 46
- Figure 3.7** : Synthèse pyramidale 47
- Figure 3.8** : Schéma d'analyse synthèse pour un niveau 48
- Figure 3.9** : Réponse fréquentielle, filtre miroir en quadrature 48
- Figure 3.10** : Largeurs de bandes des détails et largeur de l'approximation a_3 49
- Figure 3.11** : Arbre W des sous espaces W_j^p

Figure 3.12 : Décomposition en paquets d'ondelette	51
Figure 3.13 : Arbre admissible (exemple)	52
Figure 3.14 : La DWT est un cas particulier de la décomposition en paquets d'ondelette	53
Figure 3.15 : Arbre de décomposition en paquets d'ondelette $j=3, p=0,..7$	53
Figure 3.16 : Segmentation temporelle par paquets d'ondelette	54
Figure 3.17 : Arbre binaire de la décomposition en paquets d'ondelette	54
Figure 3.18 : Pavage temps fréquence pour $j=4$	55
Figure 3.19 : Arbre de décomposition complète	56
Figure 3.20 : Arbre de décomposition complète :	
astérisque sur le nœud choisi, sinon on lui marque la somme	57
Figure 3.21 : Base constituée des nœuds marqués par astérisque	57
Figure 4.1 : Schéma bloc de détermination de la fréquence et du temps réalloués	63
Figure 4.2 : Représentation temps fréquence idéale, signal somme(modulé sinusoïdalement en fréquence+hyperboliquement en fréquence)	67
Figure 4.3 : Signal module en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique) (haut) Transformation de Wigner Ville (bas)	67
Figure 4.4 : Signal module en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) Transformation de pseudo Wigner Ville lissée (en bas)	68
Figure 4.5 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) Transformation de pseudo Wigner Ville lissée réalloué (en bas)	68
Figure 4.6 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) Spectrogramme (en bas)	69
Figure 4.7 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) Spectrogramme réalloué (en bas)	70
Figure 4.8 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) Scalogramme de l'ondelette de Morlet (en bas)	70
Figure 4.9 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) Scalogramme réalloué de l'ondelette de Morlet (en bas)	71
Figure 5.1 : Représentation de Wigner ville d'un signal modulé linéairement en fréquence (en bas). Représentation temporelle du même signal (haut)	75
Figure 5.2 : Fréquence instantané du signal modulé linéairement en fréquence (<i>FM</i>)	75
Figure 5.3 : Représentation de Wigner ville d'un signal (de deux composantes modulé linéairement en fréquence) (en bas).Représentation temporelle	76

Figure 5.4 : Fréquence instantané du signal multi composants modulé linéairement en fréquence (<i>FM</i>)	76
Figure 5.5 : Wigner Ville : signal composé de deux linéaires <i>FM</i> parallèle (en bas). Représentation temporelle du même signal (en haut)	77
Figure 5.6 : Pseudo Wigner Ville lissée: signal composé de deux linéaires <i>FM</i> parallèle g =Hamming (33) h =Hamming (63), (en bas). Représentation temporelle	77
Figure 5.7 : Pseudo Wigner Ville lissée (de deux atomes gaussiennes+sinus) (en bas). La représentation temporelle de ces atomes gaussiennes	78
Figure 5.8 : Spectrogramme du signal composé de deux composantes <i>FM</i> , la fenêtre de pondération est Hamming (23) (en bas). Représentation du signal temporel (en haut)	79
Figure 5.9 : Spectrogramme du signal composé de deux composantes <i>FM</i> la fenêtre de pondération est Hamming (63) (en bas). Représentation du signal temporel (en haut)	79
Figure 5.10 : Scalogramme d'une impulsion centre à la position 256 pour l'ondelette de Morlet de longueur 12 (en bas). Impulsion temporelle (en haut)	80
Figure 5.11 : Signal temporel compose de 2 sinus (en haut). Scalogramme du signal (en bas)	81
Figure 5.12 : Signal Altes sa fréquence de 0.1Hz jusqu'a 0.35Hz (en haut). Sa transformation pseudo Wigner Ville lissée affine (en bas)	82
Figure 5.13 : Signal Altes sa fréquence de 0.1Hz jusqu'a .35Hz (en haut). Scalogramme du signal (Morlet de longueur 12) (en bas)	82
Figure 5.14 : Signal temporel avec retard de groupe hyperbolique (en haut). Distribution de Bertrand du signal (en bas)	83
Figure 5.15 : Signal de retard de groupe de type $\frac{1}{\sqrt{f}}$ (en haut). Distribution de Flandrin du signal (en bas)	84
Figure 5.16 : Signal compose de sinus et de cosinus de même fréquence (discontinuité au milieu) (en haut). Spectrogramme du signal (en bas)	85
Figure 5.17 : Signal composé de sinus et de cosinus de fréquence différentes (Discontinuité à la 1ere dérivée au point milieu)(En haut). Spectrogramme du signal (En bas)	86

Figure 5.18 : Signal composé de sinus et de cosinus de fréquence différentes (Discontinuité à la 1ere dérivée au point milieu)(En haut). Scalogramme (ondelette de Morlet 24 échantillons) du signal (En bas)	87
Figure 5.19 : Décomposition du signal s par dB10, d1 et d2 montrent la discontinuité de la 1ere dérivée	88
Figure 5.20 : Signal s (en haut). Décomposition du signal par cgauss1 (en bas)	88
Figure 5.21 : Signal s (en haut). Décomposition du signal par cgauss4 (au milieu) Module de ligne de coefficients d'ondelette (en bas)	89
Figure 5.22 : Signal compose de sinus et de cosinus de fréquence différentes (Discontinuité à la 1ere dérivée au point milieu) Paquet d'ondelettes dB10 (meilleure base : critère entropique) du signal	90
Figure 5.23 : Indice de stationnarité du spectrogramme de la figure (5.17) pour $p=11$	92
Figure 5.24 : Signal parole du mot "BONJOUR"	94
Figure 5.25 : Indice de stationnarité, tiré du spectrogramme : 'BONJOUR'	95
Figure 5.26 : Indice de stationnarité tiré du spectrogramme réalloué : 'BONJOUR'	95
Figure 5.27 : Signal parole du mot "HELLO"	95
Figure 5.28 : Indice de stationnarité, tiré du spectrogramme : 'HELLO'	96
Figure 5.29 : Indice de stationnarité tiré du spectrogramme réalloué : 'HELLO'	96
Figure 5.30 : Signal parole du mot "SALAM"	96
Figure 5.31 : Indice de stationnarité, tiré du spectrogramme : 'SALAM'	97
Figure 5.32 : Indice de stationnarité tiré du spectrogramme réalloué : 'SALAM'	97
Figure 5.33 : Indice de stationnarité du mot « SALAM ». Tiré du spectrogramme « courbe continu ». Tiré du spectrogramme réalloué « courbe discontinue »	97

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Propriétés de covariance des TFRs

Tableau 2.2 : Propriétés de la distribution de la densité d'énergie

Tableau 2.3 : Propriétés de l'analyse du signal

Tableau 2.4 : Propriétés de localisation du signal

Tableau 5.1 : Détection des instants de changements spectraux du signal $s(t)$ non bruité.

Spectrogramme (sp), spectrogramme réalloué (rsp)

Tableau 5.2 : détection des instant de changements spectraux du signal $s(t)$ bruité de 10 dB

Spectrogramme (sp), spectrogramme réalloué (rsp)

LISTE DES SYMBOLES

- QMF : Filtres miroirs en quadrature
- $L^2(\mathbb{R})$: Espace des signaux carré sommable
- TFR : Représentation temps fréquence
- D_k : Distance de Kolmogorov
- D_t : Distance instantanée
- SNR : Rapport signal/bruit
- $PWVD$: Pseudo distribution de Wigner Ville
- $SPWVD$: Pseudo distribution de Wigner Ville Lissée
- $SPEC$: Spectrogramme
- $STFT$: Transformation de *Fourier* à court terme
- WT : Transformation d'ondelette
- CWT : Transformation d'ondelette continue
- DWT : Transformation d'ondelette discrète
- WVD_x : Distribution de Wigner Ville du signal x
- AF_x : Fonction d'ambiguïté du signal x
- Q_x : Distribution Altes Q
- HAF_x : Fonction d'ambiguïté hyperbolique du signal x
- $MSIWD_x$: Distribution de Marinovich du signal x
- $(WX)(f)$: Opérateur unitaire de déformation fréquentielle du signal x
- Lt1, Lt2 : Fenêtres de lissages
- $I1, I2$: Sous images de l'image globale de la TFR
- MSI : indice modifié de stationnarité
- f_ψ : Fréquence centrale de l'ondelette mère
- $d_x(i, k)$: Coefficients d'ondelette du signal x
- $\psi_a(t)$: Forme temporelle de l'ondelette à l'échelle a
- $\Psi_a(f)$: Transformation de *Fourier* de l'ondelette $\psi_a(t)$
- $\{v_i(k)\}$: Vecteur variance du signal au niveau i
- $\{m_r(k)\}$: Vecteur de modèle de rupture
- $c(k)$: Vecteur indice global de rupture (DWT)

$c_{j,m}(k)$: Paquet d'ondelette au niveau i , à la bande spectrale m , et à la translation k

Ind^1 : Indice global défini à partir des indices locaux (paquet d'ondelette)

$X(f)$: Transformée de *Fourier* du signal $x(t)$

fx : Fréquence instantanée du signal x

τ_h : Retard de groupe du filtre de réponse impulsionnelle h

$\frac{d^n x}{dt^n}$: La dérivée d'ordre n du signal x

λ : Seuil de rupture

l_c : Paramètre indiquant la longueur du segment stationnaire

l_p : Paramètre fixant la pente de rupture

E_x : L'énergie du signal x

$\Delta t \Delta f$: Produit résolution temporelle, résolution fréquentielle

Q_x : Distribution Altes Q

$BP_k D_x$: Distribution de Bertrand d'ordre k du signal x

T_y : Transformation temps fréquence du signal y

$C_x(t, f; \Psi_c)$: Transformation temps fréquence (classe de Cohen) à noyau Ψ_c

$\varphi_c, \Phi_c, \psi_c, \Psi_c$: Noyaux de transformations dans la classe de Cohen

$A_x(t, f; \Psi_A^{(A)})$: Transformations temps fréquence (classe affine) de noyau $\Psi_A^{(A)}$

$\varphi_A^{(A)}, \Phi_A^{(A)}, \psi_A^{(A)}, \Psi_A^{(A)}$: Noyaux de transformation (classe affine)

$H_x(t, f; \Psi_H^{(H)})$: Distribution temps fréquence (classe hyperbolique) à noyau $\Psi_H^{(H)}$

$\varphi_H^{(H)}, \Phi_H^{(H)}, \psi_H^{(H)}, \Psi_H^{(H)}$: Noyaux de transformation (classe hyperbolique)

$PC_X^{(k)}(t, f; \Psi_{pc}^{(A)})$: Distribution temps fréquence (classe de puissance)

$\varphi_{pc}^{(A)}, \Phi_{pc}^{(A)}, \psi_{pc}^{(A)}, \Psi_{pc}^{(A)}$: Noyaux de transformation (classe de puissance)

$\Delta t_{\psi_a}, \Delta f_{\psi_a}$: Résolution temporelle et fréquentielle de l'ondelette ψ_a

$\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$: Base d'ondelettes duale de $\{\psi_{j,k}(t)\}$

V_j, W_j : Espaces d'approximation et détails d'ondelette de niveau j

$\{\phi_{j,k}(t)\}$: Base dans l'espace d'approximation V_j

$a_x(j, k)$: Coefficients d'approximation du signal x au niveau j .

$A_j x(t)$: Signal approximé au niveau j

$\{\psi_{j,k}(t)\}$: Base dans l'espace de détails W_j

$d_x(j, k)$: Coefficients de détails du signal x au niveau j

$D_j x(t)$: Signal de détails du signal x au niveau j

h et g : Filtres miroirs en quadrature

$H(z)$: Transformation en z de $h(t)$

$\downarrow 2[x]$, et $\uparrow 2[x]$: Opérateur de décimation et d'interpolation par 2 du signal x

C_j^p : Paquet d'ondelettes dans le sous espace W_j^p

ψ_j^p : Base orthonormée dans le sous espace W_j^p

$(\hat{t}(t, f), \hat{f}(t, f))$: Nouvelles coordonnées temps fréquences réalloués

$SPECR_x$: Spectrogramme réalloué du signal x

$CR_x(t', f', h)$: Distribution de Cohen réallouée

$A_x(a, b)$: Distribution classe affine par Wigner Ville (a échelle, b position)

$\hat{b}_x(a, b)$: Position réallouée

$\hat{f}_x(a, b)$: Fréquence réallouée

$\hat{a}_x(a, b)$: Échelle réallouée

$\hat{A}_x(a, b)$: Distribution réallouée (classe affine)

$SCALO_x$: Scalogramme du signal x

$ASPWVD_x(t, a)$: Pseudo Wigner Ville lissée affine

$B_x(t, a)$: Distribution P_0 de Bertrand à l'instant t et à l'échelle a

$D_x(t, a)$: Distribution de Flandrin à l'instant t et à l'échelle a

dL_q : Distance d'ordre q

$P(a, b)$: Probabilité du couple (a, b)

$I_1(t, \tau, f)$: Sous image tirée de l'image globale de la TFR centrée en τ

$Is(t)$: Indice de stationnarité

$NI(t, \tau, f)$: Densité locale d'énergie normalisée centrée en τ

SOMMAIRE

Introduction Générale	1
Premier chapitre : Techniques de Détection du Saut de Fréquence	3
1.1. Introduction	4
1.2. Détection des changements brutaux dans le plan temps fréquence	4
1.2.1 Introduction	4
1.2.2 Distance instantanée entre les deux (TFRs)	5
1.2.2.1 Simulation	5
1.2.3 Indice de stationnarité	6
1.2.3.1 Simulation	7
1.3 Détection des changements brutaux par l'indice d'ondelette	8
1.3.1 Introduction	8
1.3.2 l'indice modifié de stationnarité	9
1.3.3 Simulation	9
1.4. Détection des ruptures dans les signaux harmoniques	
à partir de la transformée en ondelette discrète	10
1.4.1 Introduction	10
1.4.2 Méthode de détection	11
1.4.3 Indice de détection	11
1.4.4 Simulation	12
1.5. Détection des ruptures par paquets d'ondelette	13
1.5.1 Introduction	13
1.5.2 Décomposition en paquet d'ondelette	13
1.5.3 Sélection de la meilleure base et détection	13
1.5.4 Indice de détection	14
1.5.5 Simulation	15
1.6 Conclusion	16
Deuxième chapitre : Analyse Temps Fréquence Des Signaux non Stationnaires	17
2.1. Introduction	18
2.2. Représentations spectrales monodimensionnelle	18
2.2.1 Transformations de <i>Fourier</i>	18
2.2.2 Fréquence instantanée et retard de groupe	18
2.3 Limites de la transformation de <i>Fourier</i>	19

2.4	Résolution temps fréquence de Heisenberg –Gabor	19
2.5	Représentations temps fréquence	21
2.5.1	Transformation de <i>Fourier</i> à court terme (<i>STFT</i>)	21
2.5.2	Distributions de Wigner Ville et la fonction d’ambiguïté de Woodward	22
2.5.3	Distributions Altes Q ou distribution Wigner à large bande	23
2.5.4	Déformations des représentations temps fréquences	23
2.5.5	Distributions de Bertrand	24
2.5.6	Termes croisés de la représentation quadratique temps fréquence	25
2.6	Propriétés des représentations temps fréquence	26
2.6.1	Propriétés de covariances	26
2.6.2	Propriétés de la distribution de la densité d’énergie	27
2.6.3	Propriétés du signal à analyser	27
2.6.4	Propriétés de localisation du signal	28
2.6.5	Préservation du produit scalaire	29
2.7	Classes de représentations temps fréquence	29
2.7.1	Classe de Cohen	30
2.7.2	Classe Affine	31
2.7.3	Sous classe Affine -Cohen	32
2.7.4	Classe Hyperbolique	32
2.7.5	Classe de puissance d’ordre k	33
2.8	Conclusion	34
	Troisième chapitre : Analyse Temps Echelle Des Signaux non Stationnaires	35
3.1	Introduction	36
3.2	Transformée en ondelette continue	36
3.3	Filtrage par ondelette	40
3.4	Résolution dans le plan temps échelle	40
3.5	Bases discrètes d’ondelette	42
3.5.1	Analyse multirésolution	43
3.5.1.1	Espaces des approximations	44
3.5.1.2	Espaces des détails	44
3.5.2	Transformée en ondelette discrète	45
3.5.2.1	Décomposition par DWT	46
3.5.2.2	Synthèse par DWT	47

3.6 Les paquets d'ondelette	49
3.6.1 Principe de la décomposition	50
3.6.2 Bases et arbres admissibles d'ondelette	52
3.6.3 Signification temps fréquence de la décomposition en paquets d'ondelette	53
3.6.3.1 Support temporel	53
3.6.3.2 Partitionnement fréquentiel	54
3.6.3.3 Pavage du plan temps fréquence	54
3.6.4 Sélection de la meilleure base	55
3.6.4.1 Critères de sélection de la meilleure base	57
3.7 Conclusion	58
Quatrième chapitre : Techniques de Réallocation des Distributions Energétiques	59
4.1 Introduction	60
4.2 Principe de la méthode de réallocation	60
4.3 La méthode de réallocation dans la classe de Cohen	63
4.3.1 Propriétés des distributions réallouées dans la classe de Cohen	64
4.4 La méthode de réallocation dans la classe affine	65
4.4.1 Propriétés des distributions réallouées dans la classe affine	66
4.5 Quelques exemples des transformations réallouées	66
4.5.1 Réallocation (classe de Cohen)	66
4.5.2 Réallocation (Classe Affine)	70
4.6 Conclusion	72
Cinquième chapitre: Applications des Techniques de Détection des Changements	
Brusques dans les Signaux non Stationnaires	73
5.1 Introduction	74
5.2 Représentations temps fréquence (classe de Cohen)	74
5.2.1 Représentation par Transformation de Wigner Ville	74
5.2.2 Représentation par la transformation de pseudo Wigner Ville lissée	76
5.2.3 Représentation par le spectrogramme	78
5.3 Représentations temps fréquence (classe affine)	80
5.3.1 Représentation par scalogramme	80
5.3.2 Représentation par pseudo Wigner Ville lissée affine	81
5.4 Représentations temps fréquence (classe de puissance d'ordre k)	82
5.4.1 Distribution de Bertrand	82
5.4.2 Distribution de Flandrin	83

5.5 Applications à la détection du saut de fréquence dans les signaux non stationnaires	84
5.5.1 Limite de détection par le spectrogramme	84
5.5.2 Limite de détection par le scalogramme	86
5.5.3 Détection par DWT	87
5.5.4 Détection par CWT	88
5.5.5 Détection par décomposition en paquets d'ondelette	89
5.6 Détection des changements brusques par l'image temps fréquence	90
5.6.1 Principe de la méthode	91
5.6.2 Indice de stationnarité et mesures de distances	91
5.7 Applications de l'indice de stationnarité sur le spectrogramme réalloué	93
5.7.1 Application à un signal synthétique	93
5.7.2 Application à un signal parole	94
5.8 Conclusion	98
Conclusion Générale	99
Bibliographie	101

INTRODUCTION GENERALE

En réalité physique les signaux sont souvent de nature non stationnaire ou stationnaire par morceaux. Leurs constitutions spectrales sont riches en composantes sinusoïdales dont la fréquence et l'amplitude varient au cours du temps. Cette variation spectrale exprime une information physique sur le comportement d'un tel système mécanique, électrique ou autre. Il s'avère que la transformation de Fourier classique se trouve incapable de nous informer sur la variation instantanée de ces composantes spectrales, d'où la nécessité de rechercher d'autres approches afin de résoudre ce problème.

Les méthodes temps fréquence et temps échelle viennent représenter ces variations instantanées toujours sous la contrainte d'Heisenberg Gabor. Les types des signaux ainsi que leurs variations exigent de choisir une représentation par rapport à une autre que ce soit dans le plan temps fréquence ou dans le plan temps échelle. Il en résulte que la classification des représentations, selon des propriétés bien adaptées aux variations de la fréquence instantanée, du retard de groupe et du type de singularité, doit être adaptée au signal à analyser. C'est pour cette raison que différentes formes de représentations temps fréquence et temps échelle ont été envisagées. Ceci exige d'étudier ces différentes représentations dans les deux plans temps fréquence et temps échelle.

On a constaté qu'à chaque propriété du signal correspond une certaine représentation bien adaptée, aussi bien dans le plan temps fréquence que dans le plan temps échelle. Notre recherche consiste à trouver une technique bien adaptée à différentes singularités qui existent dans la plupart des signaux non stationnaires.

L'idée est donc basée sur le fait que toute variation brusque du signal s'exprime souvent par une variation d'énergie. Puisque ces variations sont aléatoires, il faut donc trouver une représentation énergétique dans le sens de densité de probabilité qui exprime d'une manière générale la densité d'énergie du signal. Pour ces raisons, on a étudié ces méthodes.

Le premier chapitre est l'état de l'art des techniques de détection des sauts de fréquences dans les signaux non stationnaires.

Le second chapitre étudie les différentes représentations temps fréquence ainsi que leur classification selon des propriétés bien spécifiques qui ont un rapport direct avec les propriétés des signaux. Ces le cas notamment des représentations de Cohen, affine, affine – Cohen, hyperbolique et de puissance d'ordre k .

Le troisième chapitre traite des représentations des signaux non stationnaires par une vision d'échelle au lieu de fréquence, sachant que la fréquence et l'échelle sont fonctions l'une de l'autre par une fréquence de référence.

Le quatrième chapitre montre qu'on peut refocaliser l'énergie distribuée dans les deux plans afin d'avoir une bonne lisibilité de l'image représentative du signal projeté.

Le cinquième chapitre traite des applications ayant un rapport avec les méthodes temps fréquence et temps échelle qui montrent les difficultés et les limites de certaines représentations dans la détection des variations spectrales du signal. Ce chapitre est terminé par l'application de l'indice de stationnarité au spectrogramme réalloué en utilisant des signaux test et parole. Les indices de stationnarité du spectrogramme et du spectrogramme réalloué sont également comparés.

Premier chapitre

Techniques de Détection
du Saut de Fréquences

1.1. Introduction

Dans ce chapitre on présente différentes techniques de détection des changements brutaux dans les composantes spectrales d'un signal non stationnaire, par les techniques basés sur la représentation temps fréquences et la représentation temps échelle. On ne traite pas cas par cas le problème des différentes singularités qui se trouve dans le signal non stationnaire mais les variations spectrales globales au cours de son évolution temporelle.

1.2. Détection des changements brutaux dans le plan temps fréquence

1.2.1 Introduction

Cette étude [1] est faite afin de comparer les deux méthodes non paramétriques de détection des changements brutaux dans un signal non stationnaire.

La première méthode consiste à comparer deux représentations temps fréquence lissées pour des modèles de court terme et de long terme. La détection des changements rapides est basée sur la mesure de la distance instantanée entre les deux représentations temps fréquence (TFRs), cette dernière présente un pic aux instants de changements.

La deuxième méthode est basée sur l'indice de stationnarité qui est calculé seulement sur une seule (TFR).

Sachant que la plupart des signaux physiques dans les applications réelles sont de nature non stationnaires et exceptionnellement dans des cas très particuliers, la modélisation de ces signaux est souvent irréalisable. Ceci explique que l'approche temps fréquence présente un intérêt important dans ce domaine, cette approche permet de donner une image d'analyse des composantes spectrales instantanées du signal. C'est de ce fait que la représentation temps fréquence est utilisée pour la détection des changements brutaux dans les signaux non stationnaires

La comparaison de ces deux distributions temps fréquence lissées par deux différentes fenêtres temporelles (de longue et de courte durée) se fait par le calcul d'une distance instantanée entre les deux (TFRs). Lorsque aucun changement ne surgit alors les deux (TFRs) présentent le même niveau bas d'énergie des termes croisés. Devant un changement brutal ces termes croisés deviennent différents et la distance instantanée entre les deux (TFRs) présente un pic aux instants de changements.

1.2.2 Distance instantanée entre les deux (TFRs)

Le choix de la TFR est fait sur la pseudo distributions de Wigner Ville lissée (SPWD) [2], et le choix de la distance a été fait sur la distance de Kolmogorov [3,4].

L'idée est donc de comparer deux TFRs [5] avec deux différentes fenêtres de pondération de différentes longueur comme celles des approches paramétriques. Quelques méthodes utilisent la comparaison du modèle du signal identifié sur deux fenêtres d'observations de différentes longueurs. Afin d'éviter alors le compromis entre la dispersion temporelle et celle de la dispersion fréquentielle, des noyaux de lissages séparés de la TFR doivent être choisis. Plusieurs travaux ont été élaborés pour faire le meilleur choix de la TFR et de la distance de mesure [6].

La technique prend donc deux TFRs pour le même signal, la première TFR est (SPWD1) avec une fenêtre de lissage temporelle courte notée L_{t1} et la seconde TFR est (SPWD2) avec une fenêtre de lissage temporelle longue notée L_{t2} . Les deux TFRs ont la même fenêtre de lissage fréquentielle de longueur L_f .

Tous ces TFRs sont calculées et normalisées pour le signal analytique. La distance instantané (D_t) déduite de celle de la distance de Kolmogorov (D_k) telle que :

$$D_k(\text{SPWD1}, \text{SPWD2}) = \iint \| |SPWVD1| - |SPWVD2| \| dt df \quad (1.1)$$

$$D_t = \int \| |SPWD1| - |SPWD2| \| df \quad (1.2)$$

on aura donc

$$D_k(\text{SPWD1}, \text{SPWD2}) = \int D_t dt \quad (1.3)$$

1.2.2.1 Simulation

Pour des signaux tests mono composant, composés de 512 échantillons et échantillonné à 1KHz, $x_1(t)$ (sans changement brutal) qui se compose d'une sinusoïde s_1 ($f_1 ; [1 : \text{fin}]$) avec une fréquence normalisée f_1 dans la plage temporelle $[1 : \text{fin}]$, $x_2(t)$ (avec changement brutal) qui se compose de deux sinusoïdes s_1 ($f_1 ; [1 : t_1] \cup [t_2 : \text{fin}]$) et s_2 ($f_2 ; [t_1 : t_2]$) ou $f_1=0.2$, $f_2=0.15$, $t_1=190$, $t_2=230$, $L_{t1}=21$, $L_{t2}=65$ avec $L_f=511$ et le rapport signal/bruit (SNR=5dB).

Pendant les intervalles où aucun changement n'est apparu les termes croisés ont le même faible niveau d'énergie, par contre devant un changement brutal les termes croisés deviennent très différents.

Pour un signal $x_1(t)$, D_t est presque constante, cependant pour le signal $x_2(t)$ D_t présente des pics aux instants de changements. La constatation faite est que cette méthode est

bien efficace pour le signal mono composant. Le graphe de la figure 1.1 exprime cette détection, néanmoins le problème se pose pour un signal multi composant,

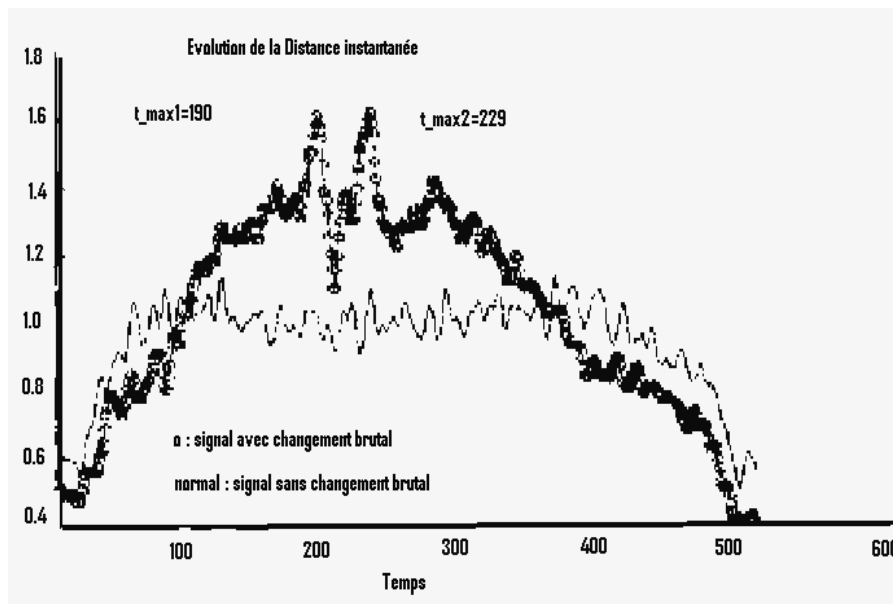


Figure 1.1 :(extrait [1]) présente sur l'axe des ordonnées l'évolution de la distance instantanée D_t à l'échelle 10^{-4} des deux TFRs des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, l'axe des abscisses est l'axe du temps.

Soient alors les deux signaux multi composant $x_3(t)$ et $x_4(t)$, telle que $x_3(t)$ (sans changement spectrale) est composé de deux sinusoïdes $s_1(f_1 ; [1 : fin])$ et $s_2(f_2 ; [1 : fin])$ et le signal $x_4(t)$ (avec changement spectral) qui est composé de $s_1(f_1 ; [1 : fin])$, $s_2(f_2 ; [1 : t_1])$, $s_3(f_3 ; [t_1 : fin])$; ou $f_1=0.1$, $f_2=0.15$, $f_3=0.2$, $t_1=230$, $L_{t1}=21$, $L_{t2}=65$, avec $L_f=511$ pour un rapport signal sur bruit $SNR=5dB$.

La constatation faite est que D_t ne permet pas de détecter les changements brutaux dus aux termes croisés de la TFR, ces derniers sont différemment traités par les deux fenêtres de lissage L_{t1} et L_{t2} qui fait que D_t ne peut retenir les variations pendant les instants de changements.

1.2.3 Indice de stationnarité

Pour cette méthode seulement une seule TFR est calculée. A chaque instant deux sous images I_1 et I_2 de la TFR sont considérées, les deux sous images ont une face commune à l'instant t , ayant la même largeur p et elles sont normalisées. La figure 1.2 présente cette configuration de ces deux sous images tirées de la même TFR.

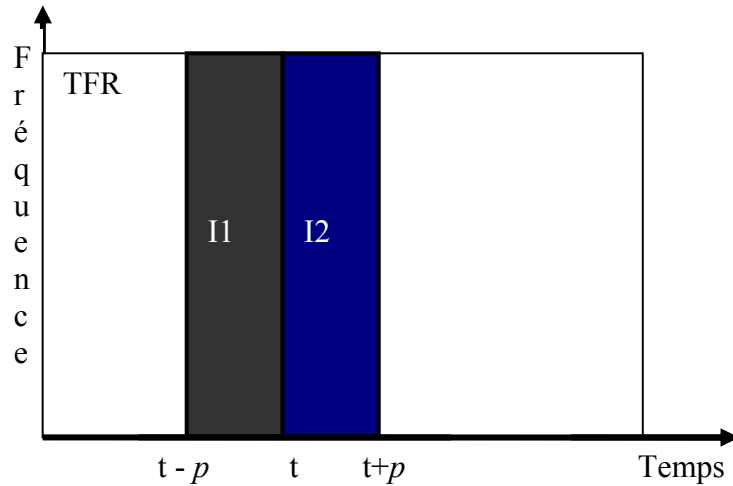


Figure1.2 : Deux sous images I1, I2 de la TFR de face commune à l'instant t et chacune d'elle de largeur p.

L'indice de stationnarité, déduit à partir de la distance de Kolmogorov D_k entre I1 et I2, est défini par :

$$I_s(t) = \int_{\tau=0}^p \int \| |TFR(f, t + \tau)| - |TFR(f, t - p + \tau)| \| df d\tau \quad (1.4)$$

La valeur $I_s(t)$ dépend essentiellement du choix de la valeur de p qui peut être considéré comme un paramètre de réglage du compromis sélectivité/sensibilité.

Concernant le choix de la TFR, seulement une seule représentation est considérée. Il faut donc bien choisir une représentation temps fréquence qui possède les propriétés de localisation et d'invariance temporelle. Il se trouve que le spectrogramme peut remplir cette mission. Par un meilleur choix de la fenêtre d'analyse du spectrogramme, l'image tirée de la représentation temps fréquence du signal doit le représenter où il est presque stationnaire.

1.2.3.1 Simulation

Pour un signal $x_1(t)$ mono composant cité dans la partie 1.2.2.1, pour une fenêtre de lissage du spectrogramme de longueur $L_{sp}=61$ et pour une largeur $p=5$ de la sous image TFR, on constate que l'indice de stationnarité est presque constant

Pour le même signal $x_2(t)$ cité précédemment dans 1.2.2.1 l'indice de stationnarité $I_s(t)$ présente des pics aux instants de changements, ceci prouve que cette méthode est valable pour le signal mono composant. La figure 1.3 présente la variation de l'indice de stationnarité aux instants de changements brutaux.

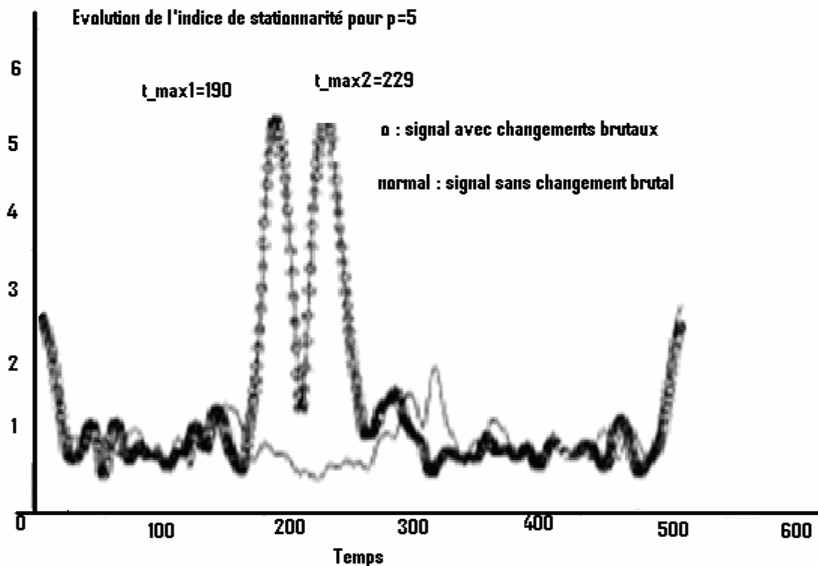


Figure 1.3 : (extrait [1]) présente sur l'axe des ordonnées l'indice de stationnarité à l'échelle 10^{-5} des signaux mono composant $x_1(t)$, $x_2(t)$, l'axe des abscisses est l'axe du temps. $L_{sp}=61$, $p=5$.

Pour les signaux multi composant sans ou avec changement brutal, la méthode a été testée avec le spectrogramme de fenêtre de longueur $L_{sp}=61$ et $p=5$ et le résultat obtenu est aussi valable. La figure 1.4 présente le résultat de la détection pour les signaux multi composant.

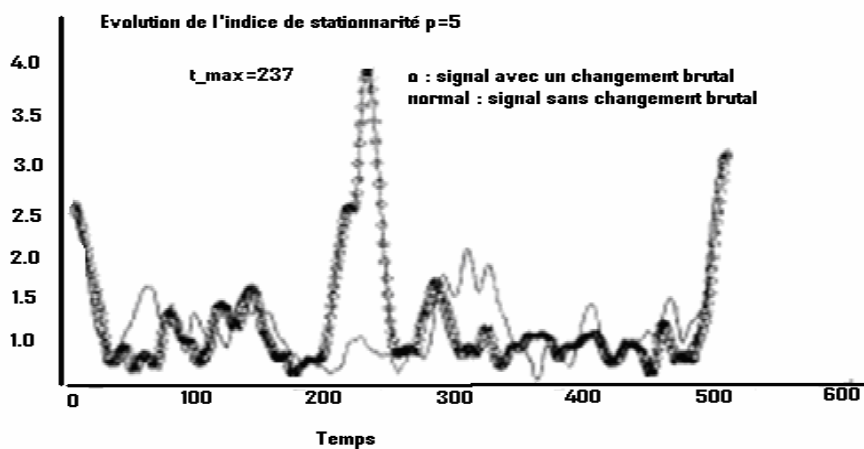


Figure 1.4: (extrait [1]) présente sur l'axe des ordonnées l'indice de stationnarité à l'échelle 10^{-5} des signaux multi composant $x_3(t)$, $x_4(t)$, l'axe des abscisses est l'axe du temps. $L_{sp}=61$, $p=5$.

1.3 Détection des changements brutaux par l'indice d'ondelette

1.3.1 Introduction

Les travaux de Mohamed Allali et Victor DeBrunner [7] se base sur l'utilisation de la transformée en ondelettes du signal à analyser ensuite la reconstitution du signal généré par les coefficients d'ondelettes et finalement par calcul du spectrogramme [2] de ce dernier. L'indice de stationnarité est donc tiré de l'image de la représentation temps fréquence

(spectrogramme) du signal reconstitué. La détection sera alors déterminée par le maximum de cet indice modifié.

1.3.2 L'indice modifié de stationnarité

La transformation de *Fourier* à court terme (STFT) [2] est commode pour l'analyse temps fréquence des signaux à faible bandes et pour des faibles évolutions temporelles. La STFT et la transformation d'ondelettes (WT) sont toutes les deux soumises à la contrainte temps fréquence de Heisenberg [8] $\Delta t \Delta f \geq 1/4\pi$, ou Δt et Δf représentent respectivement la résolution temporelle et fréquentielle.

Le compromis classique entre la résolution temporelle et la résolution fréquentielle toujours persiste dans la structure du spectrogramme.

Soit le signal U généré à partir des coefficients d'ondelette du signal original, on note par SPEC le spectrogramme de U et pour un instant t, deux sous images temps fréquence sont extraites du SPEC comme suit :

$$\text{SPEC1}(t, \tau_i, f_i) = \text{SPEC}(t - p + \tau_i, f_i) \quad (1.5)$$

$$\text{SPEC2}(t, \tau_i, f_i) = \text{SPEC}(t + \tau_i, f_i) \quad (1.6)$$

où p représente la largeur de la sous image tirée du SPEC et $\tau_i \in [0, p]$. Après normalisation des sous images, on définit l'indice modifié de stationnarité comme suit :

$$\text{MSI}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left| \|\text{SPEC}(t, i, j)\| - \|\text{SPEC2}(t, i, j)\| \right| \quad (1.7)$$

où N, M sont respectivement les dimensions des sous images SPEC1 et SPEC2.

1.3.3 Simulation

Le signal test est de 512 échantillons échantillonné à 1KHz, avec un SNR entre 0 et 6 dB. Il est composé de trois fréquences normalisées réparties sur des segments différents de manière à ce que le signal global est la somme de ces signaux qui sont : $s(0.2, [1 : 179])$, $s(0.3, [179 : 209])$, $s(0.25, [210 : 239])$ et $s(0.2, [240 : 512])$. Le signal test présente donc un changement spectral aux instants (179 à 180), (209 à 210) et (239 à 240).

Par application de la décomposition d'ondelette niveau 1 en utilisant l'ondelette de Daubechies 4 (db4), par reconstitution du signal U à partir de ces coefficients d'ondelette et par application de l'indice modifié de stationnarité sur le spectrogramme du signal U, on aura un résultat plus meilleur par rapport à la détection directe par spectrogramme. Cela est dû de l'adaptation de l'ondelette à des segments très courts. Il faut donc choisir la meilleure ondelette qui convient à la meilleure détection. Dans la figure 1.5, on constate que la

sensibilité au bruit de l'indice de stationnarité appliqué au spectrogramme du signal original est plus grande par rapport à celle représentée par l'indice modifié de stationnarité. La figure 1.6 montre la sensibilité au bruit de l'indice modifié de stationnarité du même signal noyé dans un bruit de 6dB.

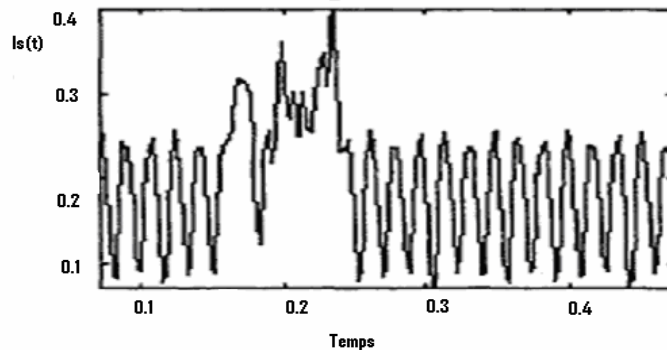


Figure1.5 : (extrait [7]) présente l'indice de stationnarité $I_s(t)$ du signal test avec un SNR de 6 dB

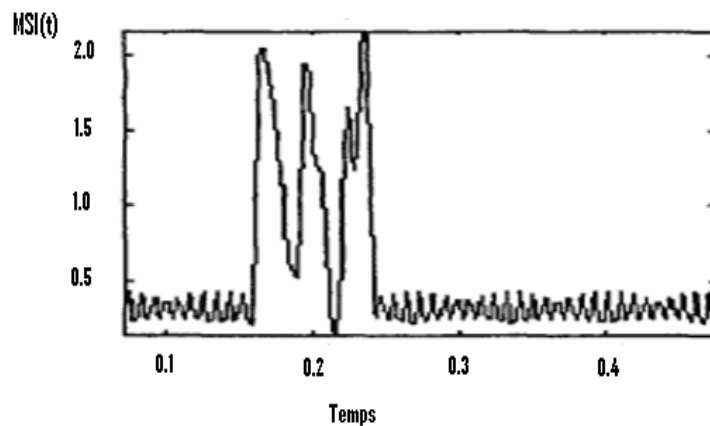


Figure1.6 : (extrait [7]) présente l'indice modifié de stationnarité du signal test avec un SNR de 6 dB

1.4. Détection des ruptures dans les signaux harmoniques à partir de la transformée en ondelette discrète.

1.4.1 Introduction

La transformée en ondelette (WT) [8] a été utilisée dans des nombreuses applications pour détecter des transitoires dans un signal plus au moins large bande. L'observation du signal à différentes échelles d'analyse est en effet particulièrement bien adaptée à la mise en évidence des parties du signal caractérisé par un comportement singulier.

La transformée en ondelette est alors vue plutôt comme une représentation temps fréquence du signal dans laquelle on associe à une échelle d'analyse une fréquence $f = f\psi / a$ ou $f\psi$ est la fréquence centrale de l'ondelette.

L'approche [10] consiste à analyser le plan temps échelle selon des coupes successives, à des échelles fixes le long de l'axe du temps, les signaux reconstitués par la DWT qui sont alors considérés comme issues d'un banc de filtres passe bandes. Un détecteur basé sur l'adéquation avec un modèle de rupture des différents signaux filtrés, permet donc de mettre en évidence les sauts de fréquences.

1.4.2 Méthode de détection

Les signaux filtrés aux différentes échelles sont obtenus à partir de la transformée en ondelette discrètes (DWT). On considère ensuite leurs signaux de puissances sur lesquels on construit l'indice de détection.

Dans le plan temps échelle, la DWT d'un signal $x(t)$ est une représentation non redondante du signal. Lorsque l'ondelette d'analyse est issue d'une analyse multi résolution, la DWT correspond à l'échantillonnage de la transformée en ondelette continue (CWT) sur la grille dyadique dont ses coefficients peuvent s'écrire

$$d_x(i, k) = \langle x, \psi_{i,k} \rangle = CWT_x(t = 2^i k, a = 2^i) \quad (1.8)$$

Elle peut être calculée en utilisant un algorithme pyramidal rapide [8]. Lorsque l'on définit à partir de la CWT une coupe le long de l'axe du temps à une échelle a le signal $x_a(t) = CWT_x(t, a)$ correspond à un signal filtré du signal $x(t)$ par le filtre passe bande de transmittance $\Psi_a(f)$ ou Ψ_a est la transformée de *Fourier* (TF) de $\psi_a(t) = a^{-1/2}\psi(t/a)$. Cette lecture n'est plus possible avec les coefficients $d_x(i, k)$ de la DWT, en revanche on peut construire à partir de ces coefficients le signal filtré passe bande tel que : $x_i(t) = \sum_k d_x(i, k) \tilde{\psi}_{i,k}(t)$ ou $\tilde{\psi}_{j,k}$ est la duale de $\psi_{i,k}$, dans ce cas la transmittance du filtre est $|\Psi_i(f)|^2$.

Le signal est donc différent de $x_a(t)$, mais il résulte comme lui d'un filtre passe bande dépendant de l'ondelette utilisée à l'échelle $a = 2^i$. On dispose donc de m signaux correspondant aux m octaves inspectées à travers les différentes échelles qui sont :

$$\{x_i(n.T_e), n = 1, \dots, N\}, i = 1, \dots, m \text{ pour } T_e = 1$$

1.4.3 Indice de détection

L'objectif est de détecter un déplacement d'énergie d'un niveau de résolution vers un autre. C'est de ce fait qu'une rupture n'est validée que si l'on observe au même instant sur au moins deux niveaux i et dans les directions opposées, un changement de moyenne dans les

variances $\{v_i(k)\}$ du signal $\{x_i(k)\}$. Sur chaque niveau on définit un indice local $\{v_{ri}(k)\}$ égal à l'inter corrélation de $\{v_i(k)\}$ avec un modèle de rupture $\{m_r(k)\}$ correspondant à un saut de moyenne [10] tels que :

$$m_r(k) = 1 \quad \text{si} \quad k < 0 \quad (1.9.1)$$

$$m_r(k) = -1 \quad \text{si} \quad k \geq 0 \quad (1.9.2)$$

et $\{v_i(k)\}$ est estimé sur une fenêtre glissante centrée sur k et de largeur p

$$v_i(k) = E[(x_i(k))^2] \quad (1.10)$$

$$v_{ri}(k) = E[x_i(k).m_r(n-k)] \quad (1.11)$$

L'indice global $c(k)$ est défini à partir des indices locaux

$$c(k) = \max_{i \neq j} \sqrt{|v_{ri}(k).v_{rj}(k)|} \cdot \frac{1}{2} |sign(v_{ri}(k)) - sign(v_{rj}(k))| \quad (1.12)$$

Le premier terme est fonction du produit des intercorrélations sur les niveaux i et j , il est donc d'autant plus fort que l'on traite les deux niveaux concernés par la rupture. Le second terme permet de ne prendre que les sauts de sens opposés de manière à minimiser la sensibilité à un bruit affectant plusieurs composantes et il y'a rupture si $c(k) > seuil$ et $c(k)$ a un maximum local.

1.4.4 Simulation

Les signaux simulés de longueur N constitués de deux composantes sinusoïdales et présentent une rupture fréquentielle à l'instant r sur l'une d'entres elles. Avant rupture pour une variation de $k=1, \dots, r-1$, le signal est $x(k) = \sin(2\pi f_0.k) + \sin(2\pi f_1.k)$ et après rupture pour une variation de $k = r, \dots, N$, le signal est $x(k) = \sin(2\pi f_0.k) + \sin(2\pi f_2.k)$ avec $r = 200$ et le SNR=5dB. Avec une ondelette Daubechies définie sur 20 points, la longueur du signal test est $N=512$ dont les fréquences sont : $(f_0, f_1, f_2) = (0.02, 0.1, 0.2)$.

Le résultat constaté de cette technique montre que la détection est peu sensible au bruit, la qualité du détecteur est toutefois soumise à la position des fréquences à analyser. En effet dans la mesure où la (WT) induit un filtrage à $\Delta f / f$ constant, la détection est largement dégradée lorsque le saut de fréquence a eu lieu à l'intérieur d'une bande correspondante à une même échelle d'analyse. La solution de ce problème peut être transformée dans un développement type paquets d'ondelette, dans le but d'affiner l'analyse dans des bandes où le

signal présente une certaine énergie. Ceci se fait par la décomposition du signal de manière à isoler ses composantes fréquentielles.

1.5. Détection des ruptures par paquets d'ondelette

1.5.1 Introduction

Le problème posé par la méthode citée dans le paragraphe précédent a été soulevé et traité par la décomposition du signal par la transformation en paquets d'ondelettes [11,12]. Dans cette approche la technique de décomposition se fait dans le but de sélectionner la meilleure base de la représentation du signal analysé par paquets d'ondelettes sous un certain critère bien adapté à l'application, qui est dans notre cas la détection des changements brutaux dans un signal multi composant non stationnaire noyé dans un bruit. Le critère de sélection de la meilleure base a été pris pour le critère énergétique, qui permet de séparer les différentes composantes fréquentielles du signal pour une meilleure localisation temporelle. À partir de cette base on reconstruit dans chaque bande un signal mono composant. Le détecteur de rupture est donc basé sur l'adéquation de cet ensemble de signaux avec un modèle de changement brutal.

1.5.2 Décomposition en paquets d'ondelette

La décomposition en paquets d'ondelette [12] utilise des paires de filtres miroir en quadrature (QMF), (comme celles de la DWT) associées à la fonction d'échelle ϕ et la fonction d'ondelette ψ .

Le paquet d'ondelette sont $c_{j,m}(k)$ où j exprime le niveau de résolution, m exprime la bande spectrale et k représente le paramètre de translation en terme de représentation temps fréquence ou d'une façon équivalente de filtrage. On verra dans le chapitre 3 que la décomposition du signal $x(t)$ à travers ces niveaux, la résolution fréquentielle augmente par contre celle de la temporelle diminue.

1.5.3 Sélection de la meilleure base et détection

La base recherchée doit distribuer la variété des composantes fréquentielle du signal à étudier dans des différentes bandes et aussi offre la meilleure localisation temporelle. Ceci est traduit en paquets d'ondelette par la sélection des nœuds qui correspond seulement à une composante fréquentielle et ayant une bande maximale de fréquence. Il se trouve que le critère entropique n'est pas bien adapté à cette mission. De ce fait le critère énergétique est donc choisi dans la sélection de la meilleure base, qui se traduit par la procédure suivante:

- 1) un nœud a au moins une composante fréquentielle si variance ($c_{j,m}(k) > \text{seuil (sv)}$)
- 2) l'inspection de l'arbre de la profondeur donne le multi et le mono composant nœud
- 3) on sélectionne les paquets mono composant qui ont un père multi composant, ce qui garanti la séparation des composantes avec une résolution temporelle maximale

Soit un arbre avec n nœuds sélectionnés indexé par $i = (j, m)$, on construit à partir des paquets d'ondelette n signaux ($x_i(t)$) de la même longueur N , en utilisant l'algorithme pyramidal avec $c_i(k) = 0$ pour $i' \neq i$. Un indice global basé sur l'adéquation de cet ensemble des signaux avec un modèle de changement brutal est ainsi calculé [9].

1.5.4 Indice de détection

Soit I signaux des sous bandes isolants les différentes composantes du signal à analyser, si le banc de filtre est bien adapté, le problème de détection de rupture fréquentielle sera sur le même principe cité dans le paragraphe 1.4.3. Le modèle de rupture correspondant à un saut de moyenne plus au moins brutal est défini à l'aide de deux paramètres lc déterminant la longueur des segments stationnaires et lp fixant la pente de la rupture tels que

$$m_r(k) = -1 \quad \text{si} \quad 0 < k < lc \quad (1.13.1)$$

$$m_r(k) = \frac{2k}{lp} - \frac{2lc + lp}{lp} \quad \text{si} \quad lc \leq k \leq lc + lp \quad (1.13.2)$$

$$m_r(k) = +1 \quad \text{si} \quad lc + lp < k < 2lc + lp \quad (1.13.3)$$

Les signaux de variance $\{v_i[n]\}$ sont estimés sur une fenêtre glissante centrée sur n et de longueur lv tel que :

$$v_i(n) = \sum_{k=-lv/2}^{\frac{lv-1}{2}} (x_i[n+k])^2 \quad (1.14)$$

L'intercorrélation de la sous bande i avec le modèle de rupture est estimée à chaque instant n de manière que :

$$v_{ri}(n) = \sum_{k=0}^{2lc+lp-1} v_i \left[n - \frac{2lc+lp}{2} + k \right] m_r[k] \quad (1.15)$$

L'indice global $Ind^1[n], n \in \{1, \dots, N\}$ est défini à partir des indices locaux de la même manière que l'équation (1.12) tel que :

$$Ind^1[n] = c(n) \quad (1.16)$$

Le détecteur D^1 est défini à partir de l'indice $Ind^1[n], n \in \{1, \dots, N\}$ et détecte en fonction d'un seuil λ une rupture r si $Ind^1[r] > \lambda$ et $Ind^1[r]$ a un maximum local. L'ensemble des instants de ruptures détectés est constitué par $\{r \in \{1, \dots, N\}\}$ tel que $Ind^1[r]$ vérifie la condition de détection.

Finalement on peut résumer la procédure de détection par paquets d'ondelette comme suit [9]:

- 1) décomposition du signal en paquet d'ondelette
- 2) sélection de la meilleure base au regard d'un critère énergétique
- 3) construction des signaux sous bandes correspondant à la segmentation fréquentielle déduite de la meilleure base
- 4) calcul de la puissance instantanée des signaux sous bandes
- 5) calcul de l'intercorrélacion avec un modèle de rupture
- 6) calcul de l'indice de détection.

1.5.5 Simulation

Le signal test sélectionné est un échelon fréquentiel de 512 échantillons, échantillonné à 1 KHz présentant des changements aux instants $t_1=200$ et $t_2=300$ et noyé dans un bruit avec un SNR=5dB. Le seuil sv permet de bien sélectionner la meilleure base de la décomposition en paquets d'ondelette. Pour un faible sv la détection induit d'autres nœuds présentant au moins une composante fréquentielle et pour un fort sv , la perte de quelques composantes fréquentielles est possible.

Le même signal test a été utilisé dans la méthode qui utilise comme représentation temps fréquence le spectrogramme et comme détecteur l'indice de stationnarité qui utilise la distance de Kolmogorov. Le résultat de la détection temps échelle et temps fréquence est représenté dans la figure 1.7. Pour le temps échelle le choix de $sv=0.5$ et pour le temps fréquence la fenêtre d'analyse est de longueur $L_h=35$ et la largeur de la sous image $p=50$. Pour les deux courbes l'axe des ordonnées représente l'indice de détection et l'axe des abscisses représente le temps.

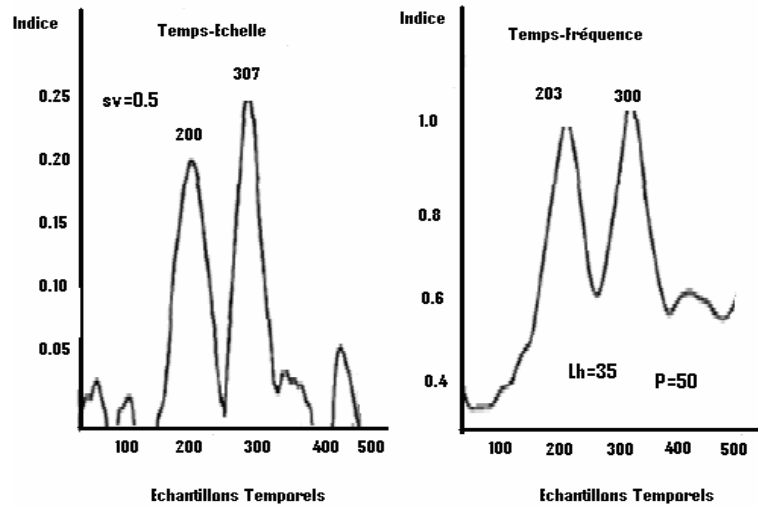


Figure1.7 : (extrait [12]) présente l'indice de détection dans le plan temps échelle (à gauche), l'indice de détection pour le plan temps fréquence (a droite).

Malgré le résultat satisfaisant de la détection par paquets d'ondelette, la constatation faite dans cette analyse est que pour les signaux à large bande, la technique temps fréquence est plus robuste à celle temps échelle. Dans la décomposition en paquet d'ondelette, le choix du seuil est important pour la sélection de la meilleure base, ainsi que le choix du type d'ondelette. Dans notre cas l'ondelette qui a été sélectionné est Daubechies 10.

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté quelques travaux déjà élaborés de détection temps échelle et temps fréquence de changements rapides dans les composantes spectrales d'un signal non stationnaire. Les résultats obtenus par ces travaux sont aussi importants dans les deux plans temps fréquence et temps échelle. Dans l'application de l'indice de stationnarité, le problème reste toujours à trouver une meilleure représentation temps fréquence strictement non négative bien localisée en temps et en fréquence. Notre attention est donc de chercher une meilleure représentation temps fréquence non négative et par application du critère de calcul de distances bidimensionnelles entre les composantes énergétiques du signal non stationnaire, on pourra donc distinguer les évolutions spectrales du signal au cours du temps.

Deuxième chapitre

Analyse Temps Fréquence Des Signaux non Stationnaires

2.1. Introduction

Les représentations mixtes temps fréquence sont des transformations des signaux dont le spectre varie en fonction du temps, elles sont l'extension multidimensionnelles de la transformation de *Fourier* classique.

La plupart des transformations temps fréquence (*TFRs*) transforment un signal $x(t)$ monodimensionnel en fonction de deux dimensions (temps et fréquence notée par $T_x(t, f)$). Ces transformations représentent des surfaces sur le plan temps fréquence qui indiquent les instants où se trouvent les composantes spectrales du signal et leurs amplitudes relatives.

Le but de ce chapitre est de donner une revue générale sur plusieurs représentations linéaires et quadratiques temps fréquence. Le chapitre commence par la représentation spectrale monodimensionnelle « transformation de *Fourier*, fréquence instantanée, et le retard de groupe », une brève discussion suit par quelques représentations temps fréquence comme la transformation de *Fourier* à court terme (*STFT*), la distribution de Wigner Ville, les distributions Altes Q et la distribution unitaire Po de Bertrand.

Les mérites de ces représentations temps fréquence peuvent être regroupées dans des classes qui partagent aux moins une ou plus de propriétés. Dans la même classe, le passage d'une transformation vers une autre se fait par un choix approprié d'un certain noyau.

2.2. Représentations spectrales monodimensionnelles

2.2.1 Transformations de *Fourier*

La transformation de *Fourier* monodimensionnelle d'un signal $x(t)$ est donnée par [23] :

$$X(f) = \int x(t) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot dt \quad (2.1)$$

sa transformée inverse est

$$x(t) = \int X(f) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot df \quad (2.2)$$

L'équation (2.1) représente l'outil de l'analyse du contenu spectral du signal $x(t)$, l'équation (2.2) représente sa reconstitution temporelle à partir de ces composantes.

2.2.2 Fréquence instantanée et retard de groupe

La fréquence instantanée et le retard de groupe [24] d'un signal temporel $x(t)$ sont des fonctions monodimensionnelle (1D) qui représentent les caractéristiques simultanées de $x(t)$ en temps et en fréquence. Ils expriment mieux pour les signaux modulés en phase comme $x(t) = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \theta(t))$ ou $X(f) = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Theta(f))$ dont $\theta(t), \Theta(f) \in \mathfrak{R}$ qui ont respectivement, seulement une composante fréquentielle présente à chaque instant et une composante temporelle à chaque fréquence. Cependant, la plupart des signaux physiques présentent une

mixture riche de composantes spectrales. On aperçoit que même pour le signal mono-composant, il est perturbé par d'autres signaux de son environnement comme le bruit.

On peut trouver la relation de la fréquence instantanée par étude d'un signal mono composant, soit alors $x(t) = \exp(j.2.\pi.f_x.t)$ d'où :

$$f_x = \frac{1}{2.\pi} \frac{d}{dt} \arg(x(t)) \quad (2.3)$$

Par le concept dual, connu par le retard de groupe est mieux interprété dans l'analyse des filtres. Si on a $H(f) = \exp(-j.2.\pi.\tau.f)$, la réponse fréquentielle d'un système linéaire invariant dans le temps et pour un signal d'entrée de ce système $x(t) = \exp(j.2.\pi.f_0.t)$, la sortie sera donc le même signal décalé par une valeur τ . Par analogie le retard de groupe est défini par :

$$\tau_h(f) = -\frac{1}{2.\pi} \cdot \frac{d}{df} \arg(H(f)) \quad (2.4)$$

Pour les systèmes linéaires en phase, le retard de groupe est non dispersive (constant pour toutes les fréquences).

Pour les signaux multi composant le problème de la fréquence instantanée ne reflète pas la réalité du signal, car si on a par exemple un signal à deux composantes fréquentielles $y(t) = \exp(j.2.\pi.f_1.t) + \exp(j.2.\pi.f_2.t)$ et d'après la formule (2.3), $f_y(t) = \frac{f_1 + f_2}{2}$, ceci donne une fréquence instantanée égale à la moyenne des deux fréquences.

2.3 Limites de la transformation de *Fourier*

Si on veut connaître les composantes spectrales d'un signal, en utilisant la transformation de *Fourier*, on perd alors la connaissance de l'occurrence instantanée de ces composantes, ceci nous fait appel à d'autres représentations mixtes temps fréquence qui nous permettent de les localiser où bien de localiser ces variations au cours du temps, néanmoins, on est limité par une certaine résolution temps fréquence définie par l'incertitude de Heisenberg -Gabor

2.4 Résolution temps fréquence de Heisenberg -Gabor

Si on considère un signal temporel $x(t)$ à bande limitée dans $[-B/2, B/2]$, il est donc traduit par [15] :

$$x(t) = \int_{-B/2}^{B/2} X(f) \cdot \exp(j.2.\pi.f.t) \cdot df = 0, \text{ pour } |t| > T/2, \quad (2.5)$$

si $x(t)$ est à durée limitée, il est de même pour ses dérivées n^{èmes}, donc

$$\frac{d^n x}{dt^n}(t) = \int_{-B/2}^{B/2} (j.2.\pi.f)^n X(f). \exp(j2\pi ft) df = 0, \text{ pour } |t| > T/2 \quad (2.6)$$

si l'on cherche à évaluer le signal en une date $s \in [-T/2, T/2]$, alors,

$$x(s) = \int_{-B/2}^{B/2} X(f). \exp(j2\pi f(s-t)). df, \text{ pour } |s| < T/2, \text{ et } |t| > T/2 \quad (2.7)$$

Soit par développement en série de MacLaurin

$$\exp(j.2.\pi.f.(s-t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[j.2.\pi.(s-t)]^n}{n!} . f^n \quad (2.8)$$

alors pour $|s| < T/2$, on aura

$$x(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-t)^n}{n!} . \int_{-B/2}^{+B/2} (j.2.\pi.f)^n . X(f). \exp(j.2.\pi.f.t). df = 0 \quad (2.9)$$

puisque $|t| > T/2$, ce qui contredit le fait que le signal était initialement supposé non nul sur le support $[-T/2, T/2]$. En conclusion, on peut dire qu'à la fois un signal ne peut être de support arbitrairement réduit en temps et en fréquence. si on prend une fonction gaussienne,

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} . \exp(-\alpha.t^2) . \exp(-j.2.\pi.f.t). dt = \exp(-\pi^2.f^2/\alpha)$ montre que la largeur

équivalente d'une gaussienne proportionnelle à $\alpha^{\frac{1}{2}}$, la largeur fréquentielle de sa transformée de Fourier est donc une gaussienne proportionnelle à $\alpha^{\frac{1}{2}}$. Ces deux largeurs varient donc de façon inverse du paramètre α , de telle manière que si la largeur fréquentielle augmente, celle de la temporelle alors diminue et leur produit est restreint à rester constant.

Afin d'établir l'inégalité d'Heisenberg-Gabor, soit $x(t)$ d'énergie finie c'est-à-dire, son énergie $E_x = \int |x(t)|^2 . dt < \infty$, soit pour simplifier, on suppose que le signal et sa transformée de Fourier $X(f)$ aient tous les deux un centre de gravité nul c'est-à-dire $\int t|x(t)|^2 . dt = 0$ et $\int f|X(f)|^2 . df = 0$, alors respectivement les supports temporels et fréquentiels deviennent des moments d'inerties de formes :

$$\Delta t^2 = \frac{1}{E_x} . \int t^2 |x(t)|^2 . dt \quad (2.10)$$

$$\Delta f^2 = \frac{1}{E_x} . \int f^2 |X(f)|^2 . df \quad (2.11)$$

La quantité $I \equiv \int t.x^*(t).\frac{d}{dt}x(t).dt$ et par l'identité de Parseval on obtient :

$$(\text{Reel}\{I\})^2 \leq |I|^2 \leq \int t^2.|x(t)|^2.dt.\int \left|\frac{d}{dt}x(t)\right|^2.dt = 4.\pi^2.E_x^2.\Delta t^2.\Delta.f^2. \text{ Par intégration par partie de } I,$$

on aura $I = -E_x - I^* \Rightarrow I + I^* = -E_x$, soit encore $\text{Reel}\{I\} = -E_x/2$, ceci nous donne l'inégalité d'Heisenberg -Gabor

$$\Delta t.\Delta f \geq \frac{1}{4.\pi} \quad (2.12)$$

La seule fonction qui minimise cette inégalité est la fonction gaussienne où la relation 2.13 devient une égalité.

2.5 Représentations temps fréquence

Dans cette partie, on présente les transformations temps fréquence linéaires et quadratiques. La première représentation temps fréquence est la transformation de *Fourier* à court terme (*STFT*) qui est une transformation linéaire du signal $x(t)$, la seconde est le spectrogramme, Wigner Ville, Altes Q et la forme unitaire de Bertrand, qui sont des fonctions quadratiques du signal.

2.5.1 Transformation de *Fourier* à court terme (*STFT*)

La transformation la plus simple qui nous montre la variation spectrale du signal $x(t)$ est la *STFT* définie par [3,16] :

$$STFT_x(t, f, h) = \int x(\tau)h^*(\tau - t)\exp(-j.2.\pi.f.\tau).d\tau \quad (2.13.1)$$

$$STFT_x(t, f, H) = \exp(-j.2.\pi.f.t) \int X(f')H^*(f' - f)\exp(-j.2.\pi.f'.t).df' \quad (2.13.2)$$

La première équation montre que la *STFT* n'est que la transformation de *Fourier* d'un signal $x(t)$ pondérée par une fenêtre ($x(\tau).h^*(\tau - t)$), précisément la fenêtre d'analyse est réelle et paire, la *STFT* n'est donc que la transformation de *Fourier* du segment du signal centré à l'instant t . La deuxième équation de la *STFT* peut être interpréter comme étant une version filtrée du signal, si la fenêtre d'analyse est de type passe bas, l'évaluation de la *STFT* est alors équivalente à envoyer le signal à travers des filtres passe bandes $H^*(f' - f)$ centrés à la fréquence f . La *STFT* est donc le contenu fréquentiel centré en f autour du temps t . On définit alors le spectrogramme du signal $x(t)$ comme [1,16]:

$$SPEC_x(t, f, h) = |STFT_x(t, f, h)|^2 \quad (2.14)$$

Pour la *STFT* d'une impulsion brève centrée en $t=t_0$, le support de la *STFT* est donc centré en $t=t_0$ et sa durée égale à la durée de la fenêtre d'analyse. Par contre pour une impulsion brève fréquentielle centrée en $f=f_0$, sa *STFT* représente la bande de la fenêtre

d'analyse centrée en $f=f_0$. Pour une fenêtre d'analyse gaussienne d'équation $h(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp(-\pi(t/\sigma)^2)$, dont la transformée de *Fourier* est $H(f) = \sqrt{\sigma} \exp(-\pi(\sigma.f)^2)$ et pour que la *STFT* soit bien concentrée en temps, il faut donc que la fonction d'analyse gaussienne soit courte ($\sigma \rightarrow 0$), par contre pour quelle soit bien concentrée en fréquence, il faut que ($\sigma \gg 0$). Ceci est impossible au même temps d'avoir $\sigma \rightarrow 0$ et ($\sigma \gg 0$), c'est le compromis résolution temps fréquence.

2.5.2 Distributions de Wigner Ville et la fonction d'ambiguïté de Woodward

La première représentation de Wigner est donnée en mécanique quantique, pour un signal $x(t)$ elle est donc [3,2]

$$WVD_x(t, f) = \int x(t + \tau/2).x^*(t - \tau/2) \exp(-j.2.\pi.f.\tau).d\tau \quad (2.15.1)$$

$$WVD_x(t, f) = \int X(f + v/2).X^*(f - v/2) \exp(-j.2.\pi.t.v).dv \quad (2.15.2)$$

$$WVD_x(t, f) = \iint AF_x(\tau, v). \exp(j.2.\pi.(t.v - f\tau)).d\tau.dv \quad (2.15.3)$$

$X(f)$ est la transformée de *Fourier* (TF) de $x(t)$ et $AF_x(\tau, v)$ est la fonction d'ambiguïté de $x(t)$ définie par [3,17] :

$$AF_x(\tau, v) = \int x(t + \tau/2).x^*(t - \tau/2). \exp(-j.2.\pi.v.t).dt \quad (2.16.1)$$

$$AF_x(\tau, v) = \int X(f + v/2).X^*(f - v/2). \exp(j.2.\pi.\tau.f).df \quad (2.16.2)$$

La relation entre la fonction d'ambiguïté et la distribution de Wigner Ville du même signal $x(t)$ est donnée par

$$AF_x(\tau, v) = \iint WVD_x(t, f). \exp(-j.2.\pi(v.t - \tau.f)).dt.df \quad (2.17)$$

La fonction d'ambiguïté AF est une fonction d'autocorrélation à deux dimensions utilisée en radar et en sonar pour déterminer la vitesse et la distance des cibles mouvantes. L'équation (2.8) exprime que la *WVD* et la *AF* sont des paires de transformation de *Fourier* à deux dimensions.

2.5.3 Distributions Altes Q ou distribution Wigner à large bande

La distribution Altes Q d'un signal $x(t)$ est originalement proposée comme version large bande de la distribution de Wigner Ville [8,17,18], sa forme générale est donnée par :

$$Q_x(t, f) = f. \int X(f.\exp(u/2)).X^*(f.\exp(-u/2)). \exp(j.2.\pi.t.f.u) , \text{ pour } f > 0 \quad (2.18.1)$$

$$Q_x(t, f) = f \cdot \int_0^{\infty} X(f \cdot \sqrt{\alpha}) \cdot X^*(f / \sqrt{\alpha}) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t \cdot f - 1) \cdot d\alpha \quad (2.18.2)$$

$$Q_x(t, f) = \iint HAF_x(\xi, \beta) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (t \cdot f \cdot \beta - \xi \ln(f / f_r))) \cdot d\xi \cdot d\beta \quad (2.19)$$

f_r : représente une fréquence de référence positive.

Marinovich a proposé une formulation duale de la formule (2.18.1) appelée distribution de Wigner Ville à échelle invariant qui est :

$$MSIWD_x(t, c) = \int x(t \cdot \exp(\sigma / 2)) \cdot x^*(t \cdot \exp(-\sigma / 2)) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot c \cdot \sigma) \cdot d\sigma \quad (2.20)$$

Cette formulation utilise le domaine temporel du signal au lieu de sa représentation fréquentielle [8,19]. La distribution Altes Q est reliée à la fonction d'ambiguïté hyperbolique à travers la transformation de *Fourier* et de Mellin [17,20] par :

$$HAF_x(\xi, \beta) = \iint Q_x\left(\frac{c}{f_r \exp(b)}, f_r \cdot \exp(b)\right) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (\beta \cdot c - \xi \cdot b)) \cdot dc \cdot db \quad (2.21)$$

La distribution Altes Q est utile pour l'analyse des signaux ayant subi un changement d'échelle, comme par exemple, la compression ou la dilatation qui se produisent dans l'analyse doppler large bande des cibles mouvantes et elle poursuit mieux les signaux qui ont un retard de groupe de forme hyperbolique.

2.5.4 Déformations des représentations temps fréquence

La distribution Altes Q et la distribution de Wigner Ville sont des versions déformées l'une de l'autre par [17]

$$Q_x(t, f) = WVD_{WX}\left(\frac{t \cdot f}{f_r}, f_r \ln(f / f_r)\right) \quad (2.22)$$

$$WVD_x(t, f) = Q_{W^{-1}X}(t \cdot \exp(-f / f_r), f_r \exp(f / f_r)) \quad (2.23)$$

Dans les formules (2.22) et (2.23), le signal est d'abord pré déformé en utilisant les transformations unitaires suivantes [17] du signal suivi par une déformation des axes temps fréquence.

$$(WX)(f) = \sqrt{\exp(f / f_r)} \cdot X(f_r \cdot \exp(f / f_r)) \quad (2.24)$$

$$(W^{-1}X)(f) = \sqrt{\frac{f}{f_r}} \cdot X\left(f_r \ln\left(\frac{f}{f_r}\right)\right) \quad , \quad \text{pour } f > 0 \quad (2.25)$$

Puisque W et W^{-1} dans (2.24) et (2.25) sont des opérateurs inverses c'est-à-dire $(W^{-1}WX)(f) = X(f)$, l'équation (2.22) peut être réécrite sous la forme :

$$Q_{W^{-1}X}(t, f) = WVD_x\left(\frac{t \cdot f}{f_r}, f_r \cdot \ln(f / f_r)\right) \quad (2.26)$$

De même la fonction de Woodward AF dans (2.7.1), (2.7.2) et la fonction hyperbolique [17] HAF dans les équations (2.9.1) et (2.9.2) sont reliées entre eux par :

$$HAF_X(\xi, \beta) = AF_{wX}(\xi / f_r, f_r \cdot \beta) \quad (2.27)$$

$$HAF_{w^{-1}X}(\xi, \beta) = AF_X(\xi / f_r, f_r \beta) \quad (2.28)$$

2.5.5 Distributions de Bertrand

Les distributions de Bertrand notées par Pk sont formulés [17,21] pour $f > 0$ comme suit :

$$BP_k D_X(t, f, \mu) = f \int X(f \cdot \lambda_k(u)) \cdot X^*(f \cdot \lambda_k(-u)) \cdot \mu(u) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t \cdot f (\lambda_k(u) - \lambda_k(-u))) \cdot du \quad 2.29$$

$$\lambda_0(u) = \frac{u/2 \cdot \exp(u/2)}{\sinh(u/2)} = \frac{u}{1 - \exp(-u)}, \quad \lambda_1(u) = \exp\left(1 + \frac{u \cdot \exp(-u)}{\exp(-u) - 1}\right), \quad \text{et pour } k \neq 0,1 \text{ on a}$$

$$\lambda_k(u) = \left[k \cdot \frac{\exp(-u) - 1}{\exp(-k \cdot u) - 1} \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad \text{avec } \mu(u) = \mu^*(-u)$$

Ces distributions sont des représentations temps fréquence affines et qui sont covariantes pour toute transformation temporelle affine sur le signal analytique, c'est-à-dire pour $Y(f) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot X(f/a) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$, pour $f > 0$, sa distribution de Bertrand

$$BP_k D_y(t, f, \mu) = BP_k D_y(a(t - t_0), \frac{f}{a}, \mu), \text{ pour } f > 0.$$

La covariance affine est utile dans les applications doppler à large bande. La sélection de k les distributions Pk ont aussi une covariance étendue à la dispersive, c'est-à-dire un décalage non constant sur le signal analytique produit une proportionnalité des fonctions fréquentielles de puissances, d'hyperboliques ou de logarithmiques. La distribution qui préserve le produit scalaire est celle pour $k=0$ notée par P_0 et qui est formulée pour $f > 0$ par :

$$BP_0 D_X(t, f, \mu_0) = f \int X\left(f \cdot \frac{u/2 \exp(u/2)}{\sinh(u/2)}\right) \cdot X^*\left(f \cdot \frac{u/2 \exp(-u/2)}{\sinh(u/2)}\right) \cdot \frac{u/2}{\sinh(u/2)} \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t \cdot f \cdot u) \cdot du \quad (2.30)$$

$$\mu_0(u) = \frac{u/2}{\sinh(u/2)}. \text{ La forme spéciale de } P_0 \text{ est appelée l'unitaire } P_0 \text{ et elle vérifie la}$$

relation suivante :

$$\iint BP_0 D_X(t, f, \mu_0) \cdot BP_0 D_Y(t, f, \mu_0) dt \cdot df = \left| \int_0^\infty X(f) \cdot Y^*(f) \cdot df \right|^2 \quad (2.31)$$

2.5.6. Termes croisés de la représentation quadratique temps fréquence

Le spectrogramme, les distributions de Wigner Ville, Altes Q et de Bertrand, comme toutes autres représentations énergétiques temps fréquence sont des fonctions quadratiques du signal. Ces fonctions sont non linéaires et compliquent l'analyse visuelle de la représentation du plan temps fréquence. L'opération non linéaire est due à [17,22] :

$$|x(t) + y(t)|^2 = |x(t)|^2 + |y(t)|^2 + 2 \cdot \text{Real}\{x(t) \cdot y^*(t)\} \quad (2.32)$$

Cette opération non linéaire est égale à la somme des deux auto termes $|x(t)|^2, |y(t)|^2$ plus les termes croisés $2 \text{Real}\{x(t) \cdot y^*(t)\}$.

La transformation de Wigner Ville d'un signal $y(t)$ multi composant tel que $y(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$ est :

$$WVD_y(t, f) = \sum_{i=1}^N WVD_{x_i}(t, f) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N \text{Real}\{WVD_{x_i} \cdot WVD_{x_k}(t, f)\} \quad (2.33)$$

comprend N autos termes et $N(N-1)/2$ termes croisés. Pour les composantes du signal $y(t)$ décalées l'une de l'autre, c'est-à-dire $x_i(t) = x(t - t_i) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_i t)$, les termes croisés de la WVD du signal $y(t)$ se trouvent alors au centre du plan temps fréquence $(\frac{t_i + t_m}{2}, \frac{f_i + f_m}{2})$ entre les paires des autos termes des composantes du signal $y(t)$. Ces termes croisés oscillent avec un espace proportionnel à la distance $(t_i - t_m, f_i - f_m)$ entre les paires des autos termes. Par contre les termes croisés de la fonction d'ambiguïté AF se trouvent loin de l'origine du plan (τ, ν) et les autos termes se trouvent superposer à l'origine de ce plan.

Les caractéristiques des termes croisés touchent aussi le spectrogramme, Altes Q et les distributions de Bertrand. Le spectrogramme contient des termes croisés onduleux qui occurrent partout où la $STFT$ des autos composants du signal se chevauchent dans le plan temps fréquence. Si la largeur de bande de la fenêtre d'analyse $H(f)$ de la $STFT$ est supérieur à la fréquence f_i c'est-à-dire $|H(\pm f_i)| \neq 0$, les termes croisés sont alors non nulles et ils sont modulés par une fonction cosinus de fréquence $2f_i$. De même les distributions de Bertrand produisent des termes croisés oscillants correspondants à chaque paire des composants du signal.

Afin d'éliminer ces termes croisés, la solution proposée, est le lissage temporel, le lissage fréquentiel ou le lissage mixte. La pseudo Wigner Ville ($PWVD$) et la pseudo Wigner Ville lissée ($SPWVD$), utilisent une fenêtre d'analyse passe bas $h(\tau)$ et $g(t)$ afin d'éliminer ces termes croisés, le prix de cette mesure fait donc perdre la résolution entre les composantes

du signal dans le plan temps fréquence. La transformation *PWVD* et *SPWVD* du signal $x(t)$ ont respectivement les formes suivantes [23] :

$$PWVD_x(t, f) = \int h(\tau)x(t + \tau/2).x^*(t - \tau/2).\exp(-j.2.\pi.f.\tau).d\tau \quad (2.34)$$

$$SPWVD_x(t, f) = \int h(\tau).\int g(s - t).x(s + \tau/2).x^*(s - \tau/2)ds.\exp(-j.2.\pi.f.\tau).d\tau \quad (2.35)$$

2.6 Propriétés des représentations temps fréquence

Ces propriétés peuvent être regroupées en cinq catégories, covariances, distributions d'énergies, signal à analyser, localisations et produit scalaire [17]

2.6.1 Propriétés de covariances

Les propriétés *P1-P6* de covariance citées dans le tableau 2.1 dans lesquelles certaines opérations sur le signal, la translation, la dilatation, ou la convolution, devraient être préserver dans la *TFR*, c'est-à-dire, si le signal est transformé dans une certaine manière, son *TFR* devrait alors se transformer exactement de la même façon.

Nom de la propriété	Propriété de la <i>TFR</i>
P1 : covariance à la translation fréquentielle	$T_y(t, f) = T_x(t, f - f_0)$ Pour $y(t) = x(t).\exp(j.2.\pi.f_0.t)$
P2 : covariance au décalage temporel	$T_y(t, f) = T_x(t - t_0, f)$ Pour $y(t) = x(t - t_0)$
P3 : covariance à l'échelle	$T_y(t, f) = T_x(at, f/a)$ Pour $y(t) = \sqrt{a}x(at)$
P4 : covariance décalage temporel hyperbolique	$T_y(t, f) = T_x(t - c/f, f)$ Pour $Y(f) = X(f).\exp(-j.2.\pi.c.\ln(f/f_r))$
P5 : covariance à la convolution	$T_y(t, f) = \int T_h(t - \tau, f).T_x(\tau, f).d\tau$ Pour $y(t) = \int h(t - \tau).x(\tau).d\tau$
P6 : covariance à la modulation	$T_y(t, f) = \int T_h(t, f - f').T_x(\tau, f').df'$ Pour $y(t) = h(t).x(t)$

Tableau 2.1 : Propriétés de covariances des *TFRs*

2.6.2 Propriétés de la distribution de la densité d'énergie.

La deuxième catégorie des propriétés provient du désir de généraliser les concepts de l'énergie instantanée unidimensionnelle de signal, $|x(t)|^2$ et la densité spectrale de puissance $|X(f)|^2$ dans une fonction instantanée bidimensionnelle de densité de probabilité ou une distribution d'énergie, $T_x(t_0, f_0)$ qui fournit idéalement une mesure de l'énergie locale du signal ou de la probabilité que ce dernier contient une composante sinusoïdale f_0 à l'instant

t0. Les propriétés P7- P13 résumés dans le tableau 2.2 expriment cette catégorie de propriétés.

Nom de la propriété	Propriété de la <i>TFR</i>
P7 : valeur réelle	$T_x^*(t, f) = T_x(t, f)$
P8 : positivité	$T_x(t, f) \geq 0$
P9 : marginalité temporelle	$\int T_x(t, f) df = x(t) ^2$
P10 : marginalité fréquentielle	$\int T_x(t, f) dt = X(f) ^2$
P11 : distribution d'énergie	$\iint T_x(t, f) dt df = \int X(f) ^2 df$
P12 : moments temporels	$\iint t^n T_x(t, f) dt df = \int t^n x(t) ^2 dt$
P13 : moments fréquentielles	$\iint f^n T_x(t, f) dt df = \int f^n X(f) ^2 df$

Tableau 2.2 : Propriétés de la distribution de la densité d'énergie.

2.6.3 Propriétés du signal à analyser

La prochaine catégorie des propriétés P14-P18 exige quelques considérations. Une *TFR* devrait avoir le même support non nul, c'est à dire elle a la même largeur de bande du signal à analyser. A n'importe quel instant donné t , la moyenne ou la fréquence moyenne devrait être égale à la fréquence instantanée du signal, tandis que la moyenne ou le centre de la gravité de la *TFR* dans la direction du temps devrait être égale au retard de groupe du signal. Ces deux propriétés ont été employées pour analyser la déformation de systèmes audio et les signaux complexes du sonar.

La propriété P18 est l'équivalent à la propriété de dualité de la transformée de *Fourier*. Le tableau 2.3 résume ces propriétés.

Nom de la propriété	Propriété de la <i>TFR</i>
P14 : Support temporel fini	$T_x(t, f) = 0$, pour $t \notin (t1, t2)$, si $x(t)=0$ pour $t \notin (t1, t2)$
P15 : Support fréquentiel fini	$T_x(t, f) = 0$, pour $f \notin (f1, f2)$, si $X(f)=0$, pour $f \notin (f1, f2)$
P16 : Fréquence instantanée	$\frac{\int f T_x(t, f) df}{\int T_x(t, f) df} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg\{x(t)\}$

P17 : Retard de groupe	$\frac{\int t.T_x(t, f).dt}{\int T_x(t, f).dt} = \frac{-1}{2.\pi} \frac{d}{df} \arg\{X(f)\}$
P18 : Transformation de <i>Fourier</i>	$T_y(t, f) = T_x(-f, t) , \text{ pour } y(t) = X(t)$

Tableau 2.3 : Propriétés de l'analyse du signal

2.6.4. Propriétés de localisation du signal

Les propriétés *P19-P24* sont des propriétés idéales de localisation de *TFR* qui sont souhaitables pour des possibilités à haute résolution. Ces propriétés déclarent que si un signal est parfaitement concentré en temps ou en fréquence (c.-à-d., le signal est une impulsion ou une sinusoïde), son *TFR* devrait respectivement alors être parfaitement concentrée « au même instant ou en même fréquence ». Les propriétés *P21-P22* exigent que la *TFR* d'un signal de spectre linéaire ou hyperbolique doive être parfaitement concentrée le long du retard de groupe de ce signal. Le tableau 2.4 résume ces propriétés.

Nom de la propriété	Propriété de la <i>TFR</i>
P19 : Localisation fréquentielle	$T_x(t, f) = \delta(f - f_0) ,$ Pour $X(f) = \delta(f - f_0)$
P20 : Localisation temporelle	$T_x(t, f) = \delta(t - t_0) ,$ Pour $x(t) = \delta(t - t_0)$
P21 : Localisation chirp linéaire	$T_x(t, f) = \delta(t - c.f) ,$ Pour $X(f) = \exp(-j.\pi.c.f^2)$

P22 : Localisation hyperbolique	$T_x(t, f) = \frac{1}{f} \delta(t - c/f), \text{ pour } f > 0 \text{ et si}$ $X_c(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot c \cdot \ln(f/f_r)), \text{ pour } f > 0$
P23 : Convolution chirp	$T_y(t, f) = T_x(t - f/c, f),$ <p>Pour $y(t) = \int x(t - \tau) \sqrt{ c } \cdot \exp(j \cdot \pi \cdot c \cdot \tau^2) \cdot d\tau$</p>
P24 : Multiplication chirp	$T_y(t, f) = T_x(t, f - c \cdot t),$ <p>Pour $y(t) = x(t) \cdot \exp(j \pi \cdot c \cdot t^2)$</p>

Tableau 2.4 : Propriétés de localisation du signal

2.6.5 Préservation du produit scalaire

La dernière propriété est appelée formule de Moyal ou bien la propriété unitaire, qui déclare que la *TFR* doit préserver les projections du signal, le produit scalaire, et la norme métrique qui sont utilisés fréquemment dans la détection, la synthèse et la théorie des approximations. Elle exprime aussi que si deux fonctions de bases sont orthogonales, leur produit scalaire est nul et leurs *TFRs* doivent alors être orthogonales.

La propriété *P25* est donc analogue au théorème de Parseval comme le cas de la transformée de *Fourier*. Elle est donnée par :

$$\left| \int x(t) \cdot y^*(t) \cdot dt \right|^2 = \iint T_x(t, f) T_y^*(t, f) \cdot dt \cdot df \quad (2.36)$$

2.7 Classes de représentations temps fréquence

Les propriétés précédentes de la *TFR*, de la propriété *P1* jusqu'à la propriété *P25* sont idéales et ne peuvent se rassembler dans une seule *TFR*, d'où la notion de classification de ces représentations en classes ou en sous classes vérifiant au moins une de propriétés précédentes.

Une revue sera donnée sur la classe de Cohen qui est covariante à la translation et au décalage, la classe affine des *TFRs* est pour la covariance affine, la classe hyperbolique développée pour les signaux dont leurs retards de groupe sont hyperboliques, ainsi que pour la classe de puissance qui est pour les signaux qui ont des retards de groupe de puissances.

Grouper des *TFRs* dans des classes partageant des propriétés [17,24] communes a les avantages suivants : parmi ces avantages, la perspicacité qui est très utile quant à laquelle les types de *TFRs* fonctionneront mieux dans des différentes situations, par exemple, beaucoup des membres *TFRs* de la classe de Cohen sont bien adaptés à l'analyse de largeur de bande

constante tandis que plusieurs membres de la classe affine sont plus adaptés pour l'analyse de la multirésolution.

2.7.1 Classe de Cohen

La classe de représentation temps fréquence de Cohen est groupée selon la relation :

$$\left\{ T_x(t, f) \mid y(t) = x(t - t_0) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \Rightarrow T_y(t, f) = T_x(t - t_0, f - f_0) \right\} \quad (2.37)$$

Elle exprime toutes les représentations quadratiques temps fréquence qui vérifient les conditions *P1* et *P2* dans le tableau 2.1. Les covariances au décalage temporel et au décalage fréquentiel sont des propriétés utiles dans l'analyse de la parole et des systèmes doppler à faible bande. Chaque *TFR* d'un signal $x(t)$ de cette classe, peut être écrite dans l'une des formes suivantes :

$$C_x(t, f; \Psi_c) = \iint \varphi_c(t - t', \tau) x(t' + \tau/2) x^*(t' - \tau/2) \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau) dt' d\tau \quad (2.38.1)$$

$$C_x(t, f; \Psi_c) = \iint \Phi_c(f - f', v) X(f' + v/2) X^*(f' - v/2) \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t \cdot v) df' dv \quad (2.38.2)$$

$$C_x(t, f; \Psi_c) = \iint \psi_c(t - t', f - f') WVD_x(t', f') dt' df' \quad (2.38.3)$$

$$C_x(t, f; \Psi_c) = \iint \Psi_c(\tau, v) AF_x(\tau, v) d\tau dv \quad (2.38.4)$$

Chaque forme est caractérisée par un des quatre noyaux, $\varphi_c(t, \tau)$, $\Phi_c(f, v)$, $\psi_c(t, f)$ et $\Psi_c(\tau, v)$ qui sont inter reliés par des transformations de *Fourier* suivantes :

$$\varphi_c(t, \tau) = \iint \Phi_c(f, v) \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (f\tau + v \cdot t)) df dv = \int \Psi_c(\tau, v) \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t) dv \quad (2.39)$$

$$\psi_c(t, f) = \iint \Psi_c(\tau, v) \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (v \cdot t - f \cdot \tau)) d\tau dv = \int \Phi_c(f, v) \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t) dv \quad (2.40)$$

Chaque noyau à ces spécifications et nous délivre une *TFR* bien appropriée. Plusieurs noyaux ont été proposés pour atteindre une certaine *TFR* bien adapté au signal à analyser. En plus des propriétés *P1* et *P2* et en fonction du noyau sélectionné, plusieurs *TFRs* seront définies dans cette classe et qui peuvent vérifier certaines propriétés parmi d'autres citées auparavant, par exemple pour Wigner Ville dont le noyau $\Psi_c(\tau, v) = 1$, on constate que les propriétés *P1-P25* sont bien vérifiées mais au détriment des interférences entre les autos termes du signal. Dans le domaine des fonctions d'ambiguïtés, ce noyau joue le rôle d'un filtre passe tout. Pour réduire ces interférences, il faudrait chercher d'autres noyaux par exemple types passe bas qui élimine les termes croisées entre les composantes principales du signal.

2.7.2 Classe Affine

Elle est définie par :

$$\left\{ T_x(t, f) \mid y(t) = \sqrt{|a|} x(a(t - t_0)) \Rightarrow T_y(t, f) = T_x(a(t - t_0), f/a) \right\} \quad (2.41)$$

Ces *TFRs* sont covariantes au changement d'échelle et à la translation temporelle. Les propriétés *P2* et *P3* sont membres de cette classe, la *P3* est bien adaptée pour plusieurs applications incluant les systèmes de doppler à large bande et les transitoires du signal. Chaque *TFR* du signal $x(t)$ de cette classe peut être formulé dans l'une des formulations suivantes :

$$A_x(t, f; \Psi_A^{(A)}) = |f| \iint \varphi_A^{(A)}(f(t-t'), f\tau) x\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) dt' d\tau \quad (2.42.1)$$

$$A_x(t, f; \Psi_A^{(A)}) = \frac{1}{|f|} \iint \Phi_A^{(A)}\left(-\frac{f'}{f}, \frac{v}{f}\right) X\left(f' + \frac{v}{2}\right) X^*\left(f' - \frac{v}{2}\right) df' dv \quad (2.42.2)$$

$$A_x(t, f; \Psi_A^{(A)}) = \iint \psi_A^{(A)}\left(f(t-t'), -\frac{f'}{f}\right) WVD_x(t', f') dt' df' \quad (2.42.3)$$

$$A_x(t, f; \Psi_A^{(A)}) = \iint \Psi_A^{(A)}\left(f\tau, -\frac{v}{f}\right) AF_x(\tau, v) \exp(j.2.\pi.t.v). d\tau dv \quad (2.42.4)$$

Les noyaux de la classe affine sont inter reliés par les mêmes transformations de *Fourier* citées en (2.27), (2.28) et on peut les représenter par $\varphi_A^{(A)}(c, \xi) \leftrightarrow \Phi_A^{(A)}(b, \beta)$ $\psi_A^{(A)}(c, b) \leftrightarrow \Psi_A^{(A)}(\xi, \beta)$. On peut citer quelques *TFRs* de cette classe, comme celle de Bertrand P_0 et le scalogramme. En plus des propriétés *P2* et *P3*, d'autres membres de la classe affine peuvent vérifier d'autres propriétés des tableaux précédents.

2.7.3 Sous classe Affine -Cohen

Cette sous classe provient de l'intersection de quelques *TFRs* qui vérifient les propriétés de la classe de Cohen et la classe Affine, elle est représentée par la condition suivante

$$\left\{ T_y(t, f) \left| y(t) = \sqrt{|a|} x(a(t-t_0)) \exp(j.2.\pi.f_0.t) \Rightarrow T_y(t, f) = T_x\left(a(t-t_0), \frac{f-f_0}{a}\right) \right. \right\} \quad (2.43)$$

2.7.4 Classe Hyperbolique

Les *TFRs* dans cette classe doivent vérifier la contrainte suivante :

$$\left\{ T_X(t, f) \middle| Y(f) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} X\left(\frac{f}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{f}} \exp(-j2\pi c \ln(f/f_r)) \Rightarrow T_Y(t, f) = T_X\left(a\left(t - \frac{c}{f}\right), \frac{f}{a}\right) \right\} \quad (2.44)$$

Cette classe qui est covariante à l'échelle et covariante au décalage temporel du signal analytique, elle vérifie les propriétés *P3* et *P4*. Ces types de *TFRs* peuvent être formulées par :

$$H_x(t, f; \Psi_H^{(H)}) = \iint \varphi_H^{(H)}(tf - c, \zeta) v_x(c, \zeta) \exp(-j2\pi[\ln(f/f_r)]\zeta) dc d\zeta \quad (2.45.1)$$

$$= \iint \Phi_H^{(H)}(\ln(f/f_r) - b, \beta) f_r \exp(b) X(f_r \exp(b + \beta/2)) X^*(f_r \exp(b - \beta/2)) \exp(j2\pi f \beta) db d\beta \quad (2.45.2)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_H^{(H)}\left(tf - t'f', \ln\left(\frac{f}{f'}\right)\right) Q_X(t', f') dt' df' \quad (2.45.3)$$

$$= \iint_0^\infty \Psi_H^{(H)}(\zeta, \beta) HAF_X(\zeta, \beta) \exp(j2\pi(tf\beta - [\ln(f/f_r)]\zeta)) d\zeta d\beta \quad (2.45.4)$$

$Q_X(t, f)$ est la distribution Altes Q , $HAF_X(\zeta, \beta)$ est la fonction d'ambiguïté hyperbolique et le signal quadratique produit est

$$v_x(c, \zeta) = \left[\int_0^\infty X(f) \left(\frac{f}{f_r}\right)^{j2\pi(c+\zeta/2)} \frac{df}{\sqrt{f}} \right] \left[\int_0^\infty X^*(v) \left(\frac{v}{f_r}\right)^{-j2\pi(c-\zeta/2)} \frac{dv}{\sqrt{v}} \right] \quad (2.46)$$

On note chaque *TFR* de cette classe doit vérifier au moins les propriétés *P3* et *P4*. Les relations entre noyaux sont faites par les transformations de *Fourier* et on peut les noter par $\psi_H^{(H)}(c, b) \leftrightarrow \Psi_H^{(H)}(\zeta, \beta) \varphi_H^{(H)}(c, \zeta) \leftrightarrow \Phi_H^{(H)}(b, \beta)$.

2.7.5 Classe de puissance d'ordre k

Elle est définie par la relation suivante :

$$\left\{ T_X(t, f) \middle| Y(f) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} X\left(\frac{f}{a}\right) \exp(-j2\pi c [\text{sgn}(f)] |f/f_r|^k) \Rightarrow T_Y(t, f) = T_X\left(a\left(t - \frac{k}{f_r} \left|\frac{f}{f_r}\right|^{k-1}\right), \frac{f}{a}\right) \right\} \quad (2.47)$$

La classe de puissance des *TFRs* se composent de plusieurs sous classes chacune d'elle indexé par le facteur $-\infty < k < \infty$, ces *TFRs* sont covariantes à l'échelle et covariantes au décalage temporel de puissance. Cette classe représente parfaitement les changements

dispersifs du retard de groupe du signal qui est proportionnel à la puissance en fréquence. Pour le cas particulier $k=1$, cette classe devient la classe affine.

Sachant que $\xi_k(f) = \text{sgn}(f)|f|^k$, chaque *TFR* de cette classe peut être formulée par :

$$PC_X^{(k)}(t, f; \Psi_{pc}^{(A)}) = \left| \xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right) \right| \iint \varphi_{pc}^{(A)} \left(\xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right) \left[\frac{t}{\tau_k(f)} - c \right], \xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right) \zeta \right) v_x^{(k)}(c, \zeta) dc d\zeta \quad (2.48.1)$$

$$= \frac{1}{\left| \xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right) \right|} \iint \Phi_{pc}^{(A)} \left(\frac{-b}{\xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right)}, \frac{\beta}{\xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right)} \right) V_x^{(k)}(b, \beta) \exp(j2\pi \frac{t}{\tau_k(f)} \beta) db d\beta \quad 2.48.2$$

$$= \iint \psi_{pc}^{(A)} \left(\xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right) \left[\frac{-t}{\tau_k(f')} + \frac{t}{\tau_k(f)} \right], -\xi_k \left(\frac{f'}{f} \right) \right) WVD_X^{(k)}(t', f') dt' df' \quad (2.48.3)$$

$$= \iint \Psi_{pc}^{(A)} \left(\xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right) \zeta, \frac{\beta}{\xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right)} \right) AF_X^{(k)}(\zeta, \beta) \exp(j2\pi \frac{t}{\tau_k(f)} \beta) d\zeta d\beta \quad (2.48.4)$$

Sachant que le signal produit d'ordre k est :

$$v_X^{(k)}(c, \zeta) = \rho_X^{(k)}(c + \zeta/2) \rho_X^{(k)*}(c - \zeta/2), \quad (2.49)$$

$$\text{avec } \rho_X^{(k)}(c) = \int X(f) \sqrt{|\tau_k(f)|} \exp(j2\pi c \xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right)) df \quad (2.50)$$

Le produit spectral d'ordre k est donné par :

$$V_X^{(k)}(b, \beta) = \frac{f_r}{|k| |b^2 - \beta^2/4|^{2k}} X(f_r \xi_k^{-1}(b + \beta/2)) X^*(f_r \xi_k^{-1}(b - \beta/2)) \quad (2.51)$$

dont la fonction inverse de phase d'ordre k est :

$$\xi_k^{-1}(b) = \text{sgn}(b) |b|^{1/k} \quad (2.52)$$

et le retard de groupe d'ordre k est :

$$\tau_k(f) = \frac{d}{df} \xi_k \left(\frac{f}{f_r} \right) = \frac{k}{f_r} \left| \frac{f}{f_r} \right|^{k-1}, \text{ pour } k \neq 0 \quad (2.53)$$

On note que les distributions de Bertrand Pk font partie de cette classe.

2.8 Conclusion

On a traité dans ce chapitre les *TFRs* linéaires, quadratiques, et les différents types de leurs propriétés idéales de *PI-P25* que parmi certaines représentations temps fréquence vérifient quelques unes de ces propriétés. Pour qu'un ensemble de *TFRs* soit regroupé dans

une classe, il faudrait au moins qu'elles partagent certaines propriétés. Les plus importantes propriétés de classification sont la covariance en translation temporelle et fréquentielle, en plus de la covariance à l'échelle. Le retard de groupe d'un signal sous analyse, joue un rôle important dont le choix d'une certaine classe par rapport à une autre, ainsi que le type de la largeur de bande des signaux.

Troisième chapitre

Analyse Temps Echelle Des Signaux non Stationnaires

3.1 Introduction

Nous savons bien que la transformée de *Fourier* à fenêtre (*STFT*) présente un inconvénient majeur de résolution temporelle fixe.

La transformée en ondelette [8,9] va nous permettre de pallier cet inconvénient. Il est alors nécessaire de trouver un outil qui adapte sa résolution à la taille de l'objet ou du détail analysé. Plus généralement, on peut distinguer deux intérêts principaux des ondelettes en tant qu'outil mathématique d'analyse et de représentation des fonctions.

Le premier est, comme dit précédemment, centré autour de l'idée de construire un outil d'analyse local en temps. Nous introduirons alors la transformée en ondelette continue et

nous verrons comment elle résout les problèmes posés par les outils classiques. La transformée en ondelette est non seulement une analyse locale mais, de plus, sa résolution temporelle est variable, elle permet donc de décrire le comportement local des signaux à différentes échelles de temps. Le second est celui du problème de reconstruction et de la recherche de représentations pratiques. En effet, cette transformée nous permet bien de reconstruire le signal de départ et présente des avantages majeurs d'un point de vue numérique.

Nous présentons les propriétés de la transformée en ondelette continue surtout en termes de résolution temps-fréquence et de filtrage, ensuite nous présentons la théorie de l'analyse multirésolution qui, d'une part décrit la définition de bases discrètes d'ondelette obtenues par échantillonnage dyadique du facteur d'échelle et d'autre part permet de mettre en évidence les liens existant entre bases d'ondelettes et de bancs de filtres. La décomposition en paquets d'ondelette peut ainsi être définie comme une extension de la transformée en ondelette discrète, permettant une exploration dichotomique de l'axe des échelles.

3.2 Transformée en ondelette continue

La transformée en ondelette continue (*CWT*), permet de faire une projection sur une base de fonctions dont la construction diffère de celle de la *STFT*. Les ondelettes sont construites à partir d'une "ondelette mère" $\psi(t)$ à l'aide d'un opérateur de translation temporelle t et d'un opérateur de changement d'échelle a . La transformée en ondelette continue d'un signal $x(t)$ est définie par [9,26]:

$$CWT_x(t, a) = \int x(u) \cdot \psi_{t,a}^*(u) \cdot du = \langle x, \psi_{t,a} \rangle, \quad \text{avec} \quad (3.1)$$

$$\psi_{t,a}(u) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) \quad (3.2)$$

Comme il a été indiqué par la formule (3.1), que la *CWT* est comme un produit scalaire, donc elle possède la propriété de la linéarité.

La transformée en ondelette est inversible si l'ondelette mère vérifie la condition d'admissibilité :

$$\int |\Psi(f)|^2 \cdot \frac{df}{|f|} = C_\psi < \infty, \quad \text{et} \quad \int \psi(t) \cdot dt = \Psi(0) = 0 \quad (3.3)$$

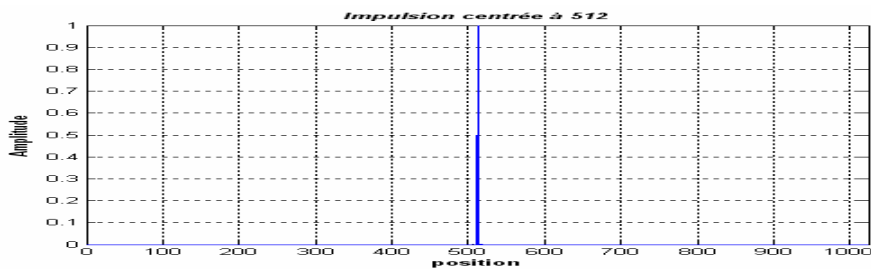
$\Psi(f)$: est la transformée de *Fourier* de $\psi(t)$. Le signal reconstitué à partir de sa transformée en ondelette est :

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint CWT_x(\tau, a) \psi_{t,a}(\tau) \frac{da \cdot d\tau}{a^2} \quad (3.4)$$

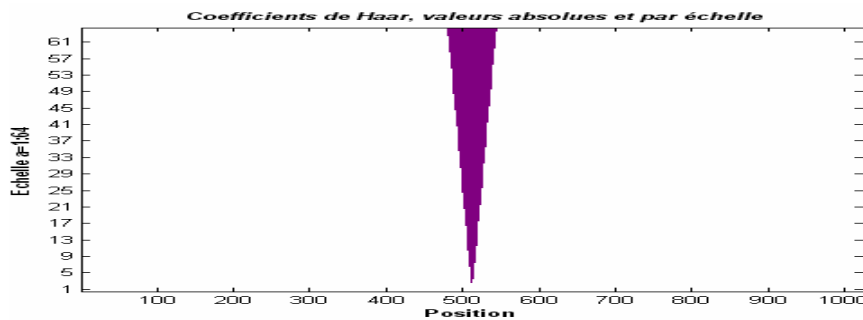
La *CWT* possède la propriété de covariance par translation en temps et dilatation en échelle c'est-à-dire pour un signal

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0}} x\left(\frac{t-t_0}{a_0}\right) \Rightarrow CWT_y(t, a) = CWT_x\left(\frac{a}{a_0}, \frac{t-t_0}{a_0}\right) \quad (3.5)$$

Les propriétés peuvent être simulées sur une ondelette de Haar d'une impulsion de Dirac comme exemple présenté dans la figure 3.1.



(a) Signal « impulsion centrée »



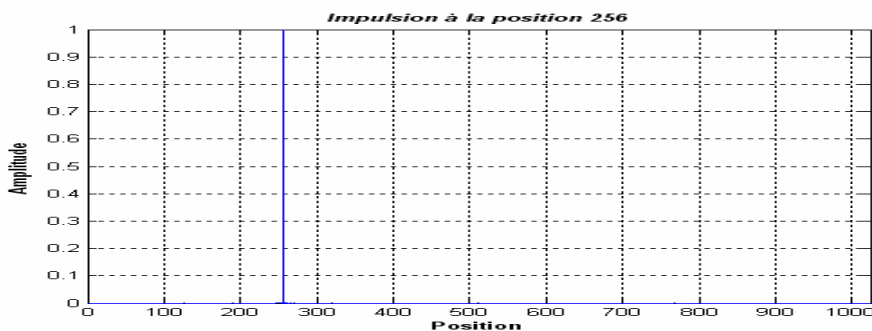
(b) La *CWT* de l'impulsion centrée par l'ondelette de Haar

Figure 3.1 : (a) : Impulsion centrée, (b) la *CWT* de l'impulsion par Haar, échelle (1:64)

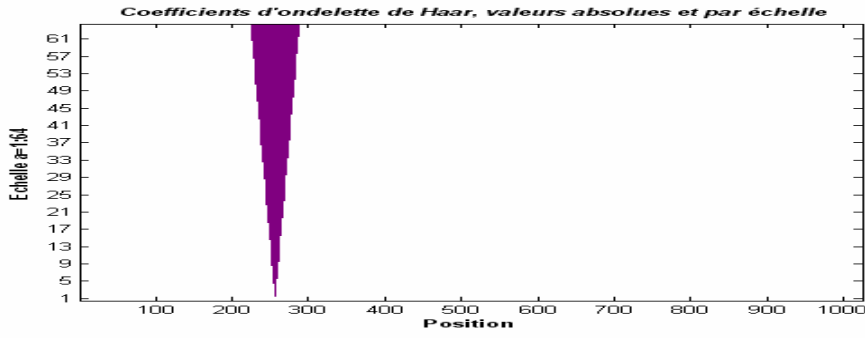
Pour un signal $x(t)$ dont sa transformée en ondelette continue $CWT_x(t, a)$, c'est à dire $x(t) \leftrightarrow CWT_x(t, a)$, alors pour $y(t) = x(t - t_0)$ et pour $a_0 = 1$ on aura :

$$y(t) \leftrightarrow CWT_y(t, a) = CWT_x(t - t_0, a) \quad (3.6)$$

Cette propriété peut être vue sur la figure 3.2 sur une impulsion décalée.



(a) Signal « impulsion décalée à gauche ».



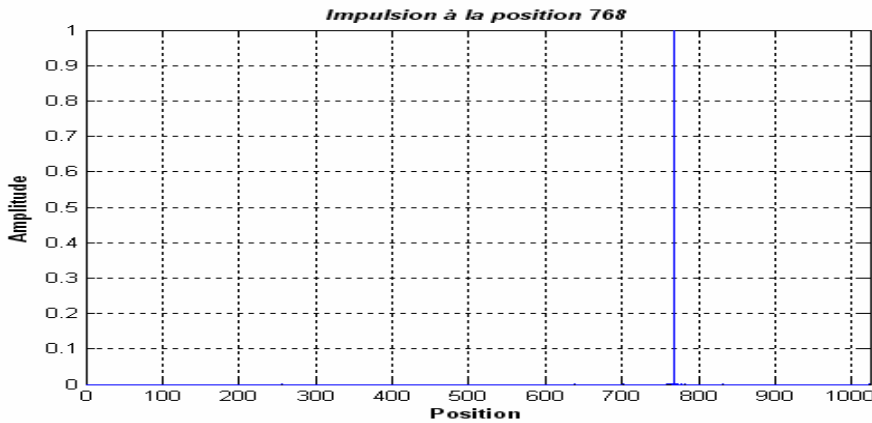
(b) : La *CWT* de l'impulsion décalée par l'ondelette de Haar

Figure 3.2 : (a) : Impulsion décalée, (b) la *CWT* de l'impulsion décalée par Haar, échelle (1:64)

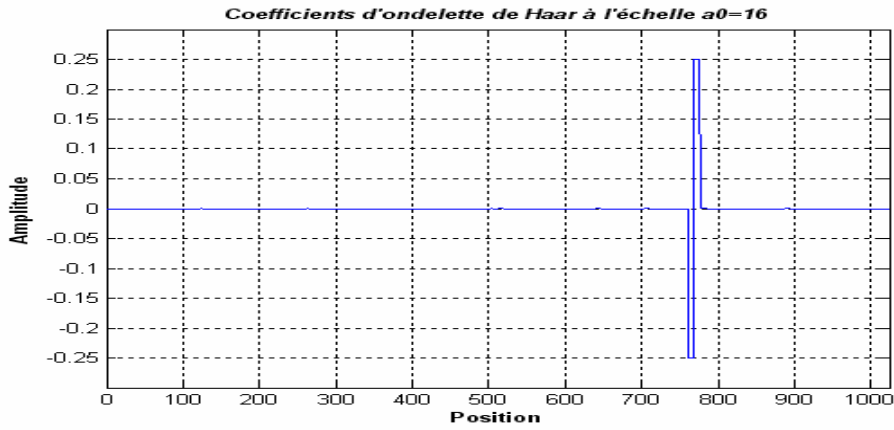
La *CWT* a deux propriétés de localisation, en particulier la localisation des pics temporels à faible échelle (haute fréquence). Si on considère par exemple une impulsion de Dirac à l'instant t_0 c'est-à-dire $\delta(t - t_0)$ et la fonction d'ondelette $\psi(t)$ de Haar, la *CWT* de l'impulsion décalée est alors :

$$CWT_{\delta_{t_0}}(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) \cdot \delta(u - t_0) du = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t_0 - t}{a}\right) \quad (3.7)$$

Pour une échelle donnée a_0 , la *CWT* est égale à l'ondelette inversée dans le temps à l'échelle a_0 et centrée à l'instant d'apparition de l'impulsion. La figure 3.3 montre cette propriété appliquée par l'ondelette de Haar.



(a) Signal « impulsion décalée à gauche ».



(b) Ondelette inversée en temps centrée à l'instant de l'impulsion à l'échelle a0=16

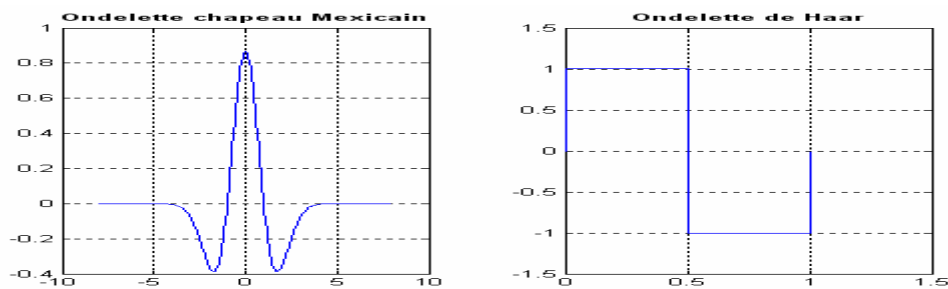
Figure 3.3 : (a) : Impulsion décalée, (b) Ondelette de Haar inversée et centrée à l'instant de l'impulsion à l'échelle a0=16

La *CWT* a la propriété de conservation d'énergie similaire au théorème de l'égalité de Parseval de la transformée de *Fourier*.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(u)|^2 .du = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} |CWT_x(u, a)|^2 da .du \quad (3.8)$$

C_{ψ} : est représenté par l'équation de la condition d'admissibilité (3.3).

La forme de la fonction d'ondelette varie d'une fonction à une autre, chacune d'elles présente ses spécificités [9,26], on présente quelques unes dans la figure 3.4 :



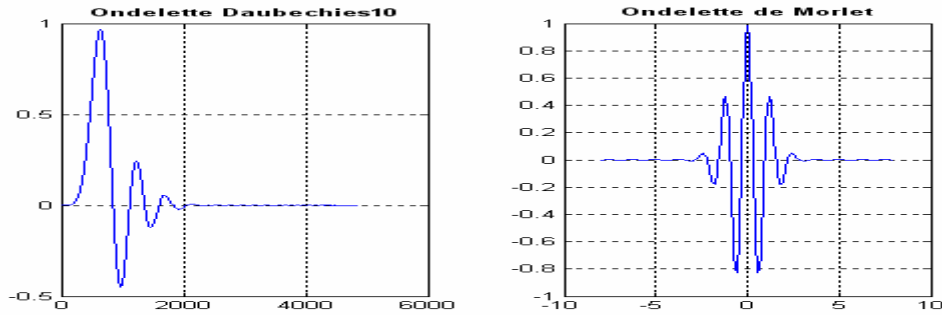


Figure 3.4 : Quelques formes d'ondelettes

3.3 Filtrage par ondelette

Comme on a interprété dans la représentation de la *STFT*, le concept de filtrage par bancs de filtres, il en est de même pour la *CWT*, la transformée en ondelette peut alors être aussi exprimée sous la forme d'un produit de convolution [26, 27,28]:

$$CWT_x(t, a) = \int x(u) \bar{\psi}_a^*(t-u) du = (x * \bar{\psi}_a^*)(t) \quad (3.9)$$

où $\bar{\psi}_a(t) = \psi_a(-t)$. Le signal $x_a(t)$ obtenu en réalisant une coupe horizontale du plan temps-échelle à une échelle a fixée résulte ainsi directement du filtrage du signal x . Dans le cas d'une ondelette à valeurs réelles, la réponse fréquentielle du filtre est $|\Psi_a(f)|$, ou $\Psi_a(f)$ est la transformée de *Fourier* de $\psi_a(t)$. La condition d'admissibilité $\Psi(0) = 0$ donne à ces filtres la qualité de passe-bande dont leur largeur de bande dépend de la fréquence analysée.

3.4 Résolution dans le plan temps-échelle

Contrairement à la *STFT* qui utilise des fonctions d'enveloppes constantes et dont le nombre d'oscillations croît avec la fréquence analysée par action de l'opérateur de modulation temporelle, ceci donne une conservation de la largeur de bande d'analyse fréquentielle quelle que soit la fréquence des oscillations de la fonction analysante [9,28], la transformée *CWT* utilise alors des ondelettes dont l'enveloppe se réduit avec l'échelle, tandis que le nombre d'oscillations reste constant. En conséquence l'opération de changement d'échelle de facteur a est équivalente à une homothétie de paramètre a sur l'axe des temps, et de $\frac{1}{\sqrt{a}}$ sur celui des amplitudes. Dans ce cas on obtient une largeur de bande qui augmente avec la fréquence, pour une résolution fréquentielle relative constante.

Les pavages des plans temps-fréquence et temps-échelle, sont alors fondamentalement différents. Dans le cas de la *STFT*, son coefficient du signal $x(t)$ n'exprime pas le contenu spectral du signal à l'instant t pour une date choisie, il faut forcément observer le signal sur un horizon non nul autour de cette date. L'atome d'analyse $h_{t,f}$ est ainsi déterminé par ses

extensions simultanées temporelle Δt et fréquentielle Δf , celles-ci étant définies pour une fonction h d'énergie unité et centrée à l'origine par, $\Delta t^2 = \int t^2 |h(t)|^2 .dt$ et $\Delta f^2 = \int f^2 |H(f)|^2 .df$, c'est donc une fusion d'information dans une cellule temps-fréquence bornée par $t \pm \Delta t/2$ et $f \pm \Delta f/2$. Les résolutions temporelles et fréquentielles ne sont pas changées par l'action des opérateurs de translation en t et en f , et restent égale à celles de la fonction mère :

$$\Delta t_{h,f} = \Delta t_h, et, \Delta f_{h,f} = \Delta f_h \quad (3.10)$$

La $CWT_x(t,a)$ peut être traduite comme étant un résultat de filtrage du signal x par l'ondelette retournée, ayant un caractère passe-bande. Ceci permet de lui associer une fréquence caractéristique $f_\psi = \int_0^\infty f . \Psi |f|^2 .df$ où $\Psi(f)$ est la transformée de *Fourier* de l'ondelette mère $\psi(t)$. La transformée de *Fourier* de l'ondelette $\psi_a(t)$ dilatée de t à l'échelle a , est :

$$\Psi_a(f) = \sqrt{a} . \Psi(af) \quad (3.11)$$

Ceci met en évidence que les filtres associés aux différentes échelles ont une largeur de bande dépendante de l'échelle et que l'opérateur de dilatation translate la fréquence centrale selon $f_{\psi_a} = f_\psi / a$. Cette relation entre échelle et fréquence permet de regraduer en fréquence l'axe des échelles par la transformation $a \rightarrow f = f_\psi / a$ et de voir le plan temps-échelle comme une exploration particulière du plan temps-fréquence. Les résolutions temporelles et fréquentielles de l'ondelette ψ_a vérifient alors :

$$\Delta t_{\psi_a} = a . \Delta t_\psi, \quad et \quad \Delta f_{\psi_a} = \Delta f / a \quad (3.12)$$

La résolution fréquentielle dépend donc de la fréquence centrale de l'ondelette et le facteur de qualité Q du filtre d'ondelette qui est abandonné invariant par action de l'opérateur de dilatation tel que :

$$Q_{\psi_a} = \frac{f_{\psi_a}}{\Delta f_{\psi_a}} = \frac{f_\psi}{\Delta f_\psi} = Q_\psi \quad (3.13)$$

La CWT travaille de ce fait à résolution fréquentielle relative constante. Cela mène:

- 1) pour a petit (hautes fréquences), on aura une bonne résolution temporelle et une mauvaise résolution fréquentielle.
- 2) pour a grand (basses fréquences), on aura une mauvaise résolution temporelle et une bonne résolution fréquentielle.

En terme de pavage temps-échelle (ou fréquence), ceci s'explique par des pavés élémentaires qui se modifient quand l'échelle d'analyse change, leurs surfaces restent constantes (figure 3.5). Dans cette représentation, chaque cellule répond à la résolution d'analyse pour le point du plan situé en son centre. Les bandes passantes des filtres associés sont délimitées par les lignes horizontales.

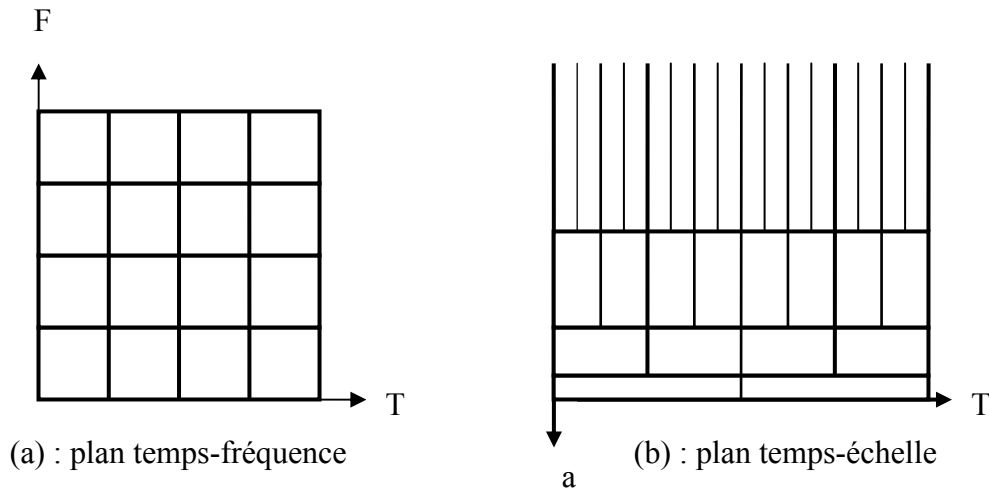


Figure 3.5 : (a) : Résolution temps-fréquence, (b) : Résolution temps-échelle

3.5 Bases discrètes d'ondelette

La transformée en ondelette discrète consiste en la projection du signal sur une base discrète d'ondelette réalisant un échantillonnage critique du plan temps-échelle [8,9]. La redondance de l'information provient de l'échantillonnage fort, et la reconstruction du signal ne provient pas d'un échantillonnage faible. Une première approche consiste à rechercher, à partir de l'ensemble continu des fonctions de base utilisées dans la *CWT* (transformée redondante dans la mesure où deux coefficients voisins partagent de l'information), une famille discrète possédant ces propriétés. Cependant, la définition de telles bases par échantillonnage critique de la *CWT* ne fournit pas forcément de bonnes bases d'ondelette, en particulier la base duale nécessaire à la reconstruction du signal n'est pas nécessairement une base d'ondelettes. Une autre approche consiste à définir les conditions pour produire directement des bases discrètes d'ondelettes.

L'analyse multirésolution (*MRA*) donne un cadre absolu à l'élaboration de ces bases d'ondelette et montre que la seule délimitation à l'obtention de celles-ci porte sur le motif générateur de l'ondelette mère $\psi(t)$ (qui sera notée $\psi_{0,0}(t)$), qui doit vérifier une condition d'admissibilité équivalente à celle de la transformation continue [9.28]. Cette théorie définit la grille dyadique (j, k) correspondant à l'échantillonnage du plan (t, a) aux points $(t_k, a_j) = (2^j k, 2^j)$ et aux noeuds de laquelle les ondelettes de la base sont localisées. La

collection $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \cdot \psi_{0,0}(2^{-j}t - k), \text{ pour } (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ forme alors une base (non nécessairement orthogonale) multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. La base duale $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t), (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ définie par le produit scalaire $\langle \psi_{i,k}, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle = \delta_{i,j}$, est une base d'ondelette qui peut être facilement obtenue, ce qui rend possible la reconstruction exacte du signal.

3.5.1 Analyse multirésolution

L'analyse multirésolution [8,9] consiste à projeter le signal x dans une série de sous-espaces d'approximations V_j et de sous-espaces de détails W_j . Les projections successives du signal sur les espaces V_j en constituent des approximations de plus en plus brutes. L'information abandonnée entre deux approximations est assemblée dans les signaux de détails, qui rendent alors compte du comportement du signal à des résolutions différentes.

Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est par définition, une suite $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

-1) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $V_{j+1} \subset V_j$ ce qui traduit que V_{j+1} constitue une approximation plus grossière du signal que la projection dans V_j , l'information contenue dans V_j est donc plus riche que celle contenue dans V_{j+1} .

-2) Pour toute fonction $f(t)$ de $L^2(\mathbb{R})$ et tout $j \in \mathbb{Z}$, $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_0$

ce qui exprime la possibilité de passer d'un espace V_j à un espace V_k par un simple changement d'échelle

-3) Pour toute fonction $f(t)$ de V_0 et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(t-k) \in V_0$, ce qui montre que chaque espace V_j est invariant par translation temporelle.

-4) Il existe une fonction $\phi(t)$, (notée $\phi_{0,0}(t)$) de V_0 telle que l'ensemble $\{\phi_{0,0}(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz de V_0 , ce qui traduit le fait que l'on va pouvoir engendrer V_0 par simple translation temporelle d'un même motif de base $\phi_{0,0}(t)$.

3.5.1.1 Espaces des approximations

Le sous-espace d'approximation V_0 est défini à l'aide de la fonction d'échelle $\phi_{0,0}(t)$ et de ses translatées [8, 9,27]. Les sous-espaces V_j sont produits par les dilatées de cette

fonction d'un facteur 2^j et leurs translatées $\{\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \cdot \phi_{0,0}(2^{-j}t - k), \text{ pour } (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$

$$V_j(\phi_{0,0}) = \left\{ f : f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_f(j,k) 2^{-j/2} \phi_{0,0}(2^{-j/2}t - k), \{a_f(j,k)\} \in l^2(\mathbb{Z}^2) \right\} \quad (3.14)$$

Pour un signal $x(t)$ d'énergie finie, les coefficients d'approximations sont alors :

$$a_x(j,k) = \int x(t) \cdot \phi_{j,k}^*(t) dt = \langle x, \phi_{j,k} \rangle \quad (3.15)$$

et la résolution du signal $x(t)$ à l'approximation 2^{-j} correspond à sa projection dans V_j :

$$A_j x(t) = \sum_k a_x(j,k) \tilde{\phi}_{j,k}(t) \quad (3.16)$$

3.5.1.2 Espaces des détails

La perte d'information sur le signal occasionnée par l'espace d'approximation est compensée par la famille des espaces d'ondelettes (ou de détails) par [8, 9,27] :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (3.17)$$

où W_j est le complément orthogonal de V_j dans V_{j-1} . Dans la *MRA*, l'ondelette mère $\psi(t)$ notée $\psi_{0,0}(t)$ est fondée à partir de la fonction d'échelle telle que la famille $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi_{0,0}(2^{-j}t - k), \text{ pour } (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ forme une base de Riesz de W_j . Les coefficients de détails au niveau j sont :

$$d_x(j,k) = \int x(t) \cdot \psi_{j,k}^*(t) dt = \langle x, \psi_{j,k} \rangle. \quad (3.18)$$

Le signal de détails associé est donc

$$D_j x(t) = \sum_k d_x(j,k) \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (3.19)$$

On aura alors :

$$A_{j-1} x(t) - A_j x(t) = D_j x(t) \quad (3.20)$$

et d'une manière générale on peut écrire :

$$A_I x(t) = A_J x(t) + \sum_{j \in \{I+1, \dots, J\}} D_j x(t) \quad \text{pour } I < J \quad (3.21)$$

Par construction, les W_j sont orthogonaux entre eux et leur somme directe couvre $L^2(\mathbb{R})$, on obtient alors la formule de reconstruction :

$$x(t) = \sum_j \sum_k d_x(j,k) \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (3.22)$$

Ils existent des relations entre fonction d'échelle de deux espaces V_j et V_{j+1} ainsi que pour la fonction échelle et ondelette. Comme par définition $V_1 \subset V_0$, on peut exprimer les éléments de V_1 comme une combinaison linéaire des vecteurs de base de V_0 , on aura donc :

$$\phi_{1,0}(t) = \sum_k h(k) \cdot \phi_{0,0}(t-k) = h * \phi_{0,0}(t) \quad (3.23)$$

de même $W_1 \subset V_0$, on peut écrire :

$$\psi_{1,0}(t) = \sum_k g(k) \cdot \phi_{0,0}(t-k) = g * \phi_{0,0}(t) \quad (3.24)$$

Ces relations mettent en principe l'existence des filtres h et g , dont la donnée est équivalente à celle des fonctions $\phi_{0,0}(t)$ et $\psi_{0,0}(t)$. Le filtre h est un filtre passe-bas alors que g est un filtre passe-haut.

3.5.2 Transformée en ondelette discrète

Elle est définie par DWT , la collection des $\{d_x(j,k), (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ projections orthogonales de $x(t)$ dans les espaces d'ondelette $\{W_j, j \in \mathbb{Z}\}$ définie par la MRA tel que [8,9,27]:

$$x(t) \rightarrow d_x(j,k) = \langle x, \psi_{j,k} \rangle \quad (3.25)$$

Contrairement à la situation où l'on échantillonne la transformée continue réalisée avec une ondelette non issue d'une multirésolution, la DWT permet d'explicitier la base duale et rend utilisable la formule de reconstruction exacte, la base duale est une base d'ondelette. Dans le cas d'ondelettes orthogonales, la base duale est la base de départ c'est-à-dire $\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \psi_{j,k}(t), (j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

Contrairement à la CWT , la DWT n'est pas covariante par action de l'opérateur de translation en temps. On a une équivalence entre CWT et DWT à condition que l'ondelette d'analyse soit issue d'une analyse multirésolution, la DWT correspond alors à l'échantillonnage sur la grille dyadique de la CWT calculée sur \tilde{x} (projection des x sur V_0), c'est-à-dire :

$$d_x(j,k) = CWT_{\tilde{x}}(k2^j, 2^j) \quad (3.26)$$

3.5.2.1 Décomposition par DWT

Les coefficients de la DWT s'obtiennent par l'algorithme pyramidal rapide proposé par S. Mallat [8,31]. Cet algorithme se base sur les relations à deux échelles. Si l'on définit l'opérateur de décimation d'un facteur de 2 par :

$$y(k) = \downarrow 2[x](k) = x(2k) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

[8,9] montre que les coefficients d'approximation et de détail à un niveau j sont obtenus par filtrage et décimation des coefficients d'approximation au niveau $(j - 1)$:

$$a_x(j, k) = \downarrow 2[\bar{h} * a_x(j, \cdot)](k) \quad (3.28.1)$$

$$d_x(j, k) = \downarrow 2[\bar{g} * a_x(j, \cdot)](k) \quad (3.28.2)$$

Les filtres \bar{h} et \bar{g} utilisés à tous les niveaux de la décomposition sont définis à partir de h et g , et seront notés h_1 et g_1 :

$$\begin{cases} h_1(k) = \bar{h}(k) = h(-k) \\ g_1(k) = \bar{g}(k) = g(-k) \end{cases} \quad (3.29)$$

L'algorithme de la décomposition pyramidal est représenté dans la figure 3.6, on note que le bloc (init) consiste à projeter le signal x dans l'espace V_0 .

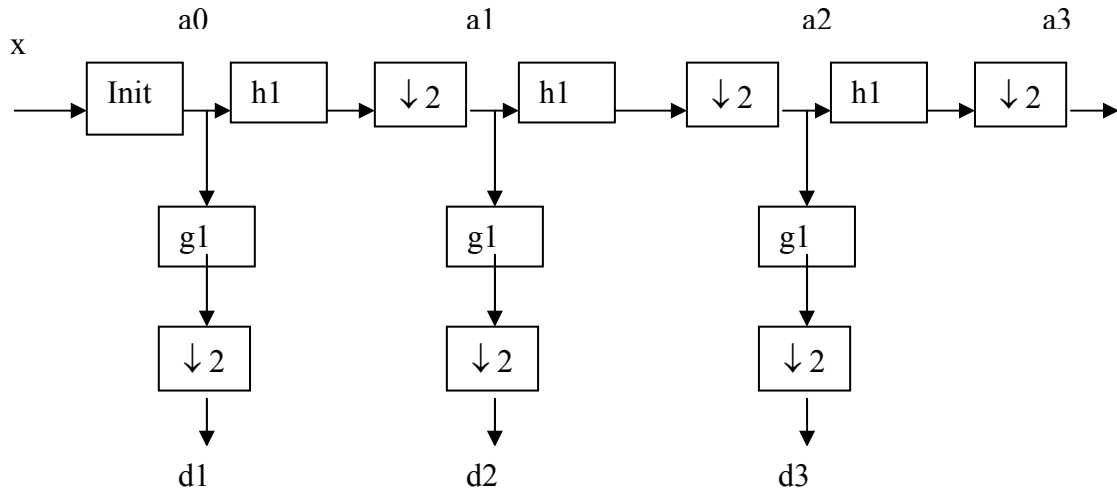


Figure 3.6 : Décomposition pyramidal a_i, et, d_i est respectivement, les approximations et les détails

3.5.2.2 Synthèse par DWT

La DWT possède un algorithme rapide de reconstruction basé en particulier sur les relations (3.17) et (3.20) et utilisant l'opérateur d'interpolation d'un facteur de 2 défini par [8,9]:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \begin{cases} y(2k) = \uparrow 2[x](2k) = x(k) \\ y(2k+1) = \uparrow 2[x](2k+1) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Chaque niveau d'approximation est reconstruit par sommation de l'approximation plus grossière et du détail correspondant, préalablement interpolés et filtrés :

$$a_x(j-1, k) = (h_2 * \uparrow 2[a_x(j, \cdot)])(k) + (g_2 * \uparrow 2[d_x(j, \cdot)])(k) \quad (3.31)$$

Les filtres utilisés notés g_2 et h_2 , sont liés aux fonctions des bases duales et définis par :

$$\begin{cases} h_2(k) = \check{h}(k) \\ g_2(k) = \check{g}(k) \end{cases} \quad \text{sachant que} \quad \begin{cases} \check{\phi}_{1,0} = \check{g} * \check{\phi}_{0,0} \\ \check{\psi}_{1,0} = \check{h} * \check{\phi}_{0,0} \end{cases} \quad (3.32)$$

Dans le cas de bases orthonormales d'ondelette où les fonctions et leurs duales sont identiques, on a :

$$\begin{cases} h_2(k) = h(k) \\ g_2(k) = g(k) \end{cases} \quad (3.33)$$

La synthèse du signal est représentée dans la figure 3.7.

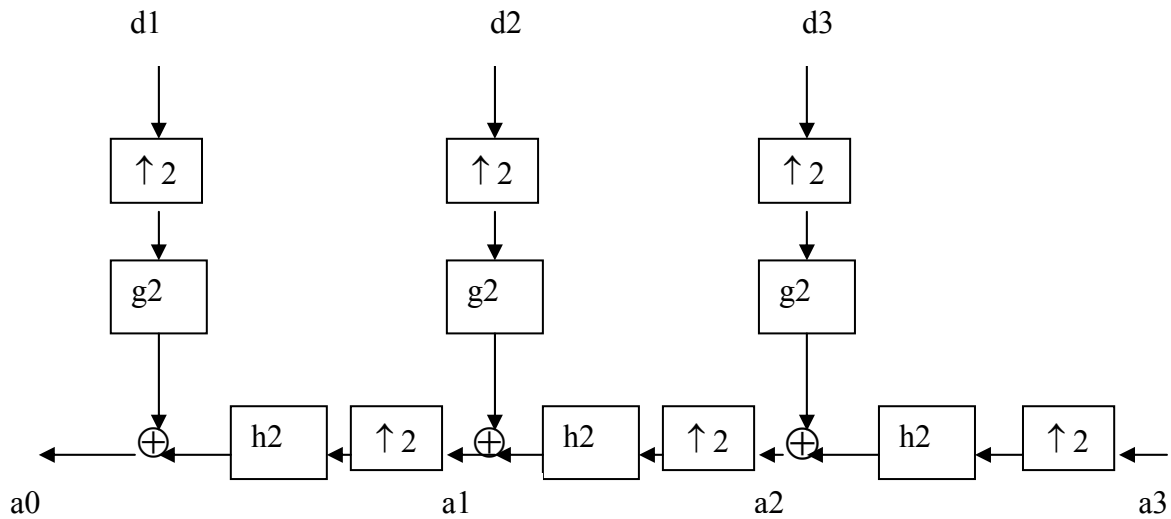


Figure 3.7 : Synthèse pyramidale.

Pour le cas d'analyse synthèse pour un niveau de décomposition, le schéma équivalent est représenté par la figure 3.8 dont H_1 , et H_2 sont les transformées en z de h_1 , et, h_2 [8,9,31].

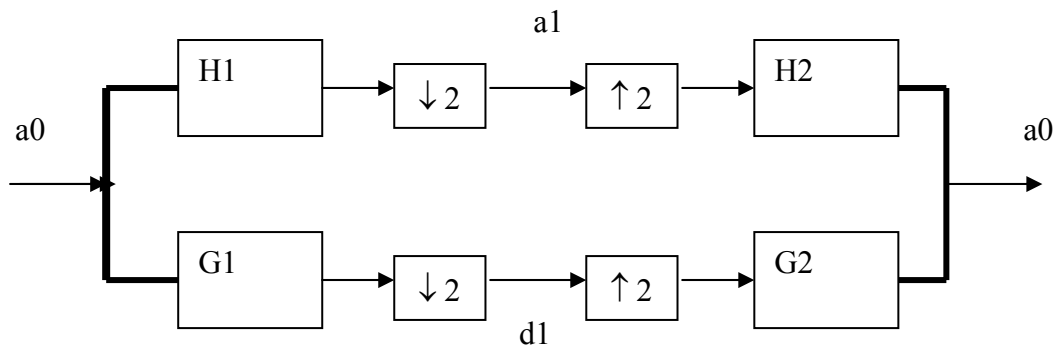


Figure 3.8 : Schéma d'analyse synthèse pour un niveau

avec :

$$\begin{cases} H_1(-z)H_2(z) + G_1(-z)G_2(z) = 0 \\ H_1(z)H_2(z) + G_1(z)G_2(z) = 2 \end{cases} \quad (3.34)$$

Dans le cas d'une base d'ondelettes orthogonale, il est montré que [41] H1 et G1 sont des filtres miroirs en quadrature caractérisés par :

$$\begin{cases} H_1(z)H_1(z^{-1}) + H_1(-z)H_1(-z^{-1}) = 1 \\ G_1(z) = zH_1(-z^{-1}) \end{cases} \quad \text{soit } g_1(k) = (-1)^k h_1(1-k) \quad (3.35)$$

Les conditions de reconstruction parfaite (1.36) impliquant :

$$\begin{cases} H_2(z) = H_1(z^{-1}) \\ G_2(z) = G_1(z^{-1}) \end{cases} \quad (3.36)$$

Les réponses fréquentielles (figure 3.9) vérifient :

$$|G_1(f)| = |H_1(0.25 - f)| \quad \text{et} \quad |H_1(f)|^2 + |G_1(f)|^2 = 1$$

$$H_1(f=0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad G_1(f=0) = 0$$

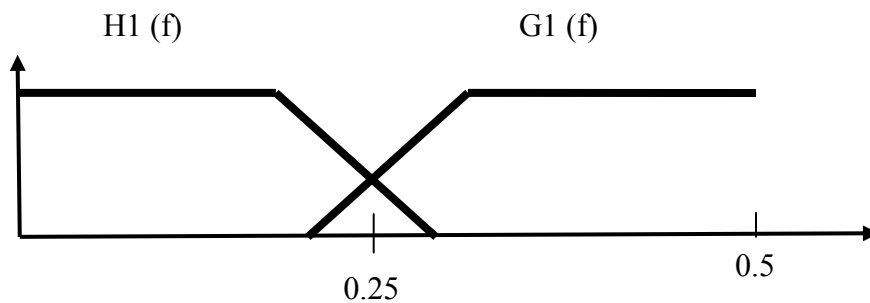


Figure 3.9 : Réponse fréquentielle, filtre miroir en quadrature

La représentation des réponses fréquentielles des filtres pour une décomposition jusqu'au troisième niveau ($j=3$) est dans la figure 3.10.

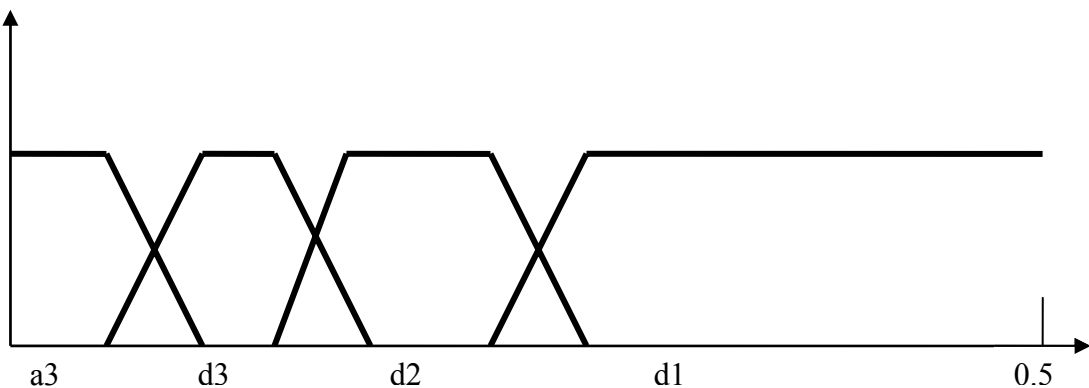


Figure 3.10 : Largeurs de bandes des détails et largeur de l'approximée a3

Les opérations successives de filtrage et de décimation répétées tout au long de la décomposition réalisent ainsi une partition de l'axe fréquentiel sous la forme d'un banc de filtres à structure dyadique.

Chaque détail d_j contient de l'information relative à tout le signal dans une bande de fréquence particulière indiquée par j et dont la largeur est égale à $2^{-(j+1)}$. A l'intérieur d'un détail d_j , les coefficients $d_x(j, k)$ ont une résolution temporelle en 2^j . On peut ainsi constater que bien que résultant d'opérations successives de filtrage, ces coefficients ne peuvent pas être assimilés à des signaux filtrés, en raison des opérations de décimation qu'ils ont subies.

3.6 Les paquets d'ondelette

Dans la (*DWT*), la résolution temps-fréquence associée à l'atome d'analyse dépend de l'échelle (ou fréquence) analysée, les ondelettes de la base sont toutes obtenues par dilatation (puis décalage) de l'ondelette mère [8,9]. Lorsque l'on se place d'un point de vue du filtrage, ceci se traduit par une segmentation fréquentielle de l'information contenue dans le signal à la manière d'un banc de filtre non uniforme présentant une structure dyadique. Celle-ci peut toutefois ne pas être adaptée aux objectifs de l'analyse. C'est le cas par exemple lorsque l'on souhaite analyser séparément deux composantes haute fréquences très proches, tout en conservant une non redondance fréquentielle de la représentation.

La recherche d'autres structures autre que dyadique nécessite l'introduction de nouvelles fonctions de bases, des ondelettes issues de l'ondelette mère non plus simplement par dilatation mais également par des opérations de convolution. Pour une ondelette initiale donnée, il existe alors une multitude de bases possibles. Toutefois il est nécessaire, afin de pouvoir sélectionner une base, de disposer d'une organisation exploitable de toutes ces bases potentielles. C'est ce que réalise la décomposition en paquets d'ondelette. Elle offre une librairie d'ondelettes organisées en fonction de leurs propriétés d'analyse et de localisation temps-fréquence et donc de filtrage passe-bande, selon une structure d'arbre binaire.

Cette structure exige des algorithmes de recherche de bases adaptées à la fois aux propriétés temps-fréquence souhaitées et au signal analysé, que l'on dénomme classiquement meilleures bases. De plus, cette décomposition présente l'avantage d'être définie et mise en oeuvre à partir d'algorithmes développés pour la transformée en ondelette discrète.

3.6.1 Principe de la décomposition

La décomposition en paquets d'ondelette est une généralisation de l'analyse multirésolution et de la transformée en ondelette discrète. L'idée est de trouver de nouvelles

bases à partir de tous les sous-espaces engendrés [8,9]. Dans le cas d'une *MRA*, l'espace d'approximation V_j , se décompose en deux sous espaces de résolutions inférieurs V_{j+1} et W_{j+1} , dont les bases correspondantes sont respectivement: $\{\phi_{j+1}(t-2^{j+1}k)\}$ et $\{W_{j+1}(t-2^{j+1}k)\}$. De la même manière cette décomposition peut être appliquée également aux espaces de détails W_j . On peut donc représenter l'ensemble des bases de la décomposition sous la forme d'un arbre binaire, noté W , dans lequel chaque noeud correspond à un sous-espace W_j^p qui admet une base orthogonale $\psi_j^p = \{\psi_j^p(t-2^j k)\}$ avec :

$$W_0^0 = V_0 \quad (3.37.1)$$

$$\psi_0^0(t) = \phi_{0,0}(t) \quad (3.37.2)$$

$$\psi_{j+1}^{2p}(t) = \sum_k h_1(k) \psi_j^p(t-2^j k) \quad (3.37.3)$$

$$\psi_{j+1}^{2p+1}(t) = \sum_k g_1(k) \psi_j^p(t-2^j k) \quad (3.37.4)$$

$$W_j^p = W_{j+1}^{2p} \oplus W_{j+1}^{2p+1} \quad (3.37.5)$$

Pour la simplicité, nous utiliserons la notation ψ_j^p pour dénommer l'ondelette caractérisant l'espace W_j^p , l'indice p introduit ici correspondant à la définition de nouvelles fonctions par décomposition des espaces de détails. L'arbre W des sous espaces W_j^p est représenté dans la figure 3.11.

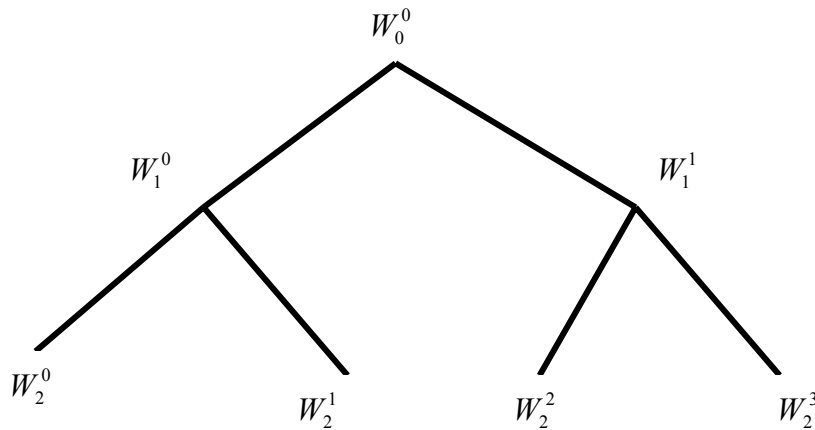


Figure 3.11 : Arbre W des sous espaces W_j^p

La notation C représente l'arbre de la projection du signal dans les sous-espaces de W et le paquet d'ondelette $C_j^p = \{C_j^p(k), \text{pour } k \in \mathbb{Z}\}$ est la projection du signal dans le sous espace W_j^p dont ψ_j^p est une base orthonormée :

$$C_j^p(k) = \langle x(t), \psi_j^p(t-2^j k) \rangle \quad (3.38)$$

La décomposition en paquets d'ondelette est obtenue à l'aide d'un algorithme pyramidal étendu [8,9] figure 3.13 par un calcul récursif :

$$C_{j+1}^{2p}(k) = \downarrow 2 [C_j^p * g_1](k) \quad (3.39.1)$$

$$C_{j+1}^{2p+1}(k) = \downarrow 2 [C_j^p * h_1](k) \quad (3.39.2)$$

Le principe de la décomposition en paquets d'ondelettes est dans la figure 3.12.

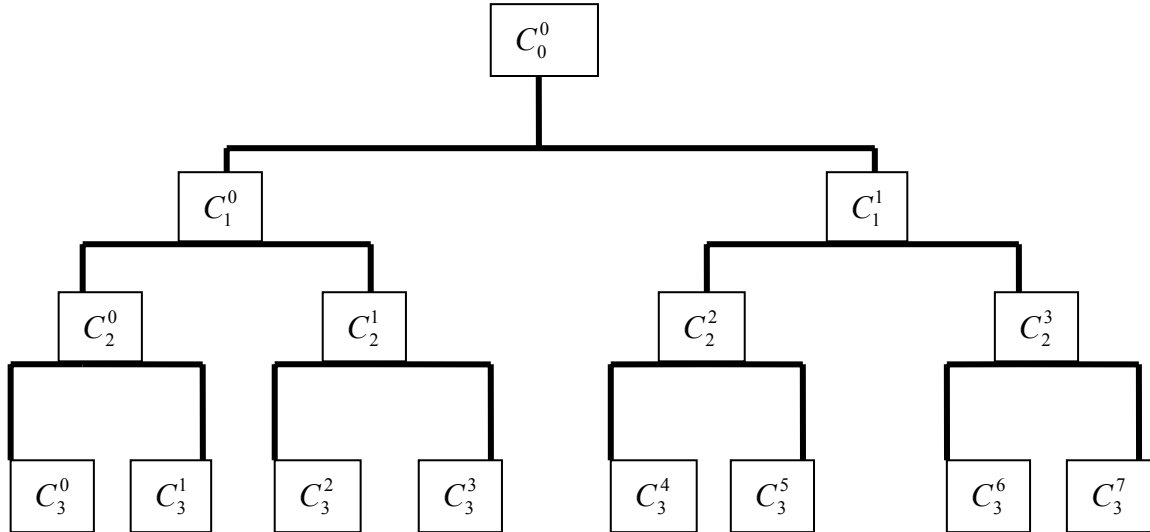


Figure 3.12 : Décomposition en paquets d'ondelettes.

3.6.2 Bases et arbres admissibles d'ondelette

La décomposition totale d'un signal en paquets d'ondelette (correspondant à tous les noeuds de l'arbre W) produit une représentation redondante. Chaque niveau de la décomposition contient toute l'information du signal. Ainsi seules certaines combinaisons de paquets (c'est le cas de l'ensemble des paquets d'un niveau donné) constituent des représentations non redondantes du signal. Les espaces correspondants sont donc définis à partir de la notion d'arbre admissible [8].

On appelle arbre admissible tout arbre binaire dont chaque noeud a 0 ou 2 fils. L'arbre W définie précédemment est un arbre admissible, à partir duquel on peut construire tous les arbres admissibles potentiels. Ceux-ci sont obtenus par une mesure de l'arbre W réalisé à partir du bas de l'arbre en regroupant des noeuds fils ayant le même père. Voir figure 3.13.

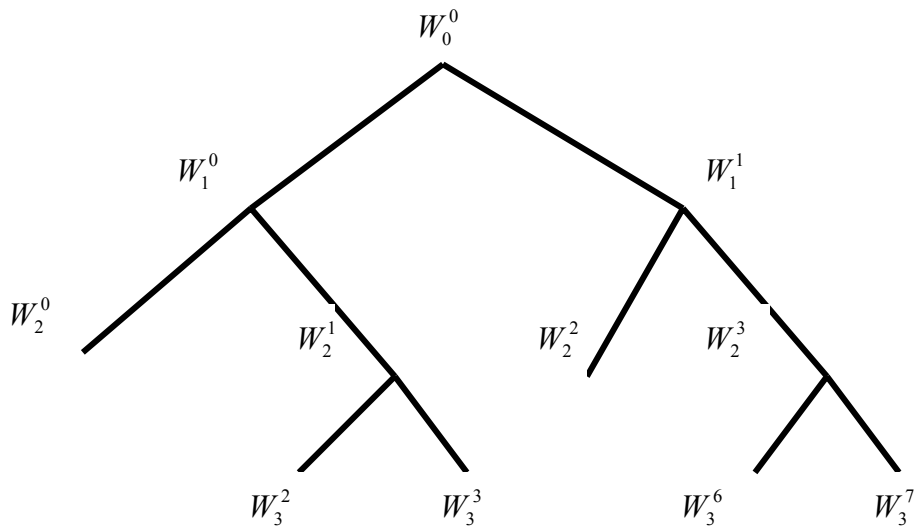


Figure 3.13 : arbre admissible (exemple).

Les feuilles $W_2^0, W_3^2, W_3^3, W_2^2, W_3^6, et W_3^7$ constituent une base de V_0 .

Soit (j_a, p_a) l'ensemble des feuilles d'un arbre admissible, alors les sous espaces W_{ja}^{pa} sont mutuellement orthogonaux et vérifient :

$$W_0^0 = \bigoplus_{(j,p) \in (ja, pa)} W_j^p \tag{3.40}$$

L'ensemble des paquets correspondants constitue donc une représentation non redondante du signal. Le nombre de bases orthogonales de V_0 est égal au nombre d'arbres admissibles qui est supérieur à $2^{2^{J-1}}$ où J est la profondeur maximale de l'arbre. On retrouve parmi ces bases, celle de la transformée en ondelette discrète. La figure 3.14 représente ce cas particulier.

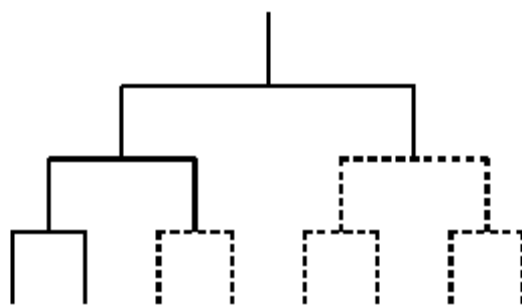


Figure 3.14 : La DWT est un cas particulier de la décomposition en paquets d'ondelette

3.6.3 Signification temps fréquence de la décomposition en paquets d'ondelette.

A chaque niveau j , chaque paquet C_j^p qui a le même sens qu'un détail d_j de la DWT, contient de l'information relative à tout le signal dans une bande de fréquence indiquée par p . A chaque niveau, on a donc une segmentation fréquentielle de la représentation. Lorsqu'on

descend dans l'arbre, les bandes de fréquence sont de plus en plus étroites et l'information concentrée sur de moins en moins de points. Pour le cas où $j=0$, on est alors au signal original (projection de x dans V_0) et pour un niveau j quelconque les nœuds sont numérotés de $p=0$ jusqu'à $2^j - 1$. La figure 3.15 montre l'indexation de l'arbre de la décomposition en paquets d'ondelette pour $j=0$, jusqu'à $j=3$.

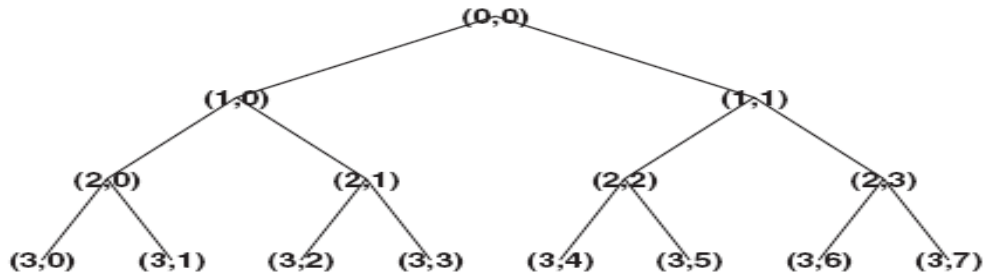


Figure 3.15 : Arbre de décomposition en paquets d'ondelettes $j=3, p=0,..7$

3.6.3.1 Support temporel.

Si les filtres g_l et h_l ont une réponse impulsionnelle finie de longueur K , alors ψ_0^0 a un support compact de longueur $K-1$. Donc ψ_j^p a un support compact de longueur $(K-1)2^j$. Lorsqu'on passe d'un niveau de résolution au suivant, la taille des paquets est divisée par 2. Si le signal original est de longueur N , alors au niveau j on a 2^j paquets de longueur $N/2^j$, ce qui nous donne invariablement N coefficients par niveau [8,9]. La figure 3.16 montre cette segmentation.

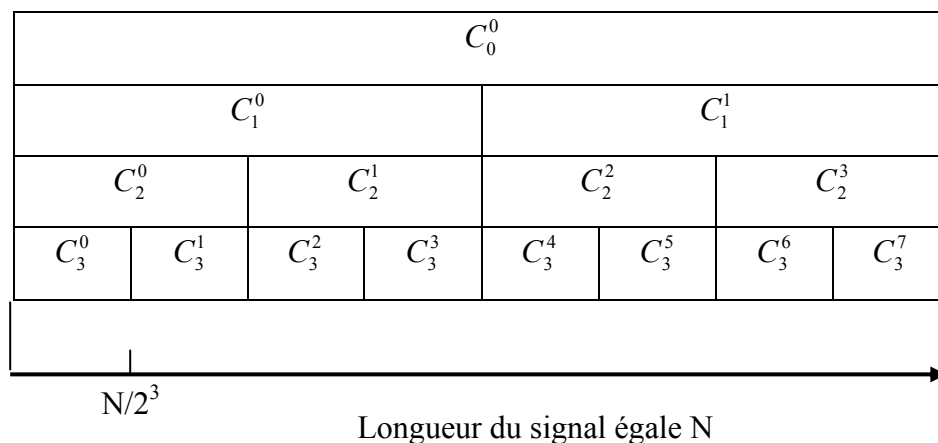


Figure 3.16 : Segmentation temporelle par paquets d'ondelette.

3.6.3.2 Partitionnement fréquentiel

A chaque niveau de l'arbre, l'information relative à tout le signal est répartie en bandes de fréquence de largeurs égales, l'ensemble couvre la totalité de l'axe fréquentiel. La largeur de bande est divisée par 2 lorsqu'on passe d'un niveau au suivant, les feuilles de tout arbre

admissible réalisent une partition complète de l'axe fréquentiel [8,9]. C'est le cas par exemple des feuilles $C_1^0, C_2^1, \text{ et } C_2^3$ de la figure 3.17.

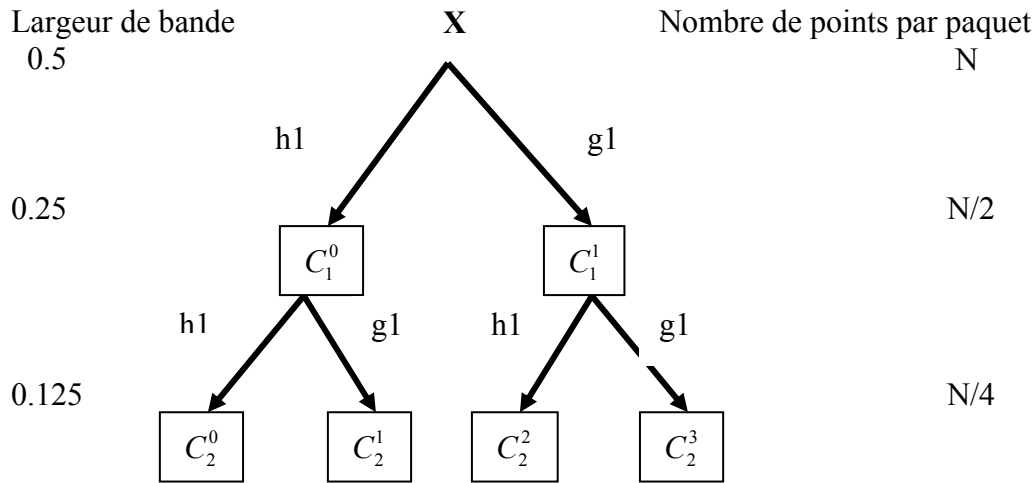


Figure 3.17 : Arbre binaire de la décomposition en paquets d'ondelettes

3.6.3.3 Pavage du plan temps fréquence

Dans la représentation temps-fréquence, chaque étape de la décomposition représente un pavage temps fréquence qui présente la caractéristique d'être uniforme, où pour un signal de longueur $N = 32$, le premier niveau partage le plan en deux bandes fréquentielles de 16 coefficients. Le niveau suivant le partage en 8 bandes contenant deux fois moins de coefficients. En parcourant la décomposition selon les niveaux croissants, on obtient des pavages uniformes caractérisés par des bandes fréquentielles de plus en plus fines mais avec deux fois moins de coefficients. À chaque fois, la résolution fréquentielle augmente quand la résolution temporelle diminue.

Dans le cas d'un arbre admissible quelconque, on obtient un pavage irrégulier dû à la sélection de noeuds situés à différents niveaux de l'arbre.

Contrairement au découpage dyadique de la DWT , la décomposition par paquets d'ondelette conduit à un pavage "libre" du plan temps-fréquence, au sens où tout découpage est autorisé [8,9]. A vrai dire, un pavage devra être choisi selon des critères ou des objectifs bien définis pour l'analyse ou le traitement du signal à analyser. La figure 3.18 montre un pavage temps fréquence pour un niveau de profondeur $j=4$.

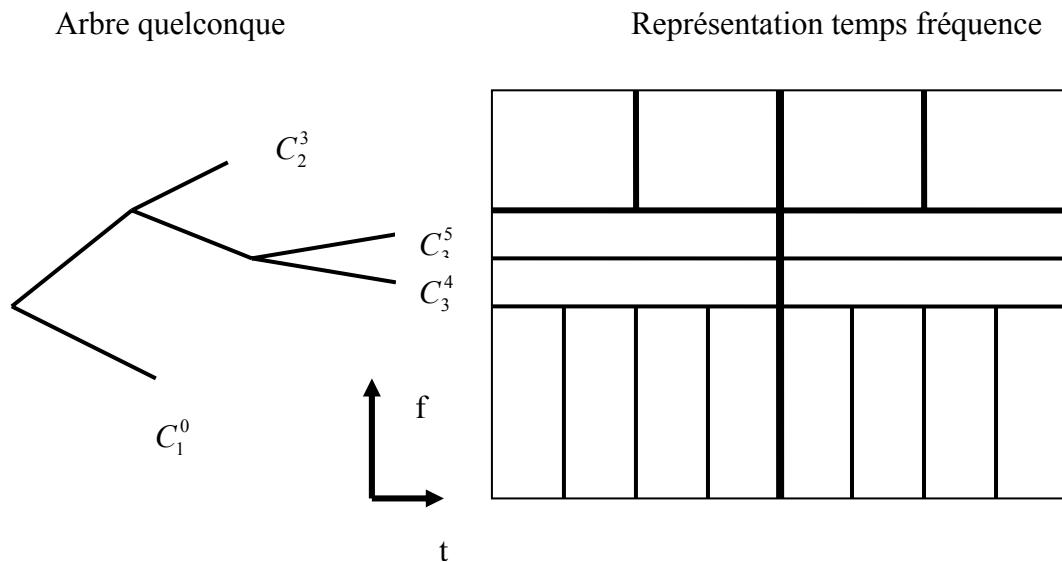


Figure 3.18 : Pavage temps fréquence pour $j=4$.

3.6.4 Sélection de la meilleure base

Extraire une base veut dire sélectionner un ensemble de fonctions ayant la signification d'atomes temps-fréquence. Deux facteurs importants déterminent la sélection d'une meilleure base : le choix de la représentation sur laquelle s'appuiera la sélection d'une part et le critère de sélection utilisé d'autre part.

La procédure de sélection de meilleure base est définie à la fois par un critère et par une stratégie de recherche de la base optimisant ce critère qui devra être adapté aux objectifs du traitement.

A partir d'une décomposition complète en paquets d'ondelettes, la recherche est effectuée du bas vers le haut, en comparant le coût de deux sous-bases possibles : la sous-base correspondant à un noeud père et celle résultante de l'union de ses deux fils. Si le critère est minimum au niveau du père, on conserve celui-ci, sinon on remplace le père par ses deux fils [9,29].

Soient, M un critère choisi, x un vecteur dans un sous-espace V , B une base orthogonale de V issue d'une librairie de bases, et B_x la séquence de x projeté dans B . La meilleure base de $x \in V$ relativement à M est alors définie comme la base pour laquelle $M(B_x)$ est optimal. (Selon la signification du critère, M doit être minimisé ou maximisé).

Soit W une librairie de bases organisée en arbre binaire de profondeur maximale J , la procédure peut être résumé comme suit :

- 1) A_{J-1} est la meilleure base initiale constituée des sous-bases

$$\{W_{J-1}^p \mid p = 0 \dots 2^{J-1}\}$$

2) pour chaque niveau $j=J-2$ à 0 , pour chaque nœud $p=0$ à $2^j - 1$, la meilleure base est obtenue par :

$$A_j^p = W_j^p \quad \text{si} \quad M(W_j^p x) \leq M(A_{j+1}^{2^p} x) + M(A_{j+1}^{2^{p+1}} x)$$

$$A_j^p = A_{j+1}^{2^p} \oplus A_{j+1}^{2^{p+1}} \quad \text{sinon}$$

On peut illustrer la procédure de la recherche de la meilleure base selon un critère choisi préalablement. Soit l'arbre de décomposition complète selon la figure 3.19, chaque nœud de la décomposition contient la valeur du critère sélectionné, les valeurs sont arbitrairement choisies en fonction du critère, l'astérisque est dans les feuilles de l'arbre.

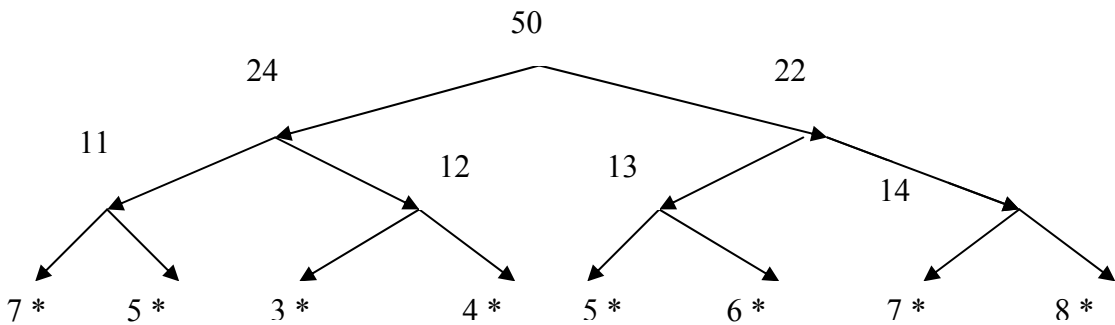


Figure 3.19 : Arbre de décomposition complète

Préalablement la meilleure base courante est dans les feuilles de l'arbre. En partant du bas de l'arbre on compare le coût d'un nœud au coût de ses fils. A chaque fois que le père a un coût inférieur on marque celui-ci par astérisque, dans le cas contraire on ne marque pas le père mais on lui affecte la somme du coût des fils figure 3.20.

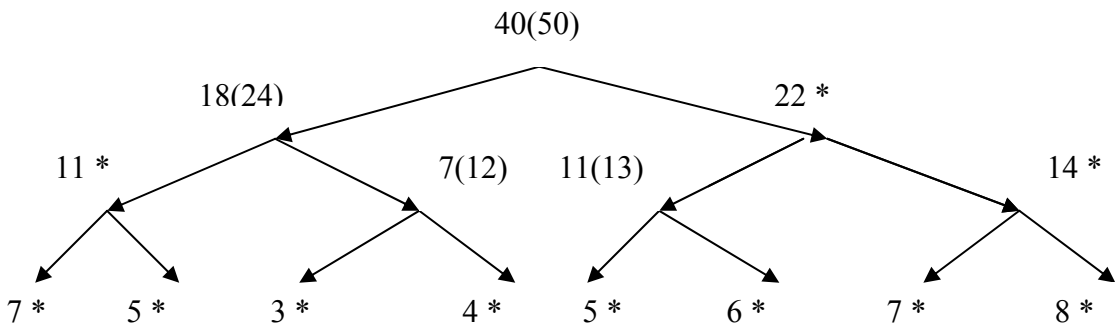


Figure 3.20 : Arbre de décomposition complète : astérisque sur le nœud choisi, sinon on lui marque la somme.

Finalement la meilleure base sera définie par les nœuds marqués dont le père n'est pas marqué. L'ensemble de ces opérations n'excède pas le nombre de nœuds de l'arbre, voir figure 3.21.

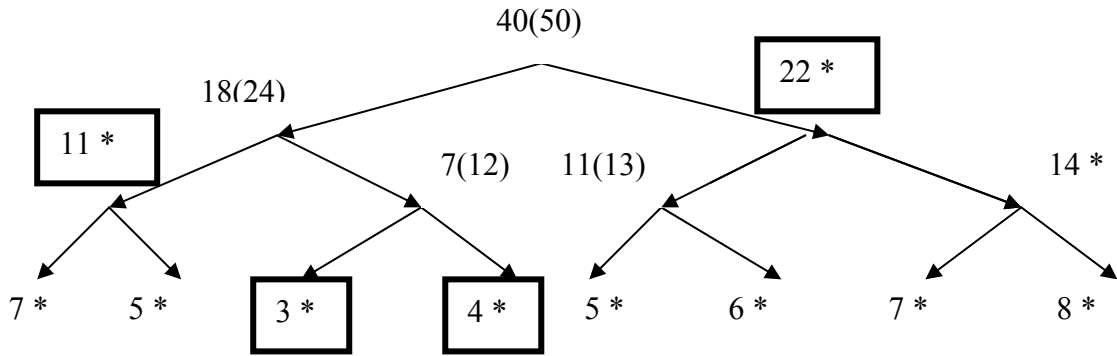


Figure 3.21 : Base constituée des nœuds marqué par astérisque

3.6.4.1 Critères de sélection de la meilleure base.

Tout dépend de l'application ou du traitement désiré, on choisi un critère de sélection de la recherche de la meilleure base, par exemple dans le cas de compression des données le critère entropique est souvent utilisé. D'autres applications qui demande d'autres critères standard qu'on va citer par la suite, ou bien, l'utilisateur peut définir lui-même son propre critère approprié à l'application désirée. Parmi ces critères on cite [29,30]:

1. critère entropique : il est défini par $M(x) = -\sum p_i \cdot \log(p_i)$ avec $p_i = \|x_i\|^2 / \|x\|^2$.
2. critère dimension du signal : $\exp(M(x))$ est appelé dimension théorique et représente un nombre théorique de coefficients nécessaires pour représenter le signal avec une perte minimale d'information. On peut également définir une dimension liée à une précision donnée : on fixe un seuil \mathcal{E} et on compte les coefficients de la base supérieurs à ce seuil. Ceci donne le nombre de coefficients nécessaire pour transmettre un signal avec une précision \mathcal{E} .
3. critère de concentration norme l^p avec $p < 2$: défini par $M(x) = \|x\|_p$ plus la norme l^p d'une fonction d'énergie unitaire est faible, plus l'énergie est concentrée en un nombre faible de coefficients.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté différentes décompositions en ondelette dans le but de trouver une similitude avec la représentation temps fréquence. La *CWT* présente l'avantage de décomposer un signal avec une représentation sélective de ces composantes spectrales en préservant la propriété de covariance temporelle, elle présente une redondance de l'information. La *DWT* par sa décomposition orthogonale, élimine le problème de redondance de cette information mais elle perd en contre partie la propriété la propriété de covariance

temporelle. Dans les deux représentations le choix du type d'ondelette doit être adapté aux propriétés du signal à analyser.

La décomposition en paquet d'ondelette nous permet d'avoir plusieurs formes de représentations du signal et selon un critère bien adapté à l'application, la meilleure base sera déterminée. Cette base est dans le cas de la représentation temps fréquence donne une décomposition plus fine comparé à celle de la *DWT*, qui est en fait un cas particulier de la décomposition en paquets d'ondelettes.

Quatrième chapitre

Techniques de Réallocation des

Distributions Energétiques

4.1 Introduction

Les représentations temps fréquence et temps échelle sont largement utilisées dans l'analyse et la représentation des signaux non stationnaires. Elles effectuent le tracé d'un signal monodimensionnel $x(t)$ dans une représentation bidimensionnelle temps fréquence et temps échelle dans le but d'extraire les informations appropriées du signal. Parmi ces dernières, le spectrogramme qui est reconnu et souvent utilisé. Toutefois le spectrogramme présente un inconvénient de résolution conditionné par l'inégalité d'Heisenberg Gabor. Afin de surmonter le problème de résolution, d'autres représentations temps fréquence de la classe de Cohen de la distribution quadratique d'énergie ont été proposées comme Wigner Ville, Margeneau-Hill et leurs versions lissées. Plusieurs auteurs ont proposé des représentations temps échelle comme le scalogramme, la pseudo distribution de Wigner Ville lissée affine et la distribution de Bertrand. Le champ d'application de ces variétés des représentations est très large, néanmoins le point critique de ces représentations est la lisibilité du plan temps fréquence ou temps échelle qui s'exprime par la bonne concentration des composantes du

signal sans être tromper par les interférences, cette caractéristique est importante dans la détermination des composantes réelles du signal non stationnaire. Tout d'abord il faut bien choisir la bonne représentation temps fréquence, ou temps échelle qui se rapproche plus de la bonne représentation du signal et ensuite soit procéder à la correction de ses paramètres d'une façon empirique (connaissance préalable des composantes du signal), ou bien appliquer des procédures automatiques de correction qui utilisent un noyau dépendant du signal.

Dans ce chapitre on présente une autre technique de représentation qui se base sur la refocalisation des ces distributions autour du centre de gravité de leurs cellules dans le plan temps fréquence et temps échelle, elle s'appelle la méthode de réallocation.

4.2 Principe de la méthode de réallocation

Parmi les transformations bilinéaires temps fréquence, la distribution de Wigner Ville définie par la formule (2.15.1), qui possède toutes les propriétés désirables d'une telle représentation temps fréquence pour un signal non stationnaire mono composante, mais en général les signaux réels sont de nature multi composantes, d'où la présence d'interférences entres composantes principales du signal, qui vont perturber la lisibilité de l'image temps fréquence. Pour cette raison, des noyaux sont appliqués à la distribution de Wigner Ville pour se débarrasser de ces interférences comme indiqué dans les formules (3.38.3), induisant plusieurs représentations temps fréquence, chacune d'elles présente des propriétés bien spécifiques et dont quelques propriétés de la distribution de Wigner Ville disparaissent avec le type de noyau sélectionné, présentant donc un inconvénient dans l'analyse de quelques type de signaux.

Parmi ces inconvénients, on note la réduction de la localisation temps fréquence au détriment de la réduction des interférences. Afin de palier cet inconvénient Kodera [32] présente une méthode de refocalisation de la distribution énergétique appliquée au spectrogramme qui consiste à réallouer l'énergie de la cellule temps fréquence du spectrogramme en son centre de gravité, par conséquent la lisibilité de l'image temps fréquence se clarifie. Auger et Flandrin [33,34] ont reformulé les idées de la réallocation dans le cadre de cette théorie et ont montré l'opportunité de la méthode de réallocation en tant qu'outil complémentaire pour l'analyse temps-fréquence.

Comme candidat à cette opération, il se trouve que le spectrogramme peut être parmi les solutions, il est représenté dans la formule (2.14) et peut être vu comme une version lissée de la distribution de Wigner Ville du signal x par un noyau égale à la distribution de Wigner Ville de la fenêtre h :

$$SPEC_x(t, f, h) = \iint WVD_x(t', f') WVD_h(t' - t, f' - f) dt' df' \quad (4.1)$$

Dans les régions où la distribution de Wigner Ville ne présente que des interférences, celles-ci fluctuent rapidement entre valeurs positives et négatives qui se compensent quand on en fait une moyenne locale. Ceci amène le spectrogramme à avoir dans ces régions, une valeur proche presque nulle. Les interférences sont donc bien atténuées. En réplique, le lissage provoque l'étalement de la distribution d'énergie dans les régions associées au signal, ceci conduit le spectrogramme à avoir une perte de résolution.

Le principe de la réallocation par Kodera [32] est de "refocaliser" le spectrogramme sur la répartition d'énergie temps-fréquence donnée par la distribution de Wigner Ville. Cela consiste à déplacer les valeurs du spectrogramme de leur point de calcul vers une nouvelle position $(\hat{t}(t, f), \hat{f}(t, f))$ donnée par :

$$\hat{t}(t, f) = \frac{1}{SPEC_x(t, f, h)} \iint t' WVD_x(t', f') WVD_h(t' - t, f' - f) dt' df' \quad (4.2.1)$$

$$\hat{f}(t, f) = \frac{1}{SPEC_x(t, f, h)} \iint f' WVD_x(t', f') WVD_h(t' - t, f' - f) dt' df' \quad (4.2.2)$$

Le spectrogramme réalloué s'obtient donc en réordonnant les valeurs du spectrogramme dans le plan temps-fréquence, apparemment en faisant la somme si deux quantités arrivent au même endroit par :

$$SPECR_x(t', f', h) = \iint SPEC_x(t, f, h) \delta(t' - \hat{t}(t, f)) \delta(f' - \hat{f}(t, f)) dt df \quad (4.3)$$

Une autre formulation des coordonnées (\hat{t}, \hat{f}) peuvent être calculées à partir de la *STFT* [34] par :

$$\hat{t}(t, f) = t - \Re \left\{ \frac{STFT_x(t, f; \tau_h) \cdot STFT_x(t, f, h)}{|STFT_x(t, f, h)|^2} \right\} \quad (4.4.1)$$

$$\hat{f}(t, f) = f + \Im \left\{ \frac{STFT_x(t, f; D_h) \cdot STFT_x(t, f, h)}{2\pi |STFT_x(t, f, h)|^2} \right\} \quad (4.4.2)$$

Sachant que $\tau_h = \tau \cdot h(\tau)$, et $D_h = \frac{d}{d\tau} h(\tau)$.

La détermination de la fréquence et du temps réalloués selon les équations (4.4.1) et (4.4.2) peuvent être schématisé [42] par la figure 4.1. Formulé de cette manière le spectre réalloué peut être calculé en utilisant les trois *STFT* qui correspondent aux trois fenêtres d'analyse h pour la *STFT* du signal, la dérivée $\frac{dh}{dt}$ pour la fréquence réallouée, et $t \cdot h$ pour le

temps réalloué. La *FFT* du signal pondéré par la fenêtre appropriée et par une multiplication complexe divisée par le module carré de la *STFT* du signal, donne deux vecteurs temps et fréquences réalloués. Les points alloués aux même temps et fréquences sont ajoutés pour avoir le spectrogramme réalloué.

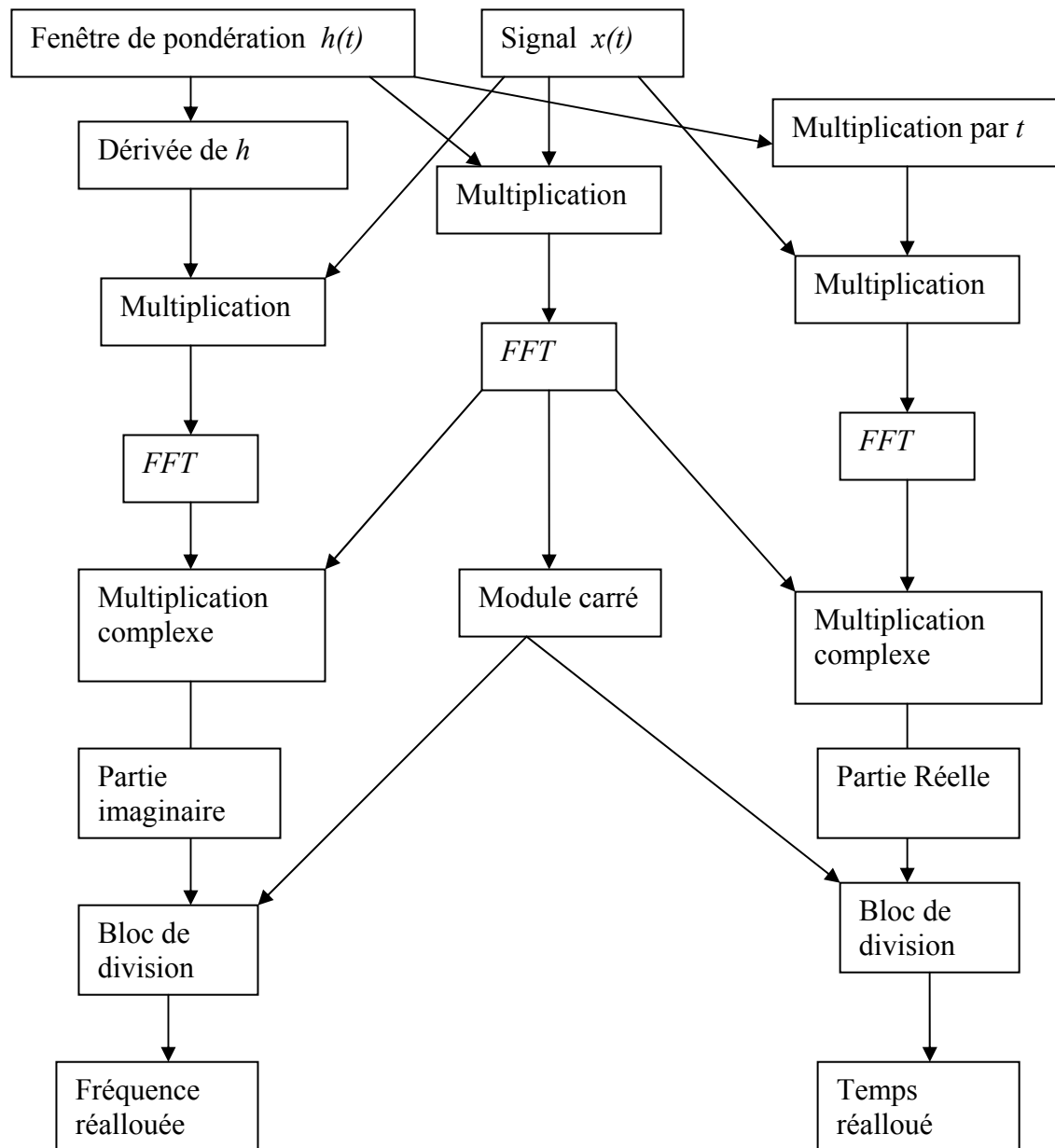


Figure 4.1 : Schéma bloc de détermination de la fréquence et du temps réalloués

4.3 La méthode de réallocation dans la classe de Cohen

Dans le cas du spectrogramme (élément de la classe de Cohen), le noyau de lissage a été défini par $WVD_h(t, f)$, (la distribution de Wigner Ville de la fenêtre h). Pour généraliser

dans la classe de Cohen, chaque représentation *TFR* lissée présente son propre noyau, on peut donc lui appliquer le principe de réallocation comme le cas du spectrogramme.

Soit $\psi(t, f)$ un noyau, la distribution qui lui est associé s'écrit alors comme la convolution 2D de la distribution de Wigner Ville du signal équation(2.38.3) par:

$$C_x(t, f; \Psi_c) = \iint \psi_c(t-t', f-f') WVD_x(t', f') dt' df' \quad (4.5)$$

La généralisation pour ces distributions des équations. (4.2.1) et (4.2.2) est alors comme suit [34] :

$$\hat{t}(t, f) = \frac{1}{C_x(t, f, \Psi_c)} \iint t' WVD_x(t', f') \psi_c(t'-t, f'-f) dt' df' \quad (4.6.1)$$

$$\hat{f}(t, f) = \frac{1}{C_x(t, f, \Psi_c)} \iint f' WVD_x(t', f') \psi_c(t'-t, f'-f) dt' df' \quad (4.6.2)$$

La *TFR* réallouée s'obtient donc en réordonnant ces valeurs dans le plan temps-fréquence, de la même manière en faisant le même principe du spectrogramme réalloué par :

$$CR_x(t', f', \Psi_c) = \iint C_x(t, f; \Psi_c) \delta(t' - \hat{t}(t, f)) \delta(f' - \hat{f}(t, f)) dt df \quad (4.7)$$

4.3.1 Propriétés des distributions réallouées dans la classe de Cohen

On liste ici quelques propriétés des distributions réallouées de la classe de Cohen qui sont intrinsèquement liées à la méthode de la réallocation et donc vérifiées par toutes celles-ci [34,35].

1. **distribution d'énergie** : La réallocation ne fait que déplacer des valeurs. Si la distribution à réallouer est une distribution d'énergie, la distribution réalloué est donc une distribution d'énergie, c'est-à-dire :

$$\iint C_x(t, f; \Psi_c) dt df = \|x\|_2^2 \Rightarrow \iint CR_x(t, f, \Psi_c) dt df = \|x\|_2^2 \quad (4.8.1)$$

2. **Covariance aux translations en temps et en fréquence** : La classe de Cohen est la classe des distributions d'énergie quadratiques covariantes aux translations en temps et en fréquence, de même la réallocation dans cette classe préserve cette propriété.

$$CR_x(t, f; \Psi_c) = CR_x(t-t_0, f-f_0; \Psi_c) \quad (4.8.2)$$

3. **Localisation parfaite sur les lignes du plan temps-fréquence** : L'action des opérateurs de réallocation se traduit par une compression de chaque composante du signal le long de leur loi de retard de groupe ou/et de fréquence instantanée. Sur les modulations de fréquence (chirps) linéaires et d'amplitude constante, on peut montrer qu'il en résulte une localisation parfaite des distributions réallouées.

$$x(t) = \exp(i(\beta t^2 / 2 + 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \gamma)) \Rightarrow CR_x(t, f; \Psi_c) = \delta(f - (\beta t + f_0)) \quad (4.8.3)$$

4. Non linéarité et localisation : Dans le cas des chirps non linéaires, la réallocation aura un effet de compression similaire si la fréquence instantanée ou le retard de groupe du signal sont presque linéaires localement, c'est-à-dire dans un domaine temps-fréquence dont le support est défini par les largeurs en temps et en fréquence de la fenêtre d'analyse. Les distributions réallouées résolvent un compromis, en ayant à la fois peu d'interférences et de bonnes propriétés de localisation. Le prix de ce compromis est la complexité de la distribution. Les distributions réallouées ne font pas partie de la classe des distributions quadratiques.

4.4 La méthode de réallocation dans la classe affine

La classe affine regroupe les distributions d'énergie temps-échelle quadratiques et covariantes par les translations en temps et en échelle. Ces distributions s'écrivent comme des versions modifiées de la distribution de Wigner Ville. D'après l'équation (2.42.3), on peut reformuler la classe affine par [35] :

$$A_x(b, a) = \iint WVD_x(t', f') \psi_A\left(\frac{t' - b}{a}, a, f'\right) dt' df' \quad (4.9)$$

Pour un lissage dans cette classe, la forme du noyau ψ_A varie à chaque échelle

Cela ne nous empêche pas de continuer à pouvoir appliquer l'idée de refocalisation par la réallocation des contributions temps-échelle vers la distribution de Wigner Ville par des centres de masse locaux. La définition de l'opérateur de réallocation en temps se déduit directement de la formulation suivante :

$$\hat{b}_x(b, a) = \frac{1}{A_x(b, a)} \iint t' WVD_x(t', f') \psi_A\left(\frac{t' - b}{a}, a, f'\right) dt' df' \quad (4.10)$$

La nature particulière du lissage affine nous oblige à passer par l'intermédiaire d'une définition fréquentielle par :

$$\hat{f}_x(b, a) = \frac{1}{A_x(b, a)} \iint f' WVD_x(t', f') \psi_A\left(\frac{t' - b}{a}, a, f'\right) dt' df' \quad (4.11)$$

La conversion en échelle se fait par :

$$\hat{a}_x(b, a) = \frac{f_0}{\hat{f}(b, a)} \quad (4.12)$$

où $f_0 = \iint f' \psi_A(t', f') dt' df'$ est la fréquence de référence du noyau $\psi_A(t, f)$, on fait ensuite à la réorganisation des contributions temps échelle de la même manière du spectrogramme par :

$$\hat{A}_x(b, a) = \iint A_x(\zeta, s) \delta(b - \hat{b}_x(\zeta, s)) \delta(a - \hat{a}_x(\zeta, s)) \frac{\zeta^2}{\hat{a}_x^2(\zeta, s)} ds d\zeta \quad (4.13)$$

Pour le scalogramme qui fait partie de la classe affine est l'égal du spectrogramme de la classe de Cohen, il est représenté par le module carré de la transformée on ondelette continu du signal par :

$$SCALO_x(b,a)=|CWT_x(b,a)|^2 \quad (4.14)$$

Il suffit donc de remplacer dans les équations (4.8) jusqu'à (4.11), $A_x(b,a)$ par $SCALO_x(b,a)$ pour retrouver le scalogramme réalloué.

4.4.1 Propriétés des distributions réallouées dans la classe affine

Les distributions réallouées de la classe affine prennent des propriétés similaires à celles de la classe Cohen [34,35] à savoir :

Ce sont des distributions d'énergie, covariantes aux translations en temps et en échelle et elles sont parfaitement localisées sur les mêmes signaux que la distributions de Wigner Ville (modulations linéaires de fréquence, impulsion de Dirac, fréquence). Au delà de la classe de Cohen et de la classe affine, la méthode de réallocation peut être généralisée pour toutes les classes de distributions dont les membres sont obtenus par le lissage d'une distribution de référence présentant de bonnes propriétés de localisation sur une gamme de signaux utiles. Les distributions réallouées hériteront de ces propriétés tout en profitant du peu d'interférences dans la distribution lissée. Cela fait de la méthode, un processus général et systématique pouvant s'appliquer à d'autres types de distribution temps-fréquence.

4.5 Quelques exemples des transformations réallouées.

Nous allons présenter quelques exemples de représentations réallouées de la classe de Cohen et de la classe affine.

4.5.1 Réallocation (classe de Cohen).

La figure 4.2 présente une représentation idéale temps fréquence normalisée en fréquence d'un signal qui se compose de la somme de deux signaux. Le premier signal $s1(t)$ est modulé sinusoïdalement en fréquence, de période 100 et qui oscille entre les fréquences normalisées 0.15Hz et 0.4Hz, le second signal est modulé hyperboliquement en fréquence de forme $s2(t) = \exp(j.2\pi.(f0.t + c/\log(|t|))$. L'amplitude maximale de chaque signal est unitaire et le signal à analyser est $s(t) = s1(t) + s2(t)$ de longueur de 140 échantillons.

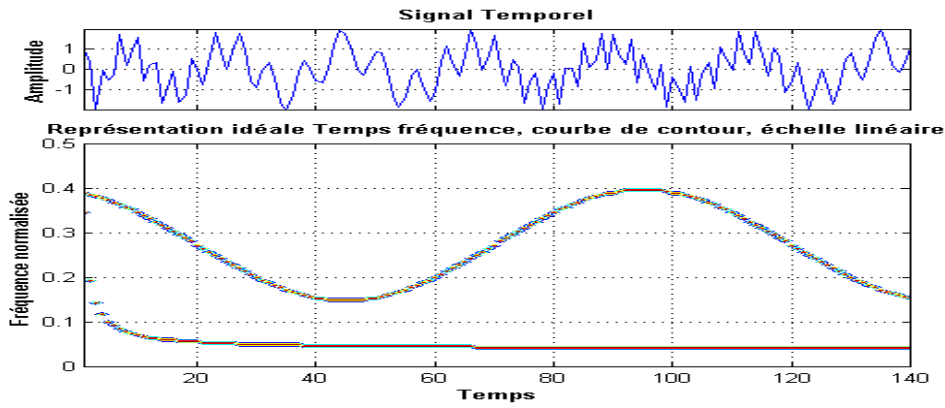


Figure 4 2: Réprésentation temps fréquence idéale, signal somme(modulé sinusoidalement en fréquence+hyperboliquement en fréquence)

La figure 4.3 présente la transformation de Wigner Ville du même signal, on constate l'apparition des auto-interférences et des inter-interférences formées par les représentations bilinéaires de la classe de Cohen.

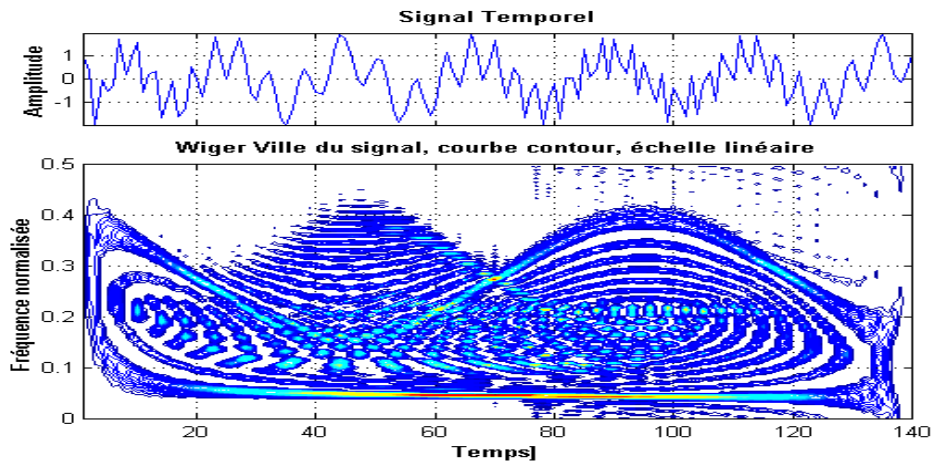


Figure 4 3: Signal module en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(haut) ; Transformation de Wigner Ville (bas)

Pour réduire ces interférences, la transformation pseudo Wigner Ville lissée, concrète ce rôle en détriment de quelques propriétés de celle de la transformation de Wigner Ville.

La figure 4.4 présente la transformation qui réduit ces interférences par le choix de deux fenêtres de lissage temporelle et fréquentielle, le choix à été fait sur la fenêtre de Hamming, le lissage temporel est pour une fenêtre de longueur égale $L_t=13$ telle que $L_g=(L_t-1)/2$ et pour le lissage fréquentiel est par la même fenêtre de longueur $L_f=33$ telle que $L_h=(L_f-1)/2$. Le nombre des composantes fréquentielles qui représente le graphe temps fréquence est égale à $N_f=128$.

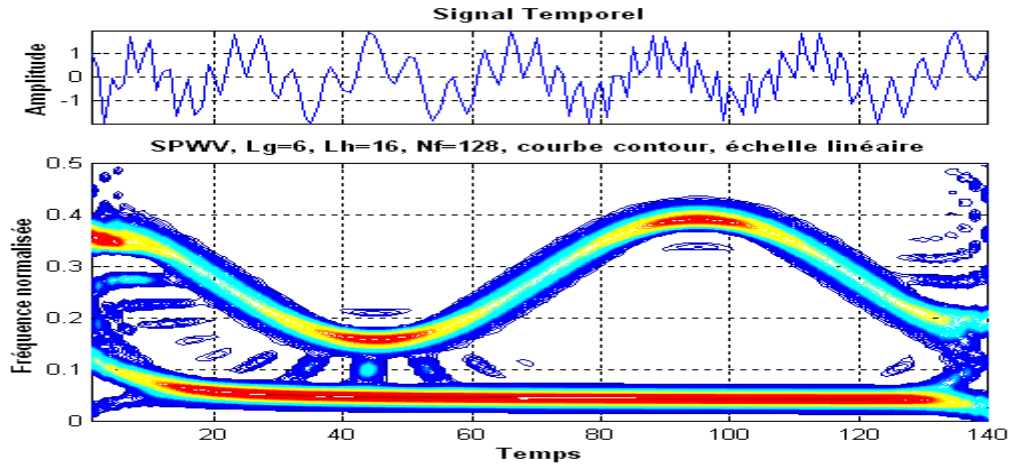


Figure 4.4: Signal module en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) ; Transformation de pseudo Wigner Ville lissée (en bas)

En plus de pertes de propriétés de marginalités, on constate que la résolution temps fréquence est mauvaise par rapport à celle de la transformation de Wigner Ville. La méthode de réallocation appliquée à cette transformation permet de localiser les variations fréquentielles au cours du temps d'une façon plus visible, la figure 4.5 le montre.

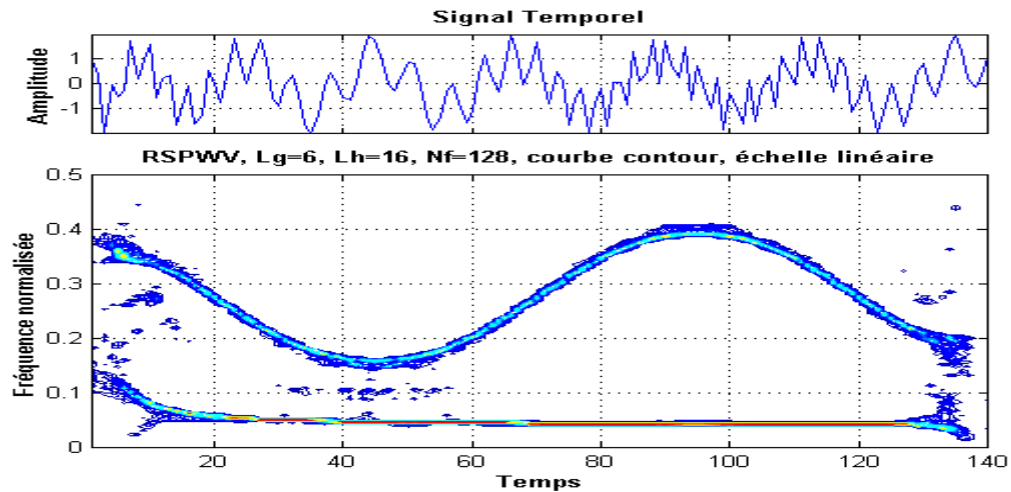


Figure 4.5 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) ; Transformation de pseudo Wigner Ville lissée réalloué (en bas)

Les instants et les fréquences réalloués du signal $x(t)$ sont formulés en fonction de la représentation pseudo Wigner Ville lissée ($SPWV$) donnés par [34,40]:

$$\hat{t}(t, f) = t - \frac{SPWV_x(t, f, \tau_g, h)}{2\pi \cdot SPWV_x(t, f, g, h)} \quad \text{avec} \quad \tau_g = \tau \cdot g(\tau) \quad (4.15)$$

$$\hat{f}(t, f) = f + j \cdot \frac{SPWV_x(t, f, g, D_h)}{2\pi \cdot SPWV_x(t, f, g, h)} \quad \text{avec} \quad D_h = \frac{d}{d\tau} h(\tau) \quad (4.16)$$

Les valeurs réallouées temps fréquences résultantes du signal $x(t)$ font parties de la formule suivante :

$$RSPWV_x(t', f', g, h) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} SPWV_x(t, f, g, h) \delta(t' - \hat{t}(t, f)) \delta(f' - \hat{f}(t, f)) dt d\tau \quad (4.17)$$

La transformation de pseudo Wigner Ville lissée n'est pas la seule à réduire ces interférences. Le spectrogramme qui a l'avantage d'être considéré comme une distribution d'énergie locale par sa représentation non négative, peut aussi réduire ces interférences comme le montre la figure 4.6 sur le même signal. La fenêtre de pondération est celle de Hamming de longueur égale à 33, donc $L_h=16$, avec $N_f=64$ composantes fréquentielles dans l'intervalle de fréquences normalisées.

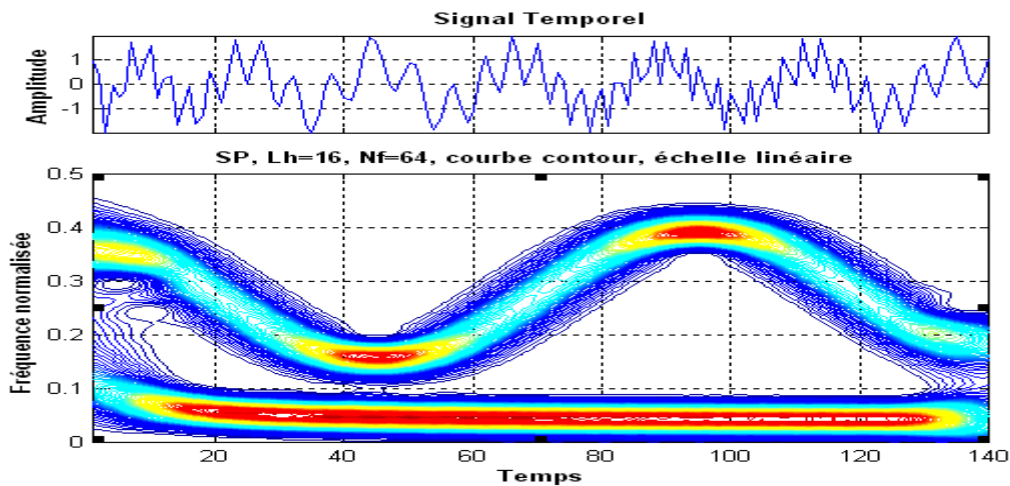


Figure 4 6 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) ; Spectrogramme (en bas)

Le même problème de résolution de localisation temps fréquence persiste comme celui de la transformation pseudo Wigner Ville lissée. Le spectrogramme réalloué (*RSP*) permet de réduire ce problème comme le montre la figure 4.7.

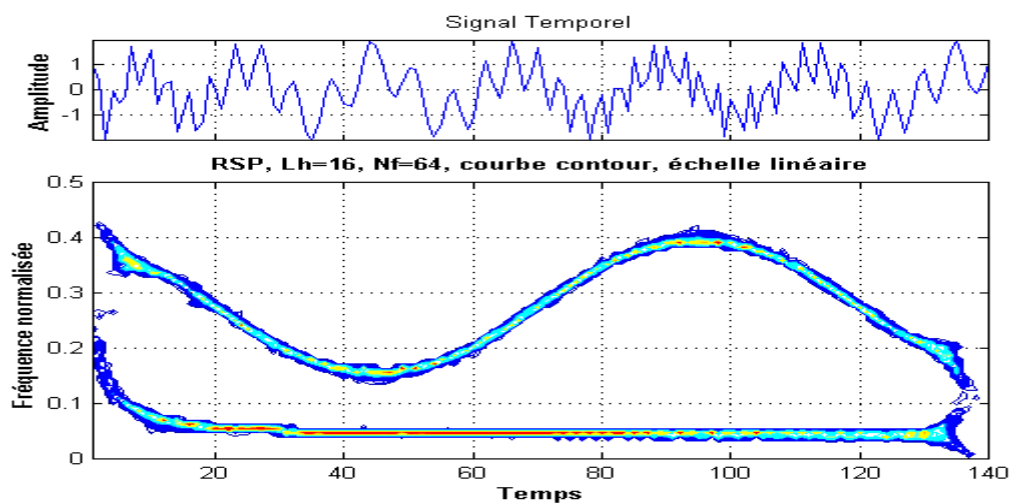


Figure 4 7 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) ; Spectrogramme réalloué (en bas)

4.5.2 Réallocation (Classe Affine).

Comme on a vu précédemment que toute représentation dont elle peut être formulé par la convolution à deux dimensions de la transformation de Wigner Ville par un noyau approprié, cette représentation peut alors être réalloué. Comme le scalogramme peut vérifier cette formulation, on peut donc faire la représentation temps fréquence du scalogramme et de sa version réallouée par la transformation de l'échelle en fréquence. La figure 4.8 montre le scalogramme de Morlet du même signal test des exemples de la classe de Cohen. La valeur de $foT=1$ représente le produit temps largeur de bande de l'ondelette mère, $Nf=64$ est le nombre des composantes fréquentielles représentées dans le plan temps fréquence et dans l'intervalle des fréquences normalisées.

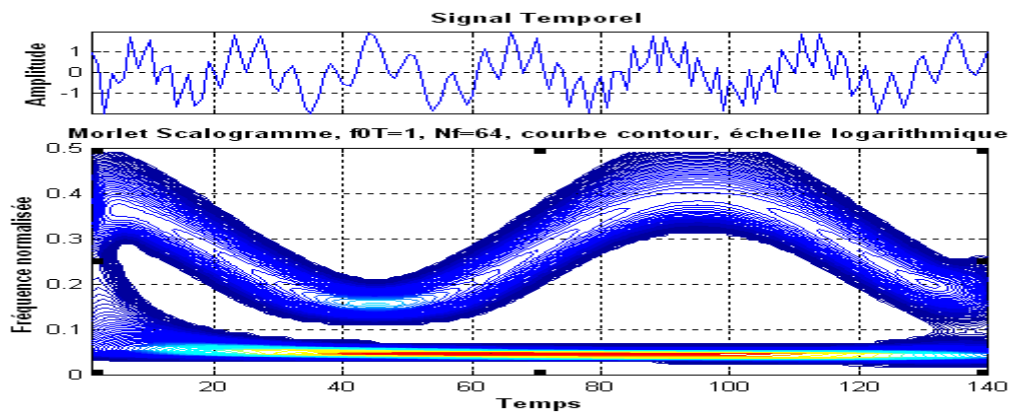


Figure 4 8 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) ; Scalogramme de l'ondelette de Morlet (en bas)

La représentation réallouée du scalogramme de Morlet du signal temporel de la figure précédente est représentée dans la figure 4.9.

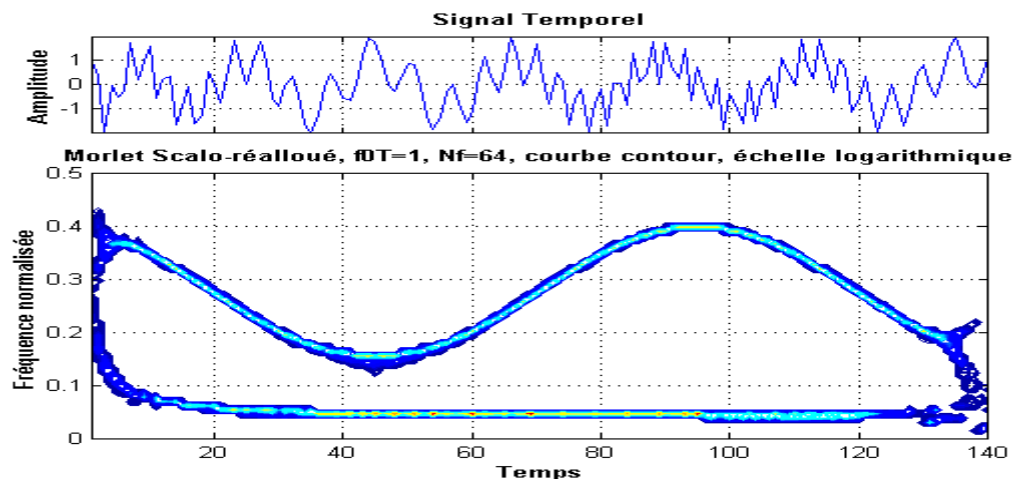


Figure 4 9 : Signal modulé en fréquence (sinusoïdale +hyperbolique)(en haut) ; Scalogramme réalloué de l'ondelette de Morlet (en bas)

Les instants et les fréquences réalloués du scalogramme du signal $x(t)$ sont formulés en fonction de la transformation d'ondelette continue $CWT(t,a,h)$ [34, 40] où h est une fenêtre gaussienne, tels que :

$$\hat{t}(t, a) = t - \Re \left\{ \frac{CWT_x(t, a, \tau_h) \cdot CWT_x^*(t, a, h)}{|CWT_x(t, a, h)|^2} \right\} \quad \text{avec} \quad \tau_h = \tau \cdot h(\tau) \quad (4.18)$$

$$\hat{f}(t, a) = \frac{f_0}{\hat{a}(t, a)} = \frac{f_0}{a} + \Im \left\{ \frac{CWT_x(t, a, D_h) \cdot CWT_x^*(t, a, h)}{2 \cdot \pi \cdot |CWT_x(t, a, h)|^2} \right\} \quad \text{avec} \quad D_h = \frac{d}{d\tau} h(\tau) \quad (4.19)$$

Les valeurs réallouées temps fréquences résultantes du signal $x(t)$ font parties de la formule suivante :

$$RSCALO_x(t', a', h) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 SCALO_x(t, a, h) \delta(t' - \hat{t}(t, a)) \delta(a' - \hat{a}(t, a)) \frac{dt \cdot da}{a^2} \quad (4.20)$$

4.6 Conclusion

On a vu dans ce chapitre que le principe de la méthode de réallocation permet de modifier les distributions temps fréquence et temps échelle de manière à concentrer leurs représentations en leurs centres de gravités, dans le but d'avoir une meilleur lisibilité avec une bonne focalisation de ces distributions temps fréquence et temps échelle. Il ne faut pas croire que la réallocation augmente la résolution temps fréquence car celle-ci dépend du choix du noyau de la représentation qui peut être réallouée. La méthode de réallocation peut être non seulement appliquées dans les deux classes de Cohen et Affine, elle peut être aussi généraliser pour les transformations à noyau, comme la transformation linéaire Fourier court terme (STFT).

Dans notre cas on a basé sur le spectrogramme et le scalogramme qui font parties des distributions d'énergies locales du signal suite à leurs représentations non négatives.

Cinquième chapitre

Applications des Techniques de Détection des Changements Brusques dans les Signaux non Stationnaires

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie les différentes représentations temps fréquence et temps échelle des signaux non stationnaires. On présente le problème posé par la représentativité réelle des signaux, leurs résolutions ainsi que le problème posé par la détection des variations spectrales qui composent ce type de signaux. La représentation temps fréquence qui précise

les variations spectrales au cours du temps du signal montre qu'elle ne peut pas donner une généralisation de tout type de signal, cependant chaque signal présente des caractéristiques bien spécifiques notamment sur la loi de variation de sa fréquence instantanée et la loi de variation du retard de groupe. C'est la raison pour laquelle que dans les représentations temps fréquence (citées dans le chapitre 2) sont groupées selon des classes qui ont un rapport direct avec ces lois. La représentation temps échelle permet d'ajuster la résolution temps fréquence selon l'échelle tout en respectant la condition d'Heisenberg Gabor. La focalisation des variations spectrales de ces signaux dans les deux types de représentations citées auparavant est améliorée par les techniques de réallocation (citées dans le chapitre 4).

5.2 Représentations temps fréquence (classe de Cohen)

On se limite dans cette classe par la représentation de Wigner Ville, sa version pseudo lissée ainsi que le spectrogramme, sachant que cette classe contient d'autres représentations qui dépend du choix du noyau de l'équation 2.38.3.

5.2.1 Représentation par Transformation de Wigner Ville

D'après l'équation (2.15.1), on calcule la transformation de Wigner Ville d'un signal non stationnaire mono composante dont la variation de la fréquence instantané est linéaire. On constate d'après la figure 5.1 que la transformation de Wigner Ville détecte avec une bonne résolution temps fréquence ces variations. La figure 5.2 montre selon l'équation (2.3) l'estimation de sa fréquence instantanée. Le signal est de longueur 256 dont la plage de variation fréquentielle normalisée est entre 0.1 Hz et 0.4 Hz.

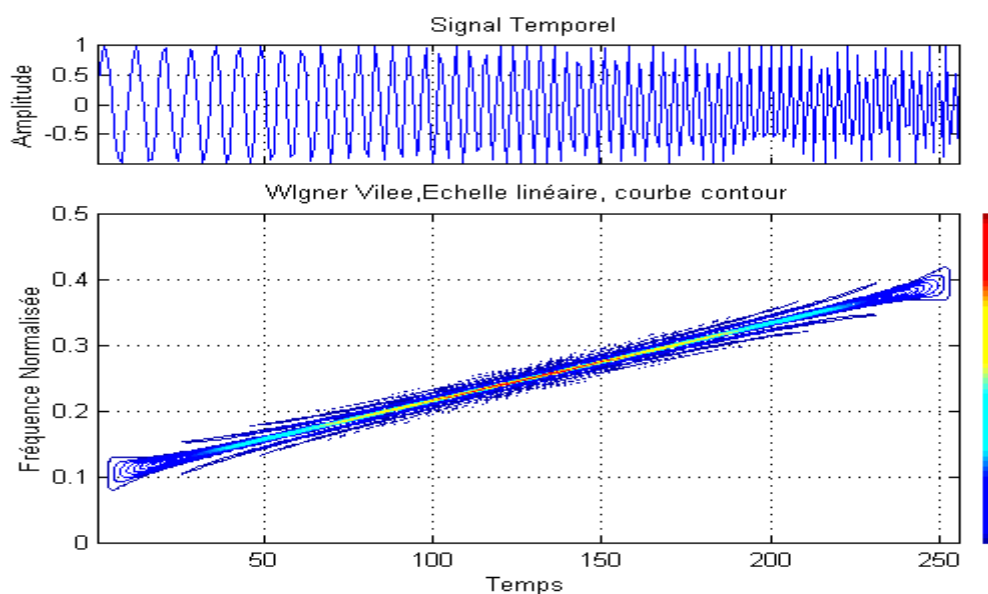


Figure 5.1 : Représentation de Wigner ville d'un signal modulé linéairement en fréquence (en bas). Représentation temporelle du même signal (haut)

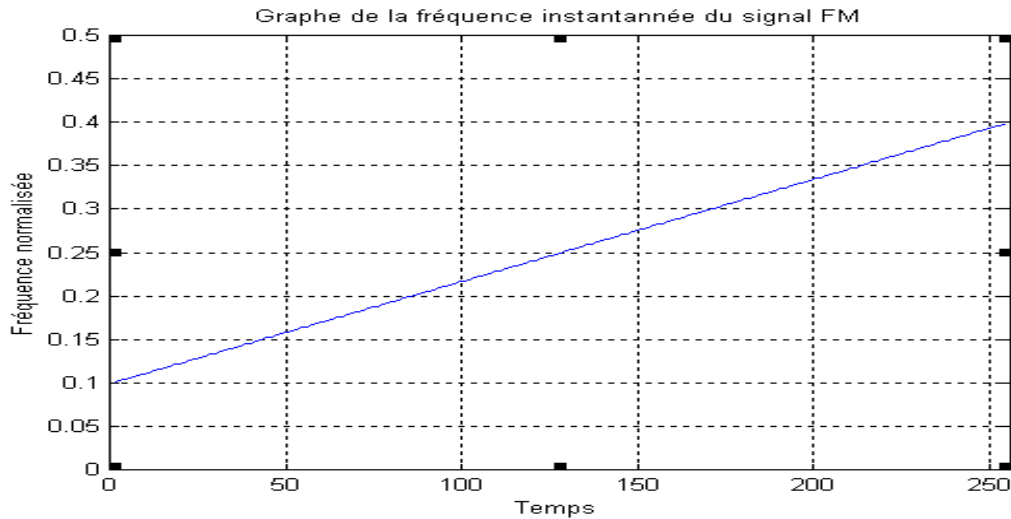


Figure 5.2: Fréquence instantané du signal modulé linéairement en fréquence (FM).

Par contre si on étudie le cas d'un signal non stationnaire multi composantes, on prend par exemple un signal qui se compose de deux composantes spectrales et on essaye de donner sa représentation de Wigner Ville. On constate d'après la figure 5.3 que la localisation de la variation fréquentielle est perturbée par les interférences entre les composantes principales du signal, comme on l'a expliqué par le problème de la représentation quadratique du signal. Le signal est donc composé de deux signaux modulés linéairement en fréquence de même longueur (256 échantillons), la première composante est de fréquence initiale normalisée de 0 Hz jusqu'à 0.3 Hz, la seconde est de 0.1 Hz jusqu'à 0.4 Hz. La figure 5.4 montre bien que l'estimation de la fréquence instantannée est perturbée par les interférences de la représentation.

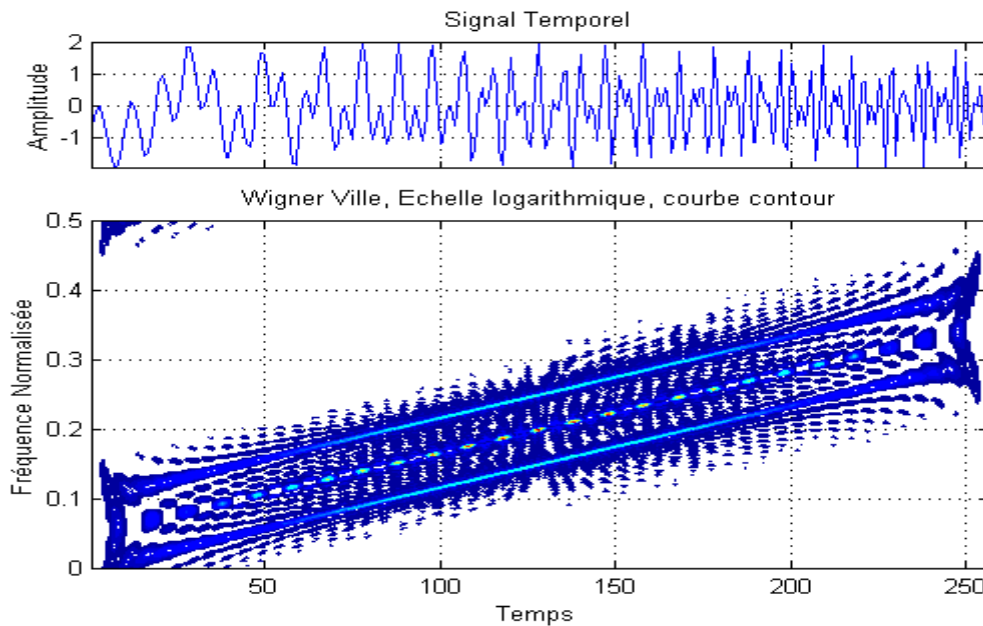


Figure 5.3: Représentation de Wigner ville d'un signal composé de deux composantes modulé linéairement en fréquence (en bas). Représentation temporelle du même signal (haut).

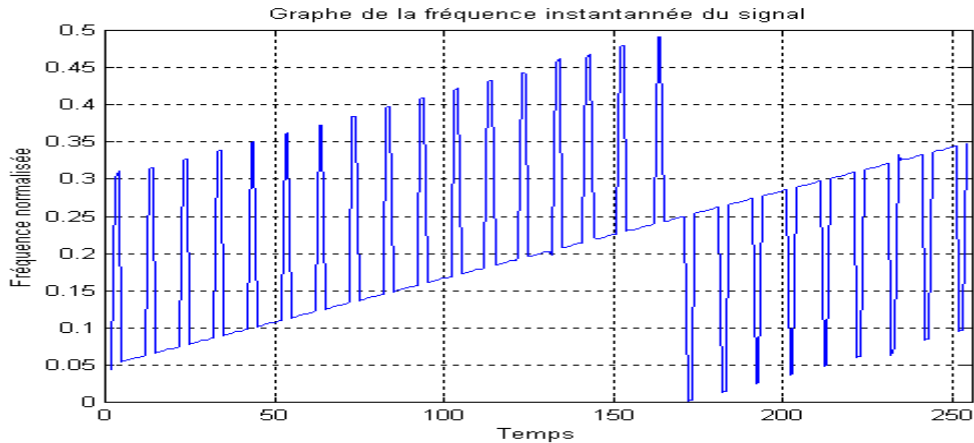


Figure 5.4: Fréquence instantané du signal multi composantes modulé linéairement en fréquence (*FM*).

On peut dire donc que la représentation de Wigner Ville donne une bonne représentation des variations spectrales pour les signaux mono composante, par contre, une mauvaise représentation pour les signaux non stationnaires multi composant, cela est due aux interférences entre les composantes principales du signal. Ce qui mène à chercher une autre manière pour une bonne représentativité de ce type de signaux.

5.2.2 Représentation par la transformation de pseudo Wigner Ville lissée

Dans la figure 5.3 on constate que les interférences existent dans la direction de l'axe temporel ainsi que la direction de l'axe fréquentiel. Le lissage temporel ainsi que le lissage fréquentiel permet donc d'éliminer ces interférences dans les deux directions, tout en se limitant par la condition d'Heisenberg Gabor. On peut prendre un autre exemple d'un signal de longueur 256 échantillons composé de deux composantes parallèles modulé linéairement en fréquence (*FM*). La première composante est de fréquence 0 Hz jusqu'à 0.35 Hz et la seconde composante est de fréquence 0.15 Hz jusqu'à 0.5 Hz. Par calcul de la pseudo Wigner Ville lissée (*SPWVD*) de ce signal, la figure 5.5 montre alors les interférences entre les deux composantes du signal. Le lissage de ces interférences est bien représenté dans la figure 5.6, par le choix de deux fenêtres, temporelle de type Hamming de longueur 33 et fréquentielle du même type, de longueur 63 dans une résolution fréquentielle de $N_f=256$ composantes par intervalle de fréquences normalisé de 0 Hz à 0.5 Hz.

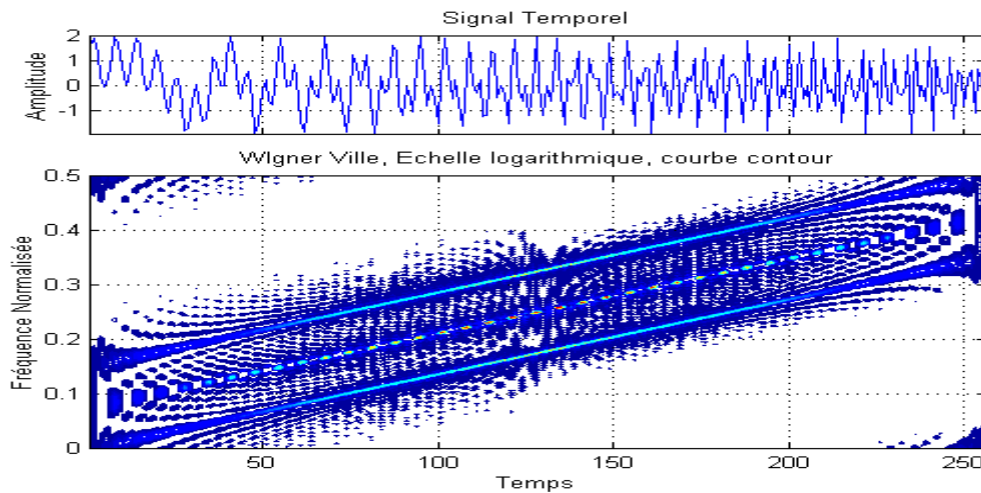


Figure 5.5: Wigner Ville : signal composé de deux linéaires *FM* parallèle (en bas). Représentation temporelle du même signal (en haut).

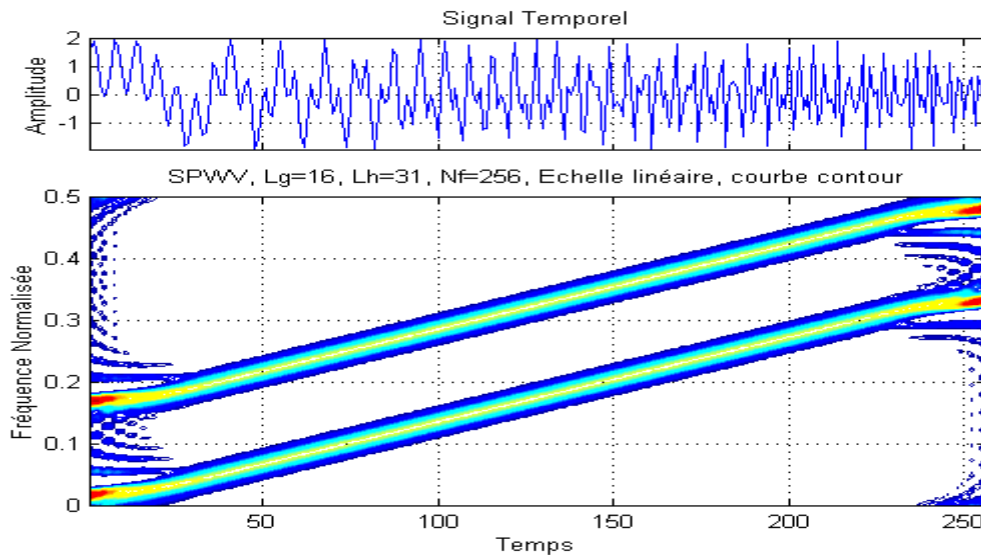


Figure 5.6: Pseudo Wigner Ville lissée: signal composé de deux linéaires *FM* parallèle g =Hamming (33) h =Hamming (63), (en bas). Représentation temporelle du même signal (en haut).

La transformation pseudo Wigner Ville lissée permet d'éliminer ces interférences par un choix approprié des fenêtres de lissage, on constate que la résolution temps fréquence est dégradée par ce lissage et aussi on constate que ni la transformation de Wigner Ville ou sa version pseudo lissée ne peut être une distribution d'énergie locale, cela est due aux valeurs négatives dans leurs représentations graphiques. La figure 5.7 présente la transformation de pseudo Wigner Ville lissée d'un signal de 512 échantillons composé par la concaténation de deux signaux. Le premier signal est de fréquence constante normalisée de 0.1 Hz localisé dans l'intervalle $[0, 256]$ et le second signal localisé dans l'intervalle temporel $[256, 512]$ est composé de deux atomes gaussiennes d'amplitude égale à 2 se trouvant dans le plan temps fréquence (t_i, f_i) , la première atome est aux coordonnées $(286, 0.25)$ avec une durée temporelle de 20 secondes et la seconde atome est aux coordonnées $(316, 0.40)$ avec une

durée temporelle de 25 secondes. Le lissage temporel du signal est fait par la fenêtre de Hamming de longueur 13 et celle de lissage fréquentielle est par Hamming de longueur 33.

Suite à ces valeurs négatives de la représentation temps fréquence, on cherche alors une autre représentation qui peut donner le sens d'une distribution d'énergie locale du signal temporel. Comme candidat on prend le spectrogramme.

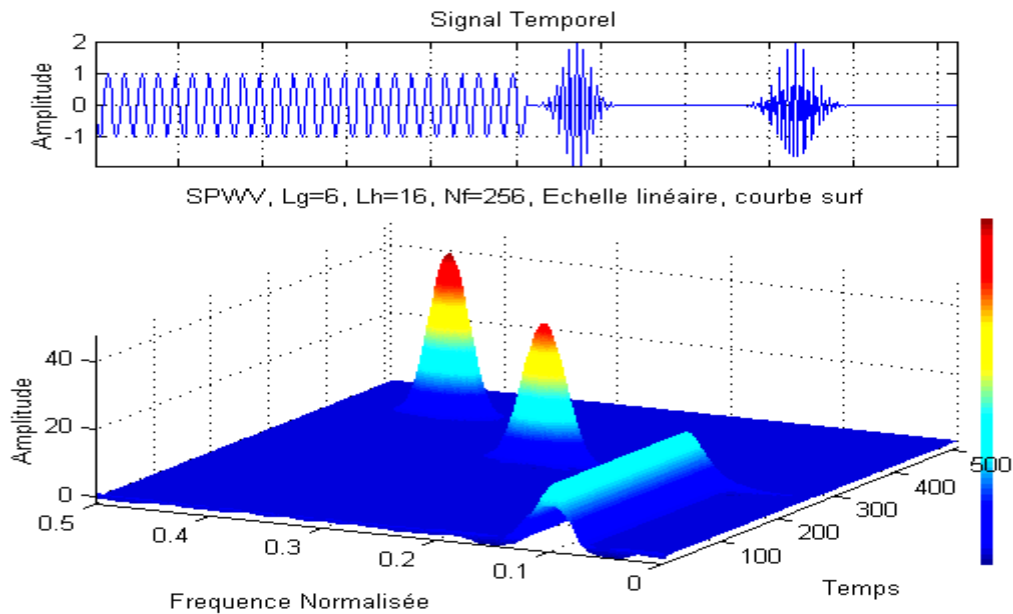


Figure 5.7: Pseudo Wigner Ville lissée deux atomes gaussiennes+sinus (en bas).
La représentation temporelle du signal (en haut).

5.2.3 Représentation par le spectrogramme

Le spectrogramme est une représentation quadratique du signal, déduit par un lissage mixte de la transformation de Wigner Ville ou par le module carré de la *STFT*. Dans la classe de Cohen, il peut être considéré comme une distribution d'énergie locale du signal [36], présentant le problème de bonne résolution temps fréquence. On présente dans la figure 5.8 le spectrogramme d'un signal de longueur 256 qui se compose de deux composantes *FM*. La première composante est de fréquences 0 Hz jusqu'à 0.3 Hz, la seconde composante est de fréquences 0.2 Hz jusqu'à 0.5 Hz et la fenêtre de pondération est de type Hamming de longueur 23.

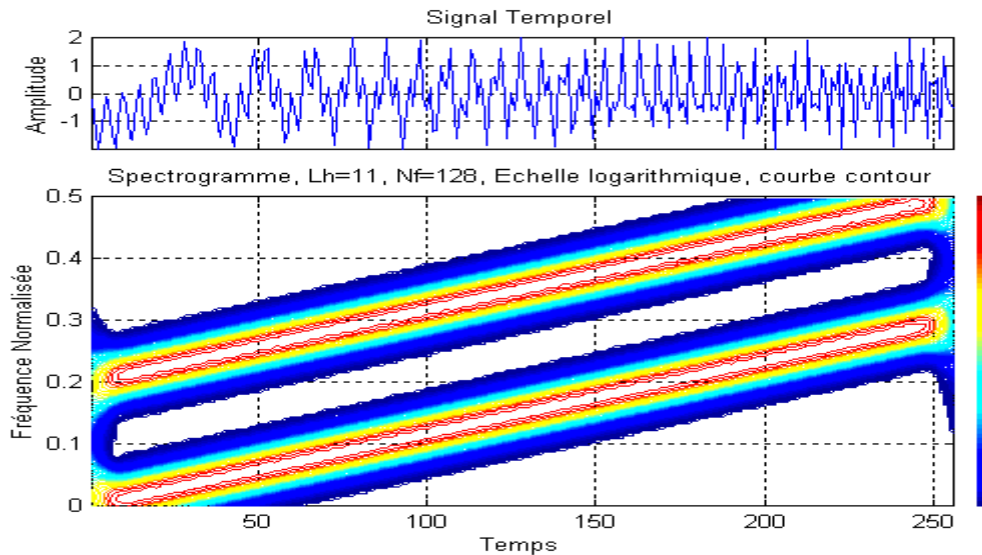


Figure 5.8: Spectrogramme du signal composé de deux composantes *FM*, la fenêtre de pondération est Hamming (23) (en bas). Représentation du signal temporel (en haut)

On constate l'existence d'une mauvaise résolution temps fréquence. Pour mieux augmenter cette résolution, il faut donc choisir une autre longueur de fenêtre, comme exemple, la figure 5.9 présente le spectrogramme du même signal avec le même type de fenêtre de longueur égale à 63.

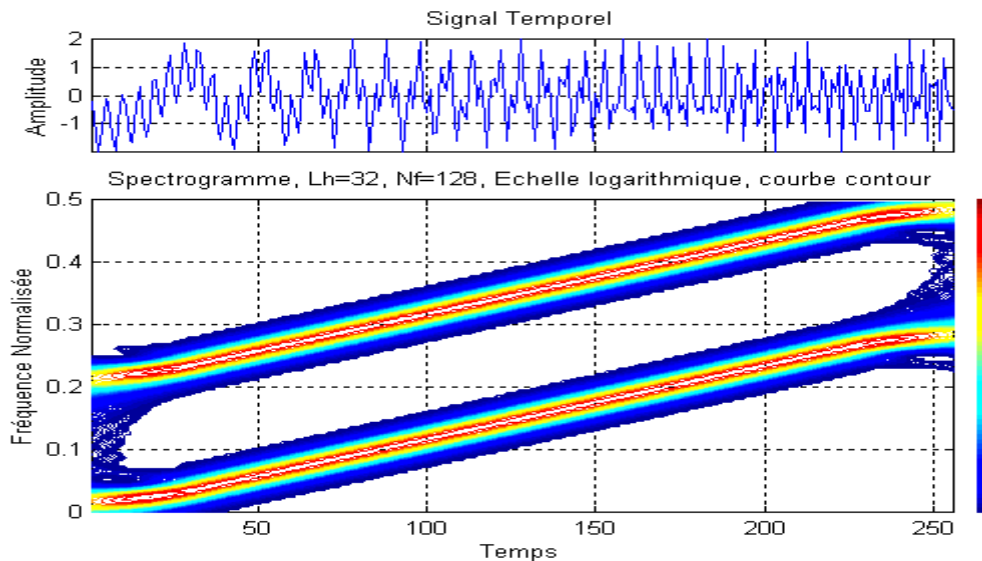


Figure 5.9: Spectrogramme du signal composé de deux composantes *FM*, la fenêtre de pondération est Hamming (63) (en bas). Représentation du signal temporel (en haut)

5.3 Représentations temps fréquence (classe affine)

La classe de Cohen est représentée précédemment dans quelques transformations temps fréquence, qui ont la propriété principale de la covariance en translation temporelle et en translation fréquentielle, elle ne représente pas tous les types des signaux non stationnaires et surtout lorsqu'il s'agit de la propriété de la covariance de dilatation. La classe affine répond à cette propriété.

5.3.1 Représentation par scalogramme

Une distribution similaire au spectrogramme dans la classe affine peut être définie par le scalogramme. Il représente le module carré de la transformée en ondelette continu du signal et il préserve la propriété de conservation d'énergie. On peut présenter un exemple de représentation du scalogramme (ondelette de Morlet de 12 échantillons) d'un signal de longueur 512 échantillons composé d'une impulsion de Dirac centré à la position 256.

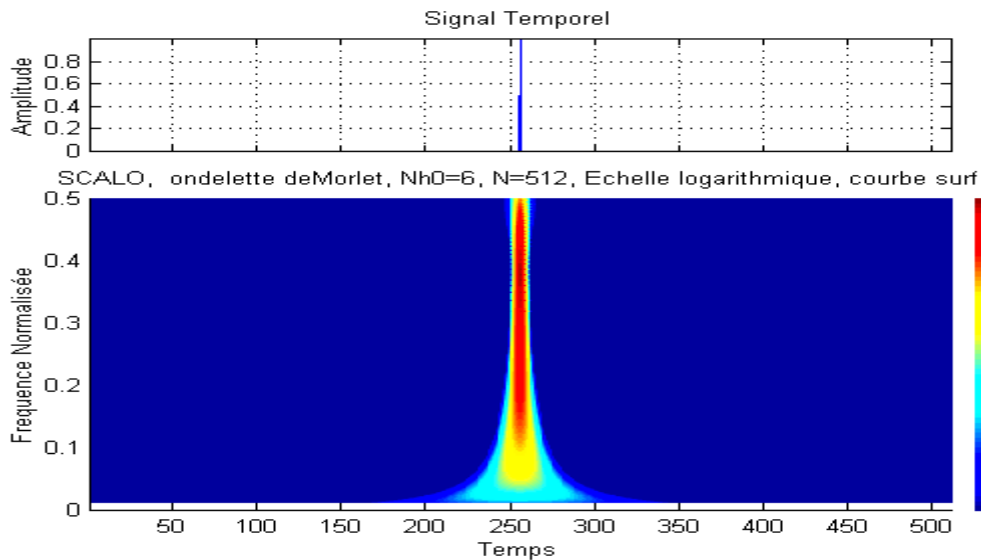


Figure 5 60: Scalogramme d'une impulsion centre à la position 256, par l'ondelette de Morlet de longueur 12 (en bas). Impulsion temporelle (en haut).

La condition d'Heisenberg Gabor est respectée par le scalogramme et la résolution n'est pas constante sur toutes les échelles, quoiqu'elle varie d'une échelle à une autre. La figure 5.11 montre la différence de résolution dans des différentes échelles. Le signal test est de 512 échantillons, il se compose de deux sinus de fréquences différentes. Le premier sinus est de fréquence 0.15 Hz et le second sinus est de 0.35 Hz.

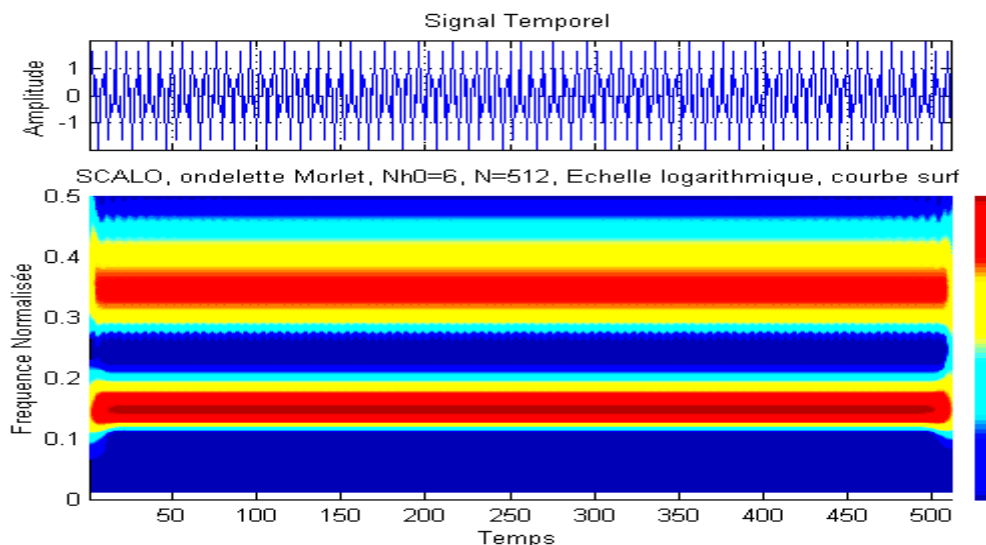


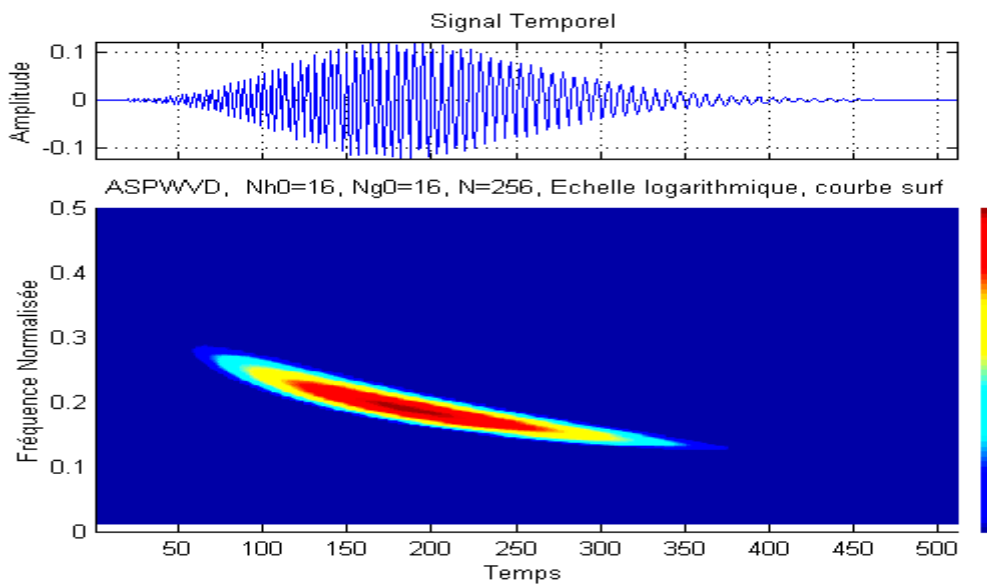
Figure 5 11: Signal temporel compose de 2 sinus (en haut). Scalogramme du signal (en bas)

5.3.2 Représentation par pseudo Wigner Ville lissée affine

Le problème de la résolution posé par le scalogramme dû au son noyau mixte, est résolu par la représentation de la pseudo Wigner Ville lissée affine. Cette dernière permet de sélectionner les deux fenêtres de lissage d'une façon indépendante selon la relation [36] :

$$ASPWVD_x(t,a) = \frac{1}{a} \iint h\left(\frac{\tau}{a}\right) g\left(\frac{s-t}{a}\right) x\left(s + \frac{\tau}{a}\right) x^*\left(s - \frac{\tau}{a}\right) ds.d\tau \quad (5.1)$$

La fenêtre h est de longueur 32, celle de g est de même longueur. La figure 5.12 montre la représentation de la formule (5.1) d'un signal Altes de fréquence minimale normalisée de 0.1 Hz et de fréquence maximale normalisée égale à 0.35 Hz.



**Figure 5 17: Signal Altes sa fréquence de 0.1 jusqu'a .35 (en haut).
Sa transformation pseudo Wigner Ville lissée affine (en bas).**

La figure 5.13 présente le scalogramme du même signal présenté par la figure 5.12.

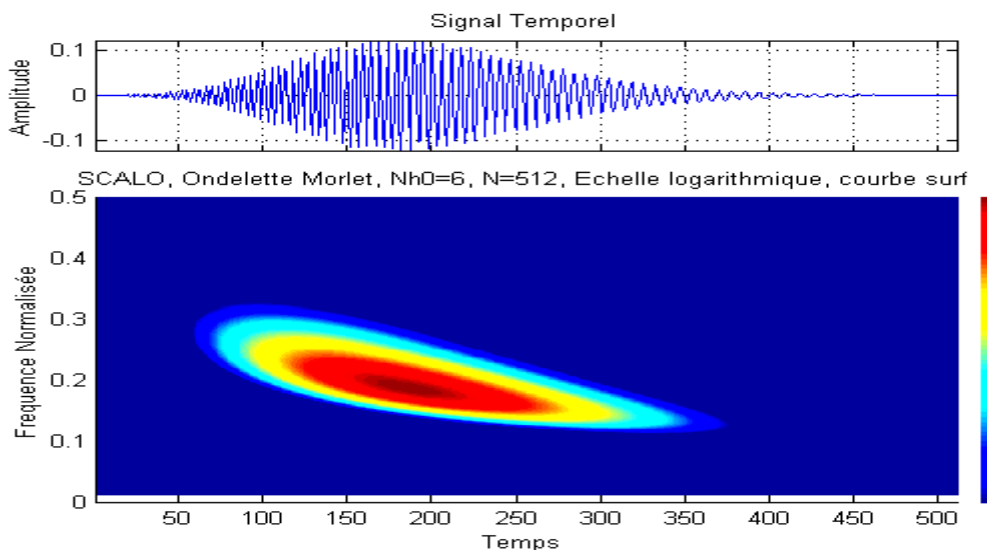


Figure 5 18: Signal Altes sa fréquence de 0.1Hz jusqu'a .35Hz (en haut).

5.4 Représentations temps fréquence (classe de puissance d'ordre k)

Le changements dispersif du retard de groupe du signal pour $k \neq 1$, induit d'autres représentations temps fréquence adaptées au facteur k . Ils existent plusieurs représentations dans cette classe et on va présenter parmi ces distributions celle de Bertrand et de Flandrin. On peut donner des exemples correspondants.

5.4.1 Distribution de Bertrand

Cette distribution localise bien le retard de groupe de variation hyperbolique, elle est représentée par [22, 36,40]:

$$B_x(t, a) = \frac{1}{a} \int \frac{f/2}{\sinh(f/2)} X\left(\frac{f \cdot \exp(-f/2)}{2 \cdot a \cdot \sinh(f/2)}\right) X^*\left(\frac{f \cdot \exp(f/2)}{2 \cdot a \cdot \sinh(f/2)}\right) \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t / a) df \quad (5.2)$$

Le signal dans le retard de groupe de type $t_{x(f)} = T_0 + c \cdot f^{(k-1)}$ ou k représente un facteur de la puissance fréquentielle du retard de groupe du signal x , c est un coefficient de vitesse de la loi de variation du retard du groupe et T_0 est un facteur temps initial. Dans notre cas on a pris comme exemple pour $k=0$, et $c=1$, un signal de longueur 512 échantillons.

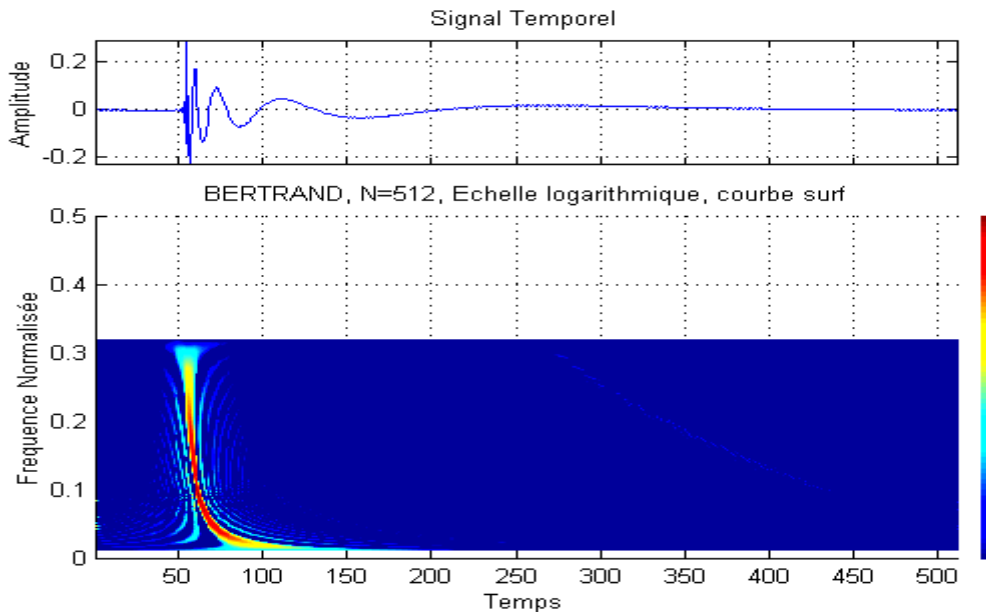


Figure 5.19: Signal temporel avec retard de groupe hyperbolique (en haut). Distribution de Bertrand du signal (en bas).

La figure 5.14 présente un signal avec un retard de groupe hyperbolique. La transformée temps fréquence de ce dernier par la distribution de Bertrand détecte mieux ce type de signaux.

5.4.2 Distribution de Flandrin

Cette distribution permet de détecter les signaux dont la loi du retard de groupe est de la forme $\frac{1}{\sqrt{f}}$, c'est-à-dire $k=1/2$, elle est représentée par [15, 36,40]:

$$D_x(t,a) = \frac{1}{|a|} \int \left(1 - (f/4)^2\right) X\left(\frac{[1-f/4]^2}{a}\right) X^*\left(\frac{[1+f/4]^2}{a}\right) \exp(-j.2.\pi.f.t/a) df \quad (5.3)$$

La figure 5.15 présente un signal de 128 échantillons, dont le retard de groupe est de type $\frac{1}{\sqrt{f}}$, avec $c=1$. La représentation temps fréquence de Flandrin exige une résolution fréquentielle de $N=1024$ composantes dans l'intervalle fréquentielle normalisée.

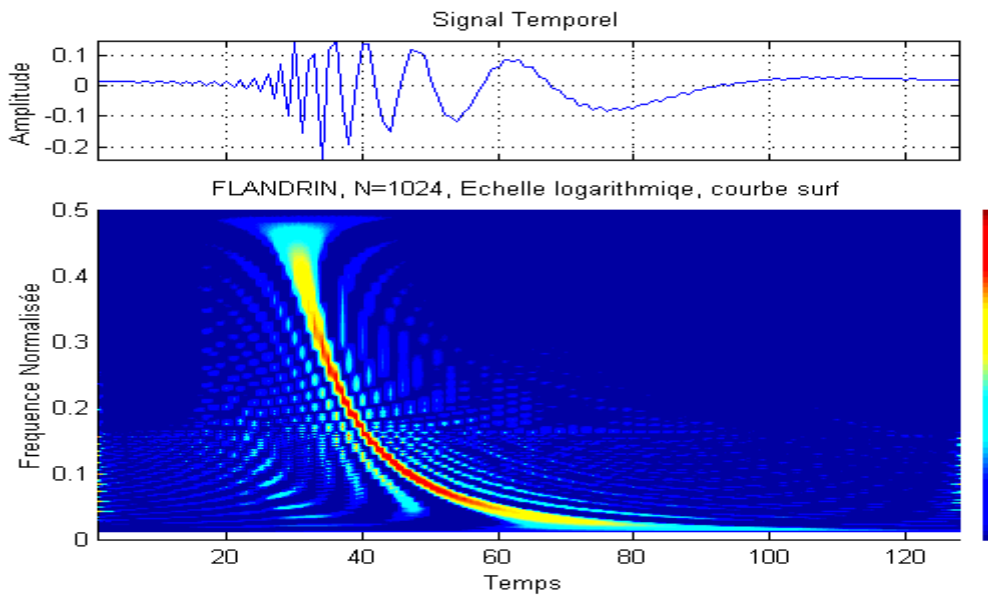


Figure 5.110: Signal de retard de groupe de type $\frac{1}{\sqrt{f}}$ (en haut).
Distribution de Flandrin du signal (en bas)

5.5 Applications à la détection du saut de fréquence dans les signaux non stationnaires

Les différentes représentations ont montré que chaque distribution est bien adaptée à une tâche bien précise, on ne peut pas donc favoriser préalablement une distribution par rapport à une autre. L'idée est donc de trouver une méthode de détection qui tient compte de la majorité des caractéristiques des différentes variations brutales des signaux non stationnaires. L'idée de base est que chaque variation rapide s'exprime par un changement de son énergie. Dans le domaine temps fréquence, la représentation la plus proche d'une densité d'énergie, est donc le spectrogramme, sa positivité lui permet de donner une expression d'une distribution énergétique locale du signal.

5.5.1 Limite de détection par le spectrogramme

Lorsqu'il s'agit d'une discontinuité temporelle directe sur le signal, le spectrogramme peut alors la signaler sur son graphe. L'exemple suivant montre que la discontinuité du signal $s(t)$ composé de la concaténation de deux signaux sinusoïdaux. Le premier est $v=\sin(2.\pi.8.t_1)$ pour T1 dans l'intervalle $[-1 0]$ et de longueur 512, le second est $w=\cos(2.\pi.8.t_2)$ pour T2 dans l'intervalle $[0 1]$ de même longueur 512. Le signal $s(t)$ est donc de longueur 1024 tel que $s(t)=[v w]$. On constate qu'au milieu du signal, il existe une discontinuité bien évidente détectée par le spectrogramme. La figure 5.16 montre le signal temporel $s(t)$ ainsi que son spectrogramme. La fenêtre de pondération est celle de Hamming de longueur 31 avec $N_f=256$ composantes dans l'intervalle des fréquences normalisées.

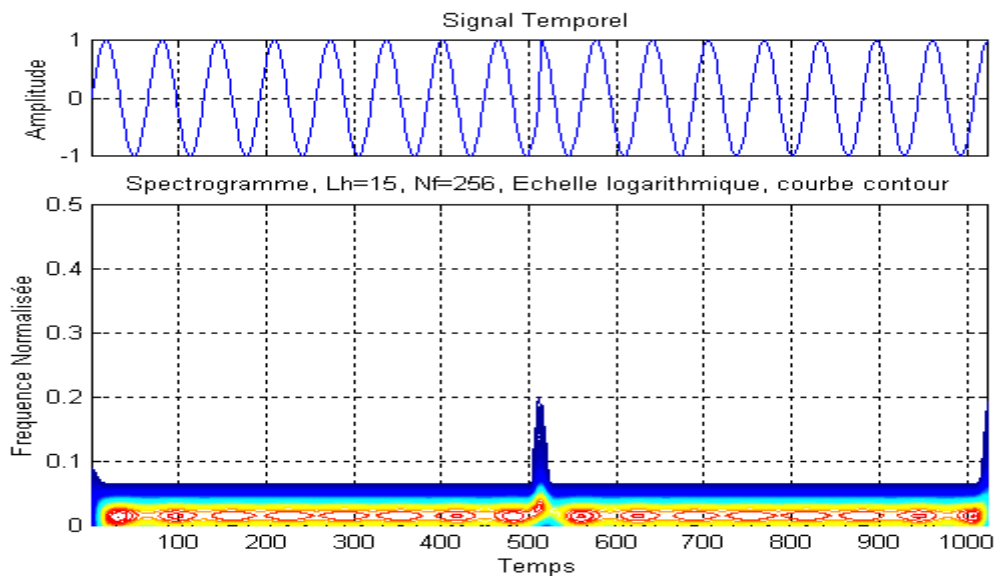


Figure 5.16 : Signal compose de sinus et de cosinus de même fréquence (discontinuité au milieu) (en haut). Spectrogramme du signal (en bas).

Par contre dans la figure 5.17, la limite du spectrogramme dans la détection de la variation spectrale d'un signal est visible. Le signal $s(t)=[v w]$ est composé dans ce cas, de la concaténation de deux sinusoïdes de différentes fréquences tel que $v=\sin(2.\pi.8.t_1)$ et $w=\cos(2.\pi.9.t_2)$. T1 et T2 sont alors définies dans l'exemple précédent. La discontinuité du signal temporel n'est pas visible ni dans le domaine temporel, ni par le spectrogramme. Il existe réellement deux composantes différentes qui compose le signal $s(t)$. La fenêtre de pondération choisie est celle de Hamming de longueur 31 avec $N_f=256$ composantes dans l'intervalle des fréquences normalisées.

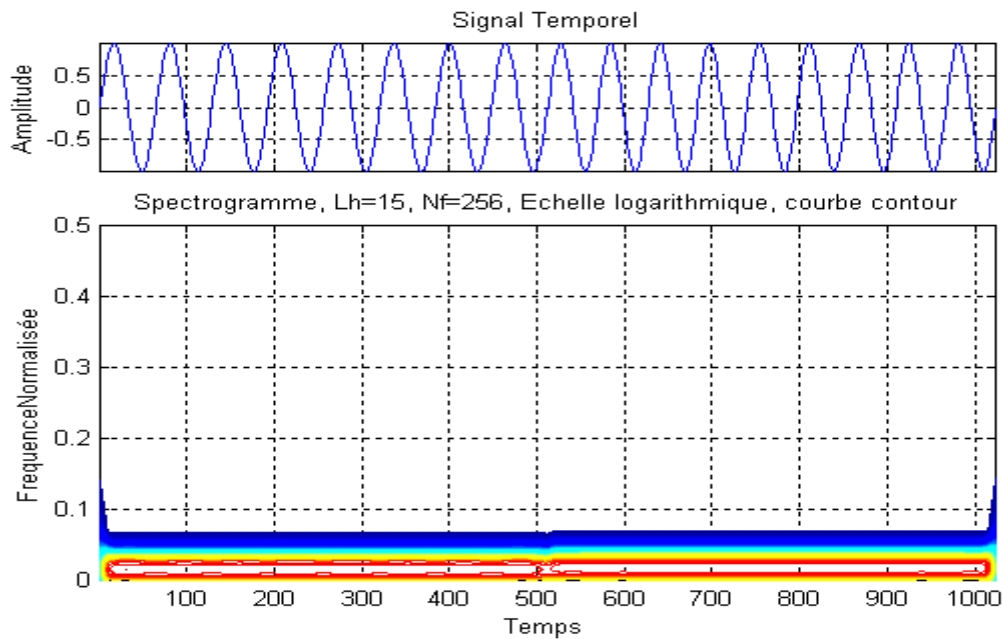


Figure 5.17: signal compose de sinus et de cosinus de fréquence différentes (Discontinuité à la 1ere dérivée au point milieu)(En haut). Spectrogramme du signal (En bas).

La dérivée à gauche au point milieu du signal égale 8, par contre celle de la droite au même point égale 9. Ceci exprime la discontinuité à la première dérivée du signal qui n'est pas discernable par le spectrogramme.

5.5.2 Limite de détection par le scalogramme

Dans le plan temps échelle le sosie du spectrogramme est le scalogramme. Si on refait le même exemple qui précède en lui appliquant le scalogramme, on constate que la détection du changement spectrale est invisible. La figure 5.18 montre la limite du scalogramme par ondelette de Morlet de longueur 24. Le nombre de composantes fréquentielles sélectionnées dans l'intervalle des fréquences normalisées est $N=1024$.

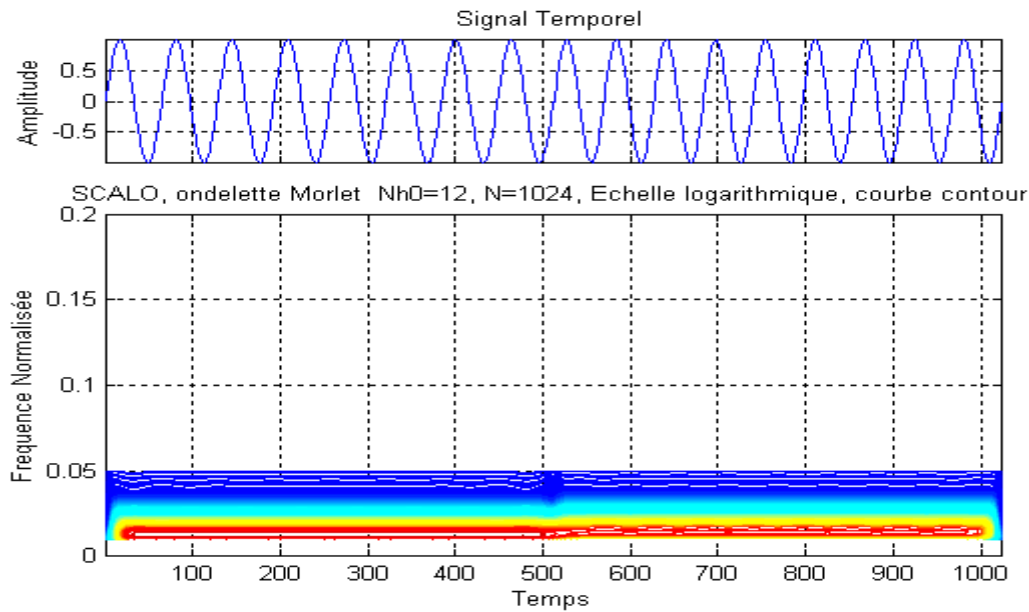


Figure 5.18: signal compose de sinus et de cosinus de fréquence différentes (Discontinuité à la 1ere dérivée au point milieu)(En haut). Scalogramme (ondelette de Morlet 24 échantillons) du signal (En bas)

5.5.3 Détection par DWT

La décomposition en ondelette discrète permet de signaler les variations spectrales dans un signal par ces coefficients de détails où le spectrogramme et le scalogramme ne peuvent pas les signaler. Si on répète le même signal du paragraphe 5.2.2 en lui décomposant par l'ondelette de Daubechies 10 jusqu'au niveau 2, on constate alors par la figure 5.19 que les variations sont visibles aux détails d2 et d1. Le choix de type d'ondelette est important selon l'application, par exemple l'ondelette de Haar ne répond pas à cette tâche.

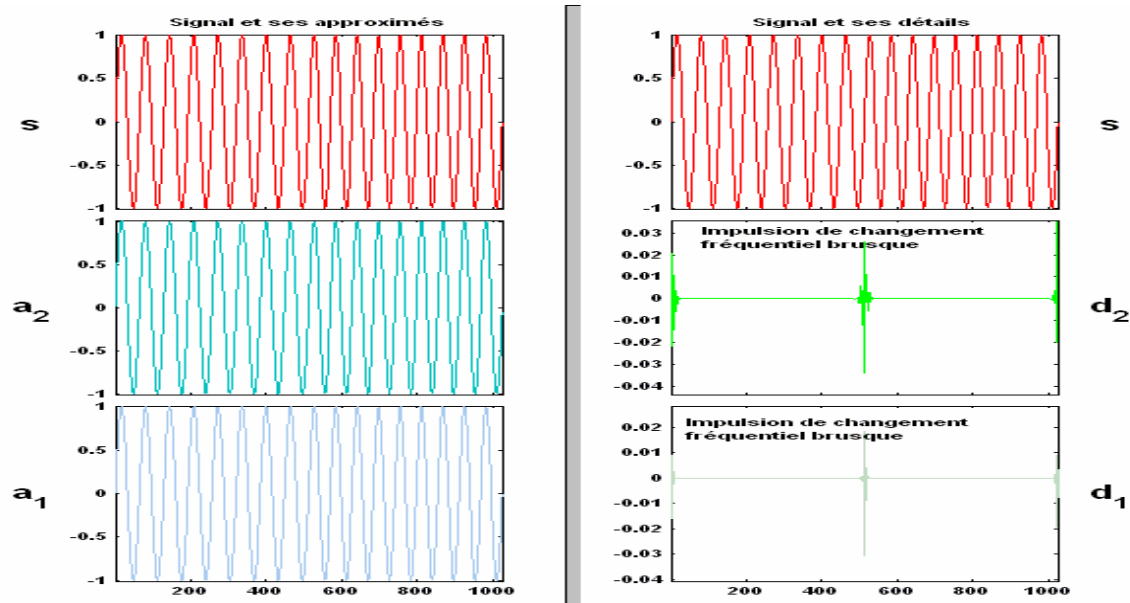


Figure 5.19: Décomposition du signal s par dB10, d_1 et d_2 montrent la discontinuité de la 1ere dérivée.

5.5.4 Détection par CWT

On a vu au chapitre 3 que l'ondelette continue se traduit par une convolution retournée de l'ondelette avec le signal à analyser. Pour une variation brusque du signal, l'ondelette continue se trouve apte à déceler ces variations à l'échelle où elle persiste. Dans une vision de filtrage, l'ondelette continue permet également de repérer ces variations par sa représentation en banc de filtres. On prend toujours le même signal précédent, en lui appliquant l'ondelette de gauss complexe (cgauss) et on cherche à détecter la variation. Pour une ondelette de cgauss1, on constate par la figure 5.20 que le changement n'est pas détecté.

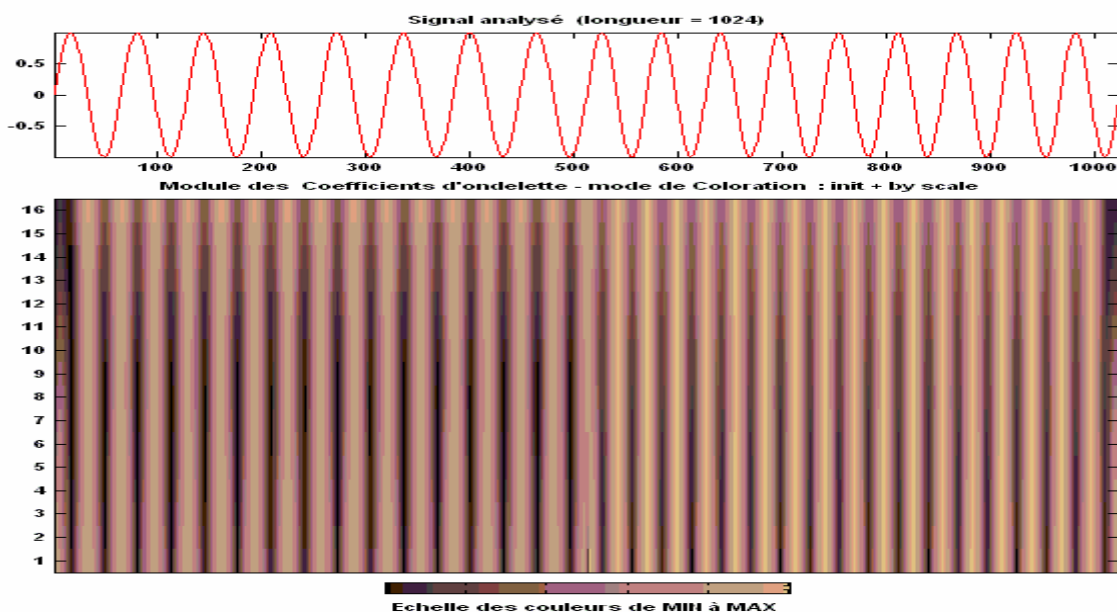


Figure 5 20: Signal s (en haut). Décomposition du signal par cgauss1 (en bas).

Par contre dans la figure 5.21 et par cgauss4, la variation est bien visible à l'échelle ou elle se trouve.

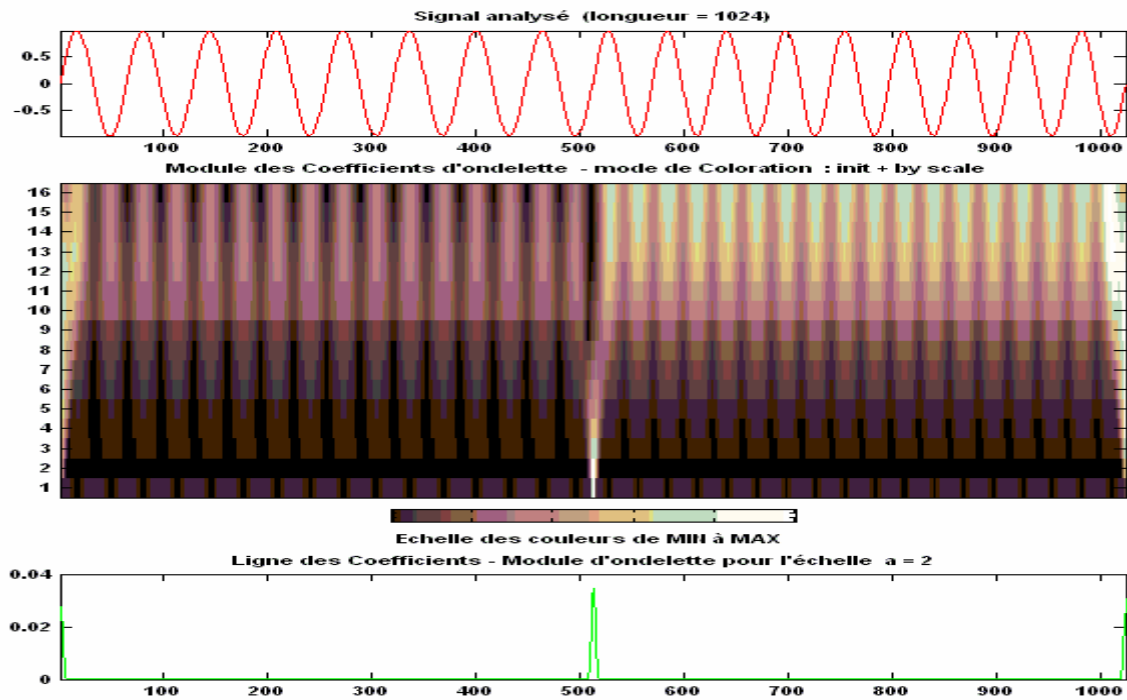


Figure 5 21: Signal s (en haut). Décomposition du signal par cgauss4 (milieu). Module de ligne de coefficients d'ondelette (en bas).

5.5.5 Détection par décomposition en paquets d'ondelette

La décomposition par paquets d'ondelettes du même signal $s(t)$ donne une représentation fréquentielle plus fine qu'à la décomposition dyadique DWT . On cherche alors de mieux représenter le signal dans le plan temps fréquence par des bancs de filtres sur les détails que sur les approximations. Ceci donne plusieurs choix de bases, qu'on doit sélectionner par des critères bien spécifiques. On a choisit comme exemple le critère entropique pour une décomposition à deux niveaux par l'ondelette dB10. On constate par la figure 5.22, que le paquet (1,1) détecte bien cette variation spectrale.

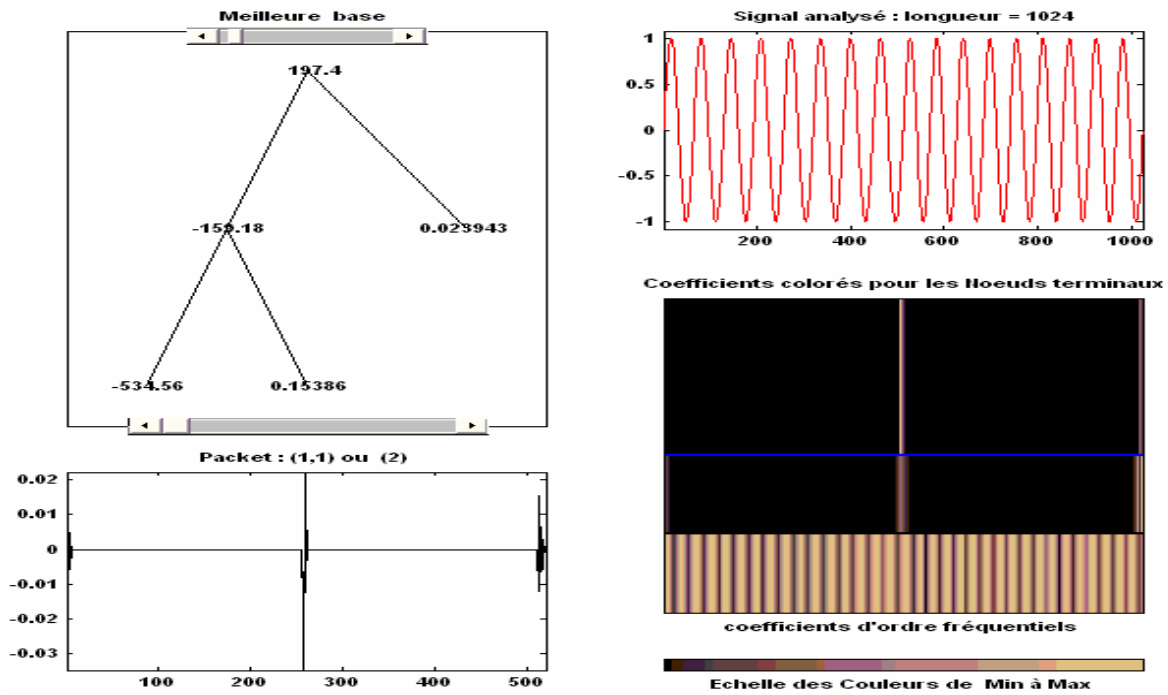


Figure 5.22: signal compose de sinus et de cosinus de fréquence différentes
 (Discontinuité à la 1ere dérivée au point milieu)
 Paquet d'ondelettes dB10 (meilleure base critère entropique) du signal

5.6. Détection des changements brusques par l'image temps fréquence

L'application des techniques précédentes pour la détection se trouve perturber par les bruits et la richesse des composantes spectrales du signal. Ainsi donc l'idée est de projeter le signal dans le plan temps fréquence par une représentation bien adaptée et ensuite voir sur l'image temps fréquence résultante les variations qui peuvent surgir.

Comme on a vu que le spectrogramme ne peut pas détecter les discontinuités dans les dérivées du signal, on n'a pensé donc de trouver une autre approche qui lui permet de marquer ces variations. Le principe de mesure de distances bidimensionnelles dans une image permet d'aider le spectrogramme à les détecter. L'utilisation d'un indice de détection des variations de distances se trouve utile. La refocalisation de la distribution d'énergie d'un signal peut améliorer à déceler ces variations spectrales brusques. Dans nos travaux [39], on a pensé d'utiliser un indice de stationnarité comparant la similitude des sous images tirées de l'image globale du plan temps fréquence réallouée.

5.6.1 Principe de la méthode

La méthode consiste à trouver une représentation énergétique du signal pour qu'on puisse lui appliquer le principe de densité de probabilité. Le spectrogramme est bien valable pour cette tâche. L'image tirée du spectrogramme est décomposée en sous images adjacentes de largeur p selon la figure 1.3 du chapitre 1. L'indice de stationnarité est défini par le calcul de la différence de la distance bidimensionnelle entre les sous images normalisées.

5.6.2 Indice de stationnarité et mesure de distances

Pour comparer la similitude entre deux TFR , de nombreux auteurs ont tout simplement choisis la distance euclidienne qui fait partie des distances Lq dont l'expression générale est :

$$dL_q(TFR_{x_1}^\phi, TFR_{x_2}^\phi) = \left[\iint |TFR_{x_1}^\phi(t, f) - TFR_{x_2}^\phi(t, f)|^q dt df \right]^{\frac{1}{q}} \quad (5.5)$$

TFR_x^ϕ désigne la représentation temps fréquence du signal x de noyau Φ . On peut particulariser ces distances par la valeur de q [37,38]

$q=1$: distance absolue moyenne ou distance de Manhattan Kolmogorov

$q=2$: distance quadratique moyenne ou distance euclidienne

$q \rightarrow \infty$: déviation maximale.

La distance entre loi de probabilité $P(a, b)$ définie dans un domaine D non négatif, telles que :

$$\forall (a, b) \in D \quad P(a, b) \geq 0 \quad (5.6)$$

$$\int P(a, b) \geq 0 \quad (5.7)$$

D'autres distances ont été cités dans [6,7] comme celle de Kullback, Chernoff et Matusita. La distance choisie dans notre cas est celle de Kolmogorov définie précédemment. Cette dernière distance a été montrée la meilleure distance appliquée dans les travaux de [1] dans la détection des changements brutaux en utilisant l'indice de stationnarité qui lui correspond.

Le principe de cette technique de détection est basé sur la mesure de distance entre deux sous images sélectionnées d'une image globale de la représentation temps fréquence du signal étudié. A chaque instant deux sous images $I_1(t, \tau, f)$ et $I_2(t, \tau, f)$ sont extraites de cette représentation et de chaque côté, ses sous images sont :

$$I_1(t, \tau, f) = TFR_x(t - p + \tau, f) \quad (5.8)$$

$$I_2(t, \tau, f) = TFR_x(t + \tau, f) \quad (5.9)$$

TFR_x , est la représentation temps fréquence du signal x , p représente la largeur temporelle de la sous image et $\tau \in [0, p]$. Le paramètre p est important dans la sélectivité et la sensibilité de la détection. Si on veut mesurer le changement brutal des composantes spectrales du signal non stationnaire de durée bien limitée, le choix de la valeur de p est alors pris en compte de cette limite. L'indice de stationnarité rentre en vigueur dans cette mesure afin de déterminer l'instant du changement brutal du spectre du signal. S'il y'a changement, on constate un pic sur cet indice, dans le cas contraire, l'indice de stationnarité converge vers zéro

On définit l'indice $Is(t)$ par [6] :

$$Is(t) = \int_{\tau=0}^p \int \| |NI_1(t, \tau, f)| - |NI_2(t, \tau, f)| \| dt.df \quad (5.10)$$

$$NI(t, \tau, f) = \frac{|I(t, \tau, f)|}{\iint |I(t, \tau, f)| dt.df} \quad (5.11)$$

La normalisation de la densité spectrale d'énergie permet de considérer ces sous images comme des densités de probabilités. Puisque le spectrogramme est défini non négatif, la méthode de détection par l'indice de stationnarité appliquée au spectrogramme, trouve donc son application valable.

La figure 5.23 montre que l'indice de stationnarité appliquée au spectrogramme permet de repérer les discontinuités qui se trouvent dans la dérivée du signal, par contre par l'image de la figure 5.17, la détection était difficile à la localiser.

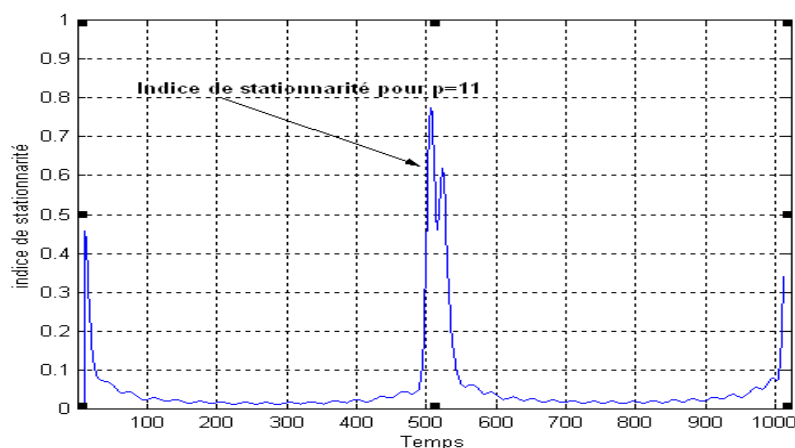


Figure 5 23: indice de stationnarité du spectrogramme de la figure 5.17 pour $p=11$.

5.7 Applications de l'indice de stationnarité sur le spectrogramme réalloué

Le spectrogramme réalloué préserve le principe de la densité d'énergie comme le spectrogramme. Il porte l'avantage de concentrer cette distribution d'énergie sur le centre de gravité de la courbe représentative temps fréquence du signal analysé. Il augmente donc en quelques sortes la résolution de la détection. Pour ces qualités, on a préféré de lui appliquer le principe de détection par l'indice de stationnarité [39].

5.7.1 Application à un signal synthétique

On présente un signal $s(t)$ de 512 échantillons et de quatre composantes spectrales sinusoïdales de fréquences normalisées, la fréquence d'échantillonnage est de 1 kHz. Les quatre composantes du signal sont : $s1(0.2\text{Hz}; [1 : 179])$, $s2(0.25\text{Hz}; [180, 209])$, $s3(0.3\text{Hz}; [210, 239])$ et $s4(0.2\text{Hz}; [240, 512])$ présentent trois changements spectraux aux instants (179 à 180), (209 à 210) et (239 à 240) .

On présente dans le tableau (5.1) le résultat de la détection du signal test non bruité par application de l'indice de stationnarité en utilisant comme représentation temps fréquence le spectrogramme (sp) et le spectrogramme réalloué (rsp) pour différentes valeur de p des sous images de la TFR. Dans le tableau (5.2), le résultat est pour le même signal synthétique noyé dans un bruit gaussien de 10 dB. La fenêtre d'analyse du spectrogramme est celle de Hamming de longueur 21.

Valeur de p	3		7		11		21		31	
	sp	rsp	sp	rsp	sp	rsp	sp	rsp	sp	rsp
TFR										
Temps										
T1	180	180	180	180	180	180	180	179	180	178
T2	210	210	210	209	210	211	211	209	X	209
T3	240	240	240	240	240	239	240	241	242	243

**Table 5 1: Détection des instants de changements spectraux du signal $s(t)$ non bruité. Spectrogramme (sp), spectrogramme réalloué (rsp)
X : instant masqué.**

Valeur de p	3	7	11	21	31
---------------	---	---	----	----	----

TFR \ Temps	sp	rsp	sp	ssp	sp	rsp	sp	rsp	sp	rsp
T1	180	179	180	179	180	180	180	180	178	178
T2	210	211	210	210	213	211	211	209	X	209
T3	241	239	241	241	241	240	241	241	244	243

**Table 5 2: détection des instant de changements spectraux du signal $s(t)$ bruité de 10 dB. Spectrogramme (sp), spectrogramme réalloué (rsp)
X : instant masqué.**

On constate que l'augmentation de la largeur p de la sous image masque les changements spectraux de courte durée, ce qu'on peut conclure que la durée de p doit être au maximum la moitié de la petite composante spectrale du signal dont on veut détecter sa variation.

5.7.2 Application à un signal parole

Les mots du signal parole qui ont été sélectionnés pour cette application sont « hello », « bonjour » et « Salam ». La fréquence d'échantillonnage est $F_s=11025$ Hz.

Les figures (5,24, 5,25, 5,26) présentent respectivement le signal du mot « Bonjour », l'indice de stationnarité du spectrogramme et celui du spectrogramme réalloué. Les mêmes présentations des mots « Hello » et « Salam » sont respectivement dans les figures (5.27, 5.28, 5.29) et les figures (5.30, 5.31, 5.32). La figure 5.33 présente les deux indices de stationnarité du même mot « Salam » par spectrogramme et sa version réallouée pour la même largeur p .

Le choix de la durée de la fenêtre d'analyse h du spectrogramme est celle de Hamming et pour une durée de 18.2 ms. Le chevauchement de la fenêtre est de 87.5 %. Le choix de la durée de p doit être limité au minimum par la durée maximale de la fenêtre h ; pour notre application on a choisit une durée de 22,8 ms.

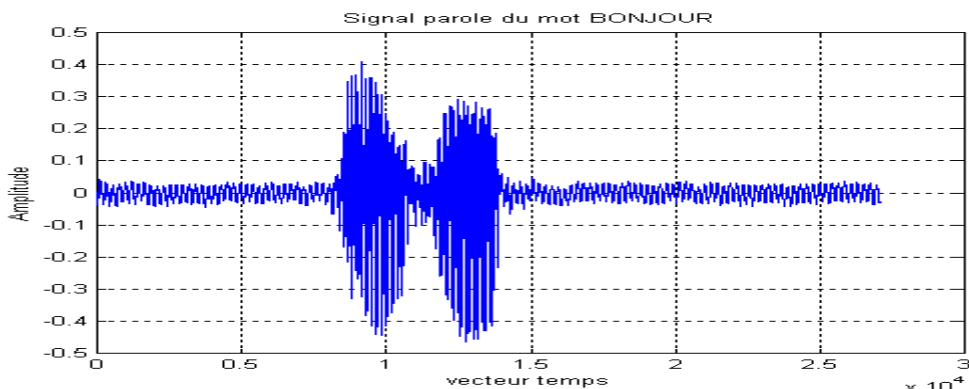


Figure 5.24: Signal parole du mot "BONJOUR"

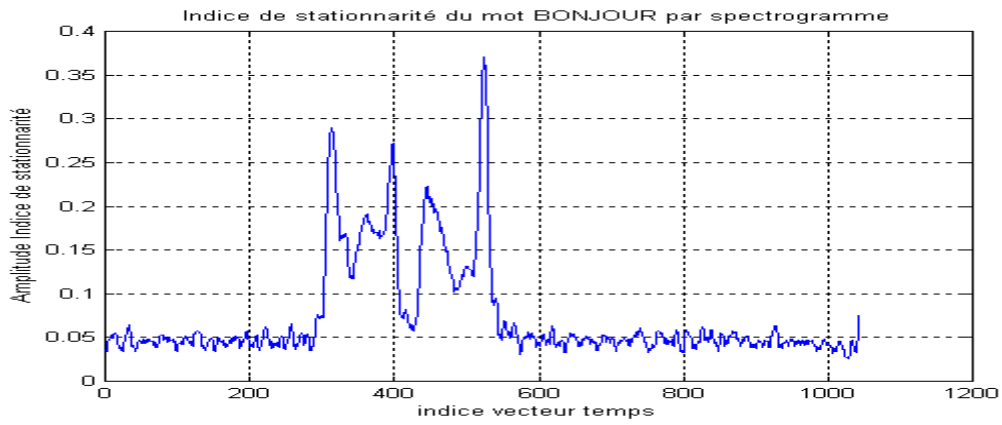


Figure 5.25: Indice de stationnarité tiré du spectrogramme : 'BONJOUR'

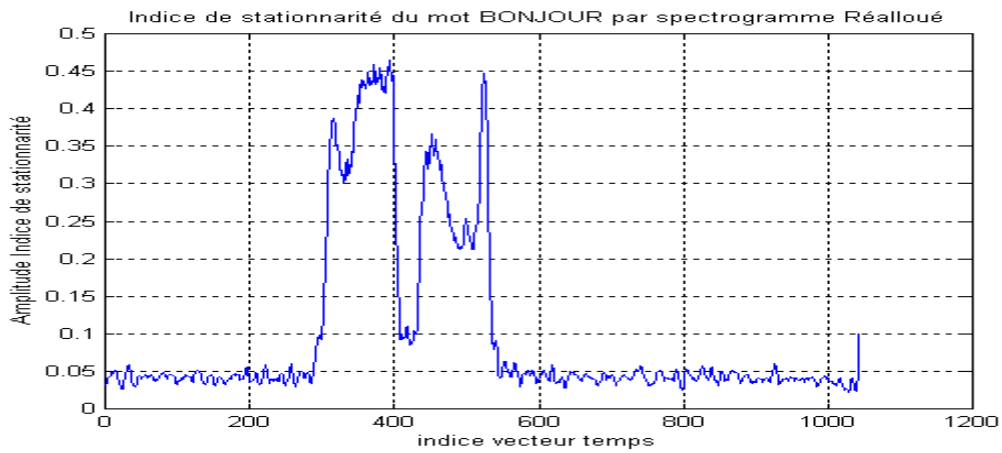


Figure 5.26: Indice de stationnarité tiré du spectrogramme réalloué : 'BONJOUR'

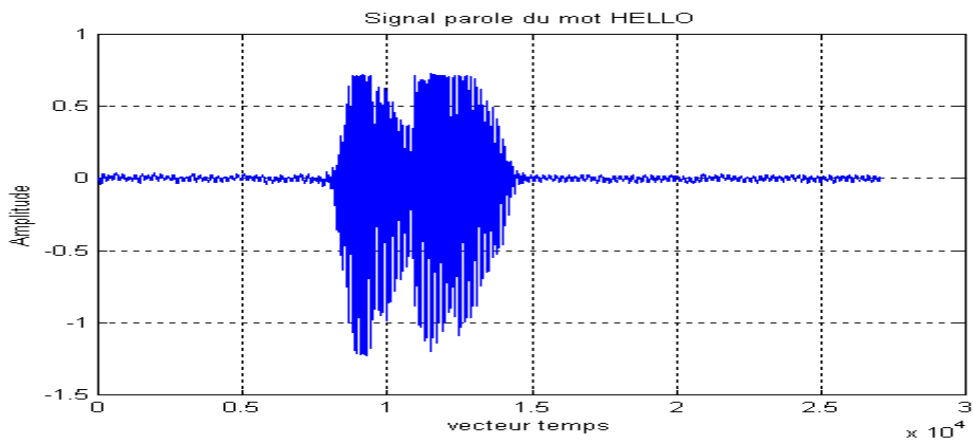


Figure 5.27: Signal parole du mot "HELLO"

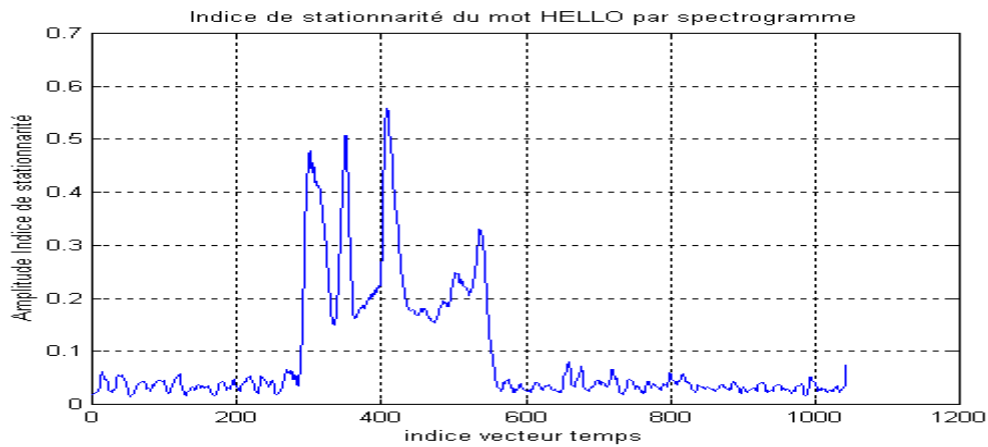


Figure 5.28: Indice de stationnarité tiré du spectrogramme : 'HELLO'

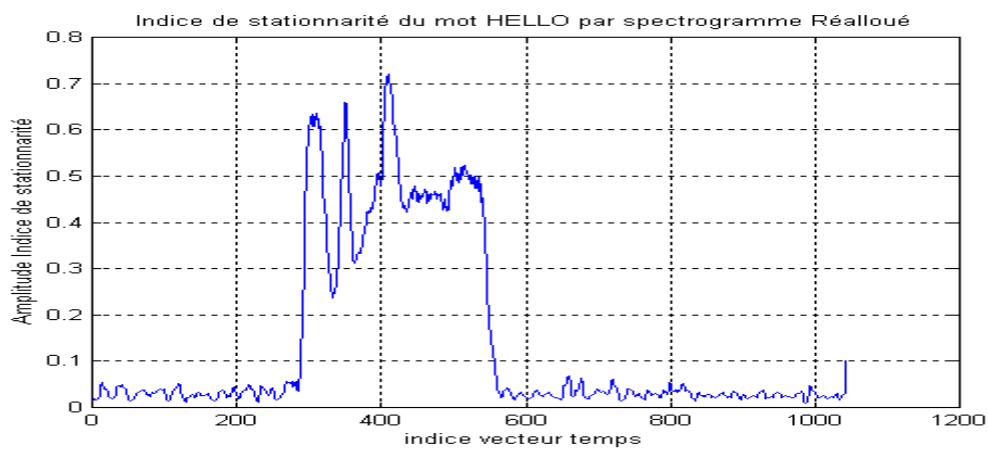


Figure 5.29: Indice de stationnarité tiré du spectrogramme réalloué : 'HELLO'

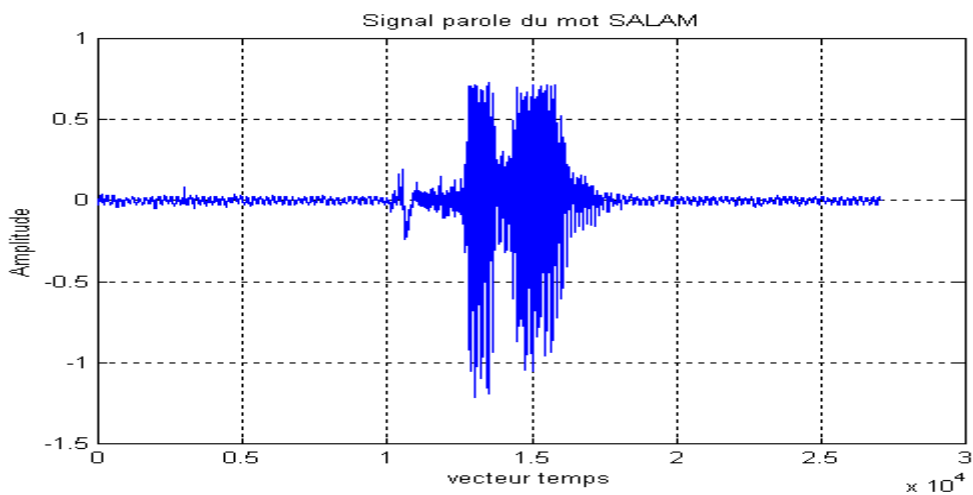


Figure 5.30: Signal parole du mot "SALAM"

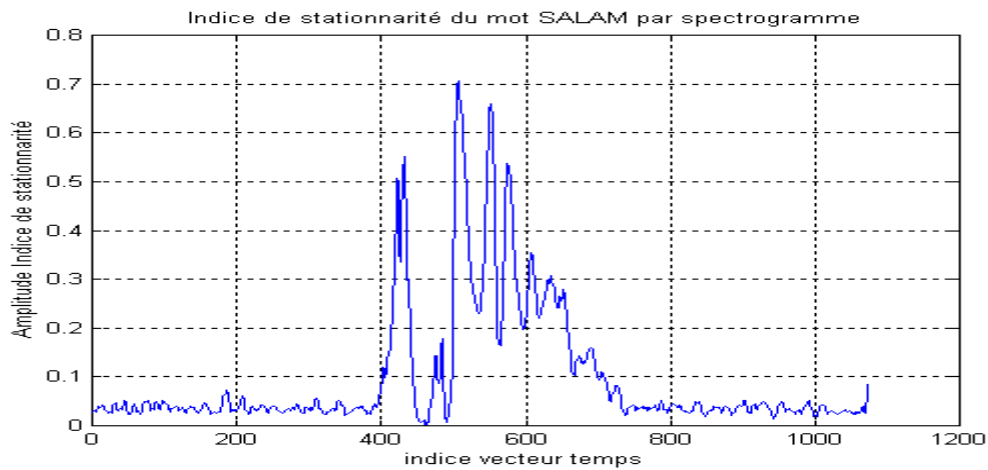


Figure 5.31: Indice de stationnarité tiré du spectrogramme : 'SALAM'

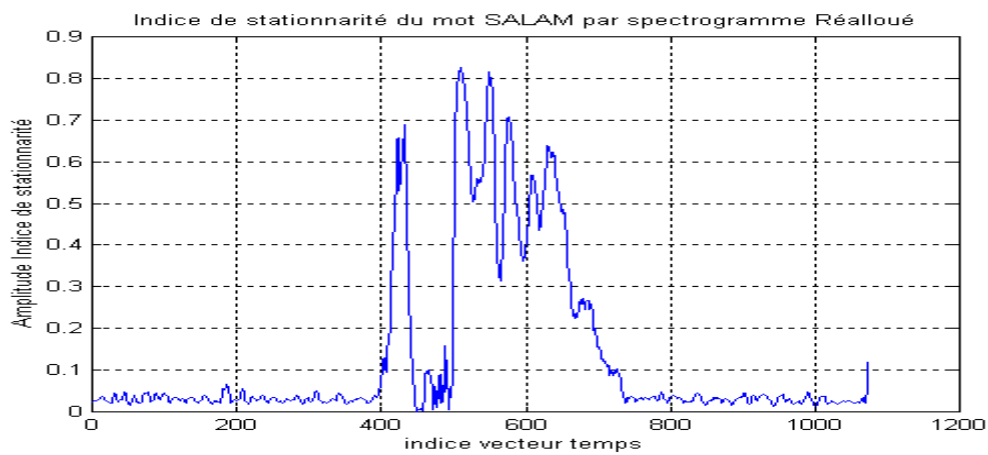
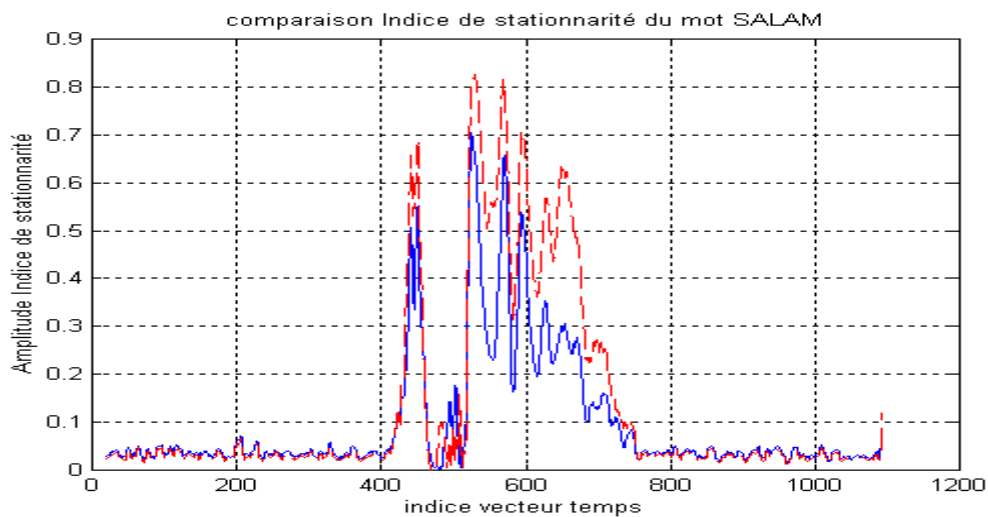


Figure 5.32: Indice de stationnarité tiré du spectrogramme réalloué : 'SALAM'



**Figure 5.33: Indice de stationnarité du mot « SALAM ».
Tiré du spectrogramme « courbe continu ».
Tiré du spectrogramme réalloué « courbe discontinue ».**

5.8 Conclusion

Les techniques citées auparavant dans la représentation temps fréquence ou temps échelle, donnent des résultats appréciables dans la détection des transitoires, ou bien dans les singularités qui existent dans les signaux non stationnaires. Chaque représentation présente une particularité par rapport à l'autre dans le type de détection ou de la représentation du signal. La technique de recherche des particularités du signal par la comparaison des sous images tirées du spectrogramme, offre plus de possibilités de déceler certaines variations rapides, qui ne sont pas discernées uniquement à l'œil nu par l'image du spectrogramme. Le calcul des distances entre les sous images de la *TFR* et la mesure d'un indice, donne un bon résultat dans le sens énergétique de la variation spectrale locale du signal. L'application de cet indice de stationnarité sur le spectrogramme réalloué permet de donner beaucoup plus de précision dans la détection des changements rapides qui s'expriment par des variations énergétiques importantes dans le plan temps fréquence, car dans le spectrogramme réalloué la distribution d'énergie est beaucoup plus concentrée sur le centre de gravité de l'image représentative du plan temps fréquence.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons introduit dans ce travail l'analyse temps fréquence et temps échelle des signaux non stationnaires. Nous avons montré l'utilité de la classification de ces représentations par leurs propriétés qui ont un rapport direct avec les propriétés des signaux à analyser, comme la fréquence instantanée et le retard de groupe. Nous avons aussi montré que toute variation brusque dans les composantes du signal s'exprime par la variation de la distance bidimensionnelles de l'image temps fréquence.

La proposition de la technique de la réallocation des représentations temps fréquence et temps échelle donne une meilleure lisibilité de l'image représentative de la transformation. L'application de l'indice de stationnarité, dont la similitude des sous images tirées de l'image globale de la représentation énergétique, donne un résultat appréciable dans la détection des changements spectraux du signal non stationnaire.

Contrairement à d'autres techniques comme la DWT et la décomposition en paquets d'ondelette qui, certes, donnent des résultats positifs dans la détection, mais elle souffre de deux problèmes :

- les deux décompositions se basant sur l'analyse par bancs de filtres, si une variation spectrale se trouve dans la zone fréquentielle de la bande atténuée des filtres miroirs en quadrature, alors cette variation sera atténuée par ces bandes,
- ces deux transformations souffrant du manque de la propriété de la covariance temporelle, toute translation temporelle du signal induit une autre réponse de ces transformations dans la détection des variations spectrales.

Si on veut utiliser ces transformations, il faut donc préciser les bandes fréquentielles où on veut détecter les changements spectraux afin d'éviter leurs atténuations par les bandes de transitions des filtres, ce qui veut dire une segmentation temporelle préalable est utile.

La complexité de la décomposition en paquets d'ondelettes est aussi due au choix du critère de sélection de la meilleure base, en plus du seuillage qu'on doit accepter pour une meilleure sélection. Plusieurs paramètres entrent dans le choix du critère de sélection de la meilleure base, entre autres le choix du modèle de rupture.

Dans la détection par la CWT, le problème réside dans le choix de la meilleure ondelette qui donne le meilleur filtrage avec le minimum de redondance de l'information. Malgré sa propriété de covariance temporelle, le choix reste toujours en rapport avec les propriétés du signal sous analyse. Le choix de l'échelle est aussi important que le choix du type d'ondelette. Le type de singularité existante dans le signal impose le choix d'ondelette et ses moments.

Le spectrogramme pose le problème de la connaissance préalable des propriétés du signal du type de stationnarité. Il en est de même du meilleur choix de la fenêtre d'analyse. Sa

propriété de densité d'énergie locale lui donne l'avantage de mieux exprimer les variations d'énergie du signal par la variation d'énergie locale. Ceci peut donner sens aux variations spectrales du signal. Malgré sa faible résolution, le spectrogramme est surtout valable pour les signaux stationnaires par morceaux comme le signal parole. Malheureusement, il existe des variations spectrales dans le signal qui ne sont pas détectables à l'œil nu dans le spectrogramme. L'ajout d'un indice de stationnarité, calculé à partir des distances bidimensionnelles des sous images tirées de l'image globale du spectrogramme, indique la similitude ou non entre les sous images. Ceci permet de déceler les variations d'énergies cachées à l'œil nu. Cet indice donne un signe de variation brusque dans les composantes spectrales du signal, comme on l'a montré au chapitre 5.

Le choix de la largeur de la sous image utilisée dans l'indice de stationnarité est important. Pour une sous image plus large, les composantes à courtes variations spectrales ne rentrent pas dans la similitude : elles sont masquées. Il faut alors tenir compte du choix en rapport avec ce qu'on veut déceler.

Le spectrogramme réalloué permet de donner une bonne lisibilité de l'image temps fréquence du signal. Une bonne refocalisation de l'énergie sur les composantes réelles du signal nous permet de constater que la détection des variations brusques des composantes spectrales est plus claire et concentrée par rapport à celle calculée à partir du simple spectrogramme. Les résultats, obtenus par application de cet indice sur le spectrogramme réalloué du signal test, sont donnés dans les tableaux 5.1 et 5.2 et montrent l'intérêt de la réallocation de cette représentation.

Enfin, comme perspectives, si on peut trouver une bonne représentation de l'image temps fréquence ou temps échelle, on peut alors lui appliquer le principe de la similitude des sous images par l'indice de stationnarité, afin de déterminer les variations brusques qui peuvent surgir dans un signal non stationnaire sans rentrer dans les détails des types de singularité ou leur ordre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Laurent H., Doncarli C. : " Abrupt changes detection in the time frequency plane," in Proc.IEEE-SP Int. Symp. Time-frequency and time-scale Analysis, pp.285-288, Paris, France,1996.

- [2] Hlawatsch F., Boudreaux-Bartels G.F: "Linear and quadratic time-frequency signal representations", IEEE Signal Processing Magazine, pp 21-67, April 1992.
- [3] Michel O., Baraniuk R. and Flandrin P.: "Time frequency based distance and divergence measures» Proc. IEEE-SP Int. Symp. On Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Philadelphia, PA, USA, pp 64-67, Oct. 1994.
- [4] Flandrin P., Baraniuk R. and Michel O. "Time frequency complexity and information", in Proc. IEEE ICASSP '94, uol.IU, pp. 329-332, 1994.
- [5] Vincent I., Doncarli C. and Le Carpentier E.: "Non stationary signals classification using time frequency distributions", Proc. IEEE-SP I n t. Symp. On Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Philadelphia, PA, USA, pp 233-236, Oct. 1994.
- [6] Laurent H., Doncarli C. : "Stationarity index for abrupt change detection in the time frequency plane" IEEE SP letters Vol.5, pp, 43-45, 1998.
- [7] Allali M., DeBruner V.: "using wavelet based-indices for detecting abrupt changes in signal",0-7803-7147-X/01/\$10.00IEEE.2001
- [8] Stéphane M, "A Wavelet tour of signal processing" second edition, Academic Press, 2001
- [9] Eric Hitti, « Selection d'un banc optimal de filtres à partir d'une décomposition en paquets d'ondelettes », thèse de doctorat, Nantes, 1999.
- [10] E.Hitti and M.F.Lucas, « Détection de rupture dans des signaux harmoniques à partir de la transformée en ondelettes discrètes » 16 Colloque GRETSI Grenoble, France, p 251-254, sep 1997
- [11] E.Hitti and M.F.Lucas, "wavelet basis selection for abrupt changes detection in multicomponent signals" proceedings of EUSIPCO, Paris, France, June 1998.
- [12] H.Laurent, E.Hitti and M.F.Lucas,: "Abrupt changes detection in the time scale and the time frequency plane: a comparative study", proceeding of the IEEE int Symp on TF and TS analysis, p 581-584, Pittsburg, USA, Oct 1998.
- [13] E. O. Brigham, "The Fast Fourier Transform and its Applications", Prentice- Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1988.
- [14] A. Papoulis, "Signal Analysis" , McGraw -Hill, New York, 1977.
- [15] P. Flandrin, "Temps- Fréquences", Hermès, 1999.
- [16] S. Nawab, T. Quatieri, "Short time Fourier Transform", chapter in Advanced Topics in signal processing J. Lim and A. Oppenheim eds. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [17] Boudreaux -Barlets, G.F. "Mixed time Frequency Signal Transformations"., The Transforms and Applications Handbook: second edition. Ed. Alexander D. Poularikas, Boca Raton: CRC. Press. LLC, 2000.

- [18] A. Papandreou, F. Hlawatsch, and G. F. Boudreaux-Bartels, “The hyperbolic class of quadratic time frequency representations”, Part I: Constant-Q warping, the hyperbolic paradigm, properties, and members, *IEEE Trans. Signal Proc.*, 41, pp. 3425-3444, December 1993.
- [19] R. A. Altes, “Wide-band, proportional-bandwidth Wigner -Ville analysis”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Proc.*, 38(6), pp. 1005-1012, June 1990.
- [20] G. Eichmann and N. M. Marinovich, Scale-invariant Wigner distribution and ambiguity functions, *Proc. SPIE*, 519, pp. 18-24, 1985.
- [21] P. Flandrin and P. Gonçalves, Geometry of affine distributions, *IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 80-83, Philadelphia, PA, October 1994.
- [22] J. Bertrand and P. Bertrand, A class of affine Wigner functions with extended covariance properties, *J. Math. Phys*, 33, pp, 2515-2527, 1992.
- [23] S. Kadambe and G. F. Boudreaux-Bartels, “A comparison of the existence of ‘cross terms’ in the Wigner distribution and the squared magnitude of the wavelet transform and the short-time Fourier transform”, *IEEE Trans. Signal Proc.*, 40(10), pp. 2498-2517, October 1992.
- [24] P. Flandrin, Some Features of Time Frequency Representation of Multicomponent Signals *IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech and Signal, Proc*, pp, 41.B.4.1-41.B.4.4 San Diego (CA), 1984.
- [25]. L. Cohen, “Time Frequency Analysis”, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [26] Y. Chan. “Wavelets Basics”. Kluwer Academic, 1995.
- [27] C. Chui. “An introduction to wavelets”, Academic Press, 1992.
- [28] A. Cohen. « Ondelettes et traitement numérique du signal ». Recherches en mathématiques appliquées. Masson, 1992.
- [29] I. Abdallah. Représentations temps-fréquence adaptatives de signaux acoustiques basées sur des critères entropiques. Thèse de doctorat, Université du Maine Décembre 1998.
- [30] R.R. Coifman and M.V. Wickerhauser. “Entropy-based algorithms for best basis selection”. *IEEE Transaction on Information Theory*, 38:713-718, 1992.
- [31] Gilbert Strang, Truong Nguyen, “Wavelets and Filter Banks”. Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [32] Kodera (K.), De Villedary (C.) et Gendrin (R.). – A new method for the numerical analysis of nonstationary signals. *Phys. Earth and Plan. Int.*, vol. 12, 1976, pp. 142–150

- [33] Escudié (B.) et Grea (J.). – Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l’analyse des signaux d’énergie finie. C. R. Acad. Sc. Paris, series A, vol. 283, 1976, pp. 1049–1051
- [34] Auger (F.) et Flandrin (P.). – Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. IEEE Trans. Signal Proc., vol. SP-43, n° 5, 1995, pp. 1068–1089.
- [35] E.Chassaude-Motin « Méthodes de réallocation dans le plan temps fréquence pour l’analyse et le traitement des signaux non stationnaires ».Thèse Doctorat Univ Cergy Pontoise 1998.
- [36] P.Gonçalvès, R. Baraniuk
 “Pseudo Affine Wigner Distributions and Kernel Formulation” Submitted to IEEE Trans on SP, 1996.
- [37] M.Basseville “Distance measure for signal processing and pattern recognition”, signal processing, Vol, 18, No 4, pp 349-369, Dec 1989.
- [38] Selin Aviyente “Information processing on the time frequency plane”, IEEE, ICASSP 2004.
- [39] S.Sbaa, M.Bedda “stationarity Index for Abrupt Change Detection by the Reassigned Spectrogram” AJIT 5(8):919-923, 2006 Medwell Online 2006.
- [40] F.Auger, P.Flandrin, P.Gonçalvès, O.Lemoine “Time Frequency Toolbox, Tutorial” CNRS (France), Rice University (USA) 1995-1996.
- [41] A.Mertins “Signal Analysis, Filter Banks, Time Frequency Transforms and Applications” John Willey and Sons, Ltd 1999.
- [42] F.Plante,G.Meyer and W.A.Ainsworth “Improvement speech spectrogram accuracy by the method of the reassignment” IEEE TRANSACTIONS on speech and Audio processing, , Vol. 6, No. 3, May 1998