

# MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **Magister**

**Contribution à l'analyse linéaire et non-linéaire  
par éléments finis du comportement des plaques composites  
laminées**

**Option :**

Mécanique des Structures

**Par**

**Mr Zakaria BELABED**

**DIRECTEUR DE MEMOIRE : Dr Kamel DJEGHABA**

**M.C Université de Annaba**

## DEVANT LE JURY

**PRESIDENT : Pr Bachir REDJEL**

**Prof. Université de Annaba**

**EXAMINATEUR : Dr Mouloud MERZOU**

**M.C Université de Annaba**

**EXAMINATEUR : Dr Yazid HADIDANE**

**M.C Université de Annaba**

**INVITÉ : Dr Abdelhacine GOUASMIA**

**M.A Université de Annaba**

*A mon père défunt : Mustapha*

*A ma très cher mère LATIFA.*

*A ma femme d'avenir*

*A ma petite sœur FATIMA.*

*A mon petit frère HABIBO*

# Remerciements

J'exprime ma profonde reconnaissance et ma parfaite gratitude à mon encadreur

**Mr : Djeghaba kamel**

Je tiens à remercier particulièrement Messieurs les membres du jury pour avoir accepté :

De Présider la soutenance **Pr Redjel Bachir**

Et pour m'avoir honoré par leur participation a l'examen de ce travail

Messieurs :

**Dr Merzoud Mouloud**

**Dr Hadidane yazid**

**Dr Gouasmia Abdelhacine**

Pour son soutien constant et son aide qui ma apporté tout le long de cette étude

Mes remerciements vont aussi a :

**Djouini Chawki**

**Hamouine Abd Elmadjid**

**La famille Elabed Kamel notamment Houria , Khalil et Sarra**

**Mes Amis et Mes collègues de Génie Civil notamment :**

**Radhwan , Nadia , Latifa , Mounira , Sameh , Nawel**

**Mes collègues de Bureau d'étude ECS**

Et à tous ceux qui se sont intéressé à mes préoccupations, ont toujours su m'encourager et reconforter.

J'exprime mes remerciements les plus cordiaux.

## ملخص:

إن وضع وتقييم نماذج العناصر محدودة من نوع عنصر اللوحة ، لتحليل الهياكل ، واحدا من مواضيع البحث في نماذج من المواد الصلبة والهياكل. في هذا العمل تكمن في روح هذا النموذج ، ويركز على وضع وتقييم نوع عنصر محدود لوحة يحاكي سلوك الخطية وغير الخطية للوحات المركبة. نماذج العناصر المحدودة للوحات تستخدم لحساب الهياكل الموحدة الخواص أو المركبة في الصناعة ، وجميع القطاعات (السيارات ، والفضاء ، والهندسة المدنية ،...). إن اقتراح العناصر الرباعية من نوع اللوحة المركبة غير الخطية تستند لنظرية التشوه ناتج عن القص من الدرجة الأولى ونظرية فون كرمان VAN KARMAN وتحديثات لاغرانج LAGRANGE تستخدم لوصف وضع غير الخطية للعناصر. إن تطوير العناصر المدرجة بسيط في صياغة, مناسبة في درجة الحرية في الهندسة. أمثلة عديدة تدل على أن نماذج التحليل دقيقة وتعطي الكفاءة الكبيرة غير الخطية لتشوهات اللوحات المركبة المتوسطة في السمك.

عدد كبير من البحوث التي تهدف إلى تحسين نوعية العنصر لتحقيق الحسابات هيكلية موثوقة ، وهي منطقة خاصة لتقديم الطلبات في الملاحة الجوية والصناعات النووية حيث دقة نتائج حاسمة للأمن ولكن لأسباب تتعلق بالحد الأدنى من وزنه.

## **Résumé :**

La formulation et l'évaluation des modèles éléments finis de type plaques, pour l'analyse des structures, constituent l'un des axes de recherches importants de la modélisation des solides et des structures. Dans ce travail se situe dans l'esprit de la modélisation et porte sur la formulation et l'évaluation des éléments finis de type plaques qui permet de simuler le comportement linéaire et non-linéaire géométrique des plaques composites laminées. Les modèles éléments finis de plaques sont manifestement les éléments finis les plus utilisés pour le calcul des structures isotropes ou composites dans l'industrie, tout secteurs confondus (automobile, aéronautique, génie civil,...). La proposition des éléments quadrilatères de plaque composite laminée non-linéaire est basée sur la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre et de la théorie de Von Kármán, et la description Lagrangienne actualisée est utilisée pour la formulation non linéaire des éléments. Le développement des éléments est simple dans la formulation incluse les degrés de liberté convenable dans l'ingénierie. Des exemples numériques démontrent que les modèles sont exacts et efficaces pour analyse non linéaire des grandes déformations des plaques composites laminées modérément épaisses.

De nombreux travaux de recherche ont visé à améliorer la qualité des modèles éléments finis de plaque afin de réaliser des calculs structuraux fiables, aspect fondamental surtout pour des applications dans le domaine de l'aéronautique et du nucléaire où la précision des résultats est cruciale à cause de la sécurité mais pour des raisons de poids minimal.

# Table des matières

<b>Table des Matières</b>	i
<b>Liste des Tableaux et Figures</b>	iii

## Chapitre I : Introduction Générale

I.1) Introduction et Problématique	1
I.2) Méthodologie :	3
I.3) Organisation du mémoire :	3

## Chapitre II : Introduction aux matériaux composites

II.1) Introduction et Commentaires historiques	4
II.2) Caractéristiques d'un matériau composite	5
II.3) Classifications des Matériaux composites	6
II.4) Terminologie fondamentale des matériaux composites	8
II.5) Les avantages des matériaux composites	9
II.6) Les composites de type Plaques Laminées (Stratifiés)	11

## Chapitre III : Mécanique des plaques composites

III.1) Introduction :	14
III.2) Élasticité Anisotropie :	14
III.2.1) Définitions	14
III.2.2) Relations constitutives	15
III.3) Les couches orthotropes	18
III.4) Expression des efforts résultantes dans les laminées	20
III.5) La théorie des plaques composites laminées	22
III.5.1) Modèles de structures multicouches	23
III.5.2) Théorie des plaques laminées classiques (Kirchhoff-love)	29
III.5.3) Théorie des plaques laminées du première ordre (Reissner-Mindlin)	32

## Chapitre IV : Modélisation numérique I : Présentation du modèle linéaire

IV.1) Introduction :	37
IV.2) Modèle éléments finis de structures multicouches	37
IV.2.1) Modèle éléments finis 2D	38
IV.2.2) Modèle éléments finis 3D	43
IV.3) Théorie classique des plaques laminées	45
IV.3.1) Modèle éléments finis 3D	45
IV.3.2) Modèle élément fini	46
IV.4) Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre	50
IV.4.1) Equations d'équilibres	50
IV.4.2) Modèle élément fini	50
IV.5) Eléments de plaque type Mindlin-Reissner Q4, Q8 et Q9	52
IV.5.1) Elément de Membrane Q4, Q8 et Q9	53
IV.5.2) Elément de Flexion Q4, Q8 et Q9	53

## Chapitre V : Modélisation numérique II : Analyse Non linéaire Géométrique

V.1) Théorie non-linéaire :	58
V.1.1) Intérêt du calcul non linéaire	58
V.1.2) Généralités	59
V.1.1) Types de problème non-linéaire	59
V.2) Théorie non-linéaire géométrique	60
V.2.1) aspect cinématique	60
V.2.2) Contraintes et déformations	60
V.2.3) Mesures de contraintes et de déformations entre les configurations	66
V.2.4) La formulation lagrangienne totale et actualisée	69
V.3) Formulation non-linéaire des plaques composites laminées	76
V.3.1) Définitions	76
V.3.2) Evaluation de la matrice déformation-déplacement B	77
V.3.3) Matrice tangente :	78

## Chapitre VI : Modélisation numérique III : Méthodes de résolution des système Nonlinéaire

VI.1) Introduction :	82
VI.2) Méthodes de résolution	82
VI.3) Stratégie de Résolution (Techniques de Pilotage)	84
VI.3.1) Equation d'équilibre et position du problème	85
VI.3.2) Technique de pilotage en charge imposée	87
VI.3.3) Critère de convergence et tests d'arrêts	88

## Chapitre VII : Validation et Evaluation

VII.1) Avant Propos	91
VII.2) Introduction :	92
VII.3) Analyse linéaire	93
VII.3.1) une plaque à 3 couches soumise à une charge répartie (pression)	93
VII.3.2) Une stratifiée de 4 couches symétriques sous une charge uniforme	94
VII.3.3) Une coque composite avec diaphragme	96
VII.4) Analyse Nonlinéaire Géométrique	100
VII.4.1) Une plaque multicouche soumise à une charge concentrée	100
VII.4.2) l'étude l'influence de l'orientation des fibres sur le comportement de la plaque	103
VII.4.3) Une multicouche soumise à une pression simplement appuyée sur deux bords	105
VII.4.4) L'étude l'influence du nombre des couches sur le comportement Non linéaire	108

## Chapitre VIII : Conclusions et Recommandations

VIII.1) Introduction	110
VIII.2) Remarques et conclusions	110
VIII.3) Recommandations pour des travaux futurs	111

## ANNEXES

ANNEXE 1 : Fonctions de forme des éléments Q4, Q8 et Q9	112
ANNEXE 2 : Organigramme de pilotage en force	113

# Liste des Tableaux

N°	Titre	Page
2.1	Caractéristique mécanique des fibres	10
5.1	Résumé des équations de la formulation Lagrangienne totale	72
5.2	Résumé des équations de la formulation Lagrangienne actualisée	73

# Liste des Figures

N°	Titre	Page
1.1	Déformation d'un élément en matériau isotrope et anisotrope soumis à des contraintes normales et de cisaillement	2
2.1	L'impotence relative de développement matériel à travers l'histoire	5
2.2	Schéma représente les composites à fibres	7
2.3	Schéma représente les composites à particules	7
2.4	Classification des matériaux composites	8
2.5	l'usage de fibres du carbone de 1977 à 1998 dans le monde	10
2.6	Schéma représente la couche composite unidirectionnelle et tissu	11
2.7	vue schématique d'une couche composite	11
2.8	vue schématique d'une stratifié à 3 couches [0/45/90]	12
3.1	Définition des matériaux isotropes et anisotropes	14
3.2	Les composantes de contraintes et de déformations dans le système de coordonnées Cartésiens rectangulaires	14
3.3	le système des coordonnées utilisées pour la description de la structure et la direction des fibres	18
3.4	L'orientation et les directions des efforts et des moments résultantes dans une plaque	19
3.5	Description d'une couche k (plaque stratifiée)	20
3.6	Cinématique de Love-Kirchhoff	22
3.7	Cinématique de Reissner-Mindlin	23
3.8	Cinématique de l'ordre supérieur.	24
3.9	Approche cinématique du champ de déplacements des modèles Zig-Zag	25
3.10	Approche cinématique du champ de déplacements des modèles couches discrètes	25
3.11	Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.	26
3.12	Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur	26
4.1	Elément "sinus" triangulaire 6 nœuds à continuité $C^1$	37
4.2	Elément triangulaire 3 nœuds à continuité $C^1$	38
4.3	Elément triangulaire 16 nœuds	39
4.4	Elément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds	39
4.5	Elément quadrilatère de type Serendip à 8 nœuds	39
4.6	Elément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds	40
4.7	Elément triangulaire couches discrètes à 6 nœuds continuité $C^0$	42
4.8	Elément finis 3D pour déterminer les contraintes interlaminaires	42
4.9	Raffinement du maillage 3D pour l'étude des plaques trouées	43
4.10	Elément brique à 20 nœuds	43
4.11	Elément singulier à 15 nœuds	43

4.12	Élément brique mixtes à 18 nœuds	44
4.13	Élément d'interface	44
5.1	mouvement et configurations successives	58
5.2	la déformation d'un semant PQ dans un milieu continu	59
5.3	une configuration initiale et deux configurations consécutives d'un corps rigide	65
6.1	Représentation unidimensionnelle de la méthode incrémentale pure	83
6.2	Représentation unidimensionnelle de la méthode Incrementales-itératives newton-Raphson	83
6.3	Représentation unidimensionnelle des types de points limites	84
6.4	Pilotage en charge imposée	86
7.1	Description les conditions aux limites de la plaque de test 1	97
7.2	La convergence de la flèche en fonction des nombres des éléments par cotés	98
7.3	Description les conditions aux limites de la plaque	98
7.4	La flèche au centre de la plaque ( $y=b/2$ )	99
7.5	Définition du maillage de test 2	100
7.6	le maillage et la déformation d'un quart de la coque par un élément Q4	101
7.7	le maillage et la déformation d'un quart de la coque par un élément Q8	101
7.8	Courbe charge-déplacement (Comparaison entre Q4 et Q8)	102
7.9	Courbe charge-déplacement en fonction d'empilement des fibres	104
7.10	Définition de la géométrie et les conditions aux limites de test 5	105
7.11	le maillage et la déformation d'un quart de la plaque par un élément Q4	106
7.12	le maillage et la déformation d'un quart de la plaque par un élément Q8	106
7.13	Courbe charge-déplacement du centre de la plaque normalisée ( $w/h$ )	106
7.14	Comparaison entre déférent type des éléments :Q4 , Q8 et Q9	108
7.15	l'influence des nombres des couches sur le comportement Non linéaire	109

# Chapitre I

# Introduction générale

## I.1) Introduction et Problématique:

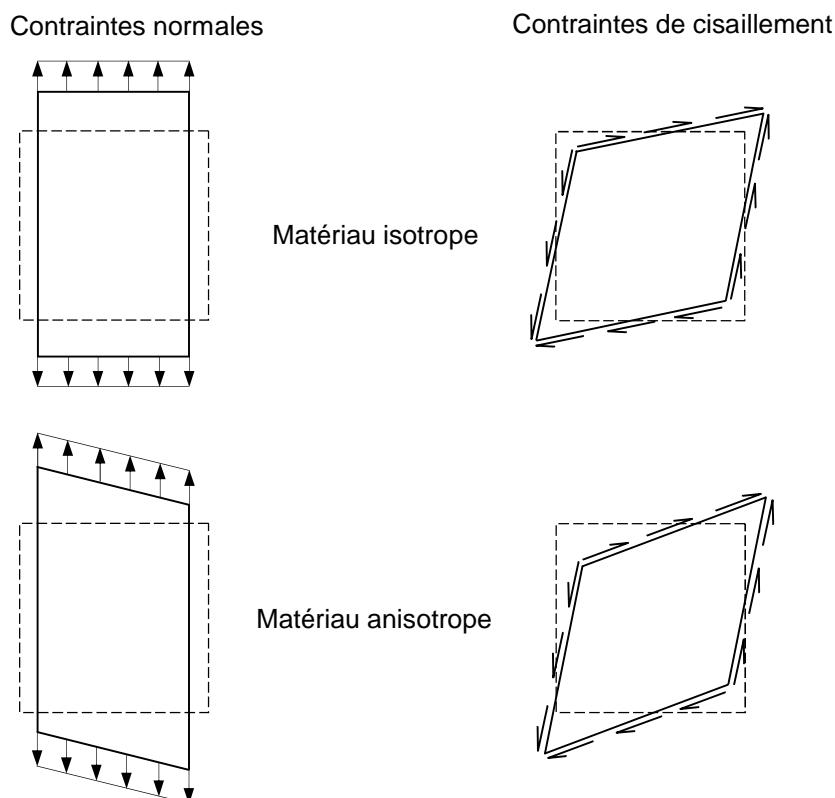
L'utilisation des matériaux composites a touché très largement le domaine de l'industrie avec tous ces secteurs durant les 40 années passées. Cette classe des matériaux possède beaucoup d'avantages qui ont été convenablement utilisés dans les applications de l'ingénierie. À cause d'incertitudes dans l'analyse, beaucoup des composites ont une fabrication pratique et la conception est souvent gouvernée par des essais réitératifs. Dans ces cas, la sécurité totale d'utilisation des matériaux composites n'est pas réalisée, cela a mené au développement des outils d'analyse pour plusieurs types des éléments structurels différents. Parmi les éléments majeurs des structures composites il y a les plaques composites.

Il y a actuellement des codes d'analyse incluant la modélisation de ce type de structures en matériaux composites et même des codes spécifiques pour les composites. En général, ces codes basés sur la méthode des éléments finis sont disponibles sur des grands systèmes informatiques et incorporent l'analyse des structures en matériaux composites. Les techniques de l'analyse des composites ont une progression rapide, et de grands codes de calculs ont inclus des composites comme un composant auxiliaire. Il existe actuellement Plusieurs publication et travaux concernant la modélisation des structures composites spécifiques ou pour des structures en mutli-couches.

L'expression " Matériaux Composites " signifie pour un matériau qu'il est formé en combinant deux matériaux ou plus sur une échelle macroscopique. Les structures construites avec de tels matériaux sont appelées des " structures composites ". Les matériaux composites sont fabriqués pour avoir des meilleures propriétés que les matériaux conventionnels. Quelques propriétés comme : la rigidité, la résistance, le poids, la résistance à la corrosion, les propriétés thermiques, la fatigue ou la résistance à l'usure, peuvent être améliorées en formant un matériau composite. La plupart des matériaux composites artificiels sont composés de deux matériaux : un matériau de renfort et un parent ou un matériau matrice .Les matériaux composites trouvent des applications dans des domaines aussi variés que ceux incluant les structures de l'aéronautique, de la marine, de l'aérospatiale, de l'industrie l'automobile, des équipements sportifs, des appareils de prothèse médicales etc. Ils sont très convenables dans les applications qui nécessitent une optimisation des facteurs importants tels que la résistance/poids et la rigidité/poids. L'exigence fonctionnelle et les considérations économiques de la conception et la fabrication des composites obligent les chercheurs à améliorer d'une façon fiable et précise les méthodes de détermination des caractéristiques statiques et dynamiques des composants structurels.

L'analyse et la conception des matériaux composites exigent la connaissance du comportement des matériaux anisotropes, des théories structurelles et des critères de rupture/dommage. Par rapport aux matériaux isotropes, l'objet exposé dans les matériaux anisotropes est le comportement mécanique. Par exemple, nous considérons des blocs

rectangulaires de deux matériaux : isotrope et anisotrope. Si nous appliquons sur le bloc isotrope une contrainte de cisaillement pure, il développe seulement une déformation de cisaillement et aucune déformation élémentaire normale. De la même façon, si le bloc isotrope est soumis à une contrainte normale, il développe seulement une déformation élémentaire normale et aucune déformation de cisaillement. Sous charges identiques, le matériau anisotrope se déforme différemment du bloc isotrope. Comme il est illustré dans la **Fig 1.1**, quand nous appliquons des contraintes de cisaillement à un corps anisotrope, il développe une déformation élémentaire normale en plus d'un cisaillement. Une contrainte normale produit le cisaillement de la même façon qu'une déformation normale.



**Fig 1.1** : Déformation d'un élément en matériau isotrope et anisotrope soumis à des contraintes normales et de cisaillement

La plupart des problèmes industriels liés aux structures composites n'ont pas de solutions numériques exactes, Il s'agit souvent de solutions approximatives, mais représentatives. La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation efficace pour obtenir des résultats numériques. Cette méthode est l'outil numérique le plus puissant disponible aujourd'hui pour prédire l'analyse du comportement des structures composites ou isotropes. Dans la formulation et l'analyse de tout modèle mathématique d'un processus physique ou mécanique, nous devrions inclure tous les détails appropriés. Cependant, la représentation des propriétés matérielles (constantes physiques ou mécaniques) est inévitablement celle qui demande des mesures physiques bien définies. Une approximation de quelques paramètres et représentation exacte de ces derniers ne mène pas à une modélisation réaliste et fiable du problème réel.

## I.2) Méthodologie :

L'objectif de ce mémoire est de présenter les différentes théories des plaques composites laminées et leurs modèles numériques pour l'étude du comportement linéaire et non-linéaire géométrique de ce type des structures composites.

Des aspects très importants concernant la modélisation, tel que les descriptions analytiques, les outils d'analyses effectives et l'évaluation d'approches pour la formulation et l'évaluation, prédisent le comportement des structures composites en plaques composites laminées.

Nous allons nous baser sur les aspects fondamentaux de la modélisation par la méthode des éléments finis des plaques composites laminées pour développer un élément fini quadrilatère valable à l'analyse linéaire et non linéaire. Nous présentons les résultats obtenus avec quelques tests choisis dans la littérature pour examiner la performance de notre formulation en éléments finis et le code développé pour les problèmes traités.

### **I.3) Organisation du mémoire :**

Le mémoire est organisé en huit chapitres :

- Dans le deuxième chapitre nous présentons une introduction aux matériaux composites avec présentation de quelques définitions et terminologies utilisées dans les structures et matériaux composites.
- Le chapitre trois concerne les théories principales et les relations constitutives pour les plaques composites laminées. Une définition des variables et convention de signes utilisés dans le programme est présenté à la fin de ce chapitre.
- Une formulation par la méthode des éléments finis est présentée dans le chapitre quatre où nous détaillons le passage de la théorie des plaques composites vers le modèle élément fini dédié pour l'analyse linéaire utilisé dans le code développé.
- La théorie non-linéaire géométrique et la formulation en éléments finis non-linéaire sont bien détaillées dans le chapitre cinq pour l'obtention d'un modèle non-linéaire géométrique valable à l'analyse des plaques composites laminées en grandes déformations.
- Dans le chapitre six une présentation des méthodes de résolution des systèmes non-linéaires utilisés pour résoudre numériquement les problèmes non-linéaires .
- Le chapitre sept est réservé à l'application des modèles linéaires et non-linéaires et les résultats numériques obtenus par le code sur des exemples de plaques isotropes ou composites réelles.
- Le chapitre huit résume les différentes conclusions obtenues et des recommandations pour des travaux futurs.

# Chapitre II

## Introduction aux matériaux composites

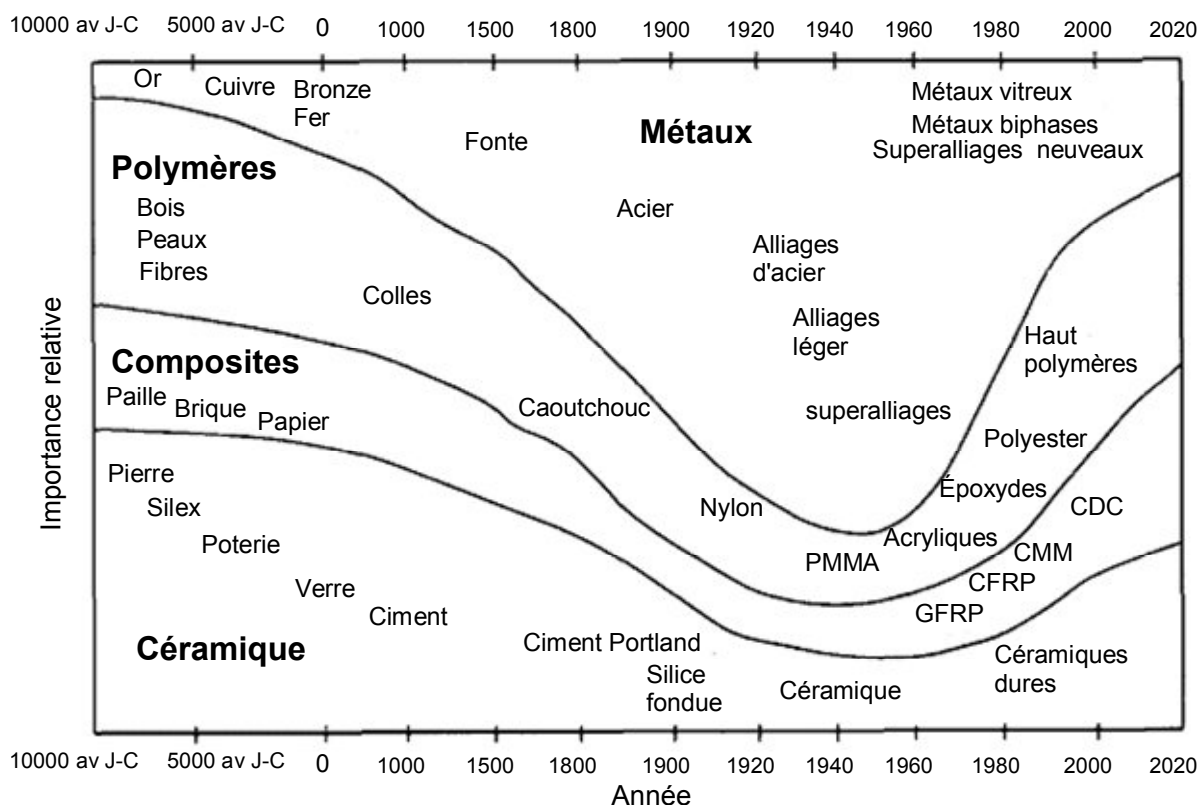
### II.1) Introduction et Commentaires historiques :

De manière générale, un composite est un matériau qui est constitué de deux matériaux ou plus : constituants ou phases. Les matériaux de l'industrie traditionnelle (acier, aluminium etc.) contiennent des impuretés représentées dans des phases différentes du même matériau et sont donc de ce point de vue, des composites au sens large de la définition des composites. Cependant, ils ne sont pas considérés comme des composites parce que le module d'élasticité ou la résistance de la phase impureté sont presque identiques au matériau pur. Ainsi, la définition d'un matériau composite est flexible et peut être élargie pour élaborer des exigences spécifiques. Dans notre travail, nous considérons un matériau composite comme un matériau contenant deux ou plusieurs composants distincts avec un comportement macroscopique, considérablement différent et une interface distincte pour chaque constituant (au niveau microscopique).

Les matériaux composites existent depuis plusieurs siècles, aucun rapport n'a déterminé à quand remonte leurs premières utilisations. Cependant, beaucoup s'accorde à présenter les anciens égyptiens comme les premiers qui ont utilisés les composites par la fabrication, par exemple, des contreplaqués, papier-mâché et l'utilisation des pailles dans les boues pour les briques renforcés. De la même façon, les anciennes civilisations Maya et Inca ont utilisé les fibres des plantes pour renforcer les briques et les poteries. Dans les temps médiévaux les épées et les armures ont été plaquées pour augmenter leurs résistances. Ainsi l'épée du Samouraï japonais était produite par des pliages répétés et reformés pour construire une multicouche composite. Cependant Tous ces exemples sont des exemples des matériaux composites artificiels. Le bambou, l'os et le céleri sont des exemples de cellulaires composites qui existent dans la nature, Le tissu du muscle est un laminé fibreux multidirectionnel. Il y a de nombreux autres exemples de matériaux composites naturels et artificiels. Les matériaux structurels utilisés les plus communément peuvent être catégorisés en quatre groupes primaires : métaux, polymères, composites et céramiques. Ces matériaux ont été utilisés à plusieurs degrés depuis le début des temps, Leur importance est relative à plusieurs sociétés parallèles à la progression de l'histoire.

Ashby [1] présente une variation chronologique de l'importance relative de chaque groupe de 10,000 av J-C et extrapole leur importance à travers l'année 2020, l'information contenue dans l'article d'Ashby a été reproduit partiellement dans la **Fig. 2.1**. L'importance des composites a prouvé une augmentation stable depuis 1960 et projetée pour continuer son augmentation à travers les prochaines décennies. Historiquement, il y a une progression dans la technologie matérielle, ayant souvent son origine dans les applications militaires. Par la suite, cette technologie par le biais d'objet de la vie courante s'est infiltrée dans la

population générale et a changé beaucoup d'aspects des sociétés. Généralement, les composites utilisés dans des applications structurelles sont classés comme ayant des meilleures performances. Ils sont faits spécifiquement de matériaux synthétiques, ayant un facteur résistance/poids élevé et exige des environnements industriels contrôlés pour une performance optimum.



**Figure 2.1** : L'importance relative de développement matériel à travers l'histoire (d'après Ashby [1]).

L'industrie aéronautique utilise des composites pour satisfaire les exigences de la performance au-delà des capacités de métaux. Les composites sont aussi utilisés dans les voitures de course, les produits de loisir, les raquettes de tennis, les clubs de golf et autres sports. Bien que la technologie des matériaux composites se soit développée rapidement mais pas complètement, des nouvelles combinaisons de système fibre/résine et même de nouveaux matériaux se développent constamment.

## II.2) Caractéristiques d'un matériau composite :

Les composants d'un matériau composite sont arrangés généralement afin qu'une ou plusieurs phases discontinues soient enfoncées dans une phase continue. La phase discontinue est appelée le **renfort** et la phase continue la **matrice**. Une exception faite pour les particules de caoutchouc suspendues dans une matrice de caoutchouc rigide, qui produit une classe de matériaux connus comme les polymères modifiés de caoutchouc. En général, les renforts sont plus forts et plus rigides que la matrice. Les deux composants sont imposés, et chacun doit accomplir des tâches spécifiques dans l'exploitation d'un composite. Un matériau est généralement plus fort et plus rigide sous forme de fibre que sous forme d'un bloc. Les défauts microscopiques agissent comme une rupture initiale dans les matériaux en

bloc et sont amoindris quand le matériau est fibreux. Par conséquent, la résistance de la fibre est plus grande que celle en bloc. Les fibres individuelles sont difficiles à contrôler et à former dans des composants utiles. Sans un liant de séparation, ils peuvent être noués, tordus et difficiles à séparer. Le liant (la matrice) doit être continu et périphérique sur chaque fibre afin qu'il ait une séparation distincte des fibres adjacentes et ainsi le système matériel entier est plus facile à manipuler et à traiter.

Les caractéristiques physiques et mécaniques des composites sont dépendantes des propriétés, des géométries, et de la concentration des composants. L'augmentation de volume de renforts peut augmenter la résistance et la rigidité d'un composite. Si le contenu de volume du renfort est trop élevé il n'y aura pas assez de la matrice pour les séparer, et ils peuvent être enchevêtrés. Il y a plusieurs facteurs à considérer quand nous concevons les matériaux composites : Le type de renfort et la matrice, l'arrangement géométrique et la classe du volume de chaque constituant, les charges mécaniques probables, l'environnement d'exploitation de composite, etc...., tous doivent être pris en considération.

### II.3) Classifications des Matériaux composites :

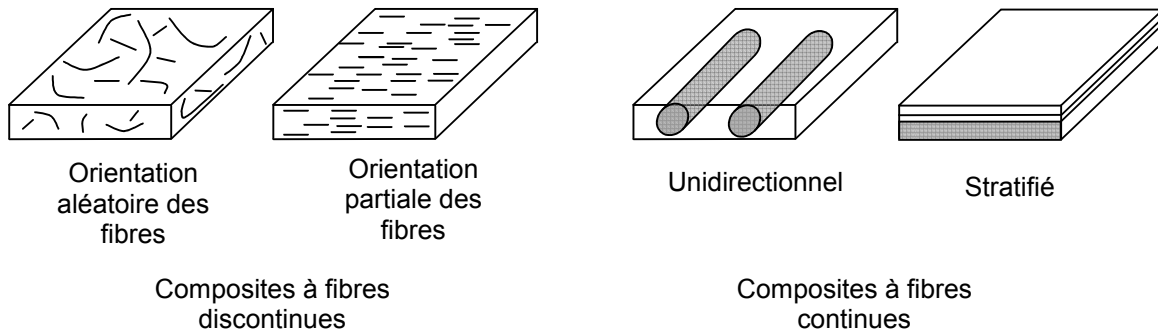
Les matériaux composites sont classés d'après leurs type des renforts utilisés .Deux classes générales des composites se distinguent : les fibreux et les particules. Chacun a des propriétés uniques et leur application peut se subdiviser dans des catégories spécifiques comme développé ci-dessous :

**a) Les Fibreux** : un composite fibreux consiste en des fibres continues (long) et d'autres découpées (courts) suspendus dans le matériau de la matrice. Les fibres continues et découpées peuvent être identifiées d'un point de vue géométrique :

- *Les fibres continues* : Une fibre continue est caractérisée géométriquement comme ayant un facteur longueur/diamètre très élevé. Elles sont généralement plus fortes et plus rigides que les matériaux en volume. le diamètre de la fibre est généralement entre 3 et 200  $\mu\text{m}$  [4].
- *Les fibres découpées* : ce type de fibres est considéré généralement comme courts, elles peuvent être définies largement pour avoir un facteur longueur/diamètre de  $5 < l/d < 1000$  au-delà [4], le diamètre de ces fibres est généralement entre 0,02 et 100  $\mu\text{m}$

Les composites des fibres discontinues ou courts peuvent être produits afin que les renforts aient une orientation aléatoire ou partielle et ils sont considérés comme des composites d'une seule couche. La discontinuité produit un comportement d'un matériau anisotrope mais dans plusieurs exemples, les renforts aléatoires produisent presque un composite isotrope.

Les composites des fibres continues peuvent être considérés comme un composite laminée à une couche ou multicouche. Les composites d'une seule couche des fibres continues peuvent être unidirectionnels ou tissés, et les composites multicouches sont connus généralement comme des stratifiés (laminés). Le comportement d'un composite des fibres continues est généralement orthotrope. Les schémas de deux types de composites fibreux sont illustrés dans (**Fig 2.2**).



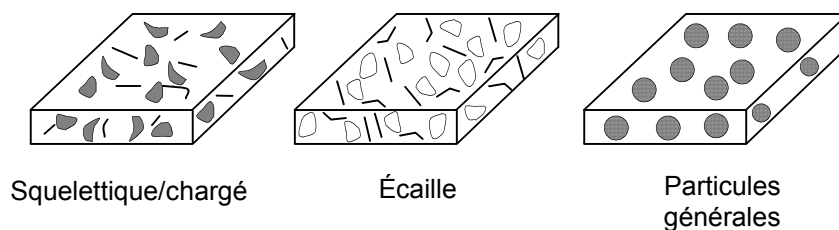
**Figure 2.2** : Schéma représentant les composites à fibres

**b) Les Particules** : Un composite à particules est caractérisé comme étant composé de particules suspendues dans une matrice. Les particules peuvent avoir virtuellement toutes les formes, les dimensions ou les configurations. Les exemples connus des composites à particules sont les bétons et les agglomérats.

Il y a deux sous-classes de particules les écailles et squelettique/chargé :

- *Les écailles* : ce type est généralement composé des écailles suspendues dans le matériau de la matrice (agglomérats par exemple) avec un facteur de plateforme/épaisseur grand.
- *Les squelettique/chargé* : ce type de composites est formé d'une matrice squelettique continue remplie par un deuxième matériau : par exemple, le nid d'abeilles rempli par un matériau isolant.

Le comportement de ces composites est considéré anisotrope ou orthotrope. Un schéma de plusieurs types des composites à particules est illustré dans la **Fig 2.3**.



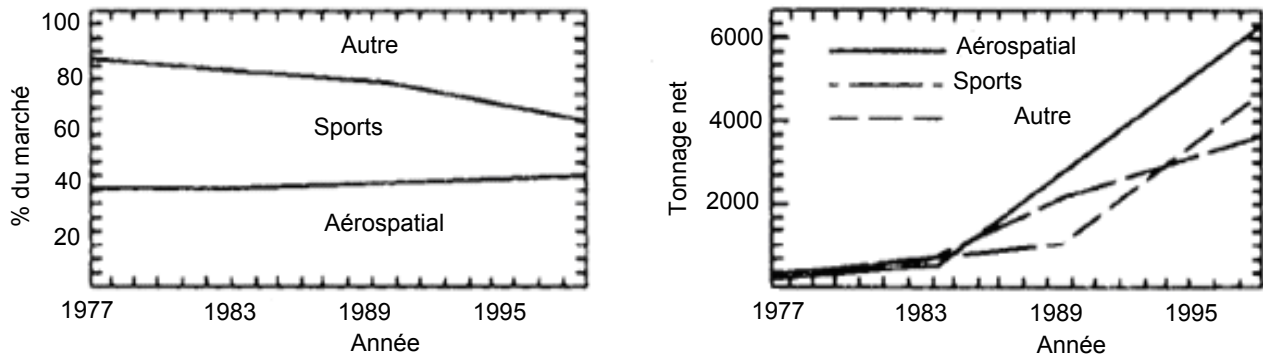
**Figure 2.3** : Schéma représente les composites à particules

Nous résumons toutes ces classes dans le plan suivant qui présente la classification communément employée pour les matériaux composites (la **Fig 2.4**).

1. fondamentales des composites de la matrice de verre sont pour les parties thermorésistantes dans les moteurs, le système d'échappement et les composants électriques.
2. *matrice métallique* : Une matrice métallique est particulièrement bonne dans une haute température et pour l'utilisation dans les environnements oxydants. Les métaux plus communément utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium. Il y a trois classes de composites de la matrice métallique :
  - *Classe I* : Le renfort et la matrice sont insolubles, Les combinaisons de la matrice renfort dans cette classe incluent le tungstène ou l'alumine/cuivre, BN – couvert B ou le bore/aluminium et le bore/magnésium.
  - *Classe II* : Le renfort/matrice expose quelque solubilité, et l'interaction changera les propriétés physiques du composite. Les combinaisons renfort/matrice incluses dans cette classe sont le carbone ou le tungstène/nickel, le tungstène/columbium et le tungstène/cuivre (chrome).
  - *Classe III* : Les situations les plus critiques de renfort/matrice sont dans cette classe, Les problèmes rencontrés ici sont généralement d'une nature industrielle et peuvent être résolus à travers les processus de contrôle. Dans cette classe les combinaisons renfort/matrice incluent l'alumine, le bore, le carbure du silicium/titane, le carbone ou silice/aluminium et le tungstène/cuivre (titanium).
3. *Matrice polymère* : Les matrices polymères sont les plus communs et à moindres coûts. Ils se trouvent dans la nature comme l'ambre, le goudron et la résine. Quelques uns des premiers composites étaient posés en couches de fibre, tissu et les goudrons. Les polymères sont faciles à traiter, offrant des bonnes propriétés mécaniques, en général les renforts sont humide et fournissent une bonne adhérence. Ce sont des matériaux de faible densité. À cause de la température du traitement qui est basse, beaucoup de renforts organiques peuvent être utilisés. Une matrice polymère typique est viscoélastique ou viscoplastique.

## II.5) Les avantages des matériaux composites :

Les composites offrent des caractéristiques convenables pour plusieurs utilisations dans l'industrie qui exige une meilleure conception. Le module élastique et la résistance à la traction apparente pour plusieurs types de fibres sont exposés dans le Tableau 2.1 qui indique une grande variété possible de comportement des matériaux, qui peuvent être modifié en changeant la procédure utilisée pour chaque fibre. Les propriétés des fibres montre que le carbone offre une variété plus avantageuse. Agarwal et Broutman [7] identifient un total de 38 fibres du carbone avec un module élastique et résistance de 28-607 GPa et 966-3105 MPa respectivement. En 1980 à 1986, il y avait 17 fabricants mondiaux qui produisent 74 différents grades de fibres de carbone à haute ténacité. d'après les Institut des Plastiques et du Caoutchouc [6]. L'augmentation d'utilisation des fibres de carbone est illustrée dans **Fig 2.5** pour l'aérospatiale, le sport, et "autres" qui commence en 1977 et va jusqu' à 1998 [8].



**Figure 2.5** : l'usage de fibres de carbone de 1977 à 1998 dans le monde

Le module élastique et la résistance dans le tableau 2.1 ne révèlent pas le comportement réel d'un composite quand les fibres sont suspendues dans une matrice. Les propriétés de la matrice contribuent aussi à la résistance et la rigidité du composite. Comme la matrice est généralement plus faible et moins rigide que la fibre, le composite ne sera pas résistant ou rigide comme les fibres elles-mêmes. De plus, les propriétés citées dans le tableau font référence seulement à la direction des fibres. Dans un composite, il y a trois directions à considérées, une parallèle aux fibres (direction longitudinale) et deux perpendiculaires aux fibres (directions transversales). Les propriétés dans la direction longitudinale sont supérieures à celles dans les directions transversales dans lesquelles la matrice est le composant dominant.

<i>Fibre</i>	<i>Module de tension (GPa)</i>	<i>Résistance à tension (MPa)</i>
Bore	385	2800
Carbone	70 – 600	1750 – 3500
PAN (polyacrylonitrile)	200 – 390	2100 – 3400
Poix (mésophase)	170 – 690	1300 – 2400
Verre : verre 'E'	72,4	3500
Verre 'S'	85,5	4600
Verre 'M'	110	3500
Aramide -29	59	2640
Aramide -49	128	2800
Silice	7,4	5800
Tungstène	414	4200

**Tableau 2.1** : Caractéristique mécanique des fibres

La matière première et beaucoup de techniques de fabrications utilisées avec les composites sont plus chers que les matériaux classiques. Il y a beaucoup d'utilisations possibles pour les composites que nous ne développerons pas dans ce travail. Un échantillonnage d'applications courantes et techniques varient de parties automobiles aux applications orthopédiques sont trouvés dans Drozda [8].

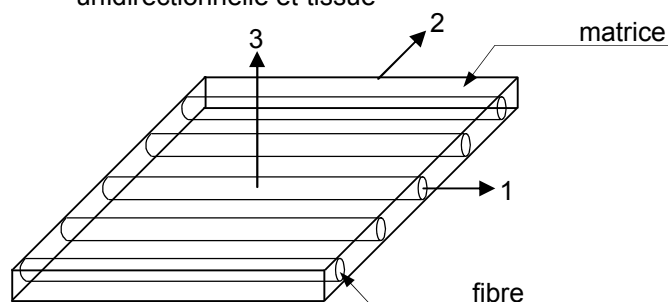
Dans ce mémoire, les composites concernés sont les plaques stratifiés. Cependant, pour plus d'information concernant les composites et leurs mode de fabrications on peut consulter les ouvrages de Agarwal et Broutman [7], Berthelot [3], Gay [2], Vinson et Sierakowski [11].

## II.6) Les composites de type Plaques Laminées (Stratifiés) :

Une couche est une structure fondamentale des plaques composites. Une couche est une tôle mince de fibres unidirectionnelles liées par le matériau de la matrice développée pendant la fabrication. La stratifié est formée de la superposition des couches unidirectionnelles du même matériau avec une orientation différente pour chaque couche des fibres qui sont suspendues dans une matrice. Dans la pratique, les fibres n'ont pas une distance égale, mais pour les buts schématisés, la couche représentée dans la **Fig 2.6** a un espace universel des fibres. Chaque couche représente un comportement orthotrope dont les propriétés sont différentes dans les trois plans perpendiculaires alignés avec la direction de la fibre montrée comme 1, 2, 3 dans la **Fig 2.7** alors les propriétés du matériau sont définies dans les trois directions qui correspondent à ces plans.



**Figure 2.6** : Schéma représente la couche composite unidirectionnelle et tissu



**Figure 2.7** : vue schématique d'une couche composite

Cette couche est superposée avec les fibres alignées à des angles différents pour former ce qui est appelé un stratifié comme il est montré dans la **Fig 2.8**. La couche est marquée d'après son angle de la fibre relatif à une direction globale (axe x). Par exemple,  $[0/45/90]$  est une stratifié composée de trois couches à épaisseur égale dont les fibres sont orientées respectivement  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  à la direction de la référence principale qui commence avec la couche inférieure (comme fait dans la **Fig 2.8**). L'indice  $s, [90/45/0]_s$ , indique un assemblage symétrique d'où les couches supérieures sont superposés dans un ordre inverse ou  $[90/45/0/0/45/90]$  et l'indice numérique indique le nombre des couches répétées,  $[90_2/45_4/0_2] = [90/90/45/45/45/45/0/0]$  par exemple. Le comportement mécanique d'une stratifié est différent de la couche individuelle qui le forme. Le comportement du stratifié dépend des propriétés de chaque couche, aussi bien que l'ordre dans lequel la couche est superposée. Les propriétés générales sont déterminées expérimentalement pour les couches unidirectionnelles de matériaux composites. La résistance de la couche est constituée avec les équations constitutives pour prédire les propriétés macroscopiques. Une des théories de rupture [7] détermine la résistance de l'ordre de superposition des stratifiés. Le test des spécimens est utilisé

**Bibliographie :**

- [1] Ashby, M. F. "Technology in the 1990s: Advanced Materials and Predictive Design," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A322 (1987).
- [2] Gay D. "Matériaux composites", Hermès, 1997.
- [3] Berthelot J.-M. "Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures", 3<sup>ème</sup> édition. Technique & Documentation 1999.
- [4] Reinhart, T. J., "Engineered Materials Handbook Volume 1, Composites Materials", Park, OH: ASM International, 1987.
- [5] Tsai, S. W. "Composites Design", Dayton, OH: Think Composites, 1986.
- [6] Richardson, T. "Composites: A Design Guide". Industrial Press Inc., New York, 1987.
- [7] Agarwal, B. D., et Broutman L. J. "Analysis and Performance of Fiber Composites". New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [8] Drozda, T., "Composites Applications: The Future Is Now". Dearborn, MI: Society of Manufacturing Engineers, 1989.
- [9] Staab, G-H. "Laminar composites", Butterworth-Heinemann, 1999.
- [10] Vasiliev V.V & Morozov E.V "Mechanics and Analysis of Composite Materials", Elsevier, 2001.
- [11] Vinson J.R., Sierakowski.R.L. "The Behavior of Structures Composed of Composite Materials" KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 2004
- [12] László P.K, Springer G. S. "mechanics of composite structures".Cambridge University Press. 2003.

# Chapitre III

## Mécanique des Plaques Composites

### III.1) Introduction :

L'analyse des structures composites exige une bonne connaissance du comportement des matériaux anisotropes, la théorie des structures, les critères de rupture, la délamination et les méthodes numériques de résolution. L'étude de l'élasticité, de l'anisotropie et des théories des structures analysant les plaques composites laminées constituent le sujet de ce chapitre. Le composant étant un matériau anisotrope hétérogène, nous devons avoir une théorie de structure adéquate pour modéliser correctement la rigidité, prédire le champ des contraintes, et déterminer les différentes initiations et les mécanismes de l'augmentation de la rupture ou de la délamination. En nous inspirant de l'analogie entre les milieux isotropes et anisotropes, avec l'utilisation des connaissances existantes concernant les métaux, on peut arriver aux résultats exacts et des conclusions.

Dans cette étude, nous nous concentrerons sur les principes d'élasticité anisotropie et une étude sur les mécaniques des plaques composites laminées. Nous examinerons des hypothèses de base, l'étude des relations constitutives des matériaux composites et nous dérivons les théories des structures de ces composites.

### III.2) Élasticité Anisotrope :

#### III.2.1) Définitions :

Dans ce cadre, nous cherchons une compréhension fondamentale des mécaniques des matériaux composites, par l'étude de leur comportement constitutif. En premier, nous identifions les différences entre les systèmes matériels homogènes et hétérogènes.

Un matériau est dit homogène si ses propriétés matérielles restent partout inchangées. Dans un système hétérogène, les propriétés matérielles sont en fonction d'une position. Un matériau est isotrope si toutes ses propriétés matérielles en un point sont indépendantes d'une direction. Si nous nous référons à un point A dans un matériau isotrope (**Fig 3.1**) avec un système des coordonnées avec son origine à A, les propriétés physiques en A restent invariantes pour toute rotation arbitraire des axes. Dans le cas d'un matériau anisotrope ses propriétés matérielles sont dépendantes directionnellement, une propriété matérielle donnée peut avoir des valeurs différentes dans des directions différentes. Nous discuterons des plusieurs cas spéciaux des matériaux anisotropes dans la prochaine section. Notant que le matériau peut être isotrope et homogène, ou anisotrope et hétérogène.

III.2.2) Relations constitutives :

Dans un système des coordonnées Cartésiens tridimensionnels (**Fig 3.2**), c'est coutumier d'écrire l'état de déformation par six composants de contraintes et de déformations, à savoir, trois composants normaux et trois du cisaillement. Une relation linéaire entre les contraintes et les déformations est connue comme la loi de Hooke généralisée, et elle peut être exprimée comme :

$$\sigma_k = C_{kj} \varepsilon_j \quad \text{avec } (k = 1,2,\dots,6) \quad (III.1)$$

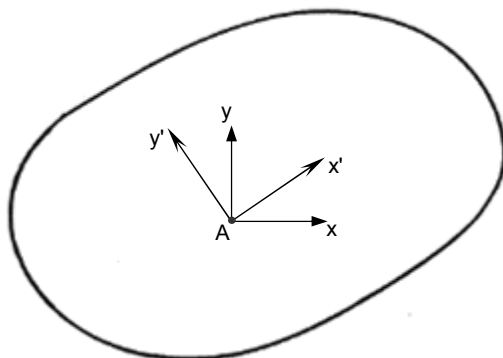
où  $C_{kj}$  sont connus comme les coefficients élastiques. Notant que l'Eq (III.1) est une abréviation de la forme du tenseur adéquate de la loi de Hooke,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Quand  $C_{kj}$  sont en fonction d'une position, le matériau est hétérogène, et quand ils sont constants partout dans le matériau, le matériau est homogène. Nous notons que  $C_{kj}$  sont des entrées dans le k-ème rangée et j-ème colonne d'une matrice carré de (6x6), cependant,  $C_{kj}$  ne sont pas les composants du tenseur de deuxième ordre. Aussi la notation en un seul indice pour les composants de contraintes et de déformations est basée sur la convention,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (III.2)$$

Ici  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  dénotent les contraintes normales et  $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  dénotent les contraintes du cisaillement;  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)$  sont les contraintes en plan et  $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$  sont les contraintes hors plan (c.-à-d., transversal). Une terminologie semblable est utilisée pour les composants de déformations.



$m$  : une propriété matériel mesuré par respect de système  $(x,y)$   
 $m'$  : une propriété matériel mesuré par respect de système  $(x',y')$   
 un matériau isotrope:  $m = m'$  , un matériau anisotrope:  $m \neq m'$

Figure 3.1 : Définition des matériaux isotropes et anisotropes

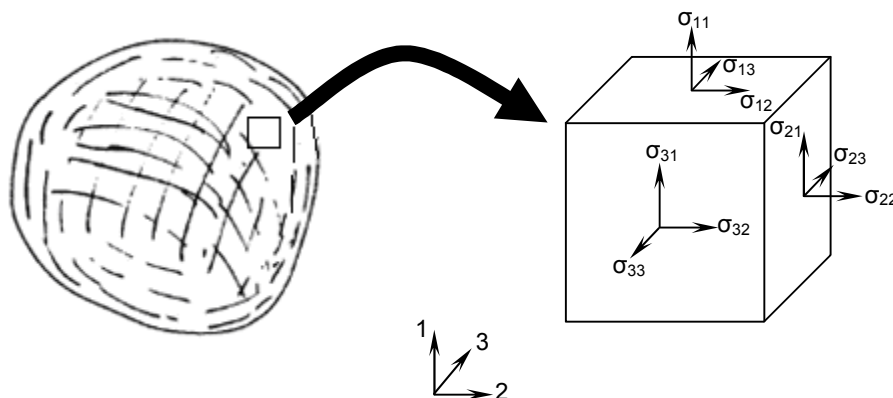


Figure 3.2 : Les composants de contraintes et de déformations dans le système des Coordonnées Cartésiens rectangulaires

Les trente six coefficients  $C_{ij}$  ne sont pas tous indépendants de l'un à l'autre. Le nombre de constantes indépendantes dépend de la constitution matérielle. En premier nous montrons que  $C_{kj}=C_{jk}$ , ils sont symétriques pour les matériaux pour lesquels la fonction de la densité d'énergie de déformation  $U_0$  est tel que :

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_k} = \sigma_k \quad (III.3)$$

Pour illustrer ceci, nous considérons la densité d'énergie de déformation du matériau comme :

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_k} \sigma_k d\varepsilon_k \quad (III.4)$$

Substituant l'équation (III.1) dans l'équation (III.4) et nous intégrons, nous obtenons :

$$U_0 = \frac{1}{2} C_{kj} \varepsilon_k \varepsilon_j \quad (III.5)$$

Remplacer  $U_0$  d'Eq. (III.5) dans l'Eq. (III.3), nous arrivons à l'expression;

$$\sigma_k = \frac{1}{2} (C_{kj} + C_{jk}) \varepsilon_j \quad (III.6)$$

Nous comparons les expressions (III.6) et (III.1), nous concluons que  $C_{kj}=C_{jk}$ . à cause de cette symétrie, il y a seulement 21 constantes élastiques indépendantes pour les matériaux anisotropes. Dans une forme matricielle l'Eq (III.1) peut être exprimée comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{Sym} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (III.7)$$

En général dans l'Eq (III.7), les coefficients élastiques  $C_{ij}$  relient les composants Cartésiens de déformations et de contraintes dépendent de système des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  utilisé. Nous faisons la référence à un autre système des coordonnées Cartésiens  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , les coefficients élastiques sont  $\bar{C}_{ij}$ , et en général  $\bar{C}_{ij} \neq C_{ij}$ . Si  $\bar{C}_{ij} = C_{ij}$ , alors ils sont indépendants de système des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et le matériau est dit isotrope.

Quelques matériaux anisotropes peuvent posséder des symétries matérielles et leur comportement constitutif décrit avec moins de 21 constantes. Quand les coefficients élastiques en un point ont les mêmes valeurs pour chaque paire de systèmes des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  qu'ils sont l'image inverse de l'un à l'autre dans un certain plan, ce plan est appelé plan de symétrie élastique. Les matériaux avec un plan de symétrie élastique sont appelés les matériaux monocliniques, et le nombre des coefficients élastiques pour les telles matériaux réduit à 13. Si le plan de symétrie est  $x_3=0$ , les relations constitutives deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & \text{Sym} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (III.8)$$

Notons que les contraintes de cisaillements hors plan,  $\sigma_4$  et  $\sigma_5$  sont indépendantes de contraintes normales et de cisaillement en plan.

Si un système matériel a trois plans mutuellement perpendiculaires à un plan de symétrie élastique, alors le nombre de coefficients élastiques indépendants peut être réduit à

neuf. De tels matériaux sont connus sous le nom d'orthotrope. La relation contraintes-déformations pour un matériau orthotrope est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Les coefficients de  $C_{ij}$  pour un matériau orthotrope peuvent être exprimés sous la forme :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_1}, C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta E_2 E_3} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta E_1 E_2} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3} = \frac{\nu_{31} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta E_1 E_2}, C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta E_1 E_2}, C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1 E_2} \\ C_{44} &= G_{23}, C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12} \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Où  $E_i$  dénote le module de Young dans la direction d'îème-matériau, le  $\nu_{ij}$  est le coefficient de Poisson pour la déformation transversal dans la j-ème direction quand a chargé dans la i-ème direction.

$$\nu_{ij} = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

et  $(G_{23}, G_{31}, G_{12})$  sont les modules de cisaillement dans les plans 2-3, 3-1 et 1-2 respectivement. Les trois directions matérielles  $(x_1, x_2, x_3)$  sont perpendiculaires aux trois plans de symétrie élastique.

Si le matériau est isotrope en un des plans de symétrie élastique d'un système matériel orthotrope, ceci est connu sous le nom d'un isotrope transversal. Pour cette classe, il y a seulement cinq coefficients indépendants. Si  $x_1$  dénote la coordonnée normale au plan d'isotropie, alors la relation contraintes-déformations prend la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \hat{C} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

D'où  $\hat{C} = 0,5(C_{11} - C_{12})$  .

Finalement, il y a un nombre infini des plans de symétrie élastique pour un matériau isotrope (ou aucune direction préférée), il peut être décrit à deux coefficients élastiques.

La relation contraintes-deformations d'un matériau isotrope a la forme,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \widehat{C} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & \widehat{C} & 0 \\ & & & & & \widehat{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

D'où  $\widehat{C} = 0,5(C_{11} - C_{12})$ . Ces deux coefficients sont en rapport de module de Young E et le coefficient de Poisson  $\nu$  par :

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, C_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{III.13})$$

Un matériau composite fibre-renforcé est un matériau anisotrope parce qu'il possède un module différent le long de la direction de la fibre et transversal à lui. Si nous supposons que toutes les fibres dans une couche sont presque parallèles, nous pouvons le caractériser comme un matériau orthotrope homogène, avec l'axe  $x_1$  de la coordonnée matérielle qui est parallèle à la direction de la fibre. Dans la prochaine section, nous présentons des équations constitutives pour une couche orthotrope. Nous notons qu'un composite fibre-renforcé est fort le long des fibres et faible dans les directions transversales aux fibres.

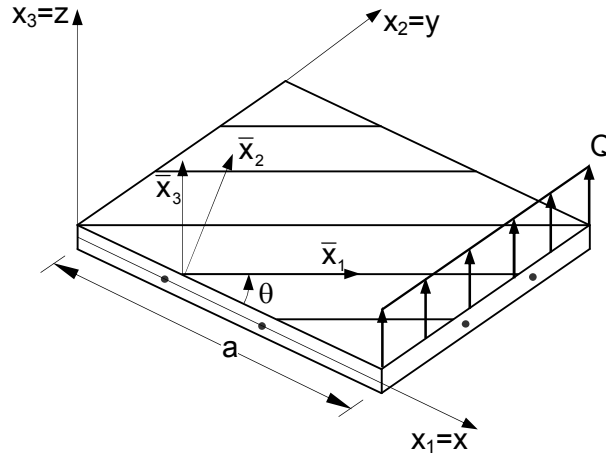
### III.3) Les couches orthotropes :

la relation contraintes-deformations en plan dans les coordonnées matérielles  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  d'une seule couche orthotrope est :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & \bar{Q}_{44} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \\ \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Les barres sur :  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et Q sont introduites ici pour les distinguer des variables correspondantes au référentiel de système des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  qui est utilisé pour décrire la structure en matériaux composites. Donc,  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  dénote le système des coordonnées du matériau et  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  dénote le système des coordonnées utilisées pour formuler les équations principales de problème structurel (**Fig 3.3**) avec :

- les directions d'orthotropie  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  variant d'une couche à l'autre, sont représentées par l'angle  $\theta_k = (\bar{i}, \bar{x}_k)$  où  $\bar{x}_k$  qui représente une direction d'orthotropie de la couche k.
- la loi de comportement de chaque couche est basée sur l'hypothèse des contraintes planes et d'anisotropie plane
- la continuité cinématique est admise entre les couches.



**Figure 3.3:** le système des coordonnées utilisées pour la description de la structure et la direction des fibres

Les termes de  $Q_{ij}$  dans l'Eq. (III.14) sont connus sous le nom de la matrice réduite des contraintes planes parce qu'ils sont obtenus de  $C_{ij}$  en mettant  $\sigma_3=0$  dans l'Eq (III.9). Ils sont reliés par les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \bar{Q}_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ \bar{Q}_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \bar{Q}_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (III.15)$$

Notons que les fibres dans la couche sont alignées avec la direction matérielle principale (1), dénoté  $x_1$  dans cette étude, les directions matérielles sont toujours alignées avec les directions de la fibre. Quand les directions matérielles sont alignée avec le système des coordonnées  $(x, y, z)$  utilisés à décrire le problème associé d'une structure, les coordonnées de la transformation des équations sont employées pour obtenir les contraintes dans les coordonnées du matériau,  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6)$ ; en termes des contraintes dans les coordonnées globales,  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy})$  :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (III.16)$$

avec :  $c = \text{Cos}(\theta_k)$  et  $s = \text{Sin}(\theta_k)$

Où  $\theta$  dénote l'angle entre l'axe positif des  $x$  et l'axe positif des  $\bar{x}_1$ ,  $\theta$  mesuré la direction dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ci-après, l'angle  $\theta$  est connu sous le nom de l'angle de laminage.

Pour une stratifié de  $N$  couches, nous pouvons décrire la relation suivante par la transformation les relations contraintes-déformations du repère matériel au repère globale :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \text{!!!!(III.17)}$$

$$\{\sigma\}^{(k)} = [Q]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} \quad \text{(III.18)}$$

Pour chaque couche k :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \bar{Q}_{11}c^4 + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66})c^2s^2 + \bar{Q}_{22}s^4 \\ Q_{12} &= (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 4\bar{Q}_{66})c^2s^2 + \bar{Q}_{12}(c^4 + s^4) \\ Q_{16} &= \bar{Q}_{11}c^3s - \bar{Q}_{22}cs^3 - (\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66})cs(c^2 - s^2) \\ Q_{22} &= \bar{Q}_{11}s^4 + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66})c^2s^2 + \bar{Q}_{22}s^4 \\ Q_{26} &= \bar{Q}_{11}cs^3 - \bar{Q}_{22}c^3s + (\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66})cs(c^2 - s^2) \\ Q_{66} &= (\bar{Q}_{11}s^4 + \bar{Q}_{22} - 2\bar{Q}_{12})c^2s^2 + \bar{Q}_{66}(c^2 - s^2)^2 \\ Q_{44} &= \bar{Q}_{44}c^2 + \bar{Q}_{55}s^2 \\ Q_{45} &= (\bar{Q}_{55} - \bar{Q}_{44})cs \\ Q_{55} &= \bar{Q}_{44}s^2 + \bar{Q}_{55}c^2 \end{aligned} \quad \text{(III.19)}$$

### III.4) Expression des efforts résultants dans les laminées :

Dans le cadre de développement des expressions des efforts résultants dans les laminées qui sont indépendants de z, il est utile de définir les résultantes des charges et des moments. Ces résultantes sont les charges et moments par unité de longueur le long de section transversale x et y du laminée et agissent à travers le mi-plan du laminée. L'orientation et la direction positive sont représentées dans la Fig 3.4 .

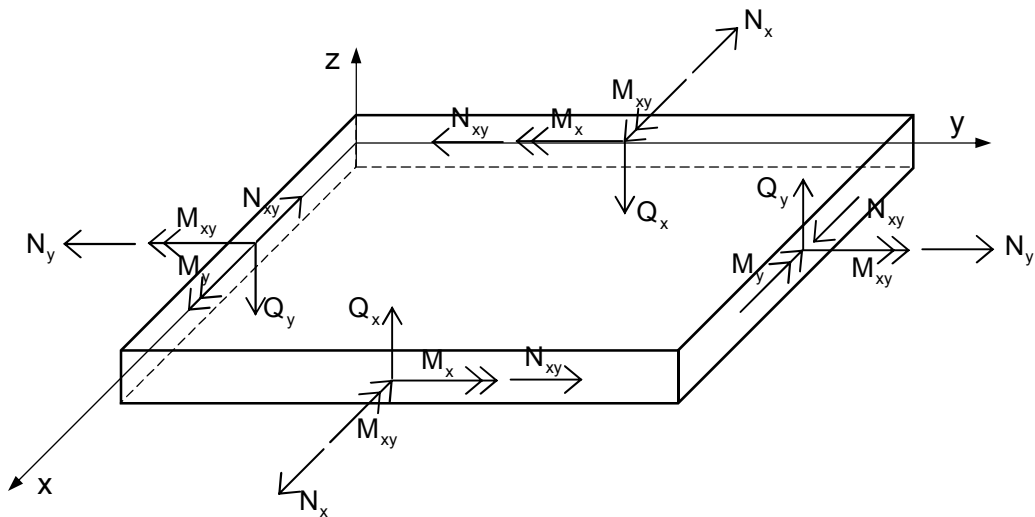


Figure 3.4 : L'orientation et les directions des efforts et des Moments résultants dans une plaque

La résultantes des charges en plan ( $N_x, N_y$  et  $N_{xy}$ ) sont définies par l'intégrale des termes de contraintes en plan sur l'épaisseur :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad \text{(III.20)}$$

:

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

– *Les modèles classiques Love –Kirchhoff :*

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur Reissner [22], Yang [23]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff, Kirchhoff [24], de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir été déformée [Fig 3.6]

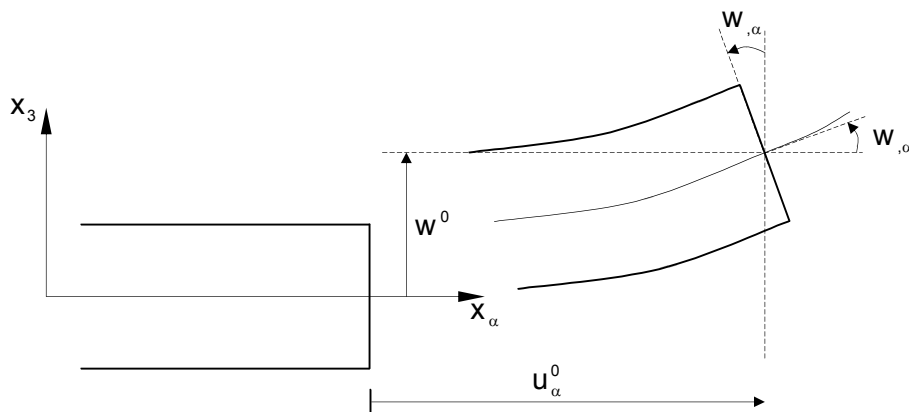


Figure 3.6 : Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{III.27})$$

Avec :

$u_\alpha^0$  : le déplacement de membrane dans la direction  $\alpha$

$w$  : la flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$  : la rotation due à la flexion (sans cisaillement).

– *les modèles Reissner-Mindlin :*

Pour introduire l'effet de cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique Mindlin[25] est adoptée: la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Fig 3.7)

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin d'écrit :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{III.28})$$

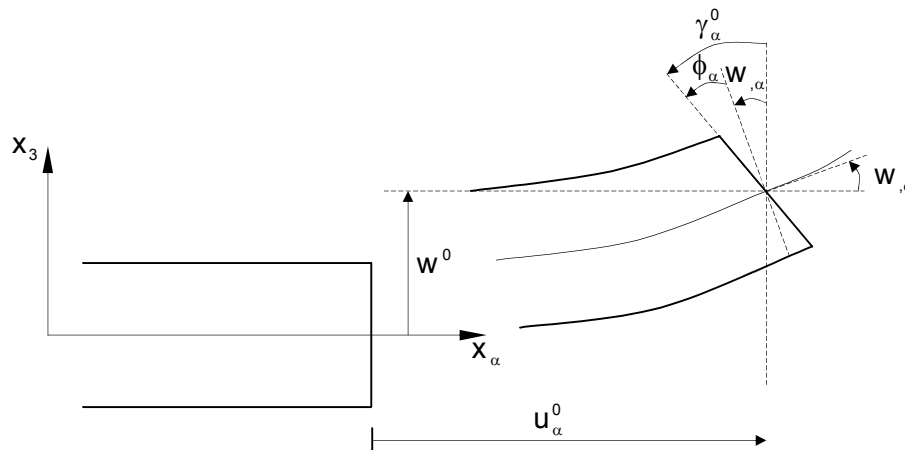
Avec :

$\phi_\alpha$  : la rotation de la normale au plan moyen autour des axes  $x_\alpha$

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$  : la déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen .

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes

dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire



**Figure 3.7 :** Cinématique de Reissner-Mindlin

des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal Whitney[26]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des composites épaisse restes aléatoires par ce type d'approche cinématique.

– *Les modèles d'ordre supérieur :*

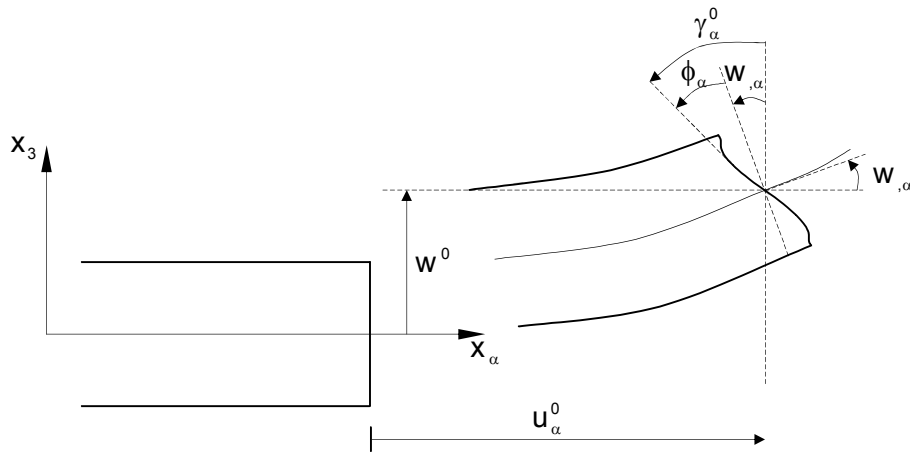
Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Fig. 3) Liberscu[27], Whitney [26], Nelson [28], Lo[29],[30], Touratier[31], Kant[32], Swaminathan [33].

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent, avec  $i \in \{1,2,3\}$ :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.29})$$

Dans le cas des théories du premier ordre Reissner-Mindlin, on a  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j=2,3,4$  et  $\phi_3^{0(1)} = 0$ .

Hildebrand et al. [34] sont les premiers à introduire ces raffinements avec  $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(3)} = 0$ . Le même développement est utilisé par Nelson et Lorch [28] en introduisant des coefficients de correction. Lo et al. [30] proposent un modèle qui prend en compte également l'effet de déformation normale :  $\phi_i^{0(4)} = \phi_3^{0(3)} = 0$ . Les solutions analytiques de différents modèles d'ordre supérieur sont comparées dans Kant [32]. En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre.



**Figure 3.8 :** Cinématique de l'ordre supérieur.

La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendantes dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin).

Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées.

Souvent on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (III.29) est utilisé avec  $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_3^{0(3)} = \phi_3^{0(1)} = 0, \phi_\alpha^{0(3)}, \alpha = \{1,2\}$  dépendent à  $\phi_\alpha^{0(1)}$  et à  $w_{,\alpha}$ . L'expression de (III.29) devient :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_\alpha(x_1, x_2) + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad , \text{ (III.30)}$$

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

- Ambartsumyan [35] :  $f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right);$
- Reissner [36], Panc [37] et Kaczkowski [38] :  $f(z) = \frac{5}{2} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right);$
- Levinson [39], Murthy [40] et Reddy [41] :  $f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right);$

$h$  étant l'épaisseur du multicouche.

Dans le modèle de Reddy [41], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transversal par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [31],[42] propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transversal s'écrit comme ci dessous :

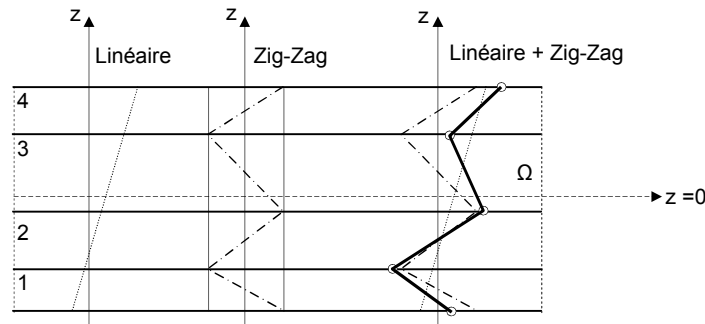
$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1}$$

**les conditions de contact et est indépendante du nombre de couche (Fig 3.8 et 3.9).**

– Les modèles zig-zag :

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre Di Sciuva[46],[47],[55]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside).

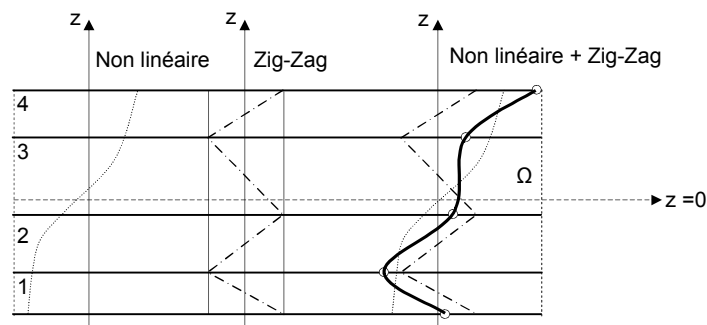
La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir **Fig.3.10**). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figure 3.10** : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce, sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de Di Sciuva[32], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag Murakami[48], Cho[56], Averill[57], He[58], Icardi[59],[60], Carrera[61]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir **Fig. 3.11**). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure 3.11** : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.

Dans les travaux de [Ossadzow[62], Karama[63], Ossadzow[51], la fonction "sinus" de Touratier[31] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq et al. [43], [54] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour

Le système des coordonnées de laminée est choisi tel que le plan x-y coïncide avec le mi-plan de laminée. Un point P, situé au point (x, y, z) dans la plaque, le mouvements après la déformation au position est (x+u<sub>1</sub>, y+u<sub>2</sub>, z+u<sub>3</sub>) avec (u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, u<sub>3</sub>) qui sont les composantes du vecteur de déplacement :

$$\mathbf{u} = u_1 \hat{e}_x + u_2 \hat{e}_y + u_3 \hat{e}_z \quad (\text{III.33})$$

Et ( $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ ) sont les vecteurs unitaire le long des coordonnées (x, y, z), Les deux premières suppositions de l'hypothèse de Kirchhoff exigent que les déplacements (u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, u<sub>3</sub>) s'écrivent

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\phi_1(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\phi_2(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Avec (u,v,w) qui sont les déplacements d'un point sur le plan x-y (c.-à-d., le plan moyen du laminée),  $\phi_1$  est la rotation d'une normale transversale en axe y et  $\phi_2$  est la rotation d'une normale transversale en axe x. La troisième supposition de l'hypothèse de Kirchhoff implique que les rotations  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont égales respectivement à :

$$\phi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \phi_2 = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{III.35})$$

Donc, le champ de déplacement de la théorie des plaques classiques devient :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Nous avons supposé tacitement que les déformations sont continues à travers l'épaisseur, y compris les interfaces des couches des matériaux dissemblables. Cette supposition joue un rôle considérable dans le développement des théories des laminées; elle nous permet de remplacer une laminée avec une seule couche équivalente dont les coefficients matériels sont moyennés sur l'épaisseur du laminée (Homogénéisation), comme il sera montré dans les sections suivantes. Cependant, cette supposition est intéressante pour modéliser des caractéristiques de la réponse globales, mais il ne représente pas correctement les contraintes interlaminaires. Une fois que le champ de déplacement d'un corps continu est connu, les déformations dans le corps peuvent être calculées en utiliser les relations de déformations-déplacements :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{III.37})$$

Ici (m) est un l'indice répété de 1 à 3 pour chaque terme de  $\epsilon_{ij}$ , les  $x_1=x$ ,  $x_2=y$  et  $x_3=z$  sont les coordonnées décrivaient la déformation du corps. Les déformations dans l'Eq (III.37) sont des fonctions non-linéaires des gradients de déplacement, La partie non-linéaire des déformations devrait être examinée attentivement et dans le cas des petites déformations

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2, \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} \ll 1 \\ \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2, \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \ll 1, \left( \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 \ll 1 \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Nous notons que (u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, u<sub>3</sub>) sont les composants des déplacements totaux le long des coordonnées (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>) respectivement. Ici nous considérons des problèmes de plaques

qui impliquent des rotations modérées. Ainsi, les termes suivants sont associés aux rotations des normales transversales,

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2, \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} \quad (\text{III.39})$$

Et sont petits mais pas négligeable. Sous les limitations imposées par l'Eqs. (2.4-7) et (2.4-8), nous pouvons simplifier l'Eq. (2.4.6) comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_3}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x}\right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Les déformations dans l'Eq (III.40) sont appelées "Les déformations de Von Kàrmán". Les déformations associées au champ de déplacement (III.37) peuvent être calculées en utilisant maintenant les relations déformations-déplacements de Von Kàrmán (III.40):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_6 \equiv 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_4 \equiv 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_5 \equiv 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

La seule notation en indice utilisé dans l'Eqs. (III.41) et (III.40) pour les déformations encore se reporte au coordonnées de laminée  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ .

Les déformations dans l'Eqs (III.41) ont la forme générale :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + z\varepsilon_i^{(1)} \quad (i = 1, 2, 6) \quad (\text{III.42})$$

Ici  $\varepsilon_i^{(0)} = (\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, \varepsilon_6^{(0)})$  dénotent les déformations associées avec allongement et le cisaillement en-plan du plan moyen et sont appelées les déformations de la membrane . Les quantités  $\varepsilon_i^{(1)} = (\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}, \varepsilon_6^{(1)})$  sont les courbures . Les deux  $\varepsilon_i^{(0)}$  et  $\varepsilon_i^{(1)}$  sont des fonctions seulement de  $(x, y)$ . L'équation (III.42) montre que la déformation de la membrane et courbures pour la théorie classique des laminées ayant la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \varepsilon_1^{(1)} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_2^{(0)} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \varepsilon_2^{(1)} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_6^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_6^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

où les termes soulignés sont les déformations non-linéaires de Von Kàrmán. Dans une notation matricielle, l'Eq. (III.43) rendent la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} \\ \varepsilon_2^{(0)} \\ \varepsilon_6^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(1)} \\ \varepsilon_2^{(1)} \\ \varepsilon_6^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

Le besoin de cette théorie survient de l'invalidité de négliger l'effet de cisaillement transversal dans la théorie classique des plaques. Le cisaillement transversal n'est plus négligeable dans les plaques épaisses ( $L/h < 10$ ) pour les plaques isotropes. Aussi, la déformation due au cisaillement est considérable dans les composites avec un rapport ( $L/h \leq 10$ ).

### III.5.3) Théorie des plaques laminées du première ordre (Reissner-Mindlin) :

Des nombreuses théories des plaques incluant les effets de cisaillement transversal sont documentés dans la littérature. Dans ces théories les composants du déplacement ou de contraintes sont exprimés comme une combinaison linéaire de l'épaisseur et des fonctions indéterminées de la position d'un point dans la surface de référence. Cela réduit le problème d'élasticité 3-D à un problème a deux dimensions (2-D). Les équations principales sont dérivées soit en utilisant les principes des travaux virtuels ou par les intégrales pondérés des équations d'équilibre de 3-D à travers l'épaisseur de la stratifié. Le principe des déplacements virtuels est utilisé pour dériver les équations d'équilibre. Dans toutes les théories des plaques, les déplacements et les déformations sont continues à travers d'épaisseur du laminée (c.-à-d., valeur unique à l'interfaces des couches). Cela mène à une discontinuité de champ des contraintes inter-laminaire à cause des coefficients élastiques différents aux interfaces des couches quand les équations constitutives sont utilisées pour calculer les contraintes. Le champ de déplacement est définie par :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\phi_1(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\phi_2(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Dans la déformation de cisaillement de premier ordre, une des trois suppositions de la théorie classique des laminées est enlevée : le ligne droite normal au mi-plan de laminée reste droite et non-extensible après la déformation, mais elle ne reste pas nécessairement perpendiculaire à la mi-surface. Donc, les rotations  $\phi_1$  et  $\phi_2$  d'une normale transversale sont indépendant de  $\partial w/\partial x$  et  $\partial w/\partial y$ .

Le champ de déplacement de la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre est donné par l'Eq. (III.45), où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les rotations d'une normale transversale. Les déformations de Von Kármán associé avec le champ de déplacement (III.45) est :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + z\varepsilon_i^{(1)} \quad (i = 1, 2, 6, 4, 5) \quad (\text{III.46})$$

D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \varepsilon_1^{(1)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \varepsilon_2^{(0)} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \varepsilon_2^{(1)} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \\ \varepsilon_6^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_6^{(1)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ \varepsilon_3^{(0)} &= \varepsilon_3^{(1)} = 0 \\ \varepsilon_4^{(0)} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2, \varepsilon_4^{(1)} = 0 \\ \varepsilon_5^{(0)} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1, \varepsilon_5^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

**Bibliographie :**

- [1] Vasiliev V.V & Morozov E.V "Mechanics and Analysis of Composite Materials", Elsevier, 2001.
- [2] Vinson J.R., Sierakowski.R.L. "The Behavior of Structures Composed of Composite Materials" KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 2004
- [3] László P.K, Springer G. S. "mechanics of composite structures ".Cambridge University Press. 2003
- [4] Staab, G-H. "Laminar composites", Butterworth-Heinemann, 1999.
- [5] Ochoa O.O , Reddy J.N, " Finite Element Analysis of Composite Laminates " Kluwer Academic Publishers – London 1992.
- [6] Batoz J.L & Dhatt G. " Modélisation des structures par éléments finis ", Vol. 2 : poutres et plaques. Hermès Editions, Paris 1990.
- [7] Ashton .J.E. & Whitney J.M "theory of laminated plates". Progress in Material Science Series . Volume IV . TECHNOMIC, Stamford 1970.
- [8] Matthews.F.L, Davies G.A.O, Hitchings.D and Soutis. C "Finite Element Modeling of Composite Materials and Structures" CRC Press. Cambridge 2003.
- [9] Crisfield M.A. Vol.2. "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics ". JOHN WILEY & SONS . England 2000.
- [10] Crisfield M.A. Vol.2. "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Essentials". JOHN WILEY & SONS . England 2000.
- [11] Bonet J, Wood R.D. "Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis" . CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.1997.
- [12] Zienkiewicz O.C , Taylor R , " The finite element method " Vol 2 : Plates & Shells , 5<sup>ème</sup> édition – Butterworth Heinemann – London.2000
- [13] Owen.D.R.J, Hinton.E " Finite element in plasticity :Theory and practice, Swansea. U.K 1980 .
- [14] Owen.D. R. J, Prakash. & ZIENKIEWICZ O.C " Finite element analysis of nonlinear composite materials by use of overlay systems"Computer & Structures, Vol. 4, pp. 1251-1267. 1974.
- [15] Noor A.K. & Burton W.S. "Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates". Composite Structures, vol. 11, pages 183-204, 1989.
- [16] Kant .T. & Swaminathan. K. "Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments". Composite structures, vol. 49, pages 65-75, 2000.
- [17] Carrera . E. "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates". Composite structures, vol. 50, pages 183-198, 2000.
- [18] Pagano N.J. "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending ".J. Comp.Mat, vol. 3, pages 398-411, 1969.
- [19] Pagano N.J. "Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates". J. Comp. Mat., vol. 4, pages 20-35, 1970.
- [20] Srinivas S. & Rao A. K. "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates". Int J Solids Structures, vol. 6, pages 1463-1481,1970.
- [21] Srinivas S. & Rao A.K. " Flexure of thick plates". ASME, pages 298-299, 1973.
- [22] Reissner E. & Stavsky Y." Bending and stretching of certain types of heterogeneous aelotropic elastic plate". J. Appl. Mech., vol. 28, pages 402-408, 1961.
- [23] Yang .P.C., Norris .C.H. & Stavsky.Y." Elastic wave propagation in heterogeneous plate". Int. J. Sol. Struct., vol. 2, pages 665-684, 1966.
- [24] Kirchhoff G. "Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen Scheibe ". Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40, pages 51-88, 1850.
- [25] Mindlin R.D. " Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates ". Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38,1951.

# Chapitre IV

## Modélisation numérique

### I: Présentation du modèle linéaire

#### IV.1) Introduction :

Les équations différentielles partielles principales pour les composites laminées avec des géométries arbitraires et des conditions aux limites ne peuvent pas être résolues à cause de leurs formes complexes. Les solutions analytiques des théories des plaques sont disponibles ([1-5]) principalement pour les plaques rectangulaires avec tous ses bords simplement appuyés (c.-à-d., les solutions de Navier) ou avec deux bords en face simplement appuyés et les autres bords restants ont des conditions aux limites arbitraires (c.-à-d., les solutions de Lévy). Les méthodes de Rayleigh-Ritz et Galerkin peuvent aussi être utilisées pour déterminer des solutions analytiques approximatives, mais elles sont limitées aussi aux géométries simples à cause de la difficulté dans la construction des fonctions d'approximation pour les géométries compliquées. L'utilisation des méthodes numériques facilite la résolution de ces équations pour les problèmes d'importance pratique. Parmi les méthodes numériques disponibles de la résolution de ces équations différentielles définies sur des domaines arbitraires, la méthode des éléments finis est actuellement la méthode la plus efficace.

Il y a plusieurs types des modèles d'élément fini développés pour les théories des plaques. Ceux-ci peuvent être groupés dans quatre catégories majeures : (a) modèles déplacement, (b) modèles de contraintes (contraintes en équilibre), (c) modèles mixtes et (d) modèles hybrides. Les modèles d'élément fini de type déplacement de la théorie des plaques sont basés sur le principe des déplacements virtuels où toutes les équations sont exprimées en termes de déplacements [par exemple, l'Éqs. (III.41), (III.47)]. Les modèles d'élément fini mixtes et hybrides sont basés sur l'état de théorie des plaques modifié ou principe variationnel mixtes dans lesquelles les champs de déplacements et de contraintes sont approximés indépendamment. Les modèles de contraintes sont basés sur le principe de forces virtuelles. Parmi les quatre types des modèles, les modèles de déplacement sont les plus communément utilisés dans les logiciels commerciaux basés sur la méthode des éléments finis.

L'objectif de ce chapitre est de présenter le développement d'éléments finis de type déplacement de la théorie des plaques stratifiés classique et la théorie des plaques de premier ordre, lesquels ont été discutés dans le Chapitre III. Les modèles d'élément fini sont utilisés alors pour analyser plusieurs problèmes des stratifiés et des plaques composites laminées.

#### IV.2) Modèle éléments finis de structures multicouches :

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas

complexes, plusieurs méthodes numériques ont été développées. Nous ne nous intéressons ici que de la méthode des éléments finis, l'outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures.

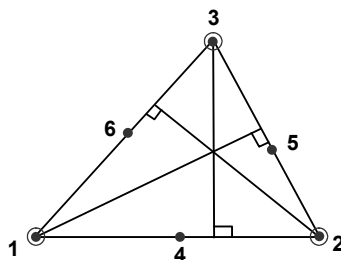
Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de la description géométrique (2D, 3D), la méthode de la construction et le choix de type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixte, hybride). Ci dessous, nous passons en revue différentes contributions des éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

#### IV.2.1) Modèle éléments finis 2D.

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction Pryor[1],Reddy[2],Engblom[3],Hamdallah[4],Ganapathi[4]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par noeuds. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité  $C^0$ , les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide . . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisées et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction Noor[6]. On trouve dans Noor[6],Sze[7] une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer Noor[6], Rolfes[8], [9],[10], Sze [7].

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité de type  $C^1$  pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux  $w$  mais encore leurs dérivées normales  $\partial w/\partial n$  doivent être continus à travers des frontières inter-éléments Phan [11], Ren [12], Beakou [13], Polit [14], Reddy [15], Raghuram [16], Polit [17], Ganapathi [18], Subramanian [19], Polit [20]. Dans Phan [11], Ren [12], un élément de continuité  $C^1$  basée sur le modèle cubique de Reddy [21] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par noeud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse.

En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier [22], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité  $C^1$  sont développés Beakou [13], Polit [14], Ganapathi [18], Mistou [23], Polit [17], Polit [20]. L'élément triangulaire développée par Polit et al. est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non-linéaires. L'élément possède 6 noeuds. La continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurées. La géométrie de l'élément est présentée sur la **Fig.4.1**. Pour un noeud  $l$  au coin ( $l = 1; 2; 3$ ), le vecteur de déplacement nodal est :



**Figure 4.1** : Elément "sinus" triangulaire 6 noeuds à continuité  $C^1$  Polit [15].

$$\delta_1^T = \left\langle \begin{array}{cccccc} u & u_{,x} & u_{,y} & v & v_{,x} & v_{,y} \\ w & w_{,x} & w_{,y} & w_{,xx} & w_{,yy} & w_{,xy} \\ \theta_x & \theta_{x,x} & \theta_{x,y} & \theta_y & \theta_{y,x} & \theta_{y,y} \end{array} \right\rangle \quad \text{IV.1}$$

Pour un noeud  $m$  à mi-côté ( $m = 4; 5; 6$ ), le vecteur de déplacement nodal est :

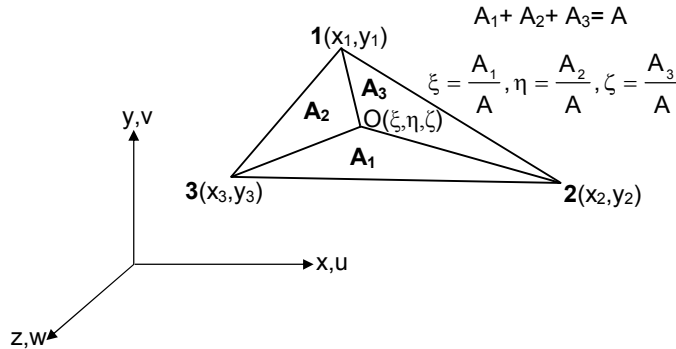
$$\delta_m^T = \left\langle \begin{array}{cccc} u & u_{,n} & v & v_{,n} \\ w_{,n} \\ \theta_x & \theta_{x,n} & \theta_y & \theta_{y,n} \end{array} \right\rangle \quad \text{IV.2}$$

Les contraintes hors plan  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zz}$  sont déterminées en intégrant dans l'épaisseur les équations d'équilibre appropriées.

Raghuram et al. [16] propose un élément triangulaire de continuité  $C^1$  à 18 degrés de liberté par noeud (voir **Fig. 4.2**). Le champ de déplacement adopté est :

$$\begin{aligned} u &= u^0 - zw_{,x} - \frac{z^2}{2} w_{1,x} \\ v &= v^0 - zw_{,y} - \frac{z^2}{2} w_{1,y} \\ w &= w^0 + zw_1 \end{aligned} \quad \text{IV.3}$$

Le terme  $w_1$  est pour tenir compte de la déformation de compression dans l'épaisseur.

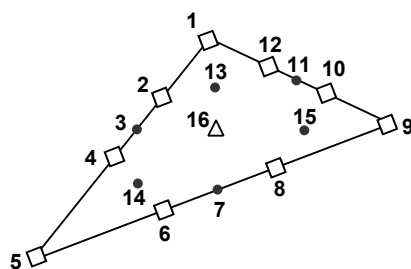


**Figure 4.2** : Élément triangulaire 3 noeuds à continuité  $C^1$  Raghuram [16].

Les variables nodales sont;

$$\delta^T = \left\langle \begin{array}{cccccc} u & u_{,x} & u_{,y} & v & v_{,x} & v_{,y} \\ w & w_{,x} & w_{,y} & w_{,xx} & w_{,yy} & w_{,xy} \\ w_1 & w_{1,x} & w_{1,y} & w_{1,xx} & w_{1,yy} & \theta_{1,yy} \end{array} \right\rangle \quad \text{IV.4}$$

Récemment, Sheikh et al. [24], [25] proposent un élément triangulaire à 16 noeuds. Dans cet élément, un polynôme d'ordre quatre complet est utilisé pour le déplacement transversal  $w$ . Les déplacements membranaires ( $u$  et  $v$ ) et les rotations ( $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) sont décrits par des polynômes cubiques. Avec une substitution appropriée des composants de déplacements aux différents noeuds, les 55 inconnues dans ces 5 polynômes sont exprimés en termes de 55 déplacements nodaux (voir **Fig.4.3**). Cet élément est ensuite utilisé pour l'étude des plaques multicouches de différentes géométries.



**Figure 4.3 :** Élément triangulaire 16 nœuds Sheikh[24]

Pour éviter les difficultés numériques imposées par les continuités  $C^1$  des modèles éléments finis précédents, certains auteurs introduisent le concept de fonction "penalty" Pandya[26],[27], Fukunaga[28], Hu [29] pour développer un élément quadrilatère Lagrangien à 9 noeuds (voir Fig. 11). En se basant toujours sur le modèle cubique de Reddy [21], ils introduisent des degrés de liberté additionnels en rassurant les contraintes cinématiques par les fonctions penalty. Le vecteur  $\chi$  suivant est introduit :

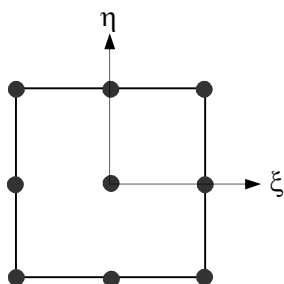
$$\chi = \langle \chi_x, \chi_y \rangle^T = \langle \partial w / \partial x, \partial w / \partial y \rangle^T \quad \text{IV.5}$$

Les contraintes cinématiques  $\phi_x = \chi_x - \partial w / \partial x = 0$ ,  $\phi_y = \chi_y - \partial w / \partial y = 0$  sont introduites dans l'expression des travaux virtuels grâce aux fonctions penalty. En effet le terme ajouté est  $\phi^T D^p \phi$  où  $\phi = \langle \phi_x, \phi_y \rangle^T$  et  $D^p$  est la matrice de penalty qui peut être exprimée par :

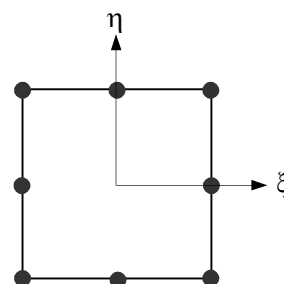
$$D^p = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{pmatrix}, \quad \text{IV.6}$$

où  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  sont des paramètres de penalty qui prennent expérimentalement une valeur qui vaut  $10^3$  à  $10^5$  fois la valeur absolue maximale des termes de la matrice de rigidité normale. Certains auteurs proposent une formulation mixte pour obtenir des éléments à continuité  $C^0$ . Putcha et al. [30] utilise le principe variationnel mixte de Reissner pour introduire indépendamment les déplacements et les moments. L'élément déduit contient 11 degrés de liberté (3 déplacements, 2 rotations et 6 moments résultants) par noeud. Dans Wu [31], [32], les déplacements et les contraintes interlaminaires ( $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zz}$ ) sont approchés indépendamment.

Un élément quadrilatère à 9 noeuds, de continuité  $C^0$  est utilisé dans la formulation (**Fig. 4.4**). Les variables nodales sont les 3 déplacements, les 3 rotations, 5 fonctions d'ordre supérieur et 3 contraintes interlaminaires. L'avantage principal de cette formulation est que les contraintes interlaminaires sont des variables principales. Elles peuvent, donc être déterminées précisément et facilement sans avoir recours aux calculs supplémentaires.



**Figure 4.4:** Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 noeuds



**Figure 4.5:** Élément quadrilatère de type Serendip à 8 noeuds

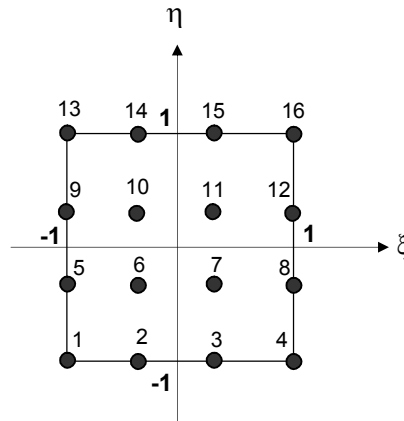
Les travaux de Barboni[33], Manjunatha [34], Kant [35], Shankara [36], Khare [37] ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur à continuité  $C^0$ . Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 noeuds sont proposés (voir

**Figs.4.4 et 4.6).** Ils diffèrent par l'ordre du développement de série de Taylor adopté pour le champ de déplacement :

*Empilement symétrique*

- Les éléments à 5 degrés de liberté par noeud, le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= z\theta_x(x,y) + z^3\theta_x^*(x,y) \\ v(x,y,z) &= z\theta_y(x,y) + z^3\theta_y^*(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad \text{IV.7}$$



**Figure 4.6:** Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 noeuds

- Les éléments à 6 degrés de liberté par noeud, le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= z\theta_x(x,y) + z^3\theta_x^*(x,y) \\ v(x,y,z) &= z\theta_y(x,y) + z^3\theta_y^*(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) + z^2w_0^*(x,y) \end{aligned} \quad \text{IV.8}$$

*Empilement non symétrique*

- Les éléments à 7 degrés de liberté par noeud, le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) + z^3\theta_x^*(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) + z^3\theta_y^*(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad \text{IV.9}$$

- Les éléments à 9 degrés de liberté par noeud, le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) + z^2u_0^*(x,y) + z^3\theta_x^*(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) + z^2v_0^*(x,y) + z^3\theta_y^*(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad \text{IV.10}$$

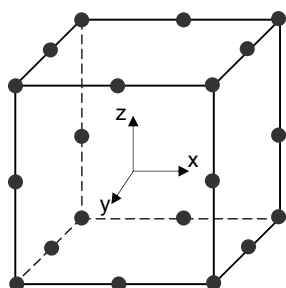
- Les éléments à 11 degrés de liberté par noeud, le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) + z^2u_0^*(x,y) + z^3\theta_x^*(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) + z^2v_0^*(x,y) + z^3\theta_y^*(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) + z\theta_z(x,y) + z^2w_0^*(x,y) \end{aligned} \quad \text{IV.11}$$

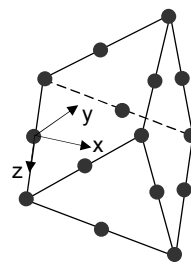
- Les éléments à 12 degrés de liberté par noeud, le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) + z^2u_0^*(x,y) + z^3\theta_x^*(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) + z^2v_0^*(x,y) + z^3\theta_y^*(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) + z\theta_z(x,y) + z^2w_0^*(x,y) + z^3\theta_z^*(x,y) \end{aligned} \quad \text{IV.12}$$

Icardi et al. [68] étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 noeuds (**Fig.4.10**) et un élément singulier 15 noeuds (**Fig.4.11**) généré à partir d'un élément de brique 20 noeuds. Une procédure de calcul à deux phases "prédicteur-correcteur" est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé est présenté sur la Fig. 19. Cho et al. [76] développe un élément fini brique zig-zag à 8 noeuds. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans Ramtekkar [77], [78], Desai [79] un élément mixte à 18 noeuds est proposé (**Fig.4.12**). Les variables nodales sont les 3 déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément est à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux noeuds sont les contraintes interlaminaires. Raffiner. Dans Bui [80], [81] les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro.

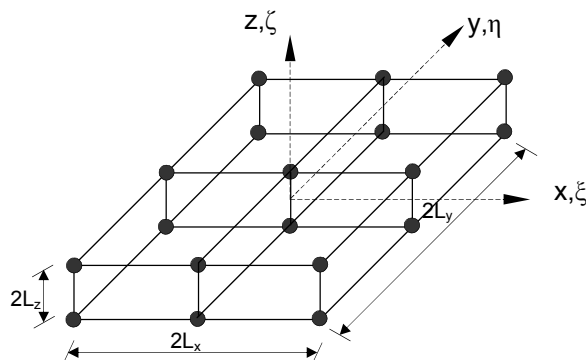


**Figure 4.10:** Élément brique à 20 noeuds



**Figure 4.11:** Élément singulier à 15 noeuds Icardi [68]

Cet élément d'interface est formulé en dégenérant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (voir **Fig.4.13**). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.



**Figure 4.12:** Élément brique mixtes à 18 noeuds Ramtekkar [77]

La dernière méthode évite un écueil classique des approches 3D. Compte tenu du fait que les contraintes sont calculées dans l'élément et non sur sa frontière, l'estimation des contraintes d'interface par les éléments finis 3D nécessite souvent un travail de post-processeur pour relocaliser et calculer les valeurs précises aux interfaces. En plus, les contraintes obtenues aux voisinages des bords libres sont singulières et dépendent du raffinement du maillage.

### IV.3) Théorie classique des plaques laminées :

#### IV.3.1) Equations d'équilibres :

La théorie classique des plaques laminées est une extension de la théorie de Kirchhoff des plaques minces isotropes aux plaques laminées. Les suppositions de la théorie des plaques de Kirchhoff ont été discutées dans la Section III.5.2.a, et les équations de mouvement ont été dérivées dans la Section III.5.2.b. Les équations d'équilibre de la théorie classique des plaques laminées sont pour le cas statique, [les Eqs. (III.36) et (III.41) - (III.43)]:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y}\right) &= 0 \\ -\left(\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\right) &= 0 \\ -\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + N(w) + q\right) &= 0 \end{aligned} \quad \text{IV.18}$$

D'où  $(N_1, N_2, N_6)$  et  $(M_1, M_2, M_6)$  sont les forces et les moments résultantes définies dans l'Eq (IV.19) et  $N(w)$  c'est l'expression non-linéaire définie dans l'Eq (IV.19) :

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} z dz \quad \text{IV.19}$$

$$N(w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial x} + N_6 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_6 \frac{\partial w}{\partial x} + N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \text{IV.20}$$

Les équations d'équilibre peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(u, v, w)$  [les Eqs. (III.36) - (III.43)] utilisant les équations constitutives des laminées. Ici nous développons un modèle élément fini d'Eqs. (IV.18) et nous supposons que les forces et les moments résultants sont définis en termes de déplacements.

#### IV.3.2) Modèle élément fini :

##### IV.3.2.a) Introduction :

Le développement d'un modèle élément fini suit deux étapes de base : (1) la construction de l'état de l'intégral pondéré des équations et (2) l'approximation des déplacements. Nous utilisons les idées de la théorie de l'interpolation et la dérivation des équations algébriques en termes des déplacements nodaux et les forces avec utilisation l'état de l'intégral pondéré. Dans la première étape, les équations différentielles sont résolues et refondues dans une forme d'intégral pondérée. L'état de l'intégrale pondéré peut être dérivé directement de l'un ou l'autre des équations principales ou du principe de déplacements virtuels. Les deux approches donnent exactement le même état de l'intégral pondéré, appelé *forme faible*. Dans la deuxième étape, les variables dépendantes sont interpolées par les éléments finis appropriés de la forme de l'Eq(IV.18) et ils sont substitués dans la forme faible des équations pour obtenir les relations algébriques en termes des valeurs nodales des déplacements et des forces. Ces deux étapes sont discutées en détail dans les sections suivantes. Pour la simplicité, nous omettons les termes non-linéaires  $N(w)$  dans la troisième équation (IV.20) et nous développons le modèle élément fini des équations

linéaires. Une fois que le modèle linéaire est discuté, nous revenons au cas non-linéaire (c.-à-d. en tenant compte de l'expression non-linéaire  $N(w)$  dans l'Eq. (IV.18)) et nous dérivons le modèle élément fini plan dans le chapitre suivant.

#### IV.3.2.b) Formulation variationnelle :

Le principe des déplacements virtuels donne naturellement la forme faible des équations différentielles dans l'Eq (IV.21). La forme faible d'Eq. (IV.18) peut être aussi construite comme décrit dans cette partie. Chaque équation est multipliée par une fonction de pondération appropriée et nous intégrons sur un élément typique. Les fonctions de pondération ont la signification d'une variation virtuelle dans les composants de déplacement. Les trois équations dans (IV.18) correspondent à l'équilibre des forces dans les trois coordonnées ( $x, y, z$ ). Ainsi, les fonctions de pondération pour les trois équations ayant le sens de variations virtuelles ( $\delta u, \delta v, \delta w$ ) respectivement. Nous considérons la première équation dans (IV.18), nous multiplions avec une fonction de pondération  $\delta u$  et nous intégrons sur le domaine d'élément  $\Omega^e$  :

$$\int_{\Omega^e} \delta u \left[ -\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_6}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad \text{IV.21}$$

Rappelons que  $N_1$  et  $N_6$  sont des fonctions des dérivés des déplacements  $u, v$  et  $w$ . Pour réduire la différenciation en ( $u, y$  et  $w$ ), nous utilisons des fonctions d'interpolation dont l'approximation par les éléments finis, la différenciation de  $N_1$  et  $N_6$  est traitée à la fonction de pondération  $\delta u$ , nous utilisons l'intégration par parties :

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} (N_1 n_x + N_6 n_y) \delta u ds = 0 \quad \text{IV.22}$$

où  $(n_x, n_y)$  sont les cosinus directeurs du normal sur la frontière  $\Gamma^e$  du domaine d'élément  $\Omega^e$ . Nous notons que l'expression dans les parenthèses de l'intégrale sur la frontière dénote la force normale en plan.

$$N_n = N_1 n_x + N_6 n_y \quad \text{IV.23}$$

l'Éq. (IV.22) devient :

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \delta u ds = 0 \quad \text{IV.24}$$

L'équation (IV.24) est appelée la forme faible d'Eq. (IV.18) parce qu'il exige moins de différenciation (C.a.d. une continuité faible) des variables dépendantes ( $u, v, w$ ) que les différentielles originales (IV.18). Suivant la même procédure, nous obtenons les formes faibles suivantes,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \delta v}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \delta v ds = 0 \\ & - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} M_6 + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} M_2 + \delta w q \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} \left( \delta w V_n + \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n \right) ds = 0 \quad \text{IV.25} \end{aligned}$$

D'où  $\delta v$  et  $\delta w$  sont les variations virtuelles des déplacements  $v$  et  $w$ , respectivement.

#### Interpolation et le modèle élément fini :

Les déplacements ( $u, v, w$ ) sont approximés sur un élément par les interpolations de forme,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y) \\ v &= \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(x, y) \end{aligned} \quad \text{IV.26}$$

$$w = \sum_{j=1}^m \Delta_j \phi_j(x, y)$$

Ici  $(u_j, v_j)$  dénotent les valeurs nodales de  $(u, v)$  et  $\Delta_j$  dénote les valeurs nodales de  $w$  et ses dérivés. Tous les déplacements nodaux et les rotations sont appelés les déplacements généralisés, ils sont associés au domaine d'élément  $\Omega^e$ . Il y a deux types de base des fonctions d'interpolation qui sont utilisées dans l'analyse par les éléments finis. L'interpolation de Lagrange est celui dans laquelle seulement la fonction est interpolée, alors que l'interpolation d'Hermite est celui dans laquelle la fonction et ses dérivées sont interpolées. Les éléments finis développés utilisant le type d'interpolation de Lagrange sont appelés des éléments de la classe  $C^0$  et les éléments finis développés utilisant le type d'interpolation d'Hermite sont appelés les éléments de la classe  $C^m$  (où  $m > 0$  est l'ordre des dérivés inclus dans l'interpolation). Basé sur l'ordre de différenciation dans l'Eq. (IV.24)-(IV.25), il peut être conclu que  $\psi_j$  sont les fonctions d'interpolation de Lagrange et  $\phi_j$  sont les fonctions d'interpolation d'Hermite.

Clairement, L'interpolation de la classe  $C^0$  de  $(u, v)$  et l'interpolation de la classe  $C^1$  de  $w$  sont imposées pour développer un élément de plaque en flexion de la théorie classique des plaques quand nous utilisons les formes faibles des Eqs. (IV.24) et (IV.25). Les fonctions d'interpolation de Lagrange  $\psi_j$  et d'Hermite  $\phi_j$  sont présentées dans l'annexe A. Les fonctions d'interpolation d'Hermite pour un élément de plaque conforme sont obtenu en prenant le produit de tenseur des polynômes cubiques d'Hermite associée à l'élément de poutre d'Euler-Bernoulli (voire [6]). Ce choix d'interpolation de  $(u, v, w)$  assure la continuité de  $(u, v, w, \partial w / \partial n)$  à l'interface d'éléments, et par conséquent de tels éléments sont appelés des éléments conformes. Si le dérivé mixte  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  n'est pas inclus dans l'interpolation,

l'élément résultant n'assure pas la continuité inter-éléments de déplacement transversal, et il est appelé élément non-conforme. L'élément conforme a un total de six degrés de liberté par nœud, alors que l'élément non-conforme a un total de cinq degrés de liberté par nœud.

Le modèle élément fini d'Eq (IV.18) est obtenu en substituant les expressions (IV.26) à  $(u, v, w)$ , et  $\partial u = \psi_j$ ,  $\partial v = \psi_j$  et  $\partial w = \phi_j$  dans les Eqs. (IV.24) et (IV.25). Cela donne l'i-ème équation algébrique de chaque forme faible. Il y a un total de  $(2n+m)$  degrés de liberté nodaux par élément. Nous obtenons,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds = 0 \\ & \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds = 0 \\ & - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_6 + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} M_2 + \delta w q \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} \left( \phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds = 0 \quad \text{IV.27} \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être exprimées dans la forme,

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{31}] & [K^{32}] & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\Delta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.28}$$

Où

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^{n(\beta)} K_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta - F_i^\alpha = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n(\alpha)$$

$$[K^e] \{\Delta^e\} - \{F^e\} = \{0\} \quad \text{IV.29}$$

D'où  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $n(1) = n(2) = 4$  et  $n(3) = 16$ . Les variables  $\Delta_j^\beta$  et les coefficients de la rigidité  $K_{ij}^{\alpha\beta}$  sont définis par :

$$K_{ij}^{1\alpha} = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right) dx dy$$

et

$$N_{1j}^1 = A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{1j}^2 = A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{1j}^3 = - \left( B_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)$$

$$K_{ij}^{2\alpha} = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right) dx dy$$

$$N_{6j}^1 = A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{6j}^2 = A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{6j}^3 = - \left( B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)$$

$$N_{2j}^1 = A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{2j}^2 = A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{2j}^3 = - \left( B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)$$

$$K_{ij}^{3\alpha} = - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} M_{1j}^\alpha + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} M_{2j}^\alpha \right) dx dy$$

$$M_{1j}^1 = B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$M_{2j}^2 = B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

æ

$$M_{6j}^1 = B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$M_{6j}^2 = B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$M_{6j}^3 = - \left( D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{2j}^1 = B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$M_{2j}^2 = B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$M_{2j}^3 = - \left( D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right) \quad \text{IV.30}$$

$$F_i^1 = \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds$$

$$F_i^2 = \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds$$

$$F_i^3 = \int_{\Gamma^e} \left( \phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds - \int_{\Omega^e} \phi_i q dx dy \quad \text{IV.31}$$

Les autres coefficients sont nuls.

Le calcul des coefficients dans les Eqs (IV.30) et (IV.31) exige l'évaluation d'intégrales sur chaque domaine d'élément. Quand la géométrie d'élément est non rectangulaire ou les intégrales sont des fonctions compliquées de coordonnées (x, y), l'évaluation exacte des intégrales par les méthodes classiques n'est pas possible. Dans les codes de calcul par les éléments finis, de telles intégrales sont évaluées utilisant des méthodes d'intégrations numériques. Cela complète le développement d'un modèle élément fini de la théorie classique des plaques laminées. L'équation (IV.29) d'un élément est assemblée en utilisant la continuité d'inter-élément des déplacements nodaux et le bilan des forces nodales. Alors les conditions aux limites des déplacements et des forces du problème sont imposées sur le système assemblé et les équations sont résolues pour les déplacements nodaux du maillage total. L'équation (IV.29) peut être utilisées pour déterminer les déplacements à tout point arbitraire (x, y, 0) et le champ de déplacement dans l'Eq. (III.33) peut être utilisé pour déterminer les déplacements totaux à un point (x, y, z). Les déformations (III.40) et les contraintes dans les coordonnées (x, y, z) globales (C.à.d., le problème) peuvent être calculées utiliser le champ de déplacement et ils peuvent être transformés aux coordonnées de laminée qui utilisent la transformation dans l'Eq (III.16).

#### IV.4) Théorie de déformation par cisaillement du premier ordre :

##### IV.4.1) Equations d'équilibres :

Dans cette section, nous allons présenter le modèle élément fini de déplacement de la théorie de déformation par cisaillement de premier ordre. La procédure utilisée est la même que la théorie classique des plaques laminées dans la Section IV.3.

Les équations d'équilibre de la théorie de premier ordre sont :

$$-\left( \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} \right) = 0$$

$$-\left( \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) = 0$$

$$-\left( \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + N(w) + q \right) = 0 \quad \text{IV.33}$$

$$-\left( \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 \right) = 0$$

$$-\left( \frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 \right) = 0$$

Les formes faibles des Eqs. (IV.33) peuvent être obtenus par la même manière comme décrit pour la théorie classique des plaques laminées. La première équation est multipliée par  $\delta u$ , la seconde par  $\delta v$ , la troisième par  $\delta w$ , la quatrième par  $\delta \phi_1$ , et la cinquième

$\delta\phi_2$ . Par la suite, nous utilisons l'intégration par parties pour réduire la différenciation des résultantes aux fonctions de pondération et obtenir les formes faibles.

#### IV.4.2) Modèle élément fini :

Nous notons que les forces et les moments résultants contiennent, au plus, seulement les premiers dérivés des variables dépendantes ( $u, v, w, \delta\phi_1, \delta\phi_2$ ). Par conséquent, ils peuvent s'approximer tous en utilisant les fonctions d'interpolation de Lagrange. Donc, l'élément de la plaque en flexion de la théorie des plaques du premier ordre est un élément de la classe  $C^0$ . Les déplacements ( $u, v, w, \delta\phi_1, \delta\phi_2$ ) s'approxime comme,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y) \\ v &= \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(x, y) \\ w &= \sum_{j=1}^n w_j \psi_j(x, y) \\ \phi_1 &= \sum_{j=1}^n S_j^1 \psi_j(x, y) \\ \phi_2 &= \sum_{j=1}^n S_j^2 \psi_j(x, y) \end{aligned} \quad \text{IV.34}$$

D'où  $\psi_i$  sont les fonctions d'interpolation de famille de Lagrange. Nous pouvons utiliser les fonctions d'interpolation linéaire, quadratique ou d'ordre supérieur. Pour le cas linéaire, la forme faible d'Eqs. (IV.33) sur le domaine d'un élément typique  $\Omega^e$  est donnée,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds &= 0 \\ \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds &= 0 \\ \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} Q_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} Q_2 + \psi_i q \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} Q_n \psi_i ds &= 0 \\ \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_6 + \psi_i Q_1 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} M_n \psi_i ds &= 0 \\ \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_2 + \psi_i Q_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} M_{ns} \psi_i ds &= 0 \end{aligned} \quad \text{IV.35}$$

Substituant les Eqs. (IV.34) pour ( $u, v, w, \phi_1, \phi_2$ ) dans l'Eq. (IV.33), nous obtenons le modèle élément fini de la théorie de premier ordre,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] & [K^{14}] & [K^{15}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & [K^{23}] & [K^{24}] & [K^{25}] \\ [K^{31}] & [K^{32}] & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ [K^{41}] & [K^{42}] & [K^{43}] & [K^{44}] & [K^{45}] \\ [K^{51}] & [K^{52}] & [K^{53}] & [K^{54}] & [K^{55}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{v^e\} \\ \{w^e\} \\ \{S^1\} \\ \{S^2\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \\ \{F^4\} \\ \{F^5\} \end{Bmatrix} \\ \sum_{\beta=1}^5 \sum_{j=1}^n K_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta - F_i^\alpha &= 0 \quad ; \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 5) \end{aligned} \quad \text{IV.36}$$

Où

$$[K^e] \{\Delta^e\} - \{F^e\} = \{0\} \quad \text{IV.37}$$

D'où les coefficients de la rigidité et de forces sont définis par ( $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ )

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{1\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{2\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{3\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} Q_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} Q_{2j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{4\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{6j}^\alpha + \psi_i Q_{1j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{5\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{2j}^\alpha + \psi_i Q_{2j}^\alpha \right) dx dy
\end{aligned} \tag{IV.38}$$

Les coefficients  $N_{ij}^\alpha, M_{ij}^\alpha$  et  $Q_{ij}^\alpha$  pour  $\alpha = 1, 2, \dots, 5$  et  $l = 1, 2, 6$  sont donnés par,

$$\begin{aligned}
N_{1j}^1 &= A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, N_{1j}^2 = A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{1j}^4 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, N_{1j}^5 = B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{2j}^1 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, N_{2j}^2 = A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{2j}^4 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, N_{2j}^5 = B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{6j}^1 &= A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, N_{6j}^2 = A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{6j}^4 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, N_{6j}^5 = B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{1j}^1 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, M_{1j}^2 = B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{1j}^4 &= D_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, M_{1j}^5 = B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{2j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, M_{2j}^2 = D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{2j}^4 &= D_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, M_{2j}^5 = D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{6j}^1 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, M_{6j}^2 = B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{6j}^4 &= D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, M_{6j}^5 = D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
Q_{1j}^4 &= A_{55} \psi_j, Q_{2j}^4 = A_{45} \psi_j, Q_{1j}^5 = A_{45} \psi_j, Q_{2j}^5 = A_{44} \psi_j \\
Q_{1j}^3 &= A_{55} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, Q_{2j}^3 = A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}
\end{aligned} \tag{IV.39}$$

$$F_i^1 = \int_{\Gamma^e} \psi_i N_n ds, F_i^2 = \int_{\Gamma^e} \psi_i N_{ns} ds, F_i^3 = \int_{\Omega^e} q \psi_i dx dy + \int_{\Gamma^e} \psi_i Q_n ds$$

$$F_i^4 = \int_{\Gamma^e} \psi_i M_n ds, F_i^5 = \int_{\Gamma^e} \psi_i M_{ns} ds \tag{IV.40}$$

**Bibliographie :**

- [1] Pryor .C.W. & Barker .R.M. "A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates". AIAA Journal, vol. 9, no. 5, pages 912-917, 1971.
- [2] Reddy .J.N. "A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates". International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, pages 1187-1206, 1980.
- [3] Engblom .J.J. & Ochoa. O.O. "Finite element formulation including interlaminar stress calculations". Comput. Struct., vol. 23, pages 241-249, 1986.
- [4] Hamdallah. J.M. & Engblom .J.J. "Finite element plate formulation including transverse shear effects for representing composite shell structures". J. Reinforced Plastic and Comp., vol. 9, no. 3, pages 226-239, 1990.
- [5] Ganapathi. M. & Touratier. M. "A study on thermal postbuckling behavior of laminated composite plates using a shear-exible finite element". Finite Element in Analysis and Design, vol. 28, pages 115-135, 1997.
- [6] Noor .A. K. & Burton .W. S. "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates". Appl Mech Rev, vol. 42, no. 1, pages 1-12, 1989.
- [7] Sze .K.Y., He. L.W. & Cheung. Y.K.. "Predictor-corrector procedures for analysis of laminated plates using standard Mindlin finite element models". Composite Structures, vol. 50, pages 171-182, 2000.
- [8] Rolfes. R. & Rohwer .K. ."Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory". Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 40, pages 51-60, 1997.
- [9] Rolfes. R., Noor .A.K. & Sparr. H.. "Evaluation of transverse thermal stresses in composite plates based on first-order shear deformation theory". Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 167, pages 355-368, 1998.
- [10] Rolfes. R., Rohwer. K. & Ballerstaedt. "Efficient linear transverse normal stress analysis of layered composite plates". Computers and Structures, vol. 68, pages 643-652, 1998.
- [11] Phan .N.D. & Reddy. J.N.. "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory". International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 21, pages 2201-2219, 1985.
- [12] Ren .J.G. & Hinton. E. "The finite-element analysis of homogeneous and laminated composite plates using a simple higher-order theory". Communications in Applied Numerical Methods, vol. 2, pages 217-228, March/April 1986.
- [13] Beakou A. & Touratier M.. "A rectangular finite element for analysing composite multilayered shallow shells in statics, vibration and buckling". Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 36, pages 627-653, 1993.
- [14] Polit .O. & Touratier .M. "A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses". Composite Structures, vol. 38, pages 37-44, 1997.
- [15] Reddy .A.R.K & Palaninathan. R.. "Free vibration of skew laminates". Computers and Structures, vol. 70, no. 4, pages 415-423, 1999.
- [16] Raghuram. P.V. & Krishna Murty A.V.. "A high precision coupled bending extension triangular finite element for laminated plates". Computers and Structures, vol. 72, no. 6, pages 763-777, 1999.
- [17] Polit. O. & Touratier. M. "High-order triangular sandwich plate finite element for linear and non-linear analyses". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 185, pages 305-324, 2000.
- [18] Ganapathi .M., Patel .B.P., Boisse. P. & Touratier. M. "Non-linear dynamic stability characteristics of elastic plates subjected to periodic in-plane load". International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 35, pages 467-480, 2000.
- [19] Subramanian .P. "Flexural analysis of symmetric laminated composite beams using  $C^1$  finite element ". Composite Structures, vol. 54, no. 1, pages 121-126, 2001.
- [20] Polit .O. & Touratier. M.. "A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses". Composite Structures, vol. 58, pages 121-128, 2002.

# Chapitre V

# Modélisation numérique

## II: Analyse Non Linéaire Géométrique

### V.1) Théorie non-linéaire :

#### V.1.1) Intérêt du calcul non linéaire :

La mécanique non linéaire des milieux continus, solides et structures est un domaine d'étude et de recherche extrêmement vaste et riche. Depuis 1970 environ, l'intérêt des chercheurs et des praticiens pour le "non-linéaire" s'est accru considérablement, parce que les méthodes numériques couplées à des programmes électroniques permettent de résoudre effectivement des problèmes d'une étonnante complexité, et ce dans tout domaine : structure, écoulement, diffusion, chaleur, fluide, dynamique, sols, plasticité, etc.

Des programmes non linéaires, aux possibilités diverses, sont aujourd'hui à la disposition de tous (ABAQUS, ANSYS, NISA, MARC, ADINA, NONSAP, ASKA, SAMCEF...). Mais leur emploi inconsidéré peut être fort dangereux : les possibilités du calcul dépassent aujourd'hui largement les connaissances que les ingénieurs reçoivent du comportement non linéaire des structures et milieux continus. Une attention particulière doit être portée à la connaissance des lois constitutives : si elles étaient connues, on pourrait calculer plus et plus sûrement ! Cette dernière mise en garde – pertinente – est bien souvent outrepassée... (Exemple: calcul des sols.)

On peut traiter aujourd'hui, avec plus ou moins de succès, des problèmes non linéaires tels que : plasticité des métaux, des sols, avec effet du fluage, de la température; mécanique de la fracture (fissuration sous fatigue...); extrusion, formage, pénétration des métaux et autres matériaux; rupture des matériaux composites (armés de fibres...); grandes déformations des matières plastiques et caoutchouteuses; écoulements laminaires et turbulents des fluides, compressibles ou non; interaction dynamique entre un fluide et la structure qui le contient; problèmes de contact et frottement statiques ou dynamiques; transfert de chaleur; fissuration du béton, adhérence des armatures, comportement bi- et triaxial, etc. Beaucoup de ces problèmes relèvent, il faut le reconnaître néanmoins, du domaine de la recherche, où il reste encore énormément de travail, tant théorique, numérique, qu'expérimental, à faire, avant d'arriver à des solutions numériques à la fois simples, sûres et peu coûteuses. Car, en fait, comment juger la valeur d'un calcul numérique non linéaire?

Les solutions analytiques sont peu nombreuses et ne touchent que des cas très simples. Il ne reste que la comparaison avec une solution expérimentale, des mesures directes en laboratoire ou sur l'ouvrage construit. Cette comparaison est d'ailleurs elle-même très délicate (confrontation des hypothèses propres au calcul à celles relatives à l'essai; connaissance de toutes les données expérimentales...), mais elle est actuellement le seul moyen de calibrer un calcul numérique.

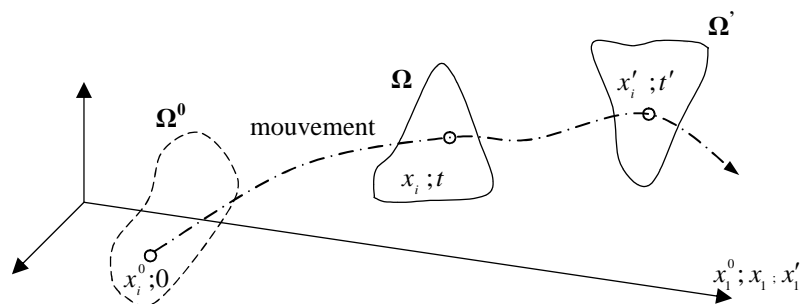
Si certains ingénieurs restent plus que sceptiques devant un calcul numérique non linéaire, ignorer les progrès de la mécanique numérique non linéaire aujourd'hui serait une erreur, tant ces progrès sont considérables et susceptibles d'applications pratiques multiples. D'ailleurs, dans certains cas, seul ce calcul numérique permet de se faire une idée du

## V.2) Théorie non-linéaire géométrique :

### V.2.1) aspect cinématique :

Dans l'espace euclidien, un corps peut être considéré comme composé d'un ensemble de particules. La position de chacune d'elles peut être identifiée par trois nombres réels, par exemple ses coordonnées dans un système d'axes arbitraire. L'ensemble de ces positions définit la configuration du corps. L'évolution de cette configuration dans l'espace et dans le temps s'appelle le mouvement du corps. Soit  $\Omega$  une configuration du corps, dans laquelle les particules occupent des positions bien définies par les coordonnées  $x_i$  ; si ces grandeurs sont prises comme variables indépendantes,  $\Omega$  s'appelle la configuration de référence et la formulation (ou description) du mouvement est dite lagrangienne (ou matérielle).

Soit  $\Omega'$  une configuration ultérieure du corps ; elle est dite configuration courante et les particules dénommées  $x_i$  dans  $\Omega$  occupent de nouvelles positions caractérisées par les coordonnées  $x'_i$ . Ces coordonnées s'appellent respectivement matérielles ( $x_i$ ) et spatiales ( $x'_i$ ). Par simplicité, elles seront toutes mesurées dans un unique système cartésien droit (**Fig 5.1**). On appelle configuration initiale  $\Omega^0$  une configuration conventionnelle correspondant généralement à l'état de repos, non chargé, du corps. Toute autre configuration est dite configuration déformée ( $\Omega, \Omega', \dots$ ). La formulation de Lagrange est la plus usuelle en mécanique des solides et structures. Elle consiste essentiellement à suivre le mouvement des particules du corps à partir d'une configuration de référence connue. La configuration initiale y joue donc un rôle prépondérant, car elle est — en général — bien déterminée pour les solides et structures; elle sert, le plus souvent, de configuration de référence. Dans la formulation eulérienne (ou spatiale), on prend comme référence une région fixe bien déterminée de l'espace et on regarde "ce qui s'y passe", c'est-à-dire qu'on y observe le passage des particules matérielles au cours de leur mouvement. Les positions spatiales de coordonnées  $x'_i$  sont alors choisies comme variables indépendantes. Cette formulation est couramment utilisée en mécanique des fluides.



**Figure 5.1** : mouvement et configurations successives

En solides et structures de l'ingénieur civil, naval, mécanicien ou aéronauticien, on préfère la formulation lagrangienne; le domaine est bien défini; la configuration initiale est généralement importante; l'anisotropie s'y traite plus facilement. Au contraire, si les frontières sont fixes et connues, que le corps y évolue sans forme précise, avec de grandes vitesses, alors il faut utiliser la formulation d'Euler. Si nécessaire, on peut recourir aux deux formulations simultanément (problèmes dits d'interaction fluide-structure, par exemple le calcul d'un réservoir en tenant compte du mouvement du fluide qu'il contient). Dans la suite, on ne retiendra que le point de vue lagrangien.

### V.2.2) Contraintes et déformations:

#### V.2.2.a) Le gradient de tenseur de déformations :

Nous considérons deux particules matérielles P et Q dans le voisinage de l'un à l'autre dans la configuration de référence  $C_0$  (**Fig 5.2**). Les positions de P et Q sont dénotées par  $X_P$  et

$X_Q$ , respectivement. La position de Q relatif à P est donnée par le vecteur élémentaire  $dX$  dans  $C_0$ :

$$dX = X_Q - X_P \tag{V.1}$$

Après la déformation, les particules matérielles P et Q occupent des positions spatiales  $x_P$  et  $x_Q$ , respectivement dans C la nouvelle configuration ; ils sont maintenant dénotés par  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$ . La position de  $\bar{Q}$  relatif à  $\bar{P}$  est dénotée par  $dx$  et elle est donnée par

$$dx = x_Q - x_P \tag{V.2}$$

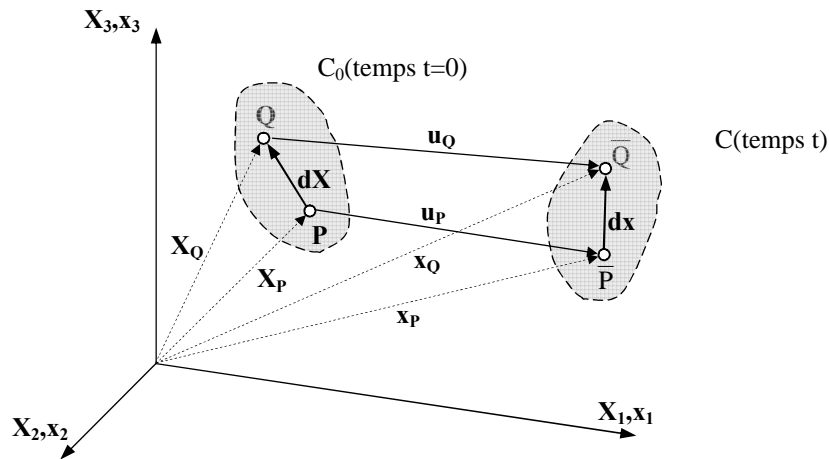


Figure 5.2 : la déformation d'un segment PQ dans un milieu continu

Les déplacements des particules matérielles P et Q sont donnés :

$$u_P = x_P - X_P, \quad u_Q = x_Q - X_Q \tag{V.3}$$

Une des clés dans l'analyse par les déformations finies est le gradient de tenseur de déformation F qui donne la relation de  $dX$  la ligne matérielle avant la déformation et  $dx$  la ligne matérielle après la déformation. Il est défini comme [1] :

$$dx = F \cdot dX = dX \cdot F^T \text{ d'où } F = \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right)^T \equiv (\nabla_0 x)^T \tag{V.4}$$

et  $\nabla_0$  est le gradient d'opérateur ce qui concerne X. Nous avons aussi,

$$dX = F^{-1} \cdot dx = dx \cdot F^{-T} \text{ d'où } F^{-T} = \frac{\partial X}{\partial x} \equiv \nabla X \tag{V.5}$$

et  $\nabla$  est le gradient d'opérateur en ce qui concerne x. Dans une notation indicielle, Eqs (V.4) et (V.5) peut être écrit comme :

$$F = F_{iI} \hat{e}_i \hat{E}_I, \quad F_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I} \tag{V.6}$$

$$F^{-1} = F_{iI}^{-1} \hat{E}_I \hat{e}_i, \quad F_{iI}^{-1} = \frac{\partial X_I}{\partial x_i} \tag{V.7}$$

Ici les indices bas font la référence aux coordonnées Cartésiennes courantes (spatiales), alors que les indices en majuscule font la référence aux coordonnées Cartésiennes (matérielles).

Le déterminant de F est appelé le Jacobien du mouvement et il est dénoté par J. Le tenseur de déformation F peut être exprimé en termes de vecteur du déplacement comme :

$$F = (\nabla_0 x)^T = (\nabla_0 u + I)^T, F^T = \nabla_0 x = \nabla_0 u + I \quad \text{V.8}$$

Le tenseur de déformation ne transfère pas l'information de la translation du corps. Plus loin, si  $F=I$  partout dans le corps, le corps n'est pas tourné alors il n'est pas déformé. Si  $F$  a la même valeur à chaque point matériel dans un corps, alors la transformation  $x = x(X,t)$  est dite un mouvement homogène du corps.

#### V.2.2.b) Tenseurs de déformation de Green et Almansi :

Nous discutons ici d'une mesure générale de la déformation, indépendante de la translation et la rotation. Considérons deux particules matérielles  $P$  et  $Q$  dans le voisinage de l'un à l'autre (est séparé par  $dX$ ) dans la configuration de référence (**Fig 5.2**). Dans la configuration déformée les points matériels  $P$  et  $Q$  sont dénotés par  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$ , ils sont séparés par  $dx$ . Nous souhaitons de déterminer le changement dans la distance  $dX$  entre les points matériels  $P$  et  $Q$  quand le corps déformé et le mouvement des points matériels aux nouveaux emplacements  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$ .

Les distances entre les points  $P$  et  $Q$  et les points  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$  sont données, respectivement, par

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= dX \cdot dX \\ (ds)^2 &= dx \cdot dx = (F \cdot dX) \cdot (F \cdot dX) = dX \cdot (F^T \cdot F) \cdot dX \\ &\equiv dX \cdot C \cdot dX \end{aligned} \quad \text{V.9}$$

où  $C$  est le tenseur de Cauchy-Green droit.

$$C = F^T \cdot F \quad \text{V.10}$$

Le changement dans les longueurs carrés est apparaît lorsque le corps est déformé de la configuration initiale à la configuration courante, il peut être exprimé relatif à la longueur originale comme :

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2dX \cdot E \cdot dX \quad \text{V.11}$$

où  $E$  est appelé le tenseur de déformation de Green-Lagrange ou simplement le tenseur de déformation de Green lequel peut être exprimé :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(F^T \cdot F - I) = \frac{1}{2}(C - I) \\ &= \frac{1}{2}[(\nabla_0 u)^T + (\nabla_0 u) + (\nabla_0 u)^T \cdot (\nabla_0 u)] \end{aligned} \quad \text{V.12}$$

Clairement, le tenseur de déformation de Green est symétrique. Aussi, le changement dans les longueurs carrées est nul si seulement  $E = 0$ .

Ou bien, le changement dans les longueurs carrées se produit comme le corps déformé initiale à la configuration courante peut être exprimé relatif à la longueur courante comme :

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2dx \cdot e \cdot dx \quad \text{V.13}$$

D'où  $e$  est appelé le tenseur de déformation de Almansi-Hamel ou simplement le tenseur de déformation d'Euler lequel peut être exprimé :

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}(I - F^{-T} \cdot F^{-1}) = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}[(\nabla u)^T + (\nabla u) - (\nabla u)^T \cdot (\nabla u)] \end{aligned} \quad \text{V.14}$$

Avec  $B = F \cdot F^T$  est le tenseur de déformation de Cauchy, son inverse est appelé le tenseur de Cauchy-Green gauche. Dans la forme des composantes Cartésiennes, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E &= E_{IJ} \hat{E}_I \hat{E}_J \\ e &= e_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \end{aligned} \quad \text{V.15}$$

Avec les composantes :

$$\begin{aligned} E_{IJ} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_m}{\partial X_I} \frac{\partial x_m}{\partial X_J} - \delta_{IJ} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right) \end{aligned} \quad \text{V.16}$$

$$\begin{aligned} e_{IJ} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \frac{\partial X_K}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad \text{V.17}$$

Dans la notation développée, les composants de tenseur de déformation de Green par exemple, sont donnés :

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\ E_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\ E_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\ E_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ E_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \\ E_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \end{aligned} \quad \text{V.18}$$

### V.2.2.c) Le tenseur de contraintes :

Les équations de mouvement ou d'équilibre doivent être dérivées pour la configuration déformée de la structure au temps  $t$ . Cependant, quand la géométrie de la configuration déformée n'est pas connue, les équations doivent être écrites à la configuration de référence connue. Alors, nous introduisons plusieurs mesures de contraintes créées lors de la transformation des volumes et des sections de la configuration déformée à la configuration non déformée [1-3]. En premier nous introduisons les contraintes vraies, c'est les contraintes dans la configuration déformée. Nous considérons un corps déformé à sa position courante. Si nous dénotons par  $df(\hat{n})$  la force sur une petite section  $\hat{n}da$  localisée

à la position  $x$ , le vecteur de contraintes peut être défini comme  $t(\hat{n}) = \frac{df}{da}$ . Le tenseur de

contraintes de Cauchy  $\sigma$  est défini par la force courante par la section de déformée unitaire:

$$df = tda = da \cdot \sigma, \text{ d'où } da = da\hat{n} \quad \text{V.19}$$

D'où la formule de Cauchy,  $t = \sigma \cdot \hat{n}$  est utilisée.

Pour les termes explicites des contraintes dans la configuration initiale non déformée la section  $dA$  exige un nouveau tenseur des contraintes  $P$ .

$$df = dA \cdot P, \text{ où } dA = dA \cdot \hat{N} \quad \text{V.20}$$

Où  $\hat{N}$  est la normale unitaire de la section non déformée  $dA$ . Le tenseur des contraintes  $P$  est appelé le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff N°1, et il donne la force courante par unité de section non déformée. Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff N°1 n'est pas symétrique.

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff N°2 notée  $S$ , lequel est utilisé dans la formulation Lagrangienne totale dans l'analyse non-linéaire géométrique. Par analogie, nous pouvons transformer la force  $df$  sur la section élémentaire déformée  $da$  à la force  $dF$  sur la section élémentaire non déformée  $dA$  (ne pas confondre entre la force  $dF$  et le tenseur de la déformation  $F$ ).

$$dF = F^{-1} \cdot df = F^{-1} \cdot (dA \cdot P) = dA \cdot P \cdot F^{-T} \equiv dA \cdot S \quad \text{V.21}$$

Donc, le tenseur des contraintes Piola-Kirchhoff N°2 donne la force courante transformée par la section unitaire non déformée. Le tenseur des contraintes Piola-Kirchhoff N°2 est symétrique quand le tenseur de contraintes de Cauchy est symétrique.

Dans résumé, nous avons les relations suivantes entre les différentes mesures des contraintes ( $J$  dénote le déterminant de  $F$ ):

$$\begin{aligned} P &= JF^{-1} \cdot \sigma = S \cdot F^T \\ \sigma &= \frac{1}{J} F \cdot P = \frac{1}{J} F \cdot S \cdot F^T \\ S &= JF^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T} = P \cdot F^{-T} \end{aligned} \quad \text{V.22}$$

#### V.2.2.d) Conjugué-énergétique des Contraintes et les déformations :

La formule de travail interne (énergie) fait en milieu continu à la configuration courante peut être exprimée comme :

$$W = \frac{1}{2} \int_v \sigma : dv \quad \text{V.23}$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et  $d$  est la partie symétrique de gradient du tenseur de vitesse.

$$d = \frac{1}{2} \left[ (\nabla v)^T + \nabla v \right], \quad v = \frac{dx}{dt} \quad \text{V.24}$$

La paire  $(\sigma, d)$  est dite le conjugué énergétique quand qu'elle produit (déformation) l'énergie de milieu déformable. Nous pouvons montrer que le tenseur des contraintes de Piola - Kirchhoff N°2  $S$  est un conjugué énergétique au tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\dot{E}$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_v S : \dot{E} dV \quad \text{V.25}$$

La démonstration ci-dessus exige l'usage de plusieurs identités [1-3], lesquelles sont présentées ensuite.

La première est une relation entre le tenseur gradient de déformation  $\dot{F}$  et  $\nabla_0 v$ . Nous avons :

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right)^T = \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right]^T = \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^T = (\nabla_0 v)^T, \quad \frac{dx}{dt} = v \quad \text{V.26}$$

Par suit, nous notons que :

$$\dot{F} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X} \right)^T = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X} \right)^T = L \cdot F, L \equiv \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)^T = \dot{F} \cdot F^{-1} \quad \text{V.27}$$

Avec L est le gradient de tenseur de la vitesse.

La dérivée du temps de tenseur de déformation Lagrangien,  $\dot{E}$ , est connue comme le tenseur du déformation matériel. Nous avons

$$\dot{E} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (F^T \cdot F - I) = \frac{1}{2} (\dot{F}^T \cdot F + F^T \cdot \dot{F}) \quad \text{V.28}$$

La partie symétrique du gradient de tenseur de la vitesse est en rapport avec le tenseur de la déformation :

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} (L^T + L) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\dot{F} \cdot F^{-1})^T + \dot{F} \cdot F^{-1} \right] = \frac{1}{2} (F^{-T} \cdot \dot{F}^T + \dot{F} \cdot F^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} F^{-T} \cdot (\dot{F}^T + F^T \cdot \dot{F} \cdot F^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} F^{-T} \cdot (\dot{F}^T \cdot F + F^T \cdot \dot{F}) \cdot F^{-1} \\ &= F^{-T} \cdot \dot{E} \cdot F^{-1} \end{aligned} \quad \text{V.29}$$

Revenons maintenant à l'Eq. (V.27), pour le taux de travail, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_v \sigma : ddv &= \frac{1}{2} \int_v \sigma : Ldv \quad (\text{Par symétrie de } \sigma \text{ et } d) \\ &= \frac{1}{2} \int_v J \sigma : (\dot{F} \cdot F^{-1}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_v J (\sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) : \left[ (\dot{F}_{pl} \hat{e}_p \hat{E}_l) \cdot ((F^{-1})_{jq} \hat{E}_j \hat{e}_q) \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_v J \sigma_{ij} \dot{F}_{jl} (F^{-1})_{li} dV = \frac{1}{2} \int_v J \sigma_{ji} \dot{F}_{jl} (F^{-1})_{li} dV \quad (\text{quand } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \int_v J \sigma_{ij} F_{il} (F^{-1})_{lj} dV \quad (\text{on renome } i \text{ par } j \text{ et } j \text{ par } i) \\ &= \frac{1}{2} \int_v J \left[ ((F^{-1})_{lq} \hat{E}_l \hat{e}_q) \cdot (\sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) \right] : (\dot{F}_{pl} \hat{e}_p \hat{E}_l) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_v (J F^{-1} \cdot \sigma) : \dot{F} dV = \frac{1}{2} \int_v P : \dot{F} dV \end{aligned} \quad \text{V.31}$$

Donc, le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff N°1 P est le travail conjugué du gradient de tenseur de déformations  $\dot{F}$ , de la même façon :

$$\frac{1}{2} \int_v \sigma : ddv \quad \text{V.32}$$

### V.2.3.b) Le tenseur de déformation de Green dans les différents Configurations :

Les composants Cartésiens du tenseur de déformation de Green-Lagrange dans les deux configurations  $C_1$  et  $C_2$  sont définis par :

$${}^1E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1 x_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) \quad \text{V.37}$$

$${}^2E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 x_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^2 x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) \quad \text{V.38}$$

Les composants de déformation dans Eqs. (V.37) et (V.38) peuvent être exprimés en termes de composants du déplacement  ${}^1u_i$  et  ${}^2u_i$ . En premier, Nous utilisons Eqs. (V.34) et (V.35), nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial^1 x_k}{\partial^0 x_i} = \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} + \delta_{ki}, \quad \frac{\partial^2 x_k}{\partial^0 x_i} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial^0 x_i} + \delta_{ki} \quad \text{V.39}$$

Nous notons  ${}^0x_i = X_i$ . Substituer dans Eqs. (V.37) et (V.38), nous obtenons

$${}^1E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1 u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1 u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad \text{V.40}$$

$${}^2E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad \text{V.41}$$

- *Le tenseur de déformation incrémental de Green-Lagrange :*

Il est utile dans la suite de définir les composants de déformation incrémental  ${}^0\varepsilon_{ij}$ , c'est, les déformations induites dans le passage de la configuration  $C_1$  à la configuration  $C_2$ . Le tenseur de déformation incrémental de Green-Lagrange est défini comme :

$$\begin{aligned} {}^2_0\varepsilon_{ij} d^0x_i d^0x_j &= ({}^2ds)^2 - ({}^1ds)^2 \\ &= [({}^2ds)^2 - ({}^0ds)^2] - [({}^1ds)^2 - ({}^0ds)^2] \\ &= 2 \left( {}^2_0E_{ij} - {}^1_0E_{ij} \right) d^0x_i d^0x_j \\ &\equiv 2 \left( {}^0e_{ij} + {}^0\eta_{ij} \right) d^0x_i d^0x_j \end{aligned} \quad \text{V.42}$$

où  ${}^0e_{ij}$  sont les composants linéaires du tenseur incrémental de déformation,

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad \text{V.43}$$

et  ${}^0\eta_{ij}$  sont les composants non-linéaires

$${}^0\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} \quad \text{V.44}$$

La linéarité de  ${}^0e_{ij}$  et la non-linéarité de  ${}^0\eta_{ij}$  sont comprises pour être des termes de composants incrémentaux de déplacement  $u_i$ .

Pour l'analyse linéaire, quand les déformations sont infinitésimales, seulement deux configurations  $C_1 = C_0$  et  $C_2$  sont impliqués,  ${}^1u_i = 0$ ,  ${}^2u_i = u_i$  et  ${}^1u_i = 0$  sont petits assez pour négliger leurs produits. Par conséquent, les composants linéaires du tenseur incrémental de

déformation  ${}_0e_{ij}$  deviennent comme des composants du tenseur de déformation de Green-Lagrange et les deux se réduisent aux composants de déformation infinitésimaux :

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^0 x_i} \right) \quad \text{V.45}$$

- *Le tenseur de déformation actualisé de Green-Lagrange :*

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange  ${}^2_0E_{ij}$  introduit plus tôt est utile dans la formulation Lagrangienne totale. Avec la formulation Lagrangienne actualisée, nous définissons les composants de tenseur de déformation de Green-Lagrange en ce qui concerne la configuration  $C_1$ . Le tenseur de déformation noté comme  ${}^2_1\varepsilon_{ij}$  est appelé *le tenseur de déformation de Green-Lagrange actualisé*. Il est défini par :

$$2({}^2_1\varepsilon_{ij})d^1x_id^1x_j = ({}^2ds)^2 - ({}^1ds)^2 \quad \text{V.46}$$

Utilisant (note que tout sont des dérivés de premier ordre)

$$d^2x_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial^1 x_j} d^1x_j, \quad ({}^2ds)^2 = \frac{\partial^2 x_k}{\partial^1 x_i} \frac{\partial^2 x_k}{\partial^1 x_j} d^1x_id^1x_j \quad \text{V.47}$$

$$u_i = {}^2x_i - {}^1x_i, \quad \frac{\partial^2 x_k}{\partial^1 x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_i} + \delta_{ki} \quad \text{V.48}$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} {}^2_1\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 x_k}{\partial^1 x_i} \frac{\partial^2 x_k}{\partial^1 x_j} - \delta_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial^1 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^1 x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_j} \right) \\ &\equiv {}_1e_{ij} + {}_1\eta_{ij} \end{aligned} \quad \text{V.49}$$

D'où

$${}_1e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial^1 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^1 x_i} \right), \quad {}_1\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_j} \right) \quad \text{V.50}$$

Noté que la définition de  ${}^2_1\varepsilon_{ij}$  implique les composants du vecteur incrémental de déplacement  $u$ . Par conséquent,  ${}^2_1\varepsilon_{ij}$  sont aussi appelés les composants de vecteur incrémental de déformation de Green-Lagrange actualisé.

#### V.2.4) La formulation lagrangienne totale et actualisée :

##### V.2.4.a) Principe des déplacements virtuels :

Les équations de la description Lagrangienne incrémentale du mouvement peut être dérivée des principes des travaux virtuels (c.-à-d. déplacements virtuels, forces virtuelles ou déplacements et forces mixtes virtuels). Notre objectif ultime est de développer le modèle d'élément fini des équations gouvernant d'un corps, nous ne dériverons pas réellement les équations différentielles de mouvement mais nous utilisons l'état du travail virtuelles pour développer les modèles d'élément fini.

avec  $\delta({}^1_0E_{ij}) = 0$  car elle n'est pas une fonction des déplacements inconnus.

Les déformations virtuelles sont données par :

$$\delta({}_0e_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad \text{V.57}$$

$$\delta({}_0\eta_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial^0 x_j} \right)$$

Substituant Eqs. (V.56) pour  $\delta({}_0^2E_{ij})$  et Eq. (V.54) pour  ${}_0^2S_{ij}$  dans Eq. (V.57), nous arrivons à l'expression :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{0V} {}_0^2S_{ij} \delta({}_0^2E_{ij}) d^0V - \delta({}_0^2R) \\ &= \int_{0V} ({}_0^1S_{ij} + {}_0S_{ij}) \delta({}_0^2\varepsilon_{ij}) d^0V - \delta({}_0^2R) \\ &= \int_{0V} \left\{ {}_0S_{ij} \delta({}_0\varepsilon_{ij}) + {}_0^1S_{ij} [\delta({}_0e_{ij}) + \delta({}_0\eta_{ij})] \right\} d^0V - \delta({}_0^2R) \\ &= \int_{0V} {}_0S_{ij} \delta({}_0\varepsilon_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V + \delta({}_0^1R) - \delta({}_0^2R) \end{aligned} \quad \text{V.58}$$

D'où  $\delta({}_0^1R)$  est l'énergie virtuelle interne (dans le passage des forces internes actuelle à travers les déplacements virtuels) a entreposée dans le corps à la configuration  $C_1$

$$\delta({}_0^1R) = \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0e_{ij}) d^0V \quad \text{V.59}$$

Quand le corps est en équilibre à la configuration  $C_1$ , par le principe des travaux virtuels appliqués à la configuration  $C_1$ , nous avons

$$0 = \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0e_{ij}) d^0V - \int_{0V} f_i \delta u_i d^0V - \int_{0S} t_i \delta u_i d^0S \quad \text{V.60}$$

Et par conséquent

$$\delta({}_0^1R) = \int_{0V} f_i \delta u_i d^0V + \int_{0S} t_i \delta u_i d^0S \quad \text{V.61}$$

L'équation (V.60) forme la base pour le modèle élément fini. Nous avons besoin seulement de remplacer  ${}_0^1S_{ij}$  en termes des déformations et finalement les incréments de déplacement utilisons la loi du comportement. Le premier terme d'Eq. (V.60) représente le changement dans l'énergie de déformation virtuel due aux déplacements incrémentaux virtuels  $u_i$  entre les configurations  $C_1$  et  $C_2$ . Le deuxième terme représente le travail virtuel des forces dû aux contraintes initiales  ${}_0^1S_{ij}$ . Les derniers deux termes dénotent le changement dans le travail virtuel des forces de volume et de surface appliquées dans le passage de  $C_1$  à  $C_2$ . C'est essentiellement dû aux changements géométriques entre les deux configurations. L'équation (V.60) représente l'état de travail virtuel des incréments de déformations entre les configurations  $C_1$  et  $C_2$ .

Vers la construction d'un modèle élément fini de déplacement d'Eq. (V.60), nous invoquons la loi de comportement (V.64) exprimer  ${}_0S_{ij}$  en termes des composants incrémentaux de déformation  ${}_0\varepsilon_{ij}$ . L'équation (9.5.11) prend la forme :

$$\int_{0V} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta({}_0\varepsilon_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V = \delta({}_0^2R) - \delta({}_0^1R) \quad \text{V.62}$$

L'équation (V.62) est non linéaire en incréments de déplacements. Nous supposons que les déplacements  $u_i$  sont petits afin que nous possédions des approximations suivante:

$${}_0S_{ij} \approx {}_0C_{ijkl} e_{kl} \quad \text{et} \quad \delta({}_0\varepsilon_{ij}) \approx \delta({}_0e_{ij})$$

Alors Eq. (V.62) peut être simplifié à :

$$\int_{0V} C_{ijkl} e_{kl} \delta(e_{ij}) d^0V + \int_{0V} S_{ij} \delta(\eta_{ij}) d^0V = \delta({}_0^2R) - \delta({}_0^1R) \quad V.63$$

L'équation (V.63) est la forme faible pour le développement de modèle élément fini basé sur la formulation Lagrangienne totale. Les composants de contraintes  ${}_0^1S_{ij}$  sont évalués utiliser la loi du comportement linéaire:

$${}_0^1S_{ij} = {}_0C_{ijkl} {}_0^1E_{kl} \quad V.64$$

D'où  ${}_0^1E_{kl}$  sont les composants du tenseur de déformations de Green - Lagrange définis dans Eq(V.18).

Un résumé de toutes les équations pertinentes de la formulation Lagrangienne totale est présenté dans le **Tableau -5.1-**.

#### V.2.4.c) La formulation Lagrangienne actualisée :

Dans la formulation Lagrangienne actualisée, toutes les quantités sont faites la référence à la dernière configuration connue, notamment  $C_1$ . D'où, l'état du travail virtuel dans Eq. (V.60) doit être refondu en termes des quantités faites la référence à  $C_1$ . Nous utilisons les identités :

$$\begin{aligned} \int_{2V} \sigma_{ij} \delta({}_2e_{ij}) d^2V &= \int_{1V} {}_1^2S_{ij} \delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) d^1V \\ \int_{2V} f_i \delta u_i d^2V &= \int_{1V} f_i \delta u_i d^1V \\ \int_{2S} t_i \delta u_i d^2S &= \int_{1S} t_i \delta u_i d^1S \end{aligned} \quad V.65$$

Utilisons l'Eqs. (V.65), l'Eq. (V.60) peut être exprimé comme :

$$\int_{1V} {}_1^2S_{ij} \delta({}_1^2E_{ij}) d^1V - \delta({}_1^2R) = 0 \quad V.66$$

D'où

$$\delta({}_1^2R) = \int_{1V} f_i \delta u_i d^1V + \int_{1S} t_i \delta u_i d^1S \quad V.67$$

Les déplacements virtuels sont donnés par  $\delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) = \delta({}_1e_{ij}) + \delta({}_1\eta_{ij})$

Alors :

$$\begin{aligned} \delta({}_1e_{ij}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \\ \delta({}_1\eta_{ij}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad V.68$$

Maintenant nous utilisons les Eqs. (V.68) et (V.67), nous pouvons écrire l'Eq. (V.66) comme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{1V} {}_1^2S_{ij} \delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) d^1V - \delta({}_1^2R) \\ &= \int_{1V} ({}_1^1\sigma_{ij} + {}_1^2S_{ij}) \delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) d^1V - \delta({}_1^2R) \\ &= \int_{1V} \left\{ {}_1^2S_{ij} \delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) + {}_1^1\sigma_{ij} [\delta({}_1e_{ij}) + \delta({}_1\eta_{ij})] \right\} d^1V - \delta({}_1^2R) \\ &= \int_{1V} {}_1^2S_{ij} \delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) d^1V + \int_{1V} {}_1^1\sigma_{ij} \delta({}_1\eta_{ij}) d^1V + \delta({}_1^1R) - \delta({}_1^2R) \end{aligned} \quad V.69$$

D'où  $\delta({}_1^1R)$  est l'énergie virtuelle interne a entreposée dans le corps à la configuration  $C_1$

$$\delta({}_1^1R) = \int_{V_1} {}^1\sigma_{ij} \delta({}_1e_{ij}) d^1V \quad V.70$$

Quand le corps est en équilibre à la configuration  $C_1$ , par le principe des travaux virtuels appliqués à la limite de la configuration  $C_1$ , nous avons

$$\delta({}_1^1R) = \int_{V_1} {}^1f_i \delta u_i d^1V + \int_{S_1} {}^1t_i \delta u_i d^1S \quad V.71$$

Ensuite, nous utilisons la loi de comportement (V.74)  ${}_1S_{ij}$  exprimé en termes de composants incrémentaux de déformations  ${}^2\varepsilon_{ij}$ . Donc l'équation (V.69) prend la forme :

$$\int_{V_1} {}^1C_{ijkl} {}^2\varepsilon_{kl} \delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) d^1V + \int_{V_1} {}^1\sigma_{ij} \delta({}_1\eta_{ij}) d^1V = \delta({}_1^2R) - \int_{V_1} {}^1\sigma_{ij} \delta({}_1e_{ij}) d^1V \quad V.72$$

Nous supposons que les déplacements  $u_i$  sont petits afin que nous possédions des approximations suivantes:

$${}_1S_{ij} \approx {}^1C_{ijkl} e_{kl} \quad \text{et} \quad \delta({}_1^2\varepsilon_{ij}) \approx \delta({}_1e_{ij})$$

Alors L'Eq. (V.72) prend la forme

$$\int_{V_1} {}^1C_{ijkl} e_{kl} \delta({}_1e_{ij}) d^1V + \int_{V_1} {}^1\sigma_{ij} \delta({}_1\eta_{ij}) d^1V = \delta({}_1^2R) - \int_{V_1} {}^1\sigma_{ij} \delta({}_1e_{ij}) d^1V \quad V.73$$

L'équation (V.73) est la forme faible pour le développement d'un modèle élément fini basé sur la formulation Lagrangienne actualisée. Les contraintes de Cauchy  ${}^1\sigma_{ij}$  sont évaluées d'utiliser la loi du comportement linéaire:

$${}^1\sigma_{ij} = {}^1C_{ijkl} {}^1\varepsilon_{kl} \quad V.74$$

Un résumé de toutes les équations pertinentes de la formulation Lagrangienne totale est présenté dans le **Tableau -5.2-**.

### V.3) Formulation non-linéaire des plaques composites laminées :

#### V.3.1) Définitions :

Généralement, les rotations restent petits par rapport les déformations en-plan de la plaque qui deviennent aussi grands. Le développement des équations pour les petites rotations dans lesquelles en modéliser la flexion des plaques utilisant les formulations ont été discutées dans le Chapitre IV , nous généralisons le champ de déplacement donné dans l'Eq. (V.75) inclure les effets de déplacements en-plan . Par conséquence, nous écrivons selon la théorie de Mindlin le champ de déplacement :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \\ w(X,Y) \end{Bmatrix} - Z \begin{Bmatrix} \theta_x(X,Y) \\ \theta_y(X,Y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{V.75}$$

D'où  $\theta$  sont les petites rotations définies d'après **Fig. 3.7** et X, Y et Z dénotent les positions dans la configuration de la référence de la plaque. Utiliser ceux-ci pour calculer les déformations de Green-Lagrange données par Eq. (V.18) nous pouvons écrire :

$$\begin{Bmatrix} E_{XX} \\ E_{YY} \\ 2E_{XY} \\ 2E_{XZ} \\ 2E_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \\ -\theta_x + w_{,x} \\ -\theta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} - Z \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{V.76}$$

Dans ces expressions nous avons utilisé les résultats classiques qui ignorent tout les termes en carrés impliquer  $\theta$  et les dérivées de  $u$  et  $v$ , aussi bien que les termes du second degré de  $z$ . Généralement, la position des coordonnées X et Y de la référence en-plan qui changent très petit pendant la déformation et nous pouvons les remplacer par les coordonnées courants  $x$  et  $y$  de même qu'est fait implicitement pour le cas des petits déformations considérés dans le Chapitre IV. Donc, nous pouvons représenter les déformations de Green-Lagrange quant aux déformations de la surface moyenne des déformations et les changements dans la courbure comme :

$$E = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} - Z \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} = E_m - ZE_f \quad \text{V.77}$$

Où  $E_m$  dénote les déformations de la membrane et  $E_f$  le changement dans les courbures à cause de la flexion. En plus, nous avons les déformations transversales de cisaillement données par :

$$E_c = \begin{Bmatrix} -\theta_x + w_{,x} \\ -\theta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{V.78}$$

Les variations des déformations sont données par :

$$\begin{aligned} \delta E_m &= \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w_{,x} \\ \delta w_{,y} \end{Bmatrix} \\ \delta E_f &= \begin{Bmatrix} \delta \theta_{x,x} \\ \delta \theta_{y,y} \\ \delta \theta_{x,y} + \delta \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \text{V.79} \end{aligned}$$

**Bibliographie**

- [1] Bathe, K.J. *“Finite element procedures”*, Prentice Hall . 1996.
- [2] Reddy, J.N. *“An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis”*, Oxford University press. 2004.
- [3] Crisfield, M.A. *“Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol.1: Essentials”*. John Willy & Sons. 2000.
- [4] Crisfield, M.A. *“Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol.2: Advanced Topics”*. John Willy & Sons. 2000.
- [5] Zienkiewicz, O.C & Taylor R.L. *« The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics »* Sixth edition . Elsevier. 2005.
- [6] Bonet, J., Wood R.D. *“Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis”*. Cambridge University press. 1997.
- [7] Djeghaba K, *« Contribution à l'analyse non linéaire géométrique des coques minces en théorie de Marguerre »*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, 1990.

# Chapitre VI

## Modélisation numérique

### III: Méthodes de résolution des systèmes nonlinéaires

#### VI.1) Introduction :

Le développement sans cesse grandissant de l'analyse non linéaire géométrique ou matérielle des structures par la méthode des éléments finis a entraîné automatiquement un développement des algorithmes et techniques de résolution de systèmes non linéaires. En effet, l'étude pré ou post-flambement de certaines structures par exemple, est difficilement réalisable sans l'aide de méthodes de résolution adéquates. Ainsi un modèle mécanique d'analyse non linéaire en éléments finis n'est performant que s'il est inclus dans un processus de résolution basé sur un algorithme robuste fiable, et efficace. Cette robustesse doit être garantie par la capacité de cet algorithme à traiter différents types de comportements non linéaires. Il s'agit de décrire tout le chemin d'équilibre (courbe charge-déplacement) sans faillir, particulièrement au niveau d'éventuels points limites. Sa fiabilité et son efficacité se jugent par la qualité de la solution trouvée et par le temps de calcul raisonnable qu'elle requiert. C'est principalement dans ce but que plusieurs algorithmes et techniques de résolutions ont été développés.

Aussi, il s'avère, à travers l'innombrable littérature concernant ce sujet qu'il est difficile de développer un algorithme de résolution capable de franchir toutes les situations tant les types de comportements de structures sont divers. La solution étant évidemment de disposer de plusieurs algorithmes utilisables indépendamment dans un même processus de calcul. En fait, cette recherche d'algorithmes robustes est guidée essentiellement par l'idée de rendre le processus de résolution automatique ou au moins avec une intervention réduite de la part de l'utilisateur.

Cependant la diversité ainsi que la complexité de certains comportements de structures, nécessitent toujours une intervention de la part de l'utilisateur. Ainsi, l'utilisation de ces processus automatiques comme « boîte noire » reste très compliqué à réaliser. Pour notre part, si ce dernier aspect ne représente pas notre but principal, il nous est par contre primordial de disposer d'une méthode de résolution performant pour tester les modèles développer précédemment. Nous nous proposons ainsi, de construire une stratégie de résolution en nous basant sur des algorithmes existants actuellement et considérés, par de nombreux auteurs comme très robustes

#### VI.2) Méthodes de résolution :

Les méthodes de résolution que nous présentons maintenant sont basées sur des processus incrémentaux d'une manière générale. Elles consistent à appliquer le niveau de charge totale par incréments successifs, et à trouver à chaque incrément la réponse de la structure. Cette réponse est obtenue après linéarisation sur chaque incrément des équations d'équilibres. Ces méthodes incrémentales sont de deux sortes

1. Méthodes incrémentales pures
2. Méthodes incrémentales itératives

### VI.2.1) Méthode incrémentale pure :

Dans cette méthode (**Fig 6.1**), un incrément de charge est imposé, l'accroissement de déplacement correspondant, est obtenu à l'aide d'une matrice de rigidité tangente. L'équilibre n'est pas corrigé dans ce cas, ce qui rend cette méthode très peu utilisée. En effet, à moins de l'utilisation d'incrémentes très petits la solution calculée peut facilement, au fur et à mesure de l'incrément, s'éloigner de la solution recherchée.

### VI.2.2) méthode incrémental itérative :

Cette méthode utilise le même processus incrémental que la méthode précédente d'une part et d'autre part, une correction de l'équilibre est introduite sur chaque incrément en utilisant un processus itératif. Cette correction de l'équilibre peut se faire de plusieurs manières, définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales itératives. Ces méthodes se distinguent principalement les unes des autres, par le type de matrice de rigidité utilisée pour la correction. La plus connue, et certainement la plus utilisée de ces méthodes est celle de Newton-Raphson. Nous en distinguons deux cas

#### VI.2.2.a) Méthode de correction de Newton-Raphson :

Cette méthode utilise pour la correction de l'équilibre, une matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération (**Fig 6.2-a**). Son aspect très rigoureux en fait une méthode très sûre conduisant généralement à une convergence très rapide. Cependant, le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente à chaque itération nécessitant un temps de calcul souvent élevé, constituât son inconvénient principal.

#### VI.2.2.b) Méthode de correction de Newton-Raphson modifiée :

Elle est identique à la méthode précédente, mais utilise pour corriger l'équilibre la matrice de rigidité calculée au début de chaque incrément et gardée constante pour toutes les itérations (**Fig 6.2-b**). La convergence y est moins rapide que dans la méthode précédente, cependant, elle présente l'avantage de dispenser, à chaque itération du calcul de la matrice de rigidité tangente, ce qui conduit à un gain sensible sur le temps de calcul.

- la méthode de Newton-Raphson que nous venons de présenter associée à un processus incrémental, constitue actuellement le moyen le plus utilisé et le plus fiable pour la résolution de systèmes non linéaires. Cependant, la nécessité de réduire de plus en plus le temps de calcul a conduit au développement de méthodes alternatives à celle de Newton-Raphson et moins coûteuses en temps de calcul. De manière générale, il s'agit pour ces méthodes, soit d'éviter le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente, soit de le remplacer par une approximation, simple ne nécessitant pas un temps de calcul important. Dans la première solution nous pouvons éviter le calcul de la matrice de rigidité tangente en la remplaçant par celle initiale ou sécante. Le calcul de la matrice de rigidité ne se fait qu'une seule fois dans ces cas, et conduit à une diminution importante du temps de calcul. Cette méthode reste néanmoins très limitée dans son utilisation car elle n'est significative que dans des cas à une faible non linéarité où quand on est en présence de non linéarité matérielle.

Une autre manière d'agir consiste à actualiser la matrice de rigidité tangente pour quelques incréments. C'est le cas de la méthode de Newton-Raphson modifiée qui constitue déjà une approche un peu plus rigoureuse que la précédente. Le problème de la lenteur de convergence commun aux deux approches, peut être solutionné en les couplant avec des méthodes d'accélération de convergence du type "Line-search" par exemple. Dans la seconde solution, il s'agit de remplacer le calcul coûteux de l'actualisation de la matrice de rigidité par une approximation simple et économique. Plusieurs méthodes ont été développées dans ce cas, et parmi les plus importantes nous citons la méthode de gradient conjugué qui est souvent combinée avec celle de Newton-Raphson modifiée et la méthode dite "quasi-Newton". Cette dernière est la plus utilisée et sert de base à d'autres méthodes dont la plus connue et celle dite de B.F.G.S. (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

Il est à noter enfin que toutes ces méthodes ne sont pas développées dans ce travail. En effet notre ambition n'est pas axée spécialement sur la recherche d'une méthode de résolution, mais de disposer d'une méthode fiable afin de tester les performances de deux éléments développés. Dans ce cas la méthode de Newton-Raphson standard, en alliant fiabilité et efficacité, répond largement à cette demande. Ainsi, nous développons dans ce

qui suit un algorithme de résolution en nous basant sur cette dernière méthode que nous appellerons par la suite simplement : Méthode de Newton-Raphson.

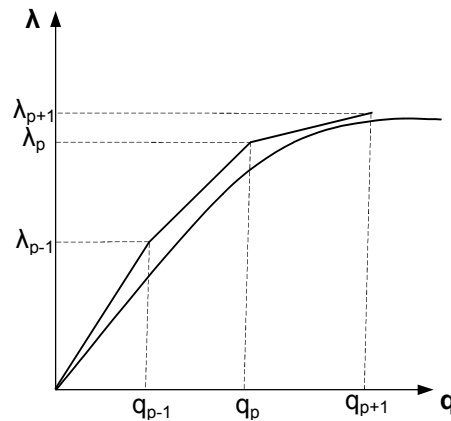


Figure 6.1: Représentation unidimensionnelle de la méthode incrémentale pure

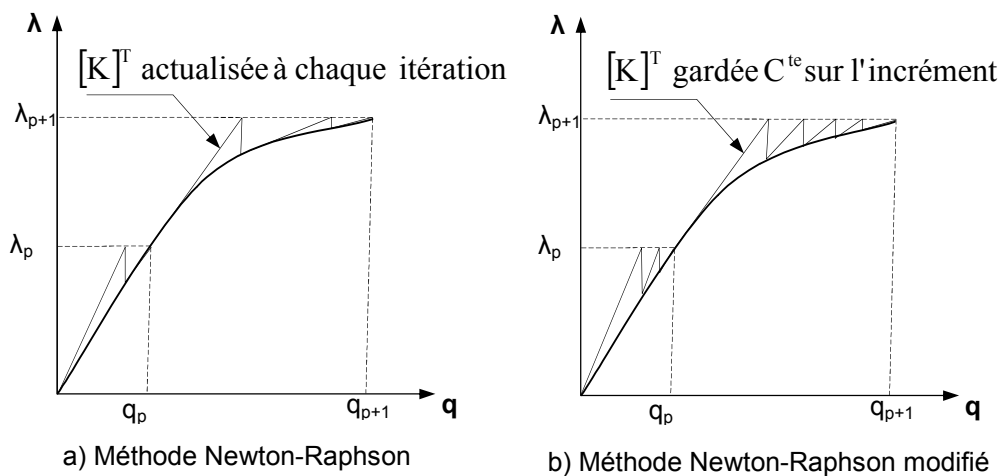


Figure 6.2 : Représentation unidimensionnelle de la méthode Incrémentales-itératives newton-Raphson

### VI.3) Stratégie de Résolution (Techniques de Pilotage)

Le but recherché consiste à trouver la réponse complète d'une structure sollicitée, et de décrire ainsi tout le chemin d'équilibre (toute la courbe charge-déplacement). La résolution utilisée étant incrémentale, il s'agit donc d'imposer un paramètre incrémentale (incrément de charge, incrément de déplacement, ...), et de calculer l'autre par une résolution linéaire en utilisant une raideur tangente. Ce calcul est répété autant de fois qu'il est nécessaire (processus itératif) jusqu'à atteindre la solution la plus proche possible de celle recherchée. Cependant décrire toute la courbe charge-déplacement n'est pas toujours possible avec les méthodes classiques de résolution. En effet, le comportement de certaines structures géométriques non linéaires est souvent le siège d'équilibres instables donnant naissance à des points limites en charge ou en déplacement (**Fig 6.3**). Il s'agit donc d'utiliser des stratégies de résolution, qui, associées aux méthodes incrémentales-itératives citées, permettent de suivre tout le chemin d'équilibre et de passer d'éventuels points limites. Les différentes stratégies utilisées actuellement se différencient les unes des autres par la manière avec laquelle est imposée le paramètre incrémental choisi. Ces stratégies sont généralement appelées techniques de pilotages, et nous dirons par exemple pour le cas où le paramètre incrémental est la charge : pilotage ou contrôle en charge imposée.

Avant de développer cette technique, une présentation de la notation utilisée ainsi qu'une définition détaillée de la position du problème est nécessaire.

Notation :

Afin d'éviter toute confusion entre les grandeurs relatives à un incrément et celles relatives à une itération, nous adoptons la notation suivante :

*Procédure incrémentale :*

C'est le passage d'un état connu noté (p) à un autre état à chercher noté (p+1). Nous notons une grandeur G passant de l'incrément (p) à l'incrément (p+1) par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Incrément (p)} & & \text{Incrément (p+1)} \\ G_p & & G_{p+1} \end{array}$$

*Procédure itérative :*

La grandeur G est notée à l'itération (i) et à l'itération (i+1) par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Itération (i)} & & \text{Itération (i+1)} \\ G^{(i)} & & G^{(i+1)} \end{array}$$

Par exemple, nous notons la grandeur G relative à l'incrément (p) et à l'itération (i) par :

$$G_p^{(i)}$$

Une grandeur relative à une solution convergée est notée simplement par rapport à l'incrément correspondant :

$$G_p$$

Si la grandeur G est un vecteur  $\{G\}$ , sa k<sup>ème</sup> composante est notée

$$(G)_k$$

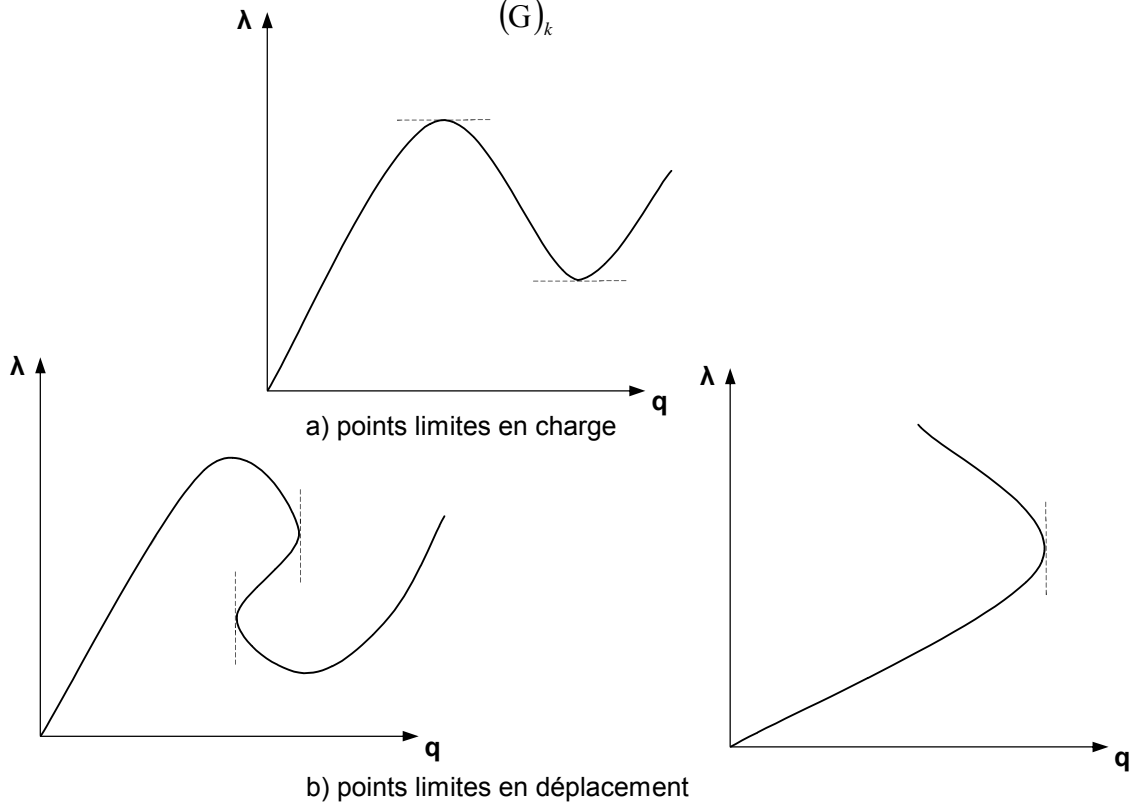


Figure 6.3 : Représentation unidimensionnelle des types de points limites

VI.3.1) Equation d'équilibre et position du problème :

L'équation gouvernant l'équilibre d'une structure à comportement non-linéaire et discrétisée par éléments finis s'écrit :

$$\{P_{\text{ext}}(\{q\}, \lambda)\} - \{Q(\{q\})\} = \{0\} \tag{VI.1}$$

$P_{\text{ext}}(\{q\}, \lambda)$  : représente le vecteur des sollicitations extérieures.

$\{q\}$  : vecteur de déplacement .

$\lambda$  : paramètre de charge, en considérant un seul paramètre de charge et un chargement indépendant de l'état de déplacement nous écrivons :

$$\{P_{ext}(\{q\}, \lambda)\} = \lambda \{P_{ext}\} \quad \text{VI.2}$$

$Q(\{q\})$  : vecteur des forces internes .

- *Position du problème :*

L'équation (VI.1) représente un système à (n) équations non-linéaires en  $\{q\}$ . La résolution consiste en la détermination de (n+1) inconnues qui sont les (n) composantes du vecteur déplacement  $\{q\}$  , et le paramètre scalaire  $\lambda$  . Ces inconnues sont déterminées en satisfaisant à l'équation (VI.1) et à une équation supplémentaire liant le vecteur  $\{q\}$  et le paramètre  $\lambda$  telle que :

$$F(\{q\}, \lambda) = 0 \quad \text{VI.3}$$

Cette équation supplémentaire définit le paramètre incrémental à imposer. Nous l'explicitons lors de présentation de chaque technique de pilotage. Nous développons au préalable, la procédure générale de résolution de Newton-Raphson dans laquelle va être inclus ces techniques de pilotages.

- *Procédure générale de résolution de Newton-Raphson :*

Soit une solution non convergée à l'incrément (p) et à l'itération (i) définie par le couple charge-déplacement suivant :

$$(\{q_p^{(i)}\}, \lambda_p^{(i)}) \quad \text{VI.4}$$

Cette solution non convergée provoque un déséquilibre entre les forces extérieures et celles intérieures. On écrit dans ce cas, l'équation (VI.1) dans cette position non équilibrée sous la forme suivante :

$$\lambda_p^{(i)} \cdot \{P_{ext}\} - (Q_p^{(i)}(\{q_p^{(i)}\})) = \{R_p^{(i)}\} \quad \text{VI.5}$$

Où  $\{R_p^{(i)}\}$  : représente le vecteur des forces résiduelles de déséquilibre (ou résidu).

Le déséquilibre du système défini par la relation (VI.5) peut être éliminé si la solution (VI.4) est corrigée. Le processus de Newton-Raphson nous permet de corriger la solution (VI.4) par une solution à l'itération (i+1) et à l'incrément (p) telle que :

$$\begin{cases} \{q_p^{(i+1)}\} = \{q_p^{(i)}\} + \{\Delta q_p^{(i)}\} \\ \lambda_p^{(i+1)} = \lambda_p^{(i)} + \Delta \lambda_p^{(i)} \end{cases} \quad \text{VI.6}$$

Le couple solution correctif  $\{q_p^{(i+1)}\}$  et  $\lambda_p^{(i+1)}$  est obtenue après résolution du système :

$$[K_p^{T(i)}] \{\Delta q_p^{(i)}\} = \Delta \lambda_p^{(i)} \{P_{ext}\} + \{R_p^{(i)}\} \quad \text{VI.7}$$

$$F(\{q_{p+1}\}, \lambda_{p+1}) = 0 \quad \text{VI.8}$$

La relation (VI.7) représente l'écriture linéarisée de l'équilibre en éléments finis à l'incrément (p) avec

$[K_p^{T(i)}]$  : La matrice de rigidité tangente définie à l'incrément (p) et à l'itération (i)

La relation (VI.8) définit le paramètre incrémental à imposer.

Ainsi, si la solution (VI.6) corrigée par la résolution du système (VI.7) et (VI.8), provoque toujours un déséquilibre, le processus de correction sera répété autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à obtention d'une solution convergée. Cette procédure est générale pour les trois techniques de résolution que nous nous proposons de développer. La différence entre l'une et l'autre de ces techniques réside dans la définition de la fonction  $F$  .

**VI.3.2) Technique de pilotage en charge imposée :****VI.3.2.a) Définition de la fonction  $F$  en charge imposée :**

Soit la solution connue à l'incrément ( $p$ ). La fonction  $F$  est définie en charge imposée par :

$$F(\{q\}, \lambda) = \lambda_{p+1} - \bar{\lambda} = 0 \quad \text{VI.9}$$

Cela revient à fixer un paramètre de charge :  $\bar{\lambda}$  pour l'incrément ( $p+1$ ) tel que :

$$\lambda_{p+1} = \bar{\lambda}$$

Il s'agit ensuite de trouver les ( $n$ ) composantes de  $\{q_{p+1}\}$  satisfaisant à l'équation (VI.8) pour la valeur imposée  $\lambda_{p+1}$  du paramètre de charge (**Fig 6.4.a**).

Cette technique est très simple à développer. Elle permet de suivre toute la courbe charge-déplacement tant qu'un point limite en charge n'est pas rencontré (**Fig 6.4.a**). Pour des déplacements modérés nous peut dans certains cas suivre, tout de suite après le point limite, une branche stable de la courbe. La partie instable n'est pas détectée dans cas (**Fig 6.4.b**) . Cependant, cette technique conduite souvent, au niveau des points limites, à une divergence. Il est préférable à ce moment là, de changer de paramètres de contrôle .

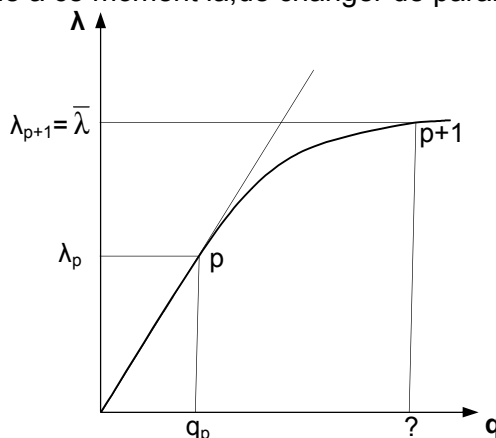


Figure 6.4.a : Pilotage en charge imposée

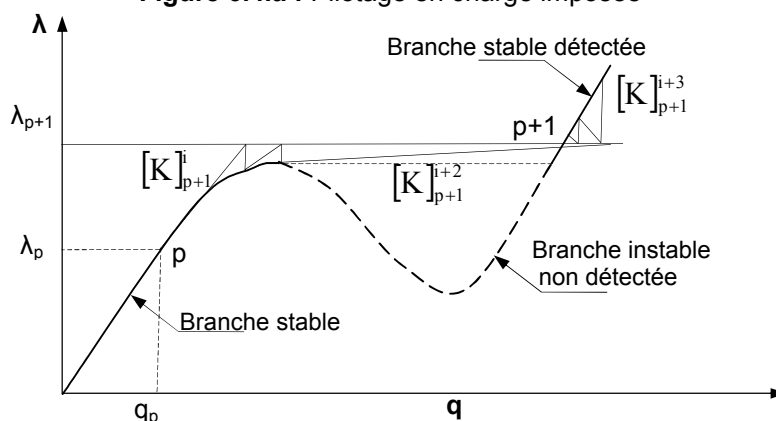


Figure 6.4.b : Exemple de saut sur une branche stable en charge imposée

**VI.3.2.b) Algorithme de résolution de Newton-Raphson avec pilotage en charge imposée :**

Soit une solution convergée à l'incrément ( $p$ ) :

$$\{q_p\}, \lambda_p \quad \text{VI.10}$$

à l'incrément ( $p+1$ ), nous impose un incrément de charge tel que :

$$F(\{q_{p+1}\}, \lambda_{p+1}) = \lambda_{p+1} - \bar{\lambda}$$

$$\lambda_{p+1} = \bar{\lambda} \quad \text{VI.11}$$

à l'itération  $i=1$  nous construisons la matrice de rigidité tangente :

$$[K_{p+1}^{T(1)}] \quad \text{VI.12}$$

Nous résolvons :

$$[K_{p+1}^{T(1)}] \{\Delta q_{p+1}^{(1)}\} = (\bar{\lambda} - \lambda_p) \{P_{\text{ext}}\} \quad \text{VI.13}$$

La solution à l'itération  $i=1$  est :

$$\begin{cases} \{q_{p+1}^{(1)}\} = \{q_p\} + \{\Delta q_{p+1}^{(1)}\} \\ \lambda_{p+1}^{(1)} = \bar{\lambda} \end{cases} \quad \text{VI.14}$$

à l'itération  $i \geq 2$

nous actualisons la matrice de rigidité ( cas de la correction de Newton-Raphson)

$$[K_{p+1}^{T(i)}]$$

Le déplacement  $\{q_{p+1}^{(i-1)}\}$  permet de calculer les forces internes :

$$\{Q_{p+1}^{(i)}\} = \{Q_{p+1}^{(i-1)}\}$$

-Nous calculons ensuite le déséquilibre créé (résidu) :

$$\{R_{p+1}^{(i)}\} = \bar{\lambda} \{P_{\text{ext}}\} - \{Q_{p+1}^{(i)}\} \quad \text{VI.15}$$

Nous résolvons :

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} = \Delta \lambda_{p+1}^{(i)} \{P_{\text{ext}}\} + \{R_{p+1}^{(i)}\} \quad \text{VI.16}$$

Dans le cas de charge imposée le paramètre de charge est constant sur l'incrément :

$$\lambda = C^{\text{te}}, \Delta \lambda = 0$$

La résolution se réduit à :

$$[K_{p+1}^{T(i)}] \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} = \{R_{p+1}^{(i)}\}$$

Ainsi à l'itération (i) la solution est :

$$\begin{cases} \{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_{p+1}^{(i-1)}\} + \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} \\ \lambda_{p+1}^{(i)} = \bar{\lambda} \end{cases} \quad \text{VI.17}$$

Ce résultat constitue une première solution approchée. Si cette solution est convergée, nous passons à l'incrément suivant (nous définissons par la suite les tests de convergence permettant l'arrêt du processus itératif lorsque la solution convergée est atteinte). Dans le cas contraire, le processus est continué sur les itérations suivantes jusqu'à la convergence. L'organigramme de cet algorithme est présenté en annexe 2.

### VI.3. 3) Critère de convergence et tests d'arrêts :

Une solution est dite convergée quand elle satisfait à un critère convenablement choisi. Ce critère est souvent celui relatif sur un incrément, au résidu, ou à la variation du déplacement à l'itération (i).

le critère relatif au résidu s'écrit :

$$C_R = \frac{\|R_p^{(1)}\|}{\|R_p^{(i)}\|} \quad \text{VI.54}$$

Où :

$\|R_p^{(1)}\|$  : est l'incrément de charge considéré comme premier résidu ou bien le résidu à l'itération  $i=1$ .

$\|R_p^{(i)}\|$  : résidu à l'itération  $i$ .

le critère relatif à la variation du déplacement est :

$$C_d = \frac{\|\Delta q_p^{(i)}\|}{\|\Delta q_p^{(i)} - q_{p-1}\|} \quad \text{VI.55}$$

Où

$\{\Delta q_p^{(i)} - q_{p-1}\}$  : représente le déplacement incrémental cumulé à l'itération (i) sur l'incrément (p).

$\{\Delta q_p^{(i)}\}$  : déplacement incrément à l'itération (i).

Pour que la solution à l'itération (i) converge, il faut que les critères  $C_R$  et  $C_d$  vérifient les tests d'arrêts suivants :

$$\begin{cases} C_R \leq \varepsilon_R \\ C_d \leq \varepsilon_d \end{cases} \quad \text{VI.56}$$

La valeur de  $10^{-3}$  prise généralement pour  $\varepsilon_R$  et  $\varepsilon_d$  conduit à des résultats très satisfaisants.

**Bibliographie :**

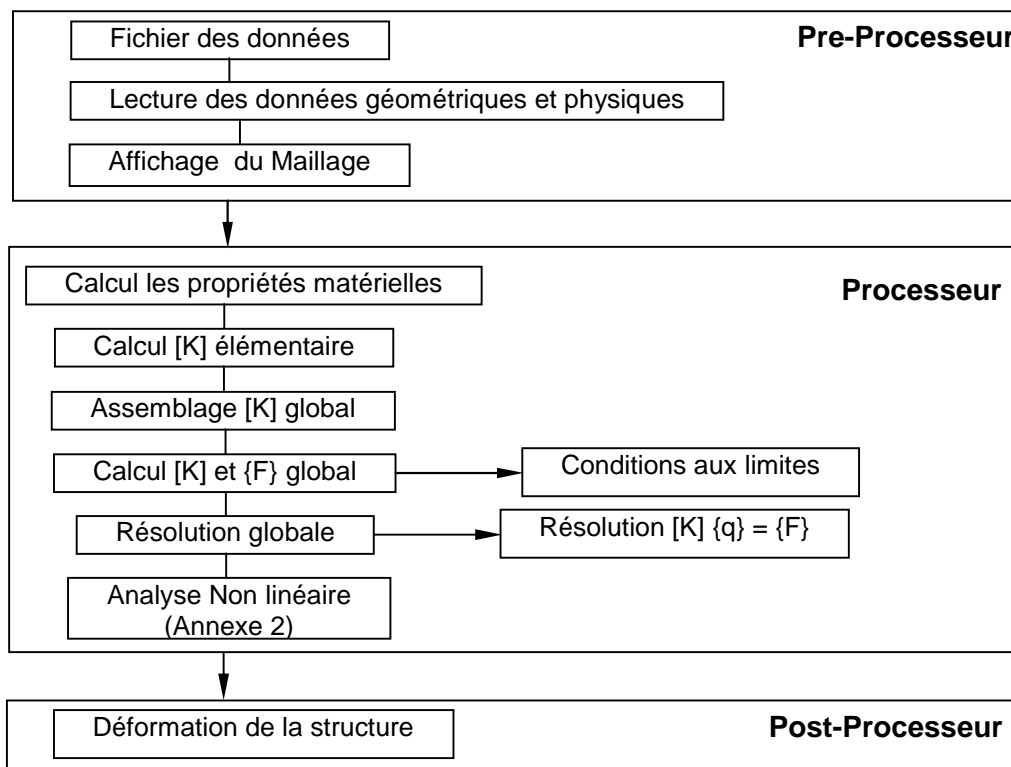
[1] DJEGHABA K, « *Contribution à l'analyse non linéaire géométrique des coques minces en théorie de Marguerre* », Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, 1990.

# Chapitre VII

## Validation et Évaluation

### VII.1) Avant Propos :

Le programme développé ici sous MatLab<sup>(1)</sup> est pour l'analyse des plaques composites laminées d'une épaisseur constante, Le programme utilise dans l'analyse la théorie de déformation du premier ordre FSDT . Le résultat du programme inclut les propriétés matérielles du laminé [A], [B] et [D] (Cf Chapitre III ) avec les déplacements nodaux et les rotations du fibre moyenne du laminé. L'Organigramme suivant présente la structure générale de notre programme développé dans cette étude :



<sup>1</sup> MATLAB est un logiciel interactif basé sur le calcul matriciel (MATrix LABoratory) . Il est utilisé dans les calculs scientifiques et les problèmes d'ingénierie parce qu'il permet de résoudre des problèmes numériques complexes en moins de temps requis par les langages de programmation et cette grâce à une multitude de fonctions intégrées et à plusieurs programmes outils testés et regroupés selon usage (boîtes à outils ou Toolbox).

**VII.2) Introduction :**

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus avec quelques tests choisis dans la littérature pour examiner les performances (précision et convergence) des éléments quadrilatères présentés précédemment. Les problèmes classiques traités dans cette section concernent les plaques laminées discrétisées par ces éléments. Ces tests sont utilisés, entre autres, pour vérifier la formulation et la mise en évidence de la vitesse de convergence (précision) en fonction du nombre d'éléments et de comparer les performances obtenues en discrétisant des plaques laminées avec un ensemble d'éléments quadrilatéraux.

Nous considérons, des structures en matériaux composites avec des épaisseurs constantes et un état de contraintes ou de déformations initiales nulles.

Les exemples tests concernent :

**Validation des éléments composites en analyse Linéaire :**

- une plaque à 3 couches soumise à une charge répartie de type pression;
- une plaque stratifiée de 4 couches symétriques sous une charge uniforme ;
- une coque composite soumise à la charge répartie et concentrée.

**Validation des éléments composites en analyse Non Linéaire :**

- une plaque multicouche de deux couches soumise à une charge concentrée;
- l'étude l'influence de nombres des couches sur le comportement de la plaque;
- l'étude l'influence de l'orientation des fibres sur le comportement de la plaque;
- Comparaison entre les éléments Q4, Q8 et Q9

**Bibliographie :**

- [1] Pryor .C.W. & Barker .R.M. "A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates". AIAA Journal, vol. 9, no. 5, pages 912-917, 1971.
- [2] Han S.H , Tabiei A, Parc W.T " Geometrically nonlinear analysis of laminated composite thin shells using a modified first order shear deformable element-based Lagrangian shell element". Journal of Composites and Structures vol. 82, pages 465 – 474, 2007.
- [3] Andrade L.G , Awruch A.M, Morsch I.B " Geometrically nonlinear analysis of laminate composite plates and shells using the eight-node hexahedral element with one-point integration". Journal of Composites and Structures vol. 79, pages 571– 580, 2006.
- [4] Reddy,J.N." *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis* ",Oxford University press.2004.
- [5] Ochoa O.O , Reddy J.N, " *Finite Element Analysis of Composite Laminates* "Kluwer Academic Publishers – London 1992.

# Chapitre VIII

## Conclusions et Recommandations

### VIII.1) Introduction :

La formulation et l'évaluation des modèles éléments finis pour l'analyse des structures constituent l'un des axes de recherches importants de la modélisation des solides et des structures. C'est dans cet esprit, que notre travail se situe et se veut une étude de nature théorique et numérique, relative à la présentation un modèle éléments finis dédiée à l'analyse statique linéaire et non linéaire géométrique des structures de type plaques composites laminées. Cet élément a été programmé et implanté dans un code numérique sur Matlab. Les structures de type plaques, que nous avons traitées, sont discrétisées à l'aide d'éléments de type quadrilatéral baptisé Q4 et Q8. Ce modèle se caractérise par la présence de 3 degrés de liberté (ddl) de translation  $u, v, w$  et par 3 rotations  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  en chaque nœud. Ils sont obtenus par la superposition classique des effets de membrane et de flexion. Les éléments de membrane et de flexion Q4 et Q8 sont respectivement superposés aux éléments de plaque dans le repère local. Le couplage membrane-flexion est mis en évidence après transformation des variables locales dans le repère global. Les matrices de rigidité sont obtenues de façon numérique en intégrant des modules permettant l'introduction des données dans le cas d'un matériau composite. L'évaluation de ce modèle est faite suivant un certain nombre de cas tests dont la plupart sont ceux proposés dans la littérature. A travers les résultats obtenus, dans les deux cas de l'analyse statique linéaire et non linéaire géométrique, nous pensons que cet élément de type Mindlin-Reissner a un comportement correct par comparaison à d'autres résultats (analytiques ou références) dans le cas des matériaux composites laminées.

### VIII.2) Remarques et conclusions

En nous basant sur les tests de différentes structures portées dans cette étude, nous pouvons présenter les conclusions suivantes

1. La Théorie de Mindlin-Reissner est valable pour modéliser la cinématique dans les plaques composites laminées modérément épaisses à un haut degré d'exactitude contrairement à la théorie de Kirchhoff.

2. L'élément Q8 composite présente un bon comportement et une convergence convenable dans l'analyse non linéaire à cause de sa haute précision d'approximation et de ces avantages dans la formulation utilisant la technique de condensation des degrés de liberté.

3. Les éléments construits dans ce travail sont des éléments quadrilatère à 6 degrés de liberté par nœud (superposition d'un élément de flexion et d'un élément de membrane) ce qui permet de les utiliser comme des éléments facettes planes pour l'analyse des coques composites laminées

4. Dans le cas d'exemple en présence de cisaillement transversale, l'utilisation du facteur de correction ( pris en général à 5/6) pour les termes de cisaillement permet d'obtenir des résultats à une précision très convenable.

5. L'empilement des fibres est un paramètre très influant sur le comportement globale du laminée, en effet un comportement satisfaisant de la plaque est obtenu lorsque les fibres sont croisées.

6. Le nombre des couches est un facteur important qui influe sur la réponse non linéaire du stratifié. En effet pour une même épaisseur il apparait que le comportement non linéaire est d'autant meilleur que le nombre de couche est important.

7. La théorie de Reissner-Mindlin prend en compte le cisaillement transversal constant sur l'épaisseur. Cependant, dans la majorité des problèmes, le cisaillement est variable selon l'épaisseur et dans ce cas il faut recourir aux éléments d'ordre supérieur afin de modéliser le cisaillement transversal correctement. Malheureusement ce genre d'éléments est coûteux au niveau de calcul et donc pour une meilleure utilisation des éléments que nous avons construits, il faut les utiliser avec un maillage homogène et raffiné pour une présentation fiable du cisaillement transversal.

### VIII.3) Recommandations pour des travaux futurs :

Le travail que nous avons présenté dans le cadre de notre Magister nous a permis de nous familiariser avec le domaine de la modélisation et du développement par élément finis. Nous le considérons comme une base pour un développement future dans le domaine des laminés et dans ce contexte l'action à mener pour une continuation et une amélioration de ce travail peut être relative aux points suivants :

Les éléments Q4 et Q8 ont un comportement globalement satisfaisant dans les cas traités. Des développements à plus ou moins long terme de ce travail peuvent être effectués et concernent les points suivants :

- Etude de l'influence du nombre de plis (couches) et de l'orientation des différentes fibres dans l'analyse dynamique (vibration libre) et thermique [1], [2] et [3]
- Etude de la variation de la valeur du rapport longueur sur épaisseur (L/h) pour mettre en évidence les limites et les capacités des modèles présentés [5],[6]. [10].
- Prise en compte du cisaillement transverse d'une façon fiable car il joue un rôle très important dans le cas des matériaux composites (les théories d'ordre supérieur) [5] , [6] ,[8].
- Effectuer des analyses linéaires et non linéaires dynamiques sur d'autres cas-tests dans le cas des matériaux composites [1] , [4] et [10].
- Etendre cette étude à l'analyse non linéaire matérielle ou combinée [11].

- Etendre cette étude à l'analyse des coques composites avec des géométries différentes (sphérique, conique, toroïdal et complexe) [8] , [11].
- Etude de l'influence de la délamination des plis sur le comportement globale de la structure [7].
- Etude de l'influence de fissures initiales ou défauts de fabrication sur l'analyse statique ou dynamique [10], [9].
- Dans la conception des panneaux raidis et les coques comme les ailes et les fuselages d'avion, un phénomène local non préjudiciable connu comme le flambement des panneaux est souvent toléré pour une conception économique des allèges. Une analyse global / local basée sur la théorie des plaques et coques laminées peut modéliser ces phénomènes devrait être développées correctement pour donner un outil analytique puissant [11].

### **Bibliographie :**

- [1] Ganapathi .M., Patel .B.P., Boisse. P. & Touratier. M." *Non-linear dynamic stability characteristics of elastic plates subjected to periodic in-plane load*". International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 35, pages 467-480, 2000.
- [2] Makhecha. D.P., Ganapathi. M. & Patel. B.P." *Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to thermal/mechanical loads using an accurate theory*". Composite Structures, vol. 51, no. 3, pages 221-236, 2001.
- [3] Sun .C.T. & Liou .W.J. " *Investigation of laminated composite plates under impact dynamic loading using a three-dimensional hybrid stress finite element method*". Computers and Structures, vol. 33, no. 3, pages 879-884, 1999.
- [4] Desai. Y.M., Ramtekkar. G.S. & Shah. A.H. " *Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model*". Composite Structures, vol. 59, pages 237-249, 2003.
- [5] Sheikh. A.H., Haldar .S. & Sengupta.D." *A high precision shear deformable element for the anaysis of laminated composite plates of different shapes*". Composite Structures, vol. 55, pages 329-336, 2002.
- [6] Sheikh. A.H., Haldar. S. & Sengupta. D. " *Vibration of plates in different situations using a high-precision shear deformable element*". Journal of Sound and Vibration, vol. 253, no. 2, pages 329-345, 2002.
- [7] Ericson. K, Persson M., Carlsson .L. & Gustavsson .A. " *On the predection of the initiation of delamination in a (0/90)s laminate with a circular hole*". Journal of Composite Materials, vol. 18, pages 495-506, 1994.
- [8] Hamdallah. J.M. & Engblom .J.J." *Finite element plate formulation including transverse shear effects for representing composite shell structures*". J. Reinforced Plastic and Comp., vol. 9, no. 3, pages 226-239, 1998.
- [9] Beakou A. & Touratier M.. " *A rectangular finite element for analysing composite multilayered shallow shells in statics, vibration and buckling*". Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 36, pages 627-653, 1993.
- [10] Khare .R.K., Kant .T. & Garg..A.K. " *Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element*". Composite Structures, vol. 65, pages 405-418, 2004.
- [11] Reddy,J.N." *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis* "Oxford University press.2004.

# Annexe 1

## Fonctions de forme des éléments quadrilatères

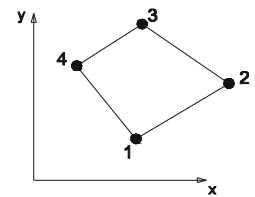
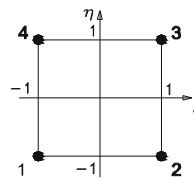
### a) Élément Quadrilatère à 4 nœuds :

$$N(1) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N(2) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N(3) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N(4) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$



### b) Élément Quadrilatère à 8 nœuds :

$$N(1) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N(2) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N(3) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

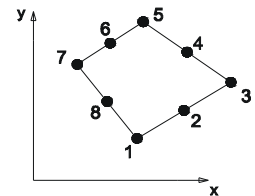
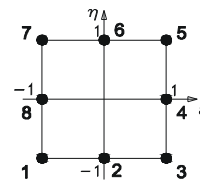
$$N(4) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N(5) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$N(6) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N(7) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

$$N(8) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$



### c) Élément Quadrilatère à 9 nœuds :

$$N(1) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\eta\xi$$

$$N(2) = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$

$$N(3) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\eta\xi$$

$$N(4) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$

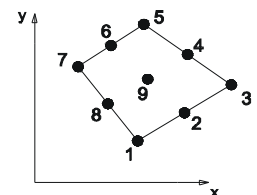
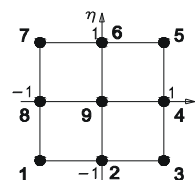
$$N(5) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\eta\xi$$

$$N(6) = \frac{1}{2}(1+\xi^2)(1+\eta)\eta$$

$$N(7) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\eta\xi$$

$$N(8) = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$N(9) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$



# Annexe 2

## Organigramme de pilotage en force

