

*Etude qualitative des solutions de
certains systèmes en réaction-diffusion*

par

Safia MEFTAH

Table des matières

Introduction	3
1. Notions préliminaires	5
1.1 Les systèmes dynamiques	5
1.1.1 Outils des systèmes dynamiques	6
1.2 Les systèmes (<i>EDO</i>)	9
1.2.1 Existence et unicité de la solution	10
1.2.2 Sur-solutions et sous-solutions	12
1.2.3 La condition de tangence.	15
1.3 Les systèmes de réaction-diffusion.	18
1.3.1 L'effet de la diffusion	19
1.3.2 Cadre formel des systèmes de réaction-diffusion.	20
1.3.3 Cadre fonctionnel des systèmes de réaction-diffusion	23
1.3.4 Existence d'une solution globale	25
1.4 Solutions stationnaires, états d'équilibre, stabilité et modèles.	26
1.4.1 Équations semi-linéaires : solutions globales	26
1.4.2 Instabilité diffusive pour un système de deux équations	27
1.4.3 Modèles pour les structures de Turing Cross diffusion	31
1.5 Régions invariantes	32
1.6 Les systèmes (<i>EDO</i>) et les systèmes (<i>ERD</i>)	36
2. Ensembles invariants pour des systèmes de réaction-diffusion non classiques	40
2.1 Les équations du problème	40
2.2 L'existence d'une région invariante positive	41
2.3 L'ensemble attracteur	43
3. L'ensemble absorbant	46
3.1 L'inégalité de Gronwall et Langenhop	46

3.1.1	Normes induites	46
3.1.2	Mesures matricielles	47
3.1.3	Estimations de la solution	48
3.2	Ensemble absorbant	49
3.2.1	Résultat principal	54
3.3	Exemple	61
3.4	Conclusion	65
4.	Conclusion générale	66
	Bibliographie	66

INTRODUCTION

Cette thèse est premièrement une introduction aux systèmes dynamiques en dimensions infinies. Deuxièmement, elle est consacrée à l'étude de quelques propriétés (invariance, attraction, caractère absorbant) de certaines régions de l'espace de phase des systèmes dynamiques, et particulièrement les systèmes de réaction-diffusion.

Parmi les propriétés et les outils importants dans l'étude du comportement des solutions des systèmes de réaction-diffusion, il y a le concept de régions invariantes. Contrairement aux équations uni-dimensionnelles, pour l'étude des propriétés qualitatives des solutions des systèmes d'équations, les outils analytiques tels que le principe du maximum ne sont pas applicables. D'où, l'importance des régions invariantes, et l'efficacité de leur méthode.

Lorsqu'on décrit le comportement des matériaux tels que le caoutchouc, l'eau ou les polymères, on les considère comme des simples constituants, mais il existe de nombreuses substances, par exemple les mélanges des gaz idéaux, les mélanges fluides, des liquides à bulles, des milieux poreux et alliages pour lesquels il semble plus approprié de supposer que le matériau se compose de plus d'un constituant. Notre objectif dans ce travail est l'étude du comportement de ce type de matériaux modélisés par des systèmes de réactions-diffusion. Nous nous intéressons principalement aux régions invariantes de certains systèmes d'équations d'évolution (non classiques), issus de la thermodynamique des échanges de chaleur dans les mélanges.

Cette thèse est constituée de trois chapitres :
Dans le premier chapitre, nous considérons le cadre théorique des systèmes dynamiques sujet de notre étude. Nous y introduisons les concepts et les outils nécessaires

pour ce travail. Nous rappelons quelques résultats théoriques importants concernant le concept de régions invariantes.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons un système d'équations aux dérivées partielles, modélisant des phénomènes issus de la thermodynamique de transfert de chaleur dans des mélanges aux propriétés homogènes. Notre objectif est d'identifier les régions invariantes dans le quadrant positif de l'espace des phases. Pour certains systèmes (même linéaires), nous montrons l'existence de ce type de régions ayant des formes géométriques différentes de celles habituellement obtenues avec les systèmes de réaction-diffusion (classiques). Nous étudions aussi leurs propriétés, et nous montrons que sous certaines conditions ces régions sont des ensembles attractants dans le premier quadrant de l'espace des phases.

Dans le troisième chapitre, nous poursuivons notre étude par l'examen du caractère attractant de ces régions, pour montrer qu'elles sont en fait des ensembles absorbants. Nous terminons par un exemple illustratif, afin de vérifier la validité des conditions supposées. Nous finissons par une conclusion générale sur ce travail.

Il est important de noter ici, que cette thèse est une continuation du travail présenté dans le mémoire de Magister [29], où nous avons prouvé sous certaines conditions que cette région invariante est un attracteur. De plus, à l'aide de certains concepts mathématiques comme la mesure matricielle, l'inégalité de Langenhop, et l'estimation de solutions d'un système, on démontre dans cette thèse que sous des conditions (suffisantes) ces (ensembles) attracteurs sont aussi des ensembles absorbants. Pour montrer cette dernière propriété, nous avons utilisé une méthode basée sur la géométrie euclidienne de l'espace des phases.

1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques développée intensivement au cours de ces dernières décennies, elle est en relation étroite avec la théorie des équations différentielles abstraites (dans les espaces de Banach) voir [6, 17, 34].

Dans ce chapitre, on introduit les concepts nécessaires à notre travail, comme les régions dites invariantes, ensembles attractants, etc..., pour étudier des systèmes d'équations en réaction-diffusion dans un cadre abstrait.

1.1 Les systèmes dynamiques

Un système dynamique est considéré comme étant le mouvement d'un système mécanique isolé. Les modèles mathématiques de ce type de phénomènes, qu'on appelle systèmes dynamiques, régissent l'évolution d'un ensemble de composants en interaction et décrivent leur mouvement dans des problèmes naturels de la physique, la chimie, la biologie, l'économie et même dans la sociologie... voir [3, 17, 20].

En d'autres termes, on peut dire qu'un système dynamique est la donnée d'une fonctionnelle qui décrit la solution d'un problème mathématique, modélisant un phénomène physique (voir [44]).

Définition 1.1.1: ([6, 17, 23, 26, 40])

Soit H un espace métrique complet, on appelle système dynamique tout couple (H, S_t) , où $\{S_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ est une famille d'applications continues de H dans H qui vérifie la propriété (SM) (dite de semi-groupe) suivante

$$(SM) \quad S_{t+s} = S_t \circ S_s, \quad t, s \in \mathbb{T}, \quad S_0 = I,$$

où \mathbb{T} est une partie de \mathbb{R}_+ (stable par rapport à la structure de groupe additif dans \mathbb{R}).

Souvent, on peut identifier un système dynamique à un système d'équations différentielles abstraites.

Définition 1.1.2: ([33, 43])

Soient F une application continue sur l'espace de Hilbert (ou Banach) H et $U_0 \in H$. La solution $U = U(t)$ de l'équation différentielle abstraite

$$(EDA) \quad \frac{dU(t)}{dt} = F(U(t)), \quad \text{et } U(0) = U_0,$$

définit un système dynamique dans H , dont l'opérateur d'évolution S_t est défini par $S_t(U_0) = U(t)$.

1.1.1 Outils des systèmes dynamiques

Nous allons donner certains concepts et outils pour les systèmes dynamiques décrits par la définition 1.1.2, par le biais de l'équation différentielle abstraite associée (voir [6]).

Soit le problème de Cauchy

$$(S.D) \quad \frac{dU(t)}{dt} = F(U(t)), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad U(0) = U_0 \in E,$$

tels que H est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach), et F est une application localement lipschitzienne de H vers H et de classe C^1 sur un ouvert E de H .

(S.D) admet une solution unique $U(t)$, définie pour tout $t \in I(U_0)$, intervalle dans \mathbb{R} (contenant 0), appelé intervalle maximal d'existence de la solution.

1) Flot d'un système dynamique.

On définit l'application $\phi(t, U_0) = U(t)$, pour tout $t \in I(U_0)$ et $U_0 \in E \subset H$. Cette application décrit l'évolution du point $U_0 \in E$ dans le temps t .

Au système dynamique sur E correspond une C^1 -application

$$\phi : I(U_0) \times E \subset \mathbb{R} \times H \longrightarrow E,$$

qu'on notera ϕ_t , et qu'on définit par $\phi_t(U) = \phi(t, U)$.

Définition 1.1.3: (*flot*) L'application ϕ_t qui vérifie pour tout $U \in E \subset H$ les propriétés suivantes

1) $\phi_0(U) = U$,

2) $\phi_s(\phi_t(U)) = \phi_{s+t}(U)$, $\forall t, s \in I(U_0)$,

3) $\phi_{-t}(\phi_t(U)) = \phi_t(\phi_{-t}(U)) = U$, $\forall t \in I(U_0)$,

est appelée un *flot* du système non linéaire (S.D).

Remarque 1.1.4:

1) Dans le cas où $I(U_0) \subset \mathbb{R}^+$, on dit que ϕ_t est un *semi-flot*.

2) On appelle ϕ_t *flot global* (*semi-flot global*) si $I(U_0) = \mathbb{R}$ (ou $I(U_0) = \mathbb{R}^+$), sinon on l'appellera *flot local*.

2) Trajectoires ou orbites (voir [6, 43]).

Dans ce paragraphe, on donne un sens géométrique à la solution (continue en t) $U(t) = \phi_t(U_0)$ du problème de Cauchy (S.D), on introduit la notion de trajectoire (ou orbite) passant par U_0 .

Définition 1.1.5: La courbe γ définie dans H par l'ensemble

$$\gamma = \{U(t) : t \in I(U_0)\},$$

est appelée *trajectoire* (ou *orbite*) du système (SD), passant par un point U_0 dans $E \subset H$.

Remarque 1.1.6:

1) L'ensemble défini par $\gamma^+ = \{U(t) : t \in I(U_0) \cap \mathbb{R}^+\}$ est dit *semi-trajectoire positif*.

2) L'ensemble défini par $\gamma^- = \{U(t) : t \in I(U_0) \cap \mathbb{R}^-\}$ est dit *semi-trajectoire négatif*.

3) Ensemble ω -limite (voir [6, 43]).

On définit pour un élément $U_0 \in E \subset H$ l'ensemble ω -limite de U_0 comme étant l'ensemble des états dans H , limites de la trajectoire passant par U_0 , lorsque le temps t tend vers l'infini, c'est à dire

$$\omega(U_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \phi_t(U_0)}.$$

Si $B \subset E$ l'ensemble ω -limite est

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \phi_t(B)}$$

4) Régions positivement invariantes.

L'ensemble $\Sigma_w \subset E \subset H$ est dit *une région positivement (resp. négativement) invariante* pour le flot ϕ_t si

$$\phi_t(\Sigma_w) \subset \Sigma_w, \forall t > 0 \quad (\text{resp. } \phi_t(\Sigma_w) \supset \Sigma_w, \forall t > 0).$$

De plus, si l'ensemble est positivement et négativement invariant, on l'appellera *une région invariante*, c'est à dire Σ_w vérifie

$$\phi_t(\Sigma_w) = \Sigma_w, \forall t > 0.$$

5) Attracteurs .

L'ensemble $\Sigma_w \subset E \subset H$ est dit un attracteur s'il vérifie

- 1) Σ_w est une région invariante ($\phi_t(\Sigma_w) = \Sigma_w, \forall t \geq 0$).
- 2) Σ_w possède un voisinage ouvert W dans E tel que, $\forall U_0 \in W$, $\phi_t(U_0)$ converge vers un élément de Σ_w quand $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(U_0), \Sigma_w) = 0,$$

où d désigne la distance dans H et $d(x, \Sigma_w) = \inf_{y \in \Sigma_w} d(x, y)$.

Remarque 1.1.7:

On appelle un attracteur global, lorsque le voisinage ouvert W est égal à E .

Les ensembles dit absorbants sont parmi les attracteurs les plus intéressants (voir [36, 43]).

1.2 Les systèmes (EDO)

Dans cette section on ne s'intéressera qu'aux équations différentielles ordinaires (EDO), autrement dit les équations différentielles abstraites définies dans $H = \mathbb{R}^n$. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n), \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot y_i,$$

et de la norme euclidienne (associée) $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}$.

Le paragraphe suivant nous rappelle quelques résultats fondamentaux sur l'existence et l'unicité de la solution du système d'(EDO).

1.2.1 Existence et unicité de la solution

Supposons le système d'(EDO) défini par

$$\dot{w} = F(w),$$

où F est une application définie et continue sur un ensemble ouvert E de \mathbb{R}^n .

F représente un champ vectoriel sur \mathbb{R}^n , et on l'appelle la réaction du système (EDO).

Dans les définitions suivantes on introduit une propriété liée à la contraction, nommée la condition de Lipschitz, pour assurer l'existence d'une solution (et son unicité).

Définition 1.2.1: *L'application $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite lipschitzienne sur E s'il existe une constante positive α (dite constante de Lipschitz) telle que pour tout W et V dans E on a*

$$|F(W) - F(V)| \leq \alpha |W - V|.$$

Définition 1.2.2: *Si pour tout élément $U_0 \in E$, il existe un ϵ -voisinage de U_0 , $N_\epsilon(U_0) \subset E$ et une constante α_0 positive tels que pour tout W et V dans $N_\epsilon(U_0)$, on a*

$$|F(W) - F(V)| \leq \alpha_0 |W - V|,$$

on dit que l'application F est localement lipschitzienne sur E .

Un ϵ -voisinage de $U_0 \in \mathbb{R}^n$ est la boule ouverte de rayon ϵ positif définie par

$$N_\epsilon(U_0) = \{W \in \mathbb{R}^n : |W - U_0| < \epsilon\}$$

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition précédente.

Proposition 1.2.3: *Soient E un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , et une application $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors F est une application localement lipschitzienne sur E si elle est de classe C^1 sur E .*

On sait que toute application lipschitzienne est localement lipschitzienne, mais la réciproque est fautive. Mais on a la proposition suivante, exprimée en terme de champs vectoriels sur \mathbb{R}^n .

Proposition 1.2.4: *Soit X un champ vectoriel sur \mathbb{R}^n . Si X est localement lipschitzien (en tant qu'application) sur \mathbb{R}^n , alors X est lipschitzien sur les boules fermées de \mathbb{R}^n .*

Un résultat d'existence est souvent basé sur la contraction (la réaction) est vrai, à condition qu'il soit vérifié localement. Pour des raisons techniques, et pour simplifier l'exposé des démonstrations, on suppose que la réaction est globalement lipschitzienne. Sinon, en général on procède par un prolongement.

La proposition suivante propose l'un de ces prolongements.

Proposition 1.2.5: *Soit X un champ localement lipschitzien sur \mathbb{R}^n . Quelle que soit la boule fermée $\overline{B}(0, r)$ dans \mathbb{R}^n centrée à l'origine et de rayon r positif, il existe un champ Y lipschitzien sur \mathbb{R}^n , défini par*

$$Y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y|_{\overline{B}(0,r)} = X|_{\overline{B}(0,r)} \\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,r) : Y(v) = X\left(r \frac{v}{|v|}\right). \end{array} \right.$$

Maintenant nous énonçons l'un des résultats fondamentaux dans la théorie des (EDO) (voir [7, 15, 34, 48]).

Théorème 1.2.6: (*Théorème fondamental d'existence et d'unicité : Picard-Lindelöf*)
 Soient E un ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n , U_0 un élément de E et F une application de classe C^1 sur E à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors il existe un réel $a > 0$ tel que le problème à valeur initiale

$$(EDO) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

admet une solution *unique* $U(t)$ sur l'intervalle $[-a, a]$.

1.2.2 Sur-solutions et sous-solutions

On donne des résultats pour certains systèmes (*EDO*) définis à partir d'une classe de champs assez particuliers. Ces champs vérifient une propriété dite de monotonie, qui permet de définir les notions de sur et sous-solutions, utilisées souvent dans le cadre des théorèmes de comparaison (voir [22, 41, 47, 48]).

Définition 1.2.7: L'ordre entre deux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n est défini par

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Définition 1.2.8: La fonction $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite croissante si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y).$$

Définition 1.2.9: La fonction $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite quasi-positive si pour tout $i = 1, \dots, n$

$$x \geq 0 \quad \text{et} \quad x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_i(x) \geq 0,$$

où les F_i sont les composantes de F dans $\mathbb{R}^n : F = (F_1, \dots, F_n)$.

Définition 1.2.10: On dit que la fonction $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est quasi-monotone croissante par rapport à x , si F_i est croissante par rapport à x_j pour $i \neq j$, c'est à dire pour tout $i = 1, \dots, n$ on a

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \leq y \quad \text{et} \quad x_i = y_i \quad \Rightarrow \quad F_i(x) \leq F_i(y).$$

Maintenant, on va énoncer deux théorèmes de comparaison, qui sont parmi les plus importants dans le cadre des (EDO), voir [22, 47, 48]

Théorème 1.2.11: (Théorème de comparaison)

Soient $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application quasi-monotone croissante, u et w différentiables sur $J = [t_0, t_0 + a]$. Alors

a) $u(t_0) < w(t_0)$ et $u' - F(u) < w' - F(w)$ sur J implique $u < w$ sur J .

b) Si F est localement lipschitzienne, alors

$u(t_0) \leq w(t_0)$ et $u' - F(u) \leq w' - F(w)$ sur J implique $u \leq w$ sur J .

Le théorème suivant est une conséquence du théorème ci-dessus (voir [48]).

Théorème 1.2.12: (*M.Hirsch*)

Soit F une application de classe C^1 sur $E \subset \mathbb{R}^n$ dont la Jacobienne $\frac{\partial F(y)}{\partial y}$ est positive et irréductible.

Si deux solutions u et w de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = F(y)$ sont telles que $u(t_0) \leq w(t_0)$ et $u(t_0) \neq w(t_0)$, alors

$$u(t) < w(t) \quad \text{pour tout } t > t_0.$$

Sous-solutions et sur-solutions.

Le théorème de comparaison précédent exprime clairement la notion de monotonie pour le système (*EDO*), qu'on définit par

Définition 1.2.13:

On dit que la fonction $v(t)$ est une sous-solution du système (*EDO*), et la fonction $w(t)$ est une sur-solution du système (*EDO*) si

$$\frac{dv}{dt} \leq F(v) \quad \text{et} \quad v(0) \leq u_0,$$

$$\frac{dw}{dt} \geq F(w) \quad \text{et} \quad w(0) \geq u_0.$$

Où u_0 désigne la donnée initiale dans le problème (*EDO*) du Théorème 1.2.6.

Solutions maximales et solutions minimales. (voir [48])

Si F est continue et quasi-monotone croissante, le système (*EDO*) admet deux solutions $u^*(t)$ dite maximale, et $u_*(t)$ dite minimale, et si $u(t)$ est une solution quelconque, alors

$$u_*(t) \leq u(t) \leq u^*(t),$$

et vérifient

$$1) \quad v(0) \leq u_0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} \leq F(v) \quad \Rightarrow \quad v \leq u^*,$$

$$2) \quad w(0) \geq u_0 \quad \text{et} \quad \frac{dw}{dt} \geq F(w) \quad \Rightarrow \quad w \geq u_*.$$

La quasi-monotonie n'étant pas toujours vérifiable pour les systèmes (EDO), on donne le résultat suivant sur les inégalités différentielles.

Théorème 1.2.14: (*M.Müller : voir [48]*)

Soient $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement lipschitzienne et u une solution du système (EDO) de classe C^1 sur l'intervalle $J = [0, T]$. Supposons que v et w sont des fonctions de classe C^1 sur J à valeurs dans \mathbb{R}^n telles que $v \leq w$ sur J , $v(0) \leq u(0) \leq w(0)$, et

$$\frac{dv_i}{dt} \leq F_i(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad \text{tq.} \quad v(t) \leq z \leq w(t), \quad z_i = v_i(t),$$

$$\frac{dw_i}{dt} \geq F_i(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad \text{tq.} \quad v(t) \leq z \leq w(t), \quad z_i = w_i(t),$$

pour $i = 1, \dots, n$. Alors

$$v \leq u \leq w \text{ sur } J.$$

Remarque 1.2.15:

Si v et w sont des fonctions constantes, alors les inégalités du théorème de M. Müller sur la frontière d'un intervalle d'extrémités v et w , signifient une condition de tangence. Cet intervalle est effectivement une région invariante associée au système (EDO) (pour $n = 2$ c'est un rectangle invariant).

Les régions invariantes sont des outils (géométriques), qu'on utilise lorsque la réaction F ne vérifie pas les propriétés de monotonie (voir [1, 6, 10, 39, 48, 49]).

1.2.3 La condition de tangence.

Commençons d'abord par la définition d'un ensemble invariant (ou une région invariante).

Définition 1.2.16: On dit que l'ensemble $\Sigma_w \subset \mathbb{R}^n$ est (positivement) invariant par rapport au système (EDO), si pour toute solution w , $w(a) \in \Sigma_w$ implique que $w(t) \in \Sigma_w$ pour tout $t > a$ (tant que la solution existe).

La condition de tangence est une condition suffisante pour garantir l'invariance, puisqu'elle caractérise parmi les champs définis sur \mathbb{R}^n ceux qui aux frontières de Σ_w , s'orientent vers l'intérieur de Σ_w .

Selon la régularité de la frontière de Σ_w (notée par $\partial\Sigma_w$), cette condition peut prendre deux formes (voir [48]).

Supposons que F est définie sur un voisinage ouvert de $\bar{\Sigma}_w$, on a

1) **La condition de tangence : la frontière $\partial\Sigma_w$ non régulière.**

$$(C_d) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \text{dist}(w + hF(w), \Sigma_w) = 0, \quad w \in \bar{\Sigma}_w,$$

où $\text{dist}(w, \Sigma_w)$ désigne la distance entre le point w et l'ensemble Σ_w .

2) **La condition de tangence : la frontière $\partial\Sigma_w$ est assez régulière.**

$$(C_s) \quad \langle \vec{n}(w), F(w) \rangle \leq 0, \quad w \in \partial\Sigma_w,$$

où $\vec{n}(w)$ est le vecteur normal sortant de Σ_w au point frontière w , défini par

Définition 1.2.17: On appelle $\vec{n}(w) \neq \vec{0}$ vecteur normal sortant de Σ_w au point $w \in \partial\Sigma_w$, si la boule ouverte $\mathcal{B} = B(w + \vec{n}(w), |\vec{n}(w)|)$, de centre $w + \vec{n}(w)$ et de rayon $|\vec{n}(w)|$, n'admet aucun point commun avec Σ_w .

Géométriquement, on dit que la boule \mathcal{B} touche Σ_w au point $w \in \partial\Sigma_w \cap \bar{\mathcal{B}}$.

Remarque 1.2.18: Les relations entre (C_d) et (C_s) sont (voir [48])

a) (C_d) implique (C_s) .

b) Si F est continue sur $\bar{\Sigma}_w$, alors (C_s) implique que la condition (C_d) , de plus (C_d) est vérifiée uniformément dans les sous-ensembles compacts de $\bar{\Sigma}_w$.

On clôture ce paragraphe avec deux résultats d'existence de régions invariantes des systèmes de type (EDO).

Théorème 1.2.19: (l'invariance avec la condition d'unicité, [48])

Soient un ensemble fermé $\Sigma_w \subset \mathbb{R}^n$, et une application $F : \Sigma_w \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si F satisfait la condition de tangence (C_d) ou (C_s) et la condition de Lipschitz

$$\langle Y_1 - Y_2, F(Y_1) - F(Y_2) \rangle \leq L|Y_1 - Y_2|^2,$$

alors l'ensemble fermé $\Sigma_w \subset \mathbb{R}^n$ est invariant par rapport au système (EDO).

Théorème 1.2.20: (l'invariance avec la condition d'existence, [48])

Soient un ensemble fermé $\Sigma_w \subset \mathbb{R}^n$, $F : \Sigma_w \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement lipschitzienne. Si la condition de tangence (C_d) ou (C_s) est vérifiée, alors pour tout $w_0 \in \Sigma_w$, le problème à valeur initiale, défini par le système (EDO), admet une solution locale unique w , telle que $w(t) \in \Sigma_w$ pour tout t appartenant à l'intervalle d'existence.

En particulier, la solution est globale si Σ_w est un ensemble compact, et satisfait $w(t) \in \Sigma_w$ pour $0 \leq t$.

Avant de clôturer ce paragraphe on rappelle la notion de vecteurs propres, utilisée plus tard.

Les vecteurs propres

Étant donné une application linéaire A sur \mathbb{R}^n , on appelle un vecteur propre x associé à la valeur propre λ , un vecteur non nul qui satisfait la relation

$$Ax = \lambda x.$$

Si x est un vecteur propre, pour tout $\alpha \neq 0$, αx est aussi un vecteur propre avec la même valeur propre λ .

On appelle vecteur propre à droite, un vecteur x_d qui vérifie

$$Ax_d = \lambda x_d.$$

où λ est la valeur propre (à droite) associée.

De même, on appelle vecteur propre à gauche, un vecteur x_g qui vérifie

$$x_g A = \lambda x_g.$$

Le vecteur propre à gauche de A est le vecteur propre à droite de la transposée de la matrice associée à A .

1.3 Les systèmes de réaction-diffusion.

Les équations de réaction-diffusion décrivent les distributions de la température, des concentrations ou certaines autres quantités dans l'espace et dans le temps (voir [9]). Ces équations sont caractérisées par la présence de termes de diffusion. À l'origine, la diffusion n'était pas comprise comme un mouvement aléatoire d'atomes et de molécules, elle est décrite par l'opérateur de Laplace. La conduction thermique a été décrite par des expressions différentielles similaires.

Ensuite, les modèles ont été appliqués à des processus biologiques tels que le déplacement de cellules biologiques ou d'individus dans des populations biologiques, ainsi les mécanismes du mouvement deviennent plus complexes.

Pour étudier la notion de régions invariantes associées aux systèmes de réaction-diffusion, on introduit d'abord dans cette section une présentation générale de ces systèmes.

En général, les phénomènes étudiés ne sont pas homogènes en espace, ils dépendent du temps et d'une variable spatiale (distribués sur un domaine spatial), et se modélisent sous forme de systèmes à paramètres distribués. Dans les équations aux dérivées partielles qui décrivent le comportement dynamique de ces états, le laplacien représente le terme de la diffusion.

1.3.1 L'effet de la diffusion

Lorsqu'on met une substance colorée, comme une goutte d'encre, dans un récipient rempli d'eau, il s'opère ce qu'on appelle un phénomène de **diffusion** :

La substance est d'abord séparée de l'eau par une frontière bien nette, puis les molécules de la substance se distribuent uniformément dans l'eau sous l'action d'un gradient de concentration. Là où la concentration est élevée, les molécules tendent à décroître en nombre, et inversement ; aux endroits de faible concentration leur nombre augmente.

Les molécules de la substance colorée se déplacent sous l'impact des molécules d'eau sans aucune préférence quant à la direction (phénomène isotrope). Ce processus de migration aléatoire, de transport de matière à l'intérieur d'un système prendra fin quand la densité des molécules sera la même partout.

Donc la **diffusion** se définit comme étant cette tendance des molécules à se déplacer en direction d'une activité thermodynamique (concentration) moindre, de façon à atteindre une concentration uniforme et une entropie maximale dans tout le système (voir [14]).

1.3.2 Cadre formel des systèmes de réaction-diffusion.

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles de type parabolique semi-linéaires de la forme

$$(ERD) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = A\Delta U + X(U) \\ U(x, 0) = U_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right.$$

Où $U : \Omega \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^n$ et Ω est un ouvert borné dans \mathbb{R}^p ($p \geq 1$), avec un bord $\partial\Omega$ assez régulier, A est une matrice $n \times n$ diagonalisable à valeurs propres strictement positives, appelée *matrice de diffusion*, et X est un champ de vecteurs localement lipschitzien dans \mathbb{R}^n , appelé *le terme de réaction*.

$$\text{Si } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}, \Delta U \text{ représente le vecteur } \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta u_n \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial U}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.3.1:

En l'absence du terme de la diffusion, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires (*EDO*), qu'on appellera le système de réaction associé au système (*ERD*)

$$(EDO) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = X(U), & \text{et } U(0) = U_0 \\ U : [0, T^*[\rightarrow \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Certains phénomènes Physico-chimiques (propagation de flammes), écologiques (prédateurs et proies), peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles portant le nom de *Systèmes de réaction-diffusion*.

Les termes de réaction découlent de toute interaction entre les composantes de U , par exemple, U peut être un vecteur de concentrations chimiques, et $X(U)$ représente l'effet de réactions chimiques de ces concentrations, ou les composantes de U peuvent être des densités spatiales de populations végétales, ou animales, et $X(U)$ représente l'effet des relations entre les prédateurs et les proies.

L'origine physique du système impose de se restreindre aux solutions non négatives, ceci conduit à l'étude de leur comportement pour des temps assez grands, et l'existence globale de solutions non négatives.

Comparaison des solutions

Si u_0 et v_0 sont deux vecteurs tels que $u_0 \leq v_0$ (composante par composante), alors les solutions $u(t)$ et $v(t)$ du système (*EDO*) avec les conditions initiales $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$, vérifient l'inégalité $u(t) \leq v(t)$ pour tout $T \geq 0$.

Stabilité des points stationnaires

Il existe différents résultats sur la stabilité des points stationnaires pour cette classe de systèmes. Nous présentons l'un de ces résultats.

Théorème 1.3.2: [46]

Soit u_0 un point stationnaire du système (EDO). S'il existe une courbe continue $S(\tau) \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [-1, 1]$ tels que $S(0) = u_0$,

$$S(\tau) > u_0 \quad \text{pour} \quad 0 < \tau \leq 1,$$

$$S(\tau) < u_0 \quad \text{pour} \quad -1 < \tau \leq 0,$$

et

$$F(S(\tau)) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \tau \leq 1, \quad F(S(\tau)) > 0 \quad \text{pour} \quad -1 \leq \tau < 0.$$

Alors la solution $u(t)$ du système (EDO) avec une condition initiale quelconque $u(0)$ telles que

$$\underset{\tau}{\text{Min}} S(\tau) \leq u(0) \leq \underset{\tau}{\text{Max}} S(\tau),$$

converge vers le point fixe u_0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Ces propriétés sont utilisées dans de nombreuses applications dans le cadre des systèmes dynamiques, des équations différentielles ordinaires et partielles, des méthodes numériques. Ils peuvent être généralisés pour certaines classes de problèmes elliptiques et paraboliques.

Dans le paragraphe suivant, nous allons survoler la question de l'existence locale et la régularité des solutions pour les systèmes (ERD).

1.3.3 Cadre fonctionnel des systèmes de réaction-diffusion

Ici nous allons présenter le cadre mathématique pour l'analyse quantitative des solutions (existence et unicité) des systèmes de réaction-diffusion (voir [50]).

Formulation opérationnelle du système (ERD)

On peut réécrire le système (ERD) sous forme de problème à valeur initiale, pour une équation différentielle ordinaire dans un espace fonctionnel approprié (voir [4, 10, 17]).

Notons par $L_p(\Omega)$, $H_{k,p}(\Omega)$ respectivement l'espace de Lebesgue (fonctions à puissance p intégrable sur Ω) et l'espace de Sobolev d'ordre k (correspondant), et par $H_{k,p}^0(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H_{k,p}(\Omega)$.

Posons

$$\mathcal{U}(t) = U(x, t),$$

ainsi \mathcal{U} est une fonction de \mathbb{R}^+ vers l'espace $(H_{1,2}^0(\Omega) \cap H_{2,2}(\Omega))^n \subset \mathcal{H}$, où $\mathcal{H} = (L_2(\Omega))^n$. Soit l'opérateur

$$\mathcal{A} : (H_{1,2}^0(\Omega) \cap H_{2,2}(\Omega))^n \subset \mathcal{H} \rightarrow (L_2(\Omega))^n,$$

défini par

$$\mathcal{A}(\mathcal{U}) = A\Delta\mathcal{U} \quad \text{pour tout } \mathcal{U} \in D(\mathcal{A}) = (H_{1,2}^0(\Omega) \cap H_{2,2}(\Omega))^n,$$

et

$$F : (H_{1,2}^0(\Omega) \cap H_{2,2}(\Omega))^n \subset \mathcal{H} \rightarrow (L_2(\Omega))^n,$$

défini par

$$F(\mathcal{U}) = X(\mathcal{U}).$$

Donc le système (ERD) devient une équation différentielle abstraite, et prend la forme opérationnelle suivante

$$(ERDO) \quad \begin{cases} \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = \mathcal{A}(\mathcal{U}(t)) + F(\mathcal{U}(t)), & t > 0 \\ \mathcal{U}(0) = U_0 \end{cases}$$

qui est la plus appropriée au traitement par les techniques de semi-groupes (voir [33]).

Existence et unicité de la solution

Les résultats sur l'existence (globale) et l'unicité de la solution à l'aide des semi-groupes, sont bien détaillés dans [10, 12, 17, 33].

Supposons que

- **(H1)** L'opérateur \mathcal{A} est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'opérateurs bornés sur $\mathcal{H} : \{S(t) : t \geq 0\}$.
- **(H2)** L'opérateur F est localement lipschitzien dans un espace intermédiaire entre \mathcal{H} et $D(\mathcal{A})$,

Ici, l'opérateur \mathcal{A} représente la diffusion, et l'opérateur F représente la réaction.

Ainsi, le problème de Cauchy (*ERDO*) peut être étudié dans le casre des équations paraboliques abstraites à l'aide des semi-groupes (analytiques).

De plus, au lieu de traiter le problème (*ERDO*) directement, on peut considérer une forme affaiblie de (*ERDO*), l'équation intégrale suivante

$$(E.I) \quad \mathcal{U}(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(\mathcal{U}(\tau))d\tau, \quad t \geq 0.$$

Pour montrer qu'une solution d'équation intégrale (*E.I*) est une solution au sens classique du système de réaction-diffusion (*E.R.D*) voir [10, 11, 13, 17].

D'abord, avec le principe de l'application contractante dans un espace de Banach, on montre l'existence locale de la solution. Et après, sous des conditions sur la donnée initiale et la régularité de F , on montre que la solution vérifie le problème (*ERDO*) (voir [10, 17]).

Remarque 1.3.3:

(1) *Étant donné $T > 0$, on appelle solution de (*ERDO*) dans l'intervalle de temps $[0, T[$ toute application $\mathcal{U} \in C([0, T[, D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, T[, \mathcal{H})$ qui vérifie le problème de Cauchy (*ERDO*).*

(2) *Dans ce contexte, pour les systèmes de réaction-diffusion, l'aspect parabolique de ces systèmes assure l'hypothèse (H1).*

1.3.4 Existence d'une solution globale

Pour prouver l'existence d'une solution pour tout t non négatif, c'est à dire une solution globale, il suffit d'après [16, 17] de trouver une estimation a priori de la solution pour $t \geq 0$.

Ce problème se traduit en terme d'ensembles invariants, d'inégalités différentielles, de semi-groupes,...[28].

La technique de la région invariante et la fonctionnelle de Lyapouov sont les plus utilisées pour résoudre ce type de problèmes (voir [17]). D'après [21], à l'aide de ces méthodes on peut obtenir l'existence globale des solutions pour un système de (ERD) avec une matrice pleine.

Plus récemment, dans [18], ce problème a été étudié pour des systèmes de deux inconnues, où l'un de ces deux inconnus est borné, avec une méthode basée sur la théorie de L^p -régularité pour l'opérateur de la chaleur. Cette méthode peut s'appliquer à une classe générale de système de deux équations, comme les systèmes appelés "Brussélateur".

Si on considère

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - a\Delta U - b\Delta V = -\lambda f(U, V), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - c\Delta U - d\Delta V = -\mu f(U, V). \end{cases}$$

Avec $a = b = \lambda - 1 = \mu - 1$, $f(U, V) = U.V^\beta$, on peut établir l'existence globale et des solutions avec des données initiales positives pour $1 < \beta < \frac{n+2}{n}$ avec une méthode basée sur les injections de Sobolev.

Ce résultat a été amélioré par [28] qui a montré que les solutions de ces systèmes existent globalement pour $\beta > 1$.

1.4 Solutions stationnaires, états d'équilibre, stabilité et modèles.

Les solutions stationnaires du système (ERD) sont les solutions du système indépendantes du temps t .

Définition 1.4.1: *On appelle toute solution du système (ERD) indépendante de t , solution stationnaire ou état d'équilibre.*

La stabilité (linéaire) des solutions stationnaires du système (ERD) est déterminée par le signe des valeurs propres du système linéarisé.

On considère le problème suivant

$$(ERD)' \quad \begin{cases} U_t = f(U) + D\Delta U, & \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial U}{\partial n}(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

Ω est un domaine borné, D est une matrice diagonale.

La stabilité de la solution stationnaire de $(ERD)'$ est définie par

Définition 1.4.2: *On dit que $V(x)$ une solution stationnaire de (ERD) est stable, si $w(x, t) = V(x)$ est stable en tant que solution du problème avec les conditions initiales $w(x, 0) = U_0(x) = V(x)$ (voir [3]).*

1.4.1 Équations semi-linéaires : solutions globales

Dans ce paragraphe et dans ceux qui suivront, on peut trouver plus de détails dans [46].

Considérons l'équation de réaction-diffusion scalaire (le cas où $n = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u) \tag{1.1}$$

dans \mathbb{R} . La fonction $F \in C^2(\mathbb{R})$ satisfait les conditions suivantes

$$F(0) = 0, \quad F(u) < 0 \text{ pour } 0 < u < u_0, \quad F(u) > 0 \text{ pour } u > u_0, \quad F'(0) < 0,$$

et

$$\int_0^{u_1} F(u) du = 0$$

pour certains nombres positifs u_0 et u_1 , tels que $u_0 < u_1$. Les fonctions de ce type surviennent en particulier dans la dynamique de population, et en particulier dans le cas de la reproduction sexuelle (voir [24]).

L'équation (1.1) possède une solution stationnaire $w(x)$ qui s'annule à l'infini :

$$w'' + F(w) = 0, \quad w(\pm\infty) = 0. \quad (1.2)$$

Cette solution peut être calculée explicitement à partir du système de deux équations de premier ordre suivant

$$w' = p, \quad p' = -F(w).$$

On peut facilement vérifier que $w(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $w(x) \rightarrow 0$ exponentiellement quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Proposition 1.4.3: *La valeur propre principale du problème*

$$v'' + F'(w(x))v = \lambda v, \quad v(\infty) = 0$$

est positive.

Démonstration : *La preuve est bien détaillée dans [46].* □

1.4.2 Instabilité diffusive pour un système de deux équations

Considérons l'exemple le plus simple d'un système de réaction-diffusion (voir [46])

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + F_1(u_1, u_2), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + F_2(u_1, u_2), \quad (1.4)$$

sur l'intervalle $0 < x < L$, avec des conditions aux limites de Neumann

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0,L} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Supposons que

$$\exists u_1^0, u_2^0, \quad F_i(u_1^0, u_2^0) = 0, \quad i = 1, 2$$

alors $u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0$ est une solution stationnaire du problème (1.3)-(1.5). C'est aussi un point stationnaire du système différentiel des équations

$$\frac{du_1}{dt} = F_1(u_1, u_2), \quad (1.6)$$

$$\frac{du_2}{dt} = F_2(u_1, u_2). \quad (1.7)$$

Supposons que ce point soit stable, c'est-à-dire la matrice

$$M_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

où

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i(u_1^0, u_2^0)}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, 2$$

admet deux valeurs propres avec des parties réelles négatives. La question est de savoir si cette solution est également stable en tant que solution du problème (1.3)-(1.5). Il semble qu'il est instable, et que la diffusion déstabilise cette solution. Cette instabilité, qui peut paraître contradictoire parce que la diffusion possède habituellement un effet stabilisant, conduit à la bifurcation de solutions non constantes appelées structures Turing (dissipatives ou diffusives). Pour déterminer les conditions de cette instabilité, on linéarise le problème (1.3)-(1.5) au voisinage de ces solutions stationnaires, et on obtient le problème de la valeur propre

$$d_1 v_1'' + a_{11} v_1 + a_{12} v_2 = \lambda v_1, \quad (1.8)$$

$$d_2 v_2'' + a_{21} v_1 + a_{22} v_2 = \lambda v_2, \quad (1.9)$$

$$v'_i(0) = v'_i(L) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.10)$$

On cherche une solution sous la forme

$$v_1 = p_1 \cos(kx), \quad v_2 = p_2 \cos(kx),$$

tel que $k = \frac{n\pi}{L}$, $i = 1, 2$, est choisi pour satisfaire aux conditions aux limites (1.10). Ensuite, les valeurs propres du problème (1.8)-(1.10) peuvent être trouvées en tant que valeurs propres de la matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{11} - d_1 k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - d_2 k^2 \end{pmatrix}.$$

Notons ici que la matrice M_0 (cas particulier de la matrice M_k avec $k = 0$) admet des valeurs propres avec des parties réelles négatives. Nous devons vérifier que la diminution des éléments diagonaux peut augmenter les parties réelles d'une des valeurs propres. Il est évidemment impossible si $d_1 = d_2$. Il semble être possible pour différents coefficients de diffusion.

On a

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0,$$

tels que τ est la trace et δ le déterminant de la matrice M_k ,

$$\tau = a_{11} + a_{22} - (d_1 + d_2)k^2, \quad \delta = d_1 d_2 k^4 - (a_{11} d_2 + a_{22} d_1)k^2 + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Comme la trace de la matrice M_0 est négative, elle reste aussi négative pour la matrice M_k . Par conséquent, la somme des valeurs propres est négative, et cette matrice peut avoir une valeur propre avec une partie réelle positive seulement dans le cas où une des valeurs propres reste négative et une autre croise l'origine.

Par conséquent, si le déterminant $\delta = 0$, alors on obtient

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{11}}{d_1} + \frac{a_{22}}{d_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a_{11}}{d_1} + \frac{a_{22}}{d_2} \right)^2 - \frac{\det M_0}{d_1 d_2}}. \quad (1.11)$$

L'expression dans le côté droit de (1.11) devrait être réelle et positive. Cette condition est satisfaite si

$$\frac{a_{11}}{d_1} + \frac{a_{22}}{d_2} > 2\sqrt{\frac{\det M_0}{d_1 d_2}} \quad (1.12)$$

Puisque $a_{11} + a_{22} < 0$, l'inégalité (1.12) ne peut être satisfaite que si l'une des constantes a_{11} ou a_{22} est positive, bien que leur somme soit négative. Supposons que $a_{11} > 0$ et $a_{22} < 0$. Alors, pour tout d_2 suffisamment grand, tous les autres paramètres étant fixés, la condition (1.12) sera vérifiée.

Si les paramètres traversent la limite de stabilité, et la valeur propre principale devient positive, alors la solution homogène (dans l'espace) perd sa stabilité.

1.4.3 Modèles pour les structures de Turing Cross diffusion

Ici, nous survolons le sujet en question, mais pour de plus amples détails voir [46].

Considérons le système

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + d_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + F_1(u_1, u_2), \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + F_2(u_1, u_2), \quad (1.14)$$

qui diffère de (1.3), (1.4) par la présence du terme de diffusion croisée dans l'équation (1.13). Alors la matrice correspondante, qui détermine les valeurs propres du problème linéarisé, devient

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{11} - d_1 k^2 & a_{12} - d_{12} k^2 \\ a_{21} & a_{22} - d_2 k^2 \end{pmatrix}.$$

Si nous supposons que

$$a_{11} > 0, a_{21} > 0, a_{12} < 0, a_{22} < 0, a_{11} + a_{22} < 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \quad (1.15)$$

la matrice M_0 admet des valeurs propres avec des parties réelles négatives. Prenons $d_1 = d_2$ assez petit. Ensuite, pour $d_{12} = 0$, la trace de la matrice M_k reste négative, son déterminant positif et les valeurs propres sont dans le demi-plan gauche du plan complexe. En augmentant d_{12} (les autres paramètres étant fixés), on obtient une matrice avec une trace négative et un déterminant zéro. Par conséquent, une valeur propre reste négative tandis qu'une autre est égale à zéro. Ainsi, dans le cas de la diffusion croisée, l'instabilité de Turing est possible même pour des coefficients d'auto-diffusion égaux.

Pour attaquer et résoudre ces systèmes on utilise des techniques et des outils classiques, comme le principe du maximum, les théorèmes de comparaison, les inégalités différentielles, les régions invariantes, etc....

Les régions invariantes introduites dans la paragraphe suivant, est une notion géométrique, qui représente l'un des outils les plus importants dans l'étude du comportement des solutions des systèmes de réaction-diffusion du type (*ERD*) pour des temps assez grands.

1.5 Régions invariantes

Au cours des dernières années, les recherches consacrés à l'existence globale et la positivité des solutions d'équations aux dérivées partielles de type parabolique ont été traitées par les inégalités différentielles. Mais quand cet outil analytique fait défaut (voir [25, 41]), on recourt à une notion géométrique efficace, ce sont les régions invariantes avec lesquelles on surmonte souvent la difficulté due au couplage des termes de réaction de certains systèmes de réaction-diffusion.

D'abord, nous rappelons le théorème de comparaison suivant, un résultat d'inégalités différentielles pour l'équation scalaire.

Théorème 1.5.1: ([32, 42])

Soient u et v , deux fonctions de (x, t) de classe C^2 par rapport à x dans Ω , de classe C^1 par rapport à t dans $[0, T]$, et f une fonction de classe C^1 . Supposons que u et v vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u - f(u) \leq v_t - \Delta v - f(v), (x, t) \in \Omega \times [0, T[\\ u(0, x) \leq v(0, x), x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u \leq \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta v, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{array} \right.$$

telles que $\beta = \beta(x, t) \geq 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$, ν étant la normale extérieure à Ω . Alors on a $u(t, x) \leq v(t, x)$, pour tout $(t, x) \in [0, T[\times \Omega$.

Si on pose des conditions de monotonie sur le terme de réaction, on obtient des théorèmes de comparaison pour le système (*ERD*) (voir [3, 41]).

Définition 1.5.2:

On dit qu'une matrice carrée $n \times n$ est diagonale, si elle est égale à la matrice $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ définie par :

$$\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.5.3: ([3, 25])

Supposons que la matrice de diffusion A est diagonale, $A = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ avec $d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, le champ X est une application quasi-monotone croissante, et $0 \leq U_0 \leq Z_0$ sur Ω . Si la solution Z du système de réaction (EDO) existe sur $[0, T^*[$, alors la solution du système de réaction-diffusion (ERD) satisfait

$$0 \leq U(x, t) \leq Z(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, T^*[.$$

Remarque 1.5.4:

Dans la proposition ci-dessus, le système est considéré avec une diffusion diagonale. L'effet du couplage du système ne concerne que les termes de la réaction.

De plus, la matrice de diffusion diagonale conduit à une forme rectangulaire des régions invariantes.

D'après la proposition ci-dessus on conclut que : si $Z(t) = Z_0$ est une solution stationnaire du système de réaction (EDO), alors la solution $U(x, t)$ du système de réaction-diffusion (ERD) ne sort jamais du rectangle (ou en général parallélépipède) $\{U \in \mathbb{R}^n : 0 \leq U \leq Z_0\}$. C'est pour cette raison, que cet ensemble s'appelle une région invariante dans l'espace des phases.

Les régions invariantes

Définition 1.5.5: On dit qu'un ensemble fermé $\Sigma_w \subset \mathbb{R}^n$ est une région (positivement) invariante pour le système d'équations aux dérivées partielles (ERD), si toute solution $w(x, t)$ du système (ERD) ayant la valeur initiale $w(x, 0)$ dans Σ_w , reste (ne sort jamais) dans Σ_w pour tout $x \in \Omega$, et tout $t \in [0, \delta)$ pour un certain $\delta > 0$ (qui représente le temps maximal d'existence de la solution).

Définition 1.5.6 ([37]): Soit $\{F_t\}_{0 \leq t < T}$ ($0 \leq T < +\infty$), une famille de parties de \mathbb{R}^n . On dira qu'elle est invariante par rapport à X (le champ vectoriel dans \mathbb{R}^n) si :

1) Pour tous t et h tels que $0 \leq t \leq t + h < T$,

$$X_h(F_t) \subset F_{t+h}$$

où X_h représente le flot associé à X .

2) On dira qu'elle est bornée si :

$$\forall t \in [0, T[, \quad \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} F_\tau \text{ est bornée.}$$

Remarque 1.5.7: ([3, 38, 47])

Si la solution est unique, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble Σ_w soit une région invariante pour le système de réaction (EDO) associé au système (ERD) est la **condition de tangence** suivante

$$n(z) \cdot X(z) \leq 0, \quad \forall z \in \partial\Sigma_w,$$

où $\partial\Sigma_w$ est le bord de Σ_w , et $n(z)$ est la normale extérieure à Σ_w au point $z \in \partial\Sigma_w$.

Cette condition n'est pas suffisante pour les systèmes de réaction-diffusion (ERD), mais elle reste toujours nécessaire.

Remarque 1.5.8: L'interprétation de la condition de tangence géométriquement est la suivante

Toute trajectoire représentée par $w(t)$, si elle entre dans la région Σ_w , ou bien si elle part d'un point de cette région, alors elle reste dans Σ_w .

Les trajectoires peuvent traverser la frontière $\partial\Sigma_w$ vers l'intérieur mais jamais vers l'extérieur.

D'après la relation $\langle n(z), X(z) \rangle \leq 0$, en tout point z de la frontière $\partial\Sigma_w$, le champ vectoriel (de la réaction) X doit être tangent à Σ_w , ou pointer vers l'intérieur de Σ_w .

Remarque 1.5.9:

Les systèmes (ERD) les plus étudiés dans la littérature sont ceux dont la matrice de diffusion est diagonale. Ainsi, dans l'espace des phases, la plupart des régions invariantes qu'on rencontre sont des ensembles rectangulaires.

Proposition 1.5.10: ([3, 25])

Supposons que la matrice de diffusion A est diagonale c'est à dire $A = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ avec $d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, et que X est une application localement lipschitzienne dans \mathbb{R}^n . Soient $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n tels que

$$\begin{cases} X_i(w) \geq 0 & \text{pour } w_i = a_i, \quad a \leq w \leq b \\ X_i(w) \leq 0 & \text{pour } w_i = b_i, \quad a \leq w \leq b \end{cases}$$

Alors l'ensemble

$$\Sigma_w = \bigcap_{i=1}^n \{w : a_i \leq w_i \leq b_i\}$$

est une région invariante pour (ERD).

Une démonstration détaillée de cette proposition est donnée dans [3] (Th.5.17, page 80), et pour le cas où $a = 0$ dans [25] (proposition 4, page 173).

Remarque 1.5.11:

On voit que la région invariante de la proposition si-dessus est un rectangle (ou bien parallélépipède) dans \mathbb{R}^n .

1.6 Les systèmes (*EDO*) et les systèmes (*ERD*)

Dans ce paragraphe on présente quelques résultats et relations entre les régions invariantes correspondantes aux systèmes (*EDO*) et (*ERD*).

Soit le système de réaction-diffusion homogène (*ERDH*) défini par

$$w : \Omega \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(ERDH) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = A\Delta w \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Remarque 1.6.1:

On dit qu'un ensemble fermé $\Sigma_w \subset \mathbb{R}^n$ est une région positivement invariante associée au flot local défini par le système (*ERDH*), si toute solution $w(x, t)$ de (*ERDH*) ayant la valeur initiale $w(x, 0)$ dans Σ_w , reste dans (ne sort pas de) Σ_w pour tout $x \in \Omega$, et tout $t \in [0, T)$.

Énonçons deux résultats de R. H. Martin dans [25], pour des systèmes à matrice de diffusion diagonale.

Proposition 1.6.2: ([25])

Supposons que la matrice de diffusion est diagonale, c'est à dire $A = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, avec $d_i > 0, i = 1, \dots, n$. Supposons que Σ_w est un ensemble convexe fermé et borné dans $(\mathbb{R}^+)^n$, et invariant pour (*EDO*) et (*ERDH*).

Alors pour tout $0 < w(x, 0) \in \Sigma_w, \forall x \in \Omega$, la solution w de (*ERD*) existe sur $\Omega \times [0, \infty)$ et $w(x, t) \in \Sigma_w, \forall (x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$.

Proposition 1.6.3: ([25])

Supposons que Σ_w est un ensemble convexe fermé, borné dans $(\mathbb{R}^+)^n$, et invariant pour (EDO), supposons que la matrice de diffusion est diagonale, et de plus qu'il existe $d > 0$ telle que $d_i = d$, $\forall i = 1, \dots, n$. Alors si $w(x, 0) \in \Sigma_w$, $\forall x \in \Omega$, la solution w du (ERD) vérifie $w(x, t) \in \Sigma_w$, $\forall (x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$.

Lorsque la matrice de diffusion du système (ERD) n'est pas diagonale, on a le résultat suivant, celui de K. N. Chueh, C. C. Conley et J. S. Smoller dans [5], et dans [42].

Soient les n fonctions G_1, \dots, G_n réelles assez régulières sur \mathbb{R}^n , et l'ensemble Σ_w défini par

$$\Sigma_w = \{v \in \mathbb{R}^n : G_i(v) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Définition 1.6.4:

Une fonction régulière $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite quasi-convexe au point $v \in \mathbb{R}^n$ si

$$\langle \nabla G(v), z \rangle = 0 \implies d^2 G_v(z, z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Si la matrice de diffusion A du système (ERD) est définie positive, et si le champ vectoriel X est une application localement lipschitzienne, alors on a le théorème suivant

Théorème 1.6.5: ([5])

L'ensemble Σ_w est une région (positivement) invariante pour le système (ERD), si et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées aux points v_0 sur la frontière de Σ_w :

- 1- $\nabla G_i(v_0)$ est un vecteur propre à gauche de A .
- 2- G_i est une fonction quasi-convexe au point v_0 .
- 3- $\langle \nabla G_i(v_0), X(v_0) \rangle \leq 0$

Remarque 1.6.6:

On peut dire d'après le théorème précédent, pour qu'une région Σ_w de \mathbb{R}^n soit invariante, pour le système (ERD), il faut et il suffit qu'elle le soit pour le système de réaction (EDO), qu'elle soit convexe et que l'ensemble des vecteurs propres à gauche de A soit une partie génératrice de ce convexe.

D'autre part, dans le cas où la matrice de diffusion est diagonale, d'après ce théorème, Σ_w est une région de forme rectangulaire (ou parallélépipédique), donc on a uniquement besoin de vérifier le troisième point.

Rappelons maintenant un résultat de E. Conway, D. Hoff et J. Smoller dans [8]. Il exprime un phénomène diffusif, lorsque le système (ERD) possède une matrice de diffusion (non diagonale) avec des valeurs propres suffisamment grandes, et admet aussi une région invariante bornée.

Théorème 1.6.7: ([8])

Supposons que (ERD) admet une région invariante bornée $\Sigma_w \subset \mathbb{R}^n$ et $A > 0$.

Notons par σ la quantité suivante

$$\sigma = d\lambda - M$$

où λ est la plus petite valeur propre (positive) de $(-\Delta)$ sur Ω avec la condition de Neumann, d est la plus petite valeur propre de A et $M = \max \{|X(w)| : w \in \Sigma_w\}$.

Si $\sigma > 0$ et w est une solution du système (ERD) avec $w_0 \in \Sigma_w$. Alors il existe des constantes $c_i > 0$, $i = 1, 2$ telles que

$$\|w(., t) - \bar{w}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_i e^{-\sigma t}$$

où \bar{w} est la moyenne de w sur Ω , et satisfait le système d'équations différentielles

suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{w}}{dt} = X(\bar{w}) + Y(t) \\ \bar{w}(0) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} U_0(x) dx \cdot \\ \text{où } |Y(t)| \leq c_2 e^{-\sigma t} \end{array} \right.$$

Donc d'après ce théorème on conclut qu'une solution w du système (ERD) tend asymptotiquement vers une solution homogène en x , si les valeurs propres de A sont suffisamment grandes, dans une région invariante bornée.

2. ENSEMBLES INVARIANTS POUR DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION NON CLASSIQUES

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux systèmes d'équations couplées, qui modélisent la conduction de la chaleur dans une mixture binaire, isotrope et homogène (voir [2, 19, 27, 35]). On étudie particulièrement les régions invariantes dans le quadrant positif du plan des phases.

2.1 Les équations du problème

Dans le cadre de la thermodynamique du transfert de chaleur dans des mélanges binaires, nous allons traiter le modèle proposé par [14]. Le système d'équations aux dérivées partielles suivant représente sa formulation mathématique

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}\partial_t u(t, x) + a_{12}\partial_t v(t, x) = k_1\Delta u(t, x) + f(u(t, x), v(t, x)) \\ a_{21}\partial_t u(t, x) + a_{22}\partial_t v(t, x) = k_2\Delta v(t, x) + g(u(t, x), v(t, x)) \end{cases}$$

pour $t > 0$ et x dans le domaine borné Ω dans \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ou 3) et k_1, k_2 deux réels positifs. Le système (S) est considéré avec les conditions de Neumann, et les données initiales suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{et} \quad v(0, x) = v_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega. \end{aligned}$$

On réécrit le système (S) sous la forme suivante

$$M(\partial_t U) = \mathbf{k} \cdot \Delta U + F(U),$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

et

$$U(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \cdot \Delta U(t, x) = \begin{pmatrix} k_1 \Delta u(t, x) \\ k_2 \Delta v(t, x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(U) = \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une région invariante dans le quadrant positif du plan des phases, on étudiera la matrice M .

2.2 L'existence d'une région invariante positive

Désignons par (C_g) les conditions suivantes

$$(C_g) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < d = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} < \frac{1}{4} (a_{11} + a_{22})^2, \quad a_{22} - |a_{11}| > 0, \quad \text{et} \quad a_{12}a_{21} < 0. \\ A_1 = \frac{1}{2} \frac{a_{11} - a_{22} - \delta}{a_{12}}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{-a_{11} + a_{22} - \delta}{a_{12}}, \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}. \end{array} \right.$$

Sous ces conditions, on peut réécrire le système (S) sous la forme

$$\partial_t U = \mathbf{k} \cdot M^{-1} \Delta U + M^{-1} F(U).$$

Pour $(t, x) \in [0, T[\times \Omega$, et par un changement de variables, on définit $w(t, x) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ par

$$w_1(t, x) = u(d.t, \sqrt{k_1}x), \quad \text{et} \quad w_2(t, x) = v(d.t, \sqrt{k_2}x),$$

2. Ensembles invariants pour des systèmes de réaction-diffusion non classiques 42

où $U(t, x) = (u(t, x), v(t, x))$ est la solution de (S) . Le système (S) prend alors la forme

$$\begin{cases} \partial_t w_1 &= a_{22} \Delta w_1 - a_{12} \Delta w_2 + a_{22} f(w_1, w_2) - a_{12} g(w_1, w_2) \\ \partial_t w_2 &= -a_{21} \Delta w_1 + a_{11} \Delta w_2 - a_{21} f(w_1, w_2) + a_{11} g(w_1, w_2) \end{cases}$$

Ainsi, le système (S) devient (voir [30])

$$(S_w) \quad \partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} + EF \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

où la matrice E est définie par $d.M^{-1}$.

Remarque 2.2.1:

* Notons par I la matrice identité, si $M = I$ (le système est classique), on a les résultats de [5, 25].

** Sous les conditions (C_g) la matrice E admet les deux vecteurs propres $v_1 = (A_1, 1)$ et $v_2 = (A_2, -1)$ qui correspondent respectivement aux deux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{a_{11} - a_{22} - \delta}{a_{12}} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{-a_{11} + a_{22} - \delta}{a_{12}}$$

tel que

$$\delta = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}$$

*** Sous les conditions (C_g) , λ_1 et λ_2 sont positives si $A_1 < -1$ et $0 < A_2 < 1$.

Considérons le terme de réaction $F(w)$ correspondant au modèle de systèmes étudiés dans [35]

Proposition 2.2.2: ([29])

Supposons que les conditions (C_g) sont satisfaites et $F(w_1, w_2) = (-c(w_1 - w_2), c(w_1 - w_2))$ avec $c > 0$, l'ensemble défini par

$$\Sigma_w = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ tels que } w_1 \geq 0 \text{ et } A_2 w_1 \leq w_2 \leq -A_1 w_1\}$$

est une région invariante pour (S_w) .

Définition 2.2.3: On dit que $F(u, v)$ est quasi-positive si elle vérifie pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$: $F_1(0, v) \geq 0$ ou $F_2(u, 0) \geq 0$.

Remarque 2.2.4:

Dans le cas de notre système $F(w_1, w_2)$ est quasi-positive, d'après [25] la région invariante positive d'un système de réaction-diffusion (classique) est égale au quadrant positif (entier), mais dans notre cas Σ_w est strictement inclus dans le quadrant positif.

De plus, sous certaines conditions on montre que cette région n'est pas seulement invariante, mais elle est aussi un ensemble attracteur.

2.3 L'ensemble attracteur

Définition 2.3.1:

On dit qu'un ensemble $\Sigma_w \subset \mathbb{R}_+^2$ est un attracteur (on dit aussi que la solution $w(t)$ est attirée par Σ_w), s'il vérifie

- 1) Σ_w est une région invariante.
- 2) Σ_w admet un voisinage ouvert O tel que, pour toute solution $w(t)$ du (S_w) avec $w(0) \in O$

$$\text{dist}(w(t), \Sigma_w) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Où dist désigne la distance entre un point et un ensemble c'est à dire,

$$d(x, \Sigma_w) = \inf_{y \in \Sigma_w} d(x, y),$$

et $d(x, y)$ est la distance entre x et y dans \mathbb{R}^2 .

Définition 2.3.2: Supposons que Σ_w est un attracteur, le bassin d'attraction de Σ_w est le plus grand ouvert O qui satisfait la condition (2). .

Proposition 2.3.3: *Supposons que les hypothèses de la proposition (2.2.2) sont satisfaites. Si pour $t \geq 0$, $w(t) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ est une solution positive de (S_w) (dans \mathbb{R}_+^2) avec une condition initiale $w(0) = (w_1(0, x), w_2(0, x)) \in \mathbb{R}_+^2$, $\forall x \in \Omega$, alors $w(t)$ est attirée par l'ensemble Σ_w .*

Démonstration : *On utilise quelques techniques et transformation pour montrer, avec l'aide du théorème de comparaison, que toute trajectoire $w(t) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ dans le quadrant positive, est attirée par la région Σ_w .*

En posant $G_1 = A_1 w_1 + w_2$ et $G_2 = A_2 w_1 - w_2$ où w_1 et w_2 sont les solutions de (S_w) dans le premier quadrant positive.

Si on multiplie scalairement l'équation (S_w) par le vecteur propre à gauche $v_1 = (A_1, 1)$, on arrive à

$$\left\langle v_1, \frac{\partial w}{\partial t} \right\rangle = \lambda_1 \langle v_1, \Delta w \rangle + \lambda_1 \langle v_1, F(w) \rangle.$$

En prenant $G_1 = A_1 w_1 + w_2 > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial t} &= \lambda_1 G_{1xx} + \lambda_1 (-cA_1 (w_1 - w_2) + c(w_1 - w_2)) \\ &= \lambda_1 G_{1xx} + \lambda_1 c (-G_1 + A_1 w_2 + w_1) \\ &\leq \lambda_1 G_{1xx} + \lambda_1 c (-w_2 - A_1 w_1) \\ &= \lambda_1 G_{1xx} + \lambda_1 c (-2G_1), \end{aligned}$$

ainsi,

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} - \lambda_1 G_{1xx} + 2\lambda_1 c G_1 \leq 0.$$

Alors si $J_1(t, x) = G_{10} e^{-2\lambda_1 ct}$ avec $G_{10} = \max_{x \in \Omega} G_1(0, x)$

on a

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \lambda_1 J_{1xx} - 2\lambda_1 c G_{10} e^{-2\lambda_1 ct} = \lambda_1 J_{1xx} - 2\lambda_1 c J_1.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_1}{\partial t} - \lambda_1 G_{1xx} + 2\lambda_1 c G_1 \leq 0 = \frac{\partial J_1}{\partial t} - \lambda_1 J_{1xx} + 2\lambda_1 c J_1 \\ \frac{\partial G_1}{\partial \nu} = 0 = \frac{\partial J_1}{\partial \nu} \\ G_1(0, x) \leq G_{10} = J_1(0, x). \end{array} \right.$$

Maintenant, d'après le théorème.10.1 dans [42] on conclut que

$$G_1(t, x) \leq J_1(t, x) = G_{10}e^{-2\lambda_1 ct}.$$

En d'autres termes $G_1(t, x)$ converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$

$$G_1(t, x) = A_1 w_1(t, x) + w_2(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (2.1)$$

De la même manière, si on multiplie scalairement l'équation (S_w) par le vecteur propre à gauche v_2 , et si on prend $G_2 = A_2 w_1 - w_2 > 0$, nous obtenons un résultat similaire pour G_2

$$G_2(t, x) = A_2 w_1(t, x) - w_2(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (2.2)$$

Finalement (2.1) et (2.2) implique que Σ_w est un attracteur pour \mathbb{R}_+^2 .

□

Remarque 2.3.4:

Le bassin d'attraction de (S_w) est tout le quadrant positif dans le plan de phase.

La question qui se pose maintenant est : est-ce que "l'attractivité" de la région Σ_w est une propriété purement asymptotique ?

3. L'ENSEMBLE ABSORBANT

Parmi les attracteurs les plus intéressants, il y a ce qu'on appelle les ensembles absorbants (voir [43]), c'est le sujet de cette partie de notre travail. Nous allons d'abord rappeler quelques outils et concepts mathématiques, utilisés dans la suite de notre étude.

3.1 L'inégalité de Gronwall et Langenhop

Cet outil est fréquemment utilisé dans la théorie des équations différentielles, notamment pour obtenir des majorations de solutions, afin d'arriver (entre autres) à des résultats d'existence globale.

L'inégalité de Gronwall et Langenhop, et son contexte mathématique sont bien détaillés dans [45]. Néanmoins, nous donnons ici un aperçu.

3.1.1 Normes induites

Définition 3.1.1: Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{C}^n . Alors la norme induite de la matrice A correspondante à la norme $\|\cdot\|$ est définie par

$$\|A\|_i = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.2: La définition précédente nous donne deux fonctions distinctes ; la fonction norme $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction norme induite $\|\cdot\|_i : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1.2 Mesures matricielles

Définition 3.1.3: Soit $\|\cdot\|_i$ une norme induite de la matrice A sur $\mathbb{C}^{n \times n}$. Alors la mesure matricielle correspondante est la fonction $\mu(\cdot) : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \epsilon A\|_i - 1}{\epsilon}. \quad (3.2)$$

Théorème 3.1.4: Soient $\|\cdot\|_i$ une norme induite de la matrice A sur $\mathbb{C}^{n \times n}$ et $\mu(\cdot)$ la mesure matricielle correspondante.

Alors $\mu(\cdot)$ vérifie les propriétés

$$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \text{ la limite } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \epsilon A\|_i - 1}{\epsilon} \text{ existe et bien définie.} \quad (3.3)$$

$$-\|A\|_i \leq \mu(A) \leq \|A\|_i, \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (3.4)$$

$$\mu(\alpha A) = \alpha \mu(A), \forall \alpha \geq 0, \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (3.5)$$

$$\max\{\mu(A) - \mu(-B), \mu(B) - \mu(-A)\} \leq \mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B), \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (3.6)$$

$\mu(\cdot)$ est une fonction convexe :

$$\mu[\alpha A + (1 - \alpha)B] \leq \alpha \mu(A) + (1 - \alpha)\mu(B), \forall \alpha \in [0, 1], \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (3.7)$$

$$\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \text{ alors } -\mu(-A) \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \mu(A). \quad (3.8)$$

Remarque 3.1.5:

*) En général, il est difficile d'obtenir une expression explicite pour la norme induite d'une matrice. Donc, il est encore plus difficile d'obtenir une expression explicite pour la mesure de la matrice.

Néanmoins, les fonctions de mesure correspondant aux normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ peuvent être calculées.

*) Le tableau suivant donne les fonctions de mesures correspondant aux normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{C}^n (ou \mathbb{R}^n).

Normes sur \mathbb{C}^n	Mesure de matrice dans $\mathbb{C}^{n \times n}$
$\ x\ _\infty = \max_i x_i $	$\mu_\infty(A) = \max_i \left[a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} \right]$
$\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	$\mu_1(A) = \max_j \left[a_{jj} + \sum_{i \neq j} a_{ij} \right]$
$\ x\ _2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i ^2 \right)^{1/2}$	$\mu_2(A) = \lambda_{\max}(A^* + A)/2$

***) L'estimation (3.8) est plus exacte pour μ_2 .

3.1.3 Estimations de la solution

On donne une méthode pour obtenir à la fois des bornes (limites) supérieures et inférieures pour la norme d'une solution d'une équation différentielle donnée. Cette estimation s'obtient par les inégalités de Gronwall et Langenhop, sujet du théorème suivant.

Théorème 3.1.6: *Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad t \geq 0 \quad (3.9)$$

tels que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $A(t)$ est une $n \times n$ matrice de fonctions continues. Soit $\|\cdot\|$ une norme dans \mathbb{R}^n . Désignons par $\|\cdot\|_i$ et $\mu(\cdot)$ respectivement la norme induite de la matrice correspondante à $\|\cdot\|$, et la mesure matricielle correspondante sur $\mathbb{R}^{n \times n}$. Alors, pour tout $t \geq t_0 \geq 0$, on a

$$\|x(t_0)\| \exp \left\{ \int_{t_0}^t -\mu[-A(\tau)] d\tau \right\} \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp \left\{ \int_{t_0}^t \mu[A(\tau)] d\tau \right\} \quad (3.10)$$

Démonstration : La démonstration est bien détaillée dans [45].

Nous savons que l'équation différentielle (3.9) a une solution unique sur $[0, \infty[$.

Pour prouver les inégalités (3.10), observons d'abord, qu'à partir de la formulation intégrale de (3.9), il s'ensuit que

$$x(t + \delta) = x(t) + \delta A(t) x(t) + o(\delta), \forall \delta > 0, \quad (3.11)$$

où $o(\delta)$ indique un terme d'erreur

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\|o(\delta)\|}{\delta} = 0. \quad (3.12)$$

D'après (3.11) on a

$$\begin{aligned} x(t + \delta) &= [I + \delta A(t)] x(t) + o(\delta) \\ \Rightarrow \|x(t + \delta)\| &\leq \|[I + \delta A(t)]\|_i \|x(t)\| + o(\delta) \\ \Rightarrow \|x(t + \delta)\| - \|x(t)\| &\leq (\|[I + \delta A(t)]\|_i - 1) \|x(t)\| + o(\delta) \\ \Rightarrow \frac{d^+}{dt} \|x(t)\| &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\|x(t + \delta)\| - \|x(t)\|}{\delta} \leq \mu[A(t)] \|x(t)\|, \end{aligned} \quad (3.13)$$

multipliant les deux côtés de (3.13) par le facteur d'intégration $\exp \left\{ - \int_{t_0}^t \mu[A(\tau)] d\tau \right\}$ (ou, appliquant de façon équivalente l'inégalité de Gronwall) donne l'inégalité droite dans (3.10).

La preuve de l'inégalité de gauche dans (3.10) est tout à fait semblable, en commençant par $x(t - \delta) = x(t) - \delta A(t) x(t) + o(\delta)$. \square

3.2 Ensemble absorbant

Définition 3.2.1: Soient $\Sigma_w \subset \mathbb{R}_+^2$ et O un ouvert contenant Σ_w .

On dit que Σ_w est un ensemble absorbant dans O , si la trajectoire (l'orbite) de tous les ensembles bornés de O pénètre dans Σ_w après un certain temps (fini).

Corollaire 3.2.2:

Sous les hypothèses de la proposition 2.3.3, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, l'ensemble défini par

$\Sigma_\epsilon = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ tels que } w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \text{ et } A_2 w_1 - \epsilon < w_2 < -A_1 w_1 + \epsilon\}$
est un ensemble absorbant dans \mathbb{R}_+^2 .

Démonstration :

Sous les hypothèses de la proposition 2.3.3, Σ_w est un ensemble attracteur dans \mathbb{R}_+^2 . Ici, on distingue deux cas, en dehors de Σ_w au-dessus ($w^+(t, x)$), et en dehors de Σ_w au-dessous ($w^-(t, x)$).

(*) Premier cas

Soit $w^+(t, x) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ tels que $w_1 > 0$ et $w_2 + A_1 w_1 \geq 0$, on a
 $\text{dist}(w^+(t, x), \Sigma_w) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ uniformément pour $x \in \Omega$, donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists T^* > 0, \text{ tel que } \forall t > T^* : \text{Inf}_{\sigma_w \in \Sigma_w} \|w^+(t, x) - \sigma_w\| < \frac{\epsilon}{1 - A_1}, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Alors il existe $\sigma_w^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = (\sigma_1^*, -A_1 \sigma_1^*)$, tel que $\|w^+(t, x) - \sigma_w^*\| < \frac{\epsilon}{1 - A_1}$.

Si nous choisissons $\|\cdot\|_1$ une norme dans \mathbb{R}^2 (toutes les normes sont équivalentes dans \mathbb{R}^2), on obtient

$$\|w^+(t, x) - \sigma_w^*\|_1 = \|(w_1, w_2) - (\sigma_1^*, -A_1 \sigma_1^*)\|_1 = |w_1 - \sigma_1^*| + |w_2 + A_1 \sigma_1^*| < \frac{\epsilon}{1 - A_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w_1 - \sigma_1^*| \leq \frac{\epsilon}{1 - A_1} \\ |w_2 + A_1 \sigma_1^*| \leq \frac{\epsilon}{1 - A_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-\epsilon}{1 - A_1} \leq w_1 - \sigma_1^* \\ w_2 + A_1 \sigma_1^* \leq \frac{\epsilon}{1 - A_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A_1 \sigma_1^* \leq -A_1 w_1 - A_1 \frac{\epsilon}{1 - A_1} \\ w_2 \leq \frac{\epsilon}{1 - A_1} - A_1 \sigma_1^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_2 \leq -A_1 w_1 - A_1 \frac{\epsilon}{1-A_1} + \frac{\epsilon}{1-A_1} = -A_1 w_1 + \frac{\epsilon}{1-A_1} (1-A_1) = -A_1 w_1 + \epsilon$$

Donc $\forall \epsilon > 0, \exists T^* > 0, \quad \forall t > T^* : w^+(t, x) \in \Sigma_\epsilon$.

() Deuxième cas**

Soit $w^-(t, x) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ tels que $w_1 > 0$ et $A_2 w_1 - w_2 \geq 0$, on a $\text{dist}(w^-(t, x), \Sigma_w) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ uniformément pour $x \in \Omega$, donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists t^* > 0, \text{ tel que } \forall t > t^* : \text{Inf}_{\iota_w \in \Sigma_w} \|w^-(t, x) - \iota_w\| < \frac{\epsilon}{1-A_2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Alors il existe $\iota_w^* = (\iota_1^*, \iota_2^*) = (\iota_1^*, A_2 \iota_1^*)$, tel que $\|w^-(t, x) - \iota_w^*\| < \frac{\epsilon}{1-A_2}$.

Si nous choisissons $\|\cdot\|_1$ une norme in \mathbb{R}^2 (toutes les normes sont équivalentes en \mathbb{R}^2) on obtient

$$\|w^-(t, x) - \iota_w^*\|_1 = \|(w_1, w_2) - (\iota_1^*, A_2 \iota_1^*)\|_1 = |w_1 - \iota_1^*| + |w_2 - A_2 \iota_1^*| < \frac{\epsilon}{1-A_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w_1 - \iota_1^*| \leq \frac{\epsilon}{1-A_2} \\ |w_2 - A_2 \iota_1^*| \leq \frac{\epsilon}{1-A_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 - \iota_1^* \leq \frac{\epsilon}{1-A_2} \\ \frac{-\epsilon}{1-A_2} \leq w_2 - A_2 \iota_1^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 \iota_1^* \geq A_2 w_1 + A_2 \frac{\epsilon}{1-A_2} \\ w_2 \geq \frac{-\epsilon}{1-A_2} + A_2 \iota_1^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_2 \geq A_2 \iota_1^* - \frac{\epsilon}{1-A_2} \geq A_2 w_1 + \frac{\epsilon}{1-A_2} A_2 - \frac{\epsilon}{1-A_2} = A_2 w_1 - \epsilon.$$

Alors $\forall \epsilon > 0, \exists t^* > 0, \forall t > t^* : w^-(t, x) \in \Sigma_\epsilon$.

Ainsi, à partir de (*) et (***) on conclut que Σ_ϵ est un ensemble absorbant dans \mathbb{R}_+^2 . \square

Bien que tout voisinage Σ_ϵ de la région invariante est un ensemble invariant, en se basant sur la stabilité asymptotique des systèmes diffusifs, on peut montrer qu'il existe un ensemble absorbant plus restreint que Σ_ϵ .

Proposition 3.2.3:

Supposons que (S_w) vérifie les conditions (C_g) . Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout $0 < c < c_0$, si $w(t) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ la solution de (S_w) avec $(w_1(0, x), w_2(0, x)) \in \mathbb{R}_+^2$ reste dans \mathbb{R}_+^2 pour tout $t \geq 0$, alors pour $\delta > 0$ fixé, on a

$$\exists t_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall t > t_0, \quad w(t) \in \Sigma_\delta,$$

avec $\Sigma_\delta = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \text{et} \quad w_1 - \delta < w_2 < w_1 + \delta\}$.

Démonstration :

On a

$$(S_w) \quad \begin{cases} \partial_t w_1(t, x) = a_{22} \Delta w_1(t, x) - a_{12} \Delta w_2(t, x) - c(a_{22} + a_{12})w_1(t, x) + c(a_{22} + a_{12})w_2(t, x) \\ \partial_t w_2(t, x) = -a_{21} \Delta w_1(t, x) + a_{11} \Delta w_2(t, x) + c(a_{21} + a_{11})w_1(t, x) - c(a_{21} + a_{11})w_2(t, x) \end{cases}$$

Nous considérons le cas $n = 1$ et nous supposons que $\Omega =]0, \pi[$ (pour simplifier l'exposé de la démonstration). Posons

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cos(lx)$$

avec σ, l des entiers, et α_1, α_2 des constantes réelles.

Alors on a

$$(S_w) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma w_1(t, x) = -a_{22} l^2 w_1(t, x) + a_{12} l^2 w_2(t, x) - c(a_{22} + a_{12})w_1(x, t) + c(a_{22} + a_{12})w_2(x, t) \\ \sigma w_2(t, x) = a_{21} l^2 w_1(t, x) - a_{11} l^2 w_2(t, x) + c(a_{21} + a_{11})w_1(x, t) - c(a_{21} + a_{11})w_2(x, t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma + a_{22}l^2 + c(a_{22} + a_{12}))w_1(x, t) + (-c(a_{22} + a_{12}) - a_{12}l^2)w_2(t, x) = 0 \\ (-a_{21}l^2 - c(a_{21} + a_{11}))w_1(t, x) + (\sigma + a_{11}l^2 + c(a_{21} + a_{11}))w_2(t, x) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système est

$$\det(S_w) = \sigma^2 + ((a_{11} + a_{22})l^2 + c(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}))\sigma + dl^4 + 2cdl^2,$$

où $d = a_{11}a_{22} - a_{12} + a_{21}$ et $0 < d \leq \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2$.

Il suffit que l'équation $\det(S_w) = 0$ admette deux solutions distinctes négatives (σ est la variable) pour assurer la stabilité de (S_w) , c'est à dire $\exists \sigma_1, \sigma_2 < 0$ tels que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(\det(S_w)) > 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 < 0 \\ \sigma_1\sigma_2 > 0 \end{cases}$$

et on a

$$\begin{cases} \Delta(\det(S_w)) = ((a_{11} + a_{22})l^2 + c(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}))^2 - 4dl^4 + 2cdl^2 \\ \sigma_1 + \sigma_2 = -((a_{11} + a_{22})l^2 + c(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})) \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 = dl^4 + 2cdl^2 > 0, \forall l, c > 0 \end{cases}$$

Après avoir simplifié les calculs, on obtient les inégalités suivantes

$\exists c_0 > 0$ tq $\forall c \in]0, c_0[$ on a

$$\begin{cases} ((a_{11} + a_{22})l^2 + c(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}))^2 > 4dl^4 + 2cdl^2 \\ ((a_{11} + a_{22})l^2 + c(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})) > 0 \end{cases}$$

Donc on conclut que toute trajectoire initialisée dans le quadrant positif et y reste, converge asymptotiquement vers la demi-droite $w_1 = w_2$ (constituée de points d'équilibre du système dans \mathbb{R}_+^2). Cette demi-droite étant strictement incluse dans la région Σ_δ , toute trajectoire qui converge vers un point de la droite entre dans un temps fini dans l'attracteur Σ_δ . \square

Ainsi, tout voisinage ouvert de l'ensemble attracteur $\{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : w_1 = w_2\}$ est un ensemble absorbant.

3.2.1 Résultat principal

Dans la proposition précédente on a montré qu'il existe un ensemble absorbant Σ_δ "presque" inclus dans la région invariante Σ_w . Ceci ne répond pas à la question qui nous intéresse le plus, celle du caractère absorbant de l'ensemble Σ_w . C'est notre objectif dans cette partie du travail, dans laquelle nous donnons notre résultat principal. Commençons par les trois lemmes suivants.

Lemme 3.2.4: *Soit $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t)) = (\int_\Omega w_1(t, x) \varphi(x) dx, \int_\Omega w_2(t, x) \varphi(x) dx)$, où $\varphi(x)$ est la fonction propre correspondant à la valeur propre principale λ du laplacien (avec les conditions aux limites de Neumann). Alors Φ est une solution du système d'équations différentielles ordinaires suivant*

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(\Phi(t)) \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \Phi_0,$$

tels que

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda a_{22} + c_1) & (\lambda a_{12} + c_1) \\ (\lambda a_{21} + c_2) & -(\lambda a_{11} + c_2) \end{pmatrix},$$

$$c_1 = c(a_{22} + a_{12}) \quad \text{et} \quad c_2 = c(a_{11} + a_{21}).$$

De plus

$$\|\Phi(t)\| \geq \|\Phi_0\| e^{-\mu(-A)t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\mu(-A)$ est la mesure matricielle de $-A$.

Démonstration : Soit φ la solution de

$$\begin{cases} -\varphi_{xx}(x) = \lambda \varphi(x), & \varphi(x) > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après (S_w) on a

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_1}{dt} = -\lambda a_{22}\Phi_1 + \lambda a_{12}\Phi_2 + a_{22}c(\Phi_2 - \Phi_1) - a_{12}c(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \frac{d\Phi_2}{dt} = \lambda a_{21}\Phi_1 - \lambda a_{11}\Phi_2 - a_{21}c(\Phi_2 - \Phi_1) + a_{11}c(\Phi_1 - \Phi_2) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi(t)}{dt} = A(\Phi(t)) \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \Phi_0.$$

Ainsi, par les inégalités de Gronwall et Langenhop ([45] page 47), nous obtenons

$$\|\Phi(t)\| \geq \|\Phi(0)\| e^{-\mu(-A)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Lemme 3.2.5: Si nous désignons par $\eta := \lambda_1(\lambda + c)$ et nous supposons que les composantes de la matrice M satisfont aux conditions (C_g) et $a_{12} + a_{21} \geq 0$, alors $\eta - \mu < 0$ ($\mu = \mu(-A)$).

Démonstration : Puisque les normes sont équivalentes dans \mathbb{R}^2 , si nous choisissons $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|\Phi(t)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^2 |\Phi_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

la mesure matricielle est donnée par

$$\mu(A) = \frac{\beta_{\max}(A + A^t)}{2},$$

où A^t est la transposée de la matrice A , et $\beta_{\max}(A + A^t)$ est le maximum des valeurs propres de la matrice $A + A^t$.

$$\text{Soit } B = -A = \begin{pmatrix} \lambda a_{22} + c_1 & -(\lambda a_{12} + c_1) \\ -(\lambda a_{21} + c_2) & \lambda a_{11} + c_2 \end{pmatrix}.$$

Premièrement, on calcule les valeurs propres de $B + B^t$ les racines du polynôme caractéristique

$$P(\beta) = \beta^2 - 2\beta[\lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2] + 4(\lambda a_{22} + c_1)(\lambda a_{11} + c_2) - [\lambda(a_{12} + a_{21}) + c_1 + c_2]^2.$$

D'après les conditions (C_g) ,

$$(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2 > 0,$$

alors $2c_1c_2[(a_{12} - a_{21})^2 - (a_{11} - a_{22})^2] + 2(a_{11} - a_{22})(a_{12} + a_{21})(c_2^2 - c_1^2) < 0$, et donc le discriminant Δ' de P est positif. Alors la matrice $B + B^t$ Admet deux valeurs propres réelles.

Il s'ensuit que $\mu(-A) = \frac{1}{2} \max \left\{ \lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 + \sqrt{\Delta'}, \lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta'} \right\}$
 $\Rightarrow \mu(-A) = \frac{1}{2} \max \left\{ (\lambda + c)(a_{11} + a_{22}) + c(a_{12} + a_{21}) \pm \sqrt{\Delta'} \right\}$, tel que

$$\Delta' = \lambda^2 [(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2] + 2\lambda [(a_{11} - a_{22})(c_2 - c_1) + (a_{12} + a_{21})(c_2 + c_1)] + c_1^2 + c_2^2.$$

L'hypothèse $a_{12} + a_{21} \geq 0$ conduit à $\mu(-A) = \frac{1}{2} \left(\lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 + \sqrt{\Delta'} \right)$.
 Finalement,

$$\begin{aligned} \eta - \mu &= \lambda_1(\lambda + c) - \frac{1}{2} \left[\lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta'} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right] (\lambda + c) - \frac{1}{2} \left[\lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta'} \right] \\ &= \frac{-1}{2} \left[c(a_{12} + a_{21}) + (c + \lambda) \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} + \sqrt{\Delta'} \right] < 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.6: Si nous désignons par $\eta := \lambda_2(\lambda + c)$ et nous supposons que les composantes de la matrice M satisfont aux conditions (C_g) et $a_{12} + a_{21} \geq 0$, $a_{12} > 0$, alors $\eta - \mu < 0$ ($\mu = \mu(-A)$).

Démonstration :

Puisque les normes sont équivalentes dans \mathbb{R}^2 , si nous choisissons $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|\Phi(t)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^2 |\Phi_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

la mesure matricielle est donnée par

$$\mu(A) = \frac{\beta_{\max}(A + A^t)}{2},$$

où A^t est la transposé de la matrice A , et $\beta_{\max}(A + A^t)$ est le maximum des valeurs propres de la matrice $A + A^t$.

$$\text{Soit } B = -A = \begin{pmatrix} \lambda a_{22} + c_1 & -(\lambda a_{12} + c_1) \\ -(\lambda a_{21} + c_2) & \lambda a_{11} + c_2 \end{pmatrix}.$$

On calcule les valeurs propres de $B + B^t$ les racines du polynôme caractéristique

$$P(\beta) = \beta^2 - 2\beta [\lambda (a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2] + 4(\lambda a_{22} + c_1)(\lambda a_{11} + c_2) - [\lambda (a_{12} + a_{21}) + c_1 + c_2]^2.$$

D'après les conditions (C_g)

$$(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2 > 0,$$

alors $2c_1c_2 [(a_{12} - a_{21})^2 - (a_{11} - a_{22})^2] + 2(a_{11} - a_{22})(a_{12} + a_{21})(c_2^2 - c_1^2) < 0$,
et donc le discriminant Δ' de P est positif. Alors la matrice $B + B^t$ Admet deux valeurs propres réelles.

$$\text{Il s'ensuit que } \mu(-A) = \frac{1}{2} \max \left\{ \lambda (a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 + \sqrt{\Delta'}, \lambda (a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta'} \right\}$$

$$\Rightarrow \mu(-A) = \frac{1}{2} \max \left\{ (\lambda + c)(a_{11} + a_{22}) + c(a_{12} + a_{21}) \pm \sqrt{\Delta'} \right\},$$

tel que

$$\Delta' = \lambda^2 [(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2] + 2\lambda [(a_{11} - a_{22})(c_2 - c_1) + (a_{12} + a_{21})(c_2 + c_1)] + c_1^2 + c_2^2.$$

L'hypothèse $a_{12} + a_{21} \geq 0$ conduit à $\mu(-A) = \frac{1}{2} \left(\lambda (a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 + \sqrt{\Delta'} \right)$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \eta - \mu &= \lambda_2(\lambda + c) - \frac{1}{2} \left[\lambda (a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta'} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right] (\lambda + c) - \frac{1}{2} \left[\lambda (a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta'} \right] \\ &= \frac{-1}{2} \left[c(a_{12} + a_{21}) - (c + \lambda) \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} + \sqrt{\Delta'} \right]. \end{aligned}$$

Il suffit de déterminer des conditions pour que

$$-(c + \lambda) \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} + \sqrt{\Delta'} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} \geq (c + \lambda) \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

$$\Rightarrow \Delta' \geq (c + \lambda)^2 [(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})]$$

$$\Rightarrow \lambda^2 [(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2] + 2\lambda [(a_{11} - a_{22})(c_2 - c_1) + (a_{12} + a_{21})(c_2 + c_1)] + c_1^2 + c_2^2 \geq (c + \lambda)^2 [(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})]$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + c)^2 (a_{12} - a_{21})^2 + 4c(\lambda + c)(a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12}) + c^2 [(a_{12} - a_{21})^2 + (a_{11} + a_{22})^2] \geq 0$$

Alors il suffit que le terme $a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12}$ soit positif, et d'après les conditions (C_g) ceci est vrai si a_{12} est positif.

Donc sous les hypothèses du lemme on conclut que $\eta - \mu < 0$ □

Théorème 3.2.7: Soit $w = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ une solution de (S_w) dans \mathbb{R}_+^2 à l'extérieur de Σ_w pour tout $t > 0$ telle que $A_1 w_1(t, x) + w_2(t, x) > 0$, $w_1(t, x) > 0$, $\forall x \in \Omega, \forall t > 0$. Supposons que les hypothèses de la proposition 3.2.3 sont satisfaites, et $\alpha_0 = |\cos(\alpha)|$ où α est l'angle entre les droites $-A_1 w_1 = w_2$ et $w_1 = 0$, avec de plus $a_{12} + a_{21} \geq 0$ et $1 < \frac{c\lambda_1\alpha_0}{\mu - \eta}$, alors w entre dans Σ_w dans un temps fini.

Démonstration : Soit $w = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ une solution de (S_w) dans \mathbb{R}_+^2 à l'extérieur de Σ_w pour tout $t > 0$. Supposons que $A_1 w_1(t, x) + w_2(t, x) > 0$, $w_1(t, x) > 0$, $\forall x \in \Omega, \forall t > 0$.

Si on pose $V(t) = A_1 \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$, d'après (3.14) on a

$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda EV(t) + cEV(t)$ qui peut être réécrite comme

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda_1(\lambda + c)V(t) + \lambda_1 c \langle (1, A_1), (\Phi_1, \Phi_2) \rangle. \quad (3.15)$$

Sachant que $A_1 w_1 + w_2 > 0$, il existe alors $\alpha > \alpha_0 > 0$ tel que

$$\langle (1, A_1), (\Phi_1, \Phi_2) \rangle = -\alpha \|v_1\| \|\Phi\|.$$

Ainsi, d'après le lemme 3.2.4 on a

$$\langle (1, A_1), (\Phi_1, \Phi_2) \rangle \leq -\alpha \|v_1\| \|\Phi(0)\| e^{-\mu t}.$$

Par conséquent, l'équation (3.15) implique

$$\frac{dV}{dt} \leq -\lambda_1 (\lambda + c) V - c\lambda_1 \alpha \|v_1\| \|\Phi(0)\| e^{-\mu t}.$$

Si nous posons $\kappa = c\lambda_1 \alpha \|v_1\| \|\Phi(0)\|$, on obtient

$$\frac{dV}{dt} + \eta V \leq -\kappa e^{-\mu t} \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{\eta t} V(t)) \leq -\kappa e^{(\eta-\mu)t}$$

$$\Rightarrow e^{\eta t} V(t) \leq V(0) - \kappa \int_0^t e^{(\eta-\mu)s} ds \Rightarrow e^{\eta t} V(t) \leq V(0) - \frac{\kappa}{\eta - \mu} (e^{(\eta-\mu)t} - 1)$$

$$\Rightarrow V(t) \leq V(0) + \frac{\kappa}{\mu - \eta} (e^{(\eta-\mu)t} - 1).$$

La fonction h définie par $h(t) := V(0) + \frac{\kappa}{\mu - \eta} (e^{(\eta-\mu)t} - 1)$ est une fonction continue positive telle que $h(0) = V(0) > 0$. D'après le lemme 3.2.5 on a $\mu - \eta > 0$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) &= V(0) - \frac{\kappa}{\mu - \eta} \leq \|v_1\| \|\Phi(0)\| - \frac{c\lambda_1 \alpha \|v_1\| \|\Phi(0)\|}{\mu - \eta} \\ &= \|v_1\| \|\Phi(0)\| \left(1 - \frac{c\lambda_1 \alpha}{\mu - \eta}\right) < \|v_1\| \|\Phi(0)\| \left(1 - \frac{c\lambda_1 \alpha_0}{\mu - \eta}\right). \end{aligned}$$

D'après les hypothèses du théorème on a $1 < \frac{c\lambda_1 \alpha_0}{\mu - \eta}$, ce qui implique que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) < 0.$$

Alors il existe $t_0 > 0$, tel que $h(t_0) = 0$, donc $V(t_0) \leq h(t_0) = 0$, ce qui contredit le fait que $V(t) > 0, \forall t > 0$. Donc il existe $t^* > 0$ tel que $(w_1(t^*, x), w_2(t^*, x)) \in \Sigma_w$.

Cela prouve que w entre dans Σ_w dans un temps fini. \square

Théorème 3.2.8: Soit $w = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ une solution de (S_w) dans \mathbb{R}_+^2 à l'extérieur de Σ_w pour tout $t > 0$ telle que $A_2 w_1(t, x) - w_2(t, x) > 0, w_1(t, x) > 0, \forall x \in \Omega, \forall t > 0$. Supposons que les hypothèses de la proposition 3.2.3 sont satisfaites, et $\alpha_0 = |\cos(\alpha)|$ où α est l'angle entre les droites $A_2 w_1 = w_2$ et $w_2 = 0$, avec de plus $a_{12} + a_{21} \geq 0, a_{12} > 0$ et $1 < \frac{c\lambda_2\alpha_0}{\mu - \eta}$, alors w entre dans Σ_w dans un temps fini.

Démonstration : Soit $w = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ une solution de (S_w) dans \mathbb{R}_+^2 à l'extérieur de Σ_w pour tout $t > 0$. Supposons que $A_1 w_1(t, x) - w_2(t, x) > 0, w_1(t, x) > 0, \forall x \in \Omega, \forall t > 0$.

Si on pose $V(t) = A_1 \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$, d'après (3.14) on a $\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda V(t) + cEV(t)$ qui peut être réécrit comme

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda_2(\lambda + c)V(t) + \lambda_2 c \langle (-1, A_2), (\Phi_1, \Phi_2) \rangle. \quad (3.16)$$

Sachant que $A_1 w_1 - w_2 > 0$, il existe alors $\alpha > \alpha_0 > 0$ tel que $\langle (-1, A_2), (\Phi_1, \Phi_2) \rangle = -\alpha \|v_2\| \|\Phi\|$.

Ainsi, d'après le lemme 3.2.4 on a

$$\langle (-1, A_2), (\Phi_1, \Phi_2) \rangle \leq -\alpha \|v_2\| \|\Phi(0)\| e^{-\mu t}.$$

Par conséquent, l'équation (3.16) implique

$$\frac{dV}{dt} \leq -\lambda_2(\lambda + c)V - c\lambda_2\alpha \|v_2\| \|\Phi(0)\| e^{-\mu t}.$$

Si nous posons $\kappa = c\lambda_2\alpha \|v_2\| \|\Phi(0)\|$, on obtient

$$\frac{dV}{dt} + \eta V \leq -\kappa e^{-\mu t} \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{\eta t} V(t)) \leq -\kappa e^{(\eta-\mu)t}$$

$$\Rightarrow e^{\eta t} V(t) \leq V(0) - \kappa \int_0^t e^{(\eta-\mu)s} ds \Rightarrow e^{\eta t} V(t) \leq V(0) - \frac{\kappa}{\eta - \mu} (e^{(\eta-\mu)t} - 1)$$

$$\Rightarrow V(t) \leq V(0) + \frac{\kappa}{\mu - \eta} (e^{(\eta-\mu)t} - 1).$$

La fonction h définie par $h(t) := V(0) + \frac{\kappa}{\mu - \eta} (e^{(\eta - \mu)t} - 1)$ est une fonction continue positive telle que $h(0) = V(0) > 0$. D'après le Lemme 3.2.6 on a $\mu - \eta > 0$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) &= V(0) - \frac{\kappa}{\mu - \eta} \leq \|v_2\| \|\Phi(0)\| - \frac{c\lambda_2\alpha \|v_2\| \|\Phi(0)\|}{\mu - \eta} \\ &= \|v_2\| \|\Phi(0)\| \left(1 - \frac{c\lambda_2\alpha}{\mu - \eta}\right) < \|v_2\| \|\Phi(0)\| \left(1 - \frac{c\lambda_2\alpha_0}{\mu - \eta}\right). \end{aligned}$$

D'après les hypothèses du théorème on a $1 < \frac{c\lambda_2\alpha_0}{\mu - \eta}$, ce qui implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) < 0$.

Alors il existe $t_0 > 0$, tq $h(t_0) = 0$, donc $V(t_0) \leq h(t_0) = 0$, ce qui contredit le fait que $V(t) > 0, \forall t > 0$. Donc il existe $t^* > 0$ tel que $(w_1(t^*, x), w_2(t^*, x)) \in \Sigma_w$. Cela prouve que w entre dans Σ_w dans un temps fini. \square

Corollaire 3.2.9: Si w est une solution de (S_w) à l'extérieur de Σ_w , qui vérifie les conditions du théorème 3.2.7 et du théorème 3.2.8, alors Σ_w est un ensemble absorbant dans \mathbb{R}_+^2 .

3.3 Exemple

Pour illustrer nos résultats, nous prenons comme exemple le système suivant

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t v(t, x) = k_1 u_{xx}(t, x) - c(u(t, x) - v(t, x)) \\ -\partial_t u(t, x) + 3\partial_t v(t, x) = k_2 v_{xx}(t, x) + c(u(t, x) - v(t, x)) \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux nombres réels positifs, c est une constante réelle positive, et $(t, x) \in]0, T[\times]0, 1[$.

Ici, la matrice M est définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut facilement vérifier que les composantes de la matrice M satisfont aux conditions

$$(C_g) \quad 0 < a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = 1 < \frac{1}{4} (a_{11} + a_{22})^2 = \frac{9}{4}, \quad a_{22} - |a_{11}| = 3 > 0, \quad \text{et} \quad a_{12}a_{21} - 1 = -1 < 0,$$

Donc M possède deux valeurs propres non négatives réelles $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, ce qui nous permet de réécrire (S) comme

$$(S_w) \quad \partial_t w = M^{-1}(\mathbf{k} \cdot \Delta w) + M^{-1} \circ F(w),$$

où $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de M .

Soit $d = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = 1$, pour $(t, x) \in [0, T[\times \Omega$, on définit $w(t, x) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ par

$$w_1(t, x) = u(t, \sqrt{k_1}x), \quad \text{et} \quad w_2(t, x) = v(t, \sqrt{k_2}x),$$

où $w(t, x) = (w_1(t, x), w_2(t, x))$ est une solution de (S_w) . Ainsi, le système (S) prend la forme

$$\begin{cases} \partial_t w_1 &= 3\Delta w_1 - 1\Delta w_2 + 3f(w_1, w_2) - g(w_1, w_2) \\ \partial_t w_2 &= 1\Delta w_1 + 0\Delta w_2 + 1f(w_1, w_2) + 0g(w_1, w_2) \end{cases}$$

ou encore sous une forme plus condensée

$$(S_w) \quad \partial_t w = E(\Delta w) + E \circ F(w),$$

avec E matrice définie par M^{-1} .

Sous les conditions (C_g) la matrice E possède deux vecteurs propres à gauches $v_1 = (A_1, 1)$ et $v_2 = (A_2, -1)$ correspondant respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec

$$A_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

telle que

$$\delta = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} = \sqrt{5}.$$

Il est important de noter ici qu'en raison des conditions (C_g) , λ_1 et λ_2 sont les deux positifs lorsque $A_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < -1$ et $0 < A_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$.

D'après la proposition 3.2.3, si $F(w_1, w_2) = (-c(w_1 - w_2), c(w_1 - w_2))$ tel que $c > 0$, l'ensemble défini par

$$\Sigma_w = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ tels que } w_1 \geq 0 \text{ et } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot w_1 \leq w_2 \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot w_1\}$$

est un ensemble invariant pour (S_w) .

On a aussi

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(\Phi(t)) \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \Phi_0$$

$$\text{où} \quad A = \begin{pmatrix} -(\lambda a_{22} + c_1) & (\lambda a_{12} + c_1) \\ (\lambda a_{21} + c_2) & -(\lambda a_{11} + c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(3\lambda + c_1) & (\lambda + c_1) \\ (-\lambda + c_2) & -c_2 \end{pmatrix},$$

avec $c_1 = c(a_{22} + a_{12}) = 4c$ et $c_2 = c(a_{11} + a_{21}) = -c$.

Se plus l'inégalité suivante est satisfaite

$$\|\Phi(t)\| \geq \|\Phi(0)\| e^{-\mu(-A)t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\mu(-A)$ est la mesure matricielle de $-A$.

D'après la définition de $\mu(-A)$,

$$\|\Phi(t)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^2 |\Phi_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A + A^*)}{2}.$$

$$\text{Notons par } B = -A = \begin{pmatrix} 3\lambda + 4c & -(\lambda + 4c) \\ (\lambda + c) & -c \end{pmatrix}.$$

D'abord, on calcule les valeurs propres de $(B + B^*)$

$$B + B^* = \begin{pmatrix} 2(3\lambda + 4c) & -3c \\ -3c & -2c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\beta) = \beta^2 - 2\beta(3\lambda + 3c) - 17c^2 - 12\lambda c = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = 9\lambda^2 + 30\lambda c + 26c^2$$

$$\Rightarrow \Delta'_{\Delta'} = -9c^2 < 0 \Rightarrow \Delta' > 0, \forall \lambda$$

Alors

$$\begin{aligned}\mu_2(-A) &= \frac{1}{2} \max \left\{ \lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 + \sqrt{\Delta'}, \lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta'} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \max \left\{ 3\lambda + 3c + \sqrt{\Delta'}, 3\lambda + 3c - \sqrt{\Delta'} \right\} \\ &\Rightarrow \mu = \mu_2(-A) = \frac{3\lambda + 3c + \sqrt{\Delta'}}{2}.\end{aligned}$$

Maintenant on calcule $\eta - \mu$.

1) Pour $\eta = \lambda_1(\lambda + c)$ on a

$$\begin{aligned}\eta - \mu &= \lambda_1(\lambda + c) - \frac{3\lambda + 3c + \sqrt{\Delta'}}{2} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(\lambda + c) - \frac{3\lambda + 3c + \sqrt{\Delta'}}{2} \\ &= \frac{-1}{2} \left[\sqrt{5}(\lambda + c) + \sqrt{\Delta'} \right] \\ &= \frac{-1}{2} \left[\sqrt{5}(\lambda + c) + \sqrt{9\lambda^2 + 30\lambda c + 26c^2} \right] < 0.\end{aligned}$$

2) Pour $\eta = \lambda_2(\lambda + c)$ on a

$$\begin{aligned}\eta - \mu &= \lambda_2(\lambda + c) - \frac{3\lambda + 3c + \sqrt{\Delta'}}{2} \\ &= \frac{-1}{2} \left[\sqrt{5}(\lambda + c) - \sqrt{\Delta'} \right] < 0.\end{aligned}$$

Finalement, la condition $\eta - \mu < 0$ est satisfaite, avec un choix approprié de la constante c , le théorème 3.2.7 et le théorème 3.2.8 nous permettent d'affirmer que Σ_w est un ensemble absorbant dans \mathbb{R}_+^2 .

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a rappelé les inégalités de Gronwall et Langenhop lesquels donnent une estimation d'une solution d'équation différentielle, en utilisant la notion de mesure matricielle. On a donné une démonstration détaillée du caractère absorbant de l'ensemble Σ_ϵ dans \mathbb{R}_+^2 . Pour montrer cette dernière propriété, nous avons utilisé une méthode basée sur la géométrie euclidienne de l'espace des phases.

Notre résultat principal, est que toute trajectoire dans le quadrant positif entre dans Σ_w en un temps fini.

Autrement dit, toute solution globale positive du système pénètre dans la région Σ_w en un temps fini. De plus, on a caractérisé l'ensemble des valeurs initiales hors de Σ_w , dont les trajectoires restent dans le quadrant positif de l'espace des phases.

4. CONCLUSION GÉNÉRALE

On a consacré ce travail aux régions positivement invariantes d'un système d'équations couplées, qui modélise la conduction de la chaleur dans un mélange binaire, isotrope et homogène. On a déterminé des conditions qui garantissent l'existence d'une région invariante, attractive, et de plus absorbante dans le quadrant positif de l'espace des phases. Notre résultat principal dans ce travail, et en même temps notre modeste contribution dans cette thèse, repose sur le choix d'une approche basée sur la géométrie euclidienne de l'espace des phases. Ainsi, on a montré que toute solution globale positive du système pénètre dans la région invariante en un temps fini. Les résultats obtenus, ainsi que les conditions imposées au système étudié, sont illustrés par un exemple, à la fin du dernier chapitre. Les résultats de cette thèse ont fait l'objet de la publication [31].

Bibliographie

- [1] H.Amann, *Ordinary Differential Equations*. Walter de Gruyter, Berlin.New York, 1990.
- [2] R. J. Atkin and R. E. Craine, Continuum theories of mixtures : basic theory and historical development, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **29** (1976), 209-245.
- [3] N.F.Britton, *Reaction-Diffusion Equations and Their Application to Biology*, School of Mathematics Bath Uni Bathj, UK, 1986.
- [4] K.J.Brown, P.C. Dunne, and R.A.Gardner, A Semilinear Parabolic System Arising in the Theory of Superconductivity, *Journal of Differential Equations*, **40**,(1981), 232-252, .
- [5] K. N. Chueh, C. C. Conly, and J. A. Smoller, Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations, *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 373-392.
- [6] I.D.Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, Acta Scientific Publishing House, Kharkiv, Ukraine , 2002.
- [7] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, I.S.P.A.M., McGraw-Hill, New York, 1955. -
- [8] E. Conway, D. Hoff and J. Smoller, Large time behavior of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations, *Siam J.Appl.Math*, **35** (July 1978), 1-16.
- [9] E. Conway, and J. Smoller, A comparison technique for systems of reaction-diffusion equations, *Comm. in partial differential equations*, **2(7)** (1977), 679-697.
- [10] D. Daners, and P. Koch Medina, *Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

-
- [11] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [12] A. Friedman, *Partial differential equations*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [13] D. Gilbarg et N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of the second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [14] M. E. Gurtin and G. M. De la Penha, On the thermodynamics of mixtures, *Arch. Rational Mech. Anal*, **36** (1970), 390-410.
- [15] J. K. Hale, *Ordinary differential equations*, Pure and Applied Math. **Vol 21**, Wiley- Interscience, New York, 1969.
- [16] A.Haraux, et M.Kirane, *Estimations C^1 pour des Problèmes Paraboliques Semi-Linéaires*, *Annales Faculté des Sciences Toulouse*, **vol V**,1983,265-280.
- [17] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes In Math., **840**, Springer-Verlag, 1981.
- [18] S.L.Hollis, R.H.Martin, and M.Pierre, Global Existence And Boundedness In Reaction-Diffusion Systems, *Siam J.Math.Anal*, **vol 13,n 3**, (1987), 744-761.
- [19] D. Iesan and R. Quintanilla, On the problem of propagation of heat in mixtures, *Applied Mechanics and Engineering*, **4** (1999), 529-551.
- [20] D.S.Jones, B.D.Sleeman, *Differential Equations and Mathematical Biology*, Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [21] S.Kouachi, *Global Existence of Solutions in Invariant Regions for Reaction-Diffusion Systems with a Balance Law and a Full Matrix of Diffusion Coefficients*, *EJQTDE*, **No.4**, (2003), 1-10.
- [22] V. Lakshmikantham et S. Leela, *Differential and integral inequalities*, Math. in Science and Engineering, **Vol. 55**, Academic Press, New York, 1969.
- [23] J. H. Lightbourne, III and R. H. Martin, Jr., Relatively continuous nonlinear perturbations of analytic semigroups, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **1** (1977), 277-292.
- [24] C. Lobry, *Modeles Deterministes en Dynamique des Populations*, Ecole CIMPA Saint Louis du Sénégal, Septembre 2001.

-
- [25] R. H. Martin. Jr, Global existence questions for reaction-diffusion systems, Pitman Res. Notes, **141**, (1986), 169-177.
- [26] R. H. Martin. Jr, Invariant sets for perturbed semigroups of linear operators, An. Math. Pura Appl. IV **105** (1975), 169-177.
- [27] F. Martinez and R. Quintanilla, Some qualitative results for the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids. Collect. Math., **46** (1995), 263-277.
- [28] Kyuya Masuda, *On the globale existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations*, Hokkaido Math Journal. **VOL.12**, (1983), 360-370.
- [29] S. Meftah, Etude des régions invariantes pour des système d'équations non linéaires de réaction-diffusion. Mémoire du Magister, Juin 2006.
- [30] S. Meftah and L. Nisse, Invariant Sets for Systems in the Thermodynamics of Mixture. Comm. RAMA-5, M'Sila, avril 2006. Prépublication de L.M.A. Départ. Math. Univ. Annaba., 2006.
- [31] S. Meftah and L. Nisse, Invariant Sets for non Classical Reaction-Diffusion Systems, Global Journal of Pure and applied Mathematics, ISSN 0973-1768 Volume 12, number 6 (2016), 5105-5117.
- [32] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall New Jersey, 1967.
- [33] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [34] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Texts in Applied Mathematics ,**7**, Springer, 2001.
- [35] R. Quintanilla, Study of the solutions of the propagation of heat in mixtures, Dynamics of Cont., Disc. & Impul. Sy st., **8** (2001), 15-28.
- [36] G. Raugel, *Global Attractors in Partial Differential Equations*, Publication du CNRS et Université de Paris-Sud, UMR 8628, 2001.
- [37] C.Reder, Familles de convexes invariantes et équations de diffusion-réaction, Annales de l'institut Fourier, tome 32, n 1(1982),71-103.
- [38] R. Redheffer et W.Walter, Invariant sets for systems of partial differential equations I. Parabolic equations. Arch. Ration. Mech. Anal. **67** 1978, 41-52.

-
- [39] Reinhard Redlinger, Invariant Sets for strongly coupled reaction-diffusion Systems under General Boundary Conditions, Arch. Rational Mech. Anal., **108**(1989), 281-291.
- [40] F. Rothe, Uniform Bounds from Bounded L_p -Functionals in Reaction-Diffusion Equation, Journal of Diff Eqs. **45**, (1982), 207-233.
- [41] R. D. Sleeman et E. Tuna, Comparison principles for strongly coupled reaction-diffusion equations, Proc. Roy. Society of Idinburgh, **106A**, (1987), 209-219.
- [42] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, A Series in Comprehensive Studies in Math., **258**. Springer-Verlag, 1970.
- [43] R. Temam, *Infinite dimensional dynamical Systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences, **V. 68**, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [44] J.M.T. Thompson et H.B. Stewart, *Nonlinear dynamics and chaos*, John Wiley & Sons, Ltd, England, 2002.
- [45] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Classics in applied mathematics, 42, Philadelphia, Pa., SIAM, 2002.
- [46] Vitaly Volpert, *Reaction-Diffusion Equations*-Birkhäuser Basel, Volume 2. Elliptic Partial Differential Equations (2014).
- [47] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*, Ergebnisse Der Mathematic, UND IHER Grenzgebiete, **55**, 1970.
- [48] W. Walter, *Ordinary Differential Equations*, GTM RIM, **182**, Springer-Verlag, New York, 1998 .
- [49] H. F. Weinberger, Invariant Sets For Weakly Coupled Parabolic And Elliptic Systems, Rend. Mat., **8**(1975), 295-310.
- [50] Wu. Zhuoqun, et Yuan. Hongjun, Uniqeness of Generalized Solutions for a Quasilinear Degenerate Parabolic System, J. Partial Diff. Eqs, **Vol. S, n. 1**, 8(1995), 89-96.