

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2023/2024



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

ESTIMATION DE LA PRIME CHARGÉE ET DES CARACTÉRISTIQUES DE FIABILITÉ DANS DES MODÈLES GÉNÉRALISÉS

Filière

Mathématiques Appliquées

Spécialité

Actuariat

Par

Nour El Houda DJEMOUI

DIRECTEUR DE THÈSE: Assia CHADLI

Prof. U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR DE THÈSE: Ilhem MERAH

MCB. ENSTI. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT: Nacira SEDDIK-AMEUR

Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Yamina LASKRI

Prof. ENSTI. ANNABA

EXAMINATEUR : Mouna MERZOUGUI

Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Hamida TALHI

MCA. U.B.M. ANNABA

TABLE DES MATIÈRES

1	Remerciements	3
2	Résumé	4
3	Abstract	5
4	Introduction	7
1	Généralités et Outils mathématiques	9
1	Introduction à l'assurance	9
1.1	Les différents types d'assurance	10
1.2	La prime de l'assurance	11
1.3	Modélisation de l'actuariat	12
2	Notions de fiabilité	17
2.1	Caractéristiques de fiabilité	17
2.2	Autres coefficients de fiabilité	19
3	Méthodes d'estimations usuelles	20
3.1	Méthode des moments	20
3.2	Méthode du Maximum de vraisemblance	21

2	L'estimation Bayésienne	23
1	Introduction	23
2	Modélisation Bayésienne	25
3	Estimation sous différentes fonctions de perte	28
3.1	Fonction de perte quadratique	28
3.2	Fonction de perte Linex	29
4	L'algorithme Metropolis-Hastings	30
4.1	Introduction	30
4.2	Les raisons de l'algorithme	31
4.3	L'algorithme Metropolis-Hastings	33
3	Modèles généralisés Estimations et applications en fiabilité	34
1	Modèle Odd Lindley G-family	34
2	La distribution Exponentielle Exponentiée	36
3	La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)	38
3.1	Estimation du maximum de vraisemblance	41
3.2	Estimation à l'aide d'une approche Bayésienne	43
3.3	La vitesse de convergence	48
3.4	Estimation de la prime pure	49
4	Simulations	51
1	Quelques Rappels	51
2	Estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance	54
3	Estimateurs obtenus à l'aide d'une approche Bayésienne	55
3.1	Comparatif des techniques d'estimation	58
4	Analyse de données réelles	59
5	Conclusion et Perspectives	62
6	Annexe	63

1 Remerciements

Je remercie en premier lieu notre Dieu qui nous a donnés la force d'accomplir ce présent travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers le Pr CHADLI Assia pour son incroyable guidance tout au long de ce parcours. Votre expertise, votre patience et votre disponibilité ont été d'une importance capitale pour la réussite de ce travail. Vos conseils éclairés ont grandement enrichi ma réflexion et m'ont permis de repousser mes limites intellectuelles.

Je souhaite également adresser mes remerciements au Dr MERAH Ilhem, dont les précieux conseils et l'expertise dans le domaine " probabilité et statistique" ont apporté une dimension supplémentaire à ce travail de recherche. Votre engagement et votre soutien ont été inestimables.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude envers le Pr SEDDIK-AMEUR Nacira et le Pr MERZOUGUI Mouna et le Dr TALHI Hamida de l'université Badji Mokhtar Annaba, le Pr LASKRI Yamina de l'école nationale supérieure de technologie et d'ingénierie-Annaba pour avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ma thèse. Leur expertise et leur engagement dans cette évaluation ont été d'une valeur inestimable pour moi. Leurs commentaires et leurs critiques constructives ont été essentiels pour l'amélioration de mon travail.

Je les remercie chaleureusement pour leur contribution précieuse à ce processus d'évaluation.

Mes remerciements s'adressent également à mes collègues de laboratoire, dont les échanges et les discussions ont nourri ma réflexion et ont contribué à créer un environnement stimulant pour la recherche.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude envers ma famille et mes amis pour leur soutien indéfectible et leur encouragement tout au long de cette aventure académique.

Je suis profondément reconnaissante envers chacun d'entre vous pour votre précieuse contribution à ce travail de recherche.

2 Résumé

Cette thèse se concentre sur l'estimation des paramètres et des caractéristiques de fiabilité de la distribution d'une part Exponentielle exponentielle Odd Lindley, et d'autre part sur l'estimation de l'espérance de la distribution OLEE qui représente la prime pure dans un contexte actuariaire. Les estimateurs de Bayes sont dérivés en utilisant différentes fonctions de perte avec des données complètes et la distribution a priori gamma. Une analyse comparative des performances des estimateurs bayésiens et du maximum de vraisemblance est réalisée à l'aide du critère de proximité de Pitman et de l'erreur quadratique moyenne intégrée. Une étude de simulation est également menée pour évaluer les résultats. Enfin, l'application des techniques développées est illustrée par une analyse d'un ensemble de données réelles.

Mots-clés : Analyse Bayésienne, Maximum de vraisemblance, Méthode de Monte-Carlo, Exponentielle Exponentielle Odd Lindley.

3 Abstract

This study investigates parameter estimation and reliability analysis of the Odd Lindley Exponentiated Exponential Distribution. Bayesian estimators are derived using diverse loss functions with complete data and a gamma prior distribution. Performance evaluation is conducted through simulation studies, comparing Bayesian estimators to maximum likelihood counterparts using Pitman's closeness criterion and integrated mean squared error. The practical application of these techniques is demonstrated through analysis of real-data.

Key Words : Odd Lindley Exponentiated Exponential Distribution, Bayesian Estimation ,Maximum Likelihood Estimation, Monte-Carlo Methods.

ملخص

تقوم هذه الدراسة بتحقيق تقدير المعلمة وتحليل الموثوقية لتوزيع الليندلي المؤلف بالأس الفردي الموسع (OLEE).

يتم استخدام مقدرات بايزية باستخدام وظائف فقدان متنوعة مع بيانات كاملة وتوزيع أساسي غاما.

يتم إجراء تقييم الأداء من خلال دراسات المحاكاة، مقارنة بين مقدرات بايزية ومقدرات أقصى الإمكانات باستخدام معيار القرب لببتمان (Pitman) ومتوسط الخطأ المتربع المتكامل (IMSE). يتم توضيح التطبيق العملي لهذه التقنيات من خلال تحليل البيانات الحقيقية.

الكلمات الرئيسية:

توزيع الليندلي المؤلف بالأس الفردي الموسع (OLEE)، تقدير بايزي، تقدير أقصى الإمكانات، أساليب مونت كارلو (MCMC).

4 Introduction

Les systèmes d'assurance jouent un rôle crucial dans la gestion des risques financiers en offrant une protection contre les pertes imprévues. Au cœur de ces systèmes se trouvent les primes d'assurance, qui sont les montants payés par les assurés pour bénéficier de cette protection. La détermination adéquate de ces primes est essentielle pour assurer la solvabilité des compagnies d'assurance tout en offrant une couverture suffisante aux assurés. Dans ce contexte, l'estimation Bayésienne émerge comme un outil puissant pour modéliser les risques et calculer les primes d'assurance de manière précise et robuste.

Le paradigme Bayésien repose sur la théorie des probabilités conditionnelles et offre une approche flexible et cohérente pour la modélisation statistique et l'inférence. Contrairement aux méthodes classiques, qui se basent souvent sur des hypothèses restrictives ou des approximations simplificatrices, l'estimation Bayésienne permet d'incorporer efficacement l'information a priori, les données observées et l'expertise du domaine dans le processus d'estimation. Cela conduit à des estimations plus fiables, surtout dans les cas où les données sont rares ou les modèles complexes.

Dans le domaine de l'assurance, où les données sont souvent rares et les risques peuvent être divers et changeants, l'estimation Bayésienne offre une approche naturelle et puissante pour la tarification des primes. En intégrant l'information historique sur les sinistres, les caractéristiques des assurés et les connaissances expertes dans un cadre probabiliste, l'estimation Bayésienne permet de modéliser de manière plus réaliste les distributions de probabilité des pertes potentielles et d'estimer les primes d'assurance de manière plus précise en intégrant dans l'inférence statistique le retour d'expériences résumés par la loi a priori.

L'objectif de cette thèse est d'explorer et de développer des méthodes d'estimation Bayésienne pour la tarification des primes d'assurance. En utilisant des modèles probabilistes sophistiqués, des techniques d'inférence avancées et des données réelles de compagnies d'assurances, nous chercherons à améliorer la précision, la stabilité et la robustesse des estimations de primes, tout en prenant en compte les aspects pratiques et réglementaires de l'industrie de l'assurance.

L'objectif de cette thèse est d'utiliser une approche Bayésienne pour estimer d'une part la prime d'assurance qui correspond à l'espérance de la loi et d'autre part, les caractéristiques de fiabilité, à savoir là dans un modèle exponentiel Exponentié Odd Lindley (OLEE) introduit en 2019 par Goual et al [14].

Ce modèle a été introduit après de nombreux travaux parmi lesquels Gupta et Kundu (2001) [24], qui ont étudié la famille Exponentielle exponentié, une bonne alternative aux distributions gamma et Weibull. Ces dernières années, des généralisations ont été étudiées par plusieurs auteurs afin d'affiner les ajustements de loi aux différents phénomènes étudiés, en particulier dans le domaine de l'assurance et de la durée de survie. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ces nouvelles généralisations. Certains auteurs ont utilisé des approches classiques telles l'approche du maximum de vraisemblance, on peut citer parmi les plus récents Elbatal et al (2023) [10] qui ont étudié la Power Kumaraswamy distribution, ainsi que Handique et al (2023) [15] qui se sont intéressés à la Geometric-Topp-Leone G family distribution. Boumaraff et al (2020) [4] se sont intéressés à la Beta-Pareto distribution pour en estimer les paramètres sous différentes méthodes d'optimisation toujours dans le cadre du maximum de vraisemblance.

Dans un cadre Bayésien, on peut citer Kermoune et Chadli qui se sont intéressés à la distribution Rayleigh-Pareto dans deux articles parus-en (2021) [18]. De même que Aiachi et Chadli (2021) [1] qui ont traité la loi de BURRXII pour en estimer les caractéristiques de fiabilité sous différentes fonctions de perte.

Structure de la thèse

Dans un souci de cohérence, cette thèse commence par un chapitre dédié aux outils mathématiques utilisés, à savoir quelques notions sur l'assurance et la fiabilité suivies par une section comportant les méthodes classiques d'estimation. L'ensemble constitue le chapitre 1.

Le chapitre 2 est consacré à l'approche Bayésienne et à l'algorithme de Metropolis-Hastings qui permet de contourner les difficultés calculatoires des méthodes Bayésiennes.

Le chapitre trois traite de l'étude du modèle exponentielle Exponentié Odd Lindley (OLEE) et elle se termine par un chapitre qui traite de nombreuses simulations.

CHAPITRE 1

Généralités et Outils mathématiques

1 Introduction à l'assurance

Une assurance est une opération par laquelle une personne, l'assureur, s'engage à indemniser une autre personne, l'assuré, en cas de réalisation d'un sinistre déterminé, moyennant le paiement préalable d'une prime ou d'une cotisation.

Le mot "risqué" fait référence à la fois à la source du risque, à l'objet du risque et aux répercussions d'un accident. Ainsi, le risque comprend à la fois l'objet garanti (l'automobile), l'événement préjudiciable, contre lequel on souhaite se protéger (un accident, un incendie) et l'enjeu financier de l'assureur.

Le rôle de l'assureur est d'évaluer le prix de ce risque en fonction des garanties offertes et des paramètres statistiques. Le montant moyen des sinistres, ses valeurs extrêmes, sa répartition et sa probabilité de survenance seront pris en compte.

Donner le juste prix à ce risque qui satisfasse les parties dans la durée est la difficulté et le métier de l'assureur. L'assurance repose sur la compensation des risques si tous les assurés sont exposés à un risque, il est peu probable que ce risque se produise pour tous les assurés. La collectivité des cotisants contribue financièrement aux victimes. Lors de l'établissement de ses polices d'assurance, l'assureur doit être

en mesure de prévoir les frais qu'il devra payer en raison des risques qu'il prend en charge.

Un actuaire effectue le calcul de probabilité pour effectuer ces évaluations.

La loi des grands nombres permet, en effet, d'établir les lois de survenance des risques, qui déterminent le coût des polices d'assurance en fonction de la probabilité et de la fréquence de ces risques, ainsi que des frais de gestion de l'assureur. La valeur de l'indemnisation dépend de la fréquence et de la valeur de l'assurance.

1.1 Les différents types d'assurance

Il existe deux grandes catégories d'assurance, les assurances contre les dommages et les assurances pour les personnes.

Assurance contre les dommages

Il couvre la réparation d'un préjudice, qu'il soit direct, qui concerne un bien appartenant à l'assuré (assurance de choses), ou indirect, qui concerne un tiers causé par l'assuré (assurance de responsabilité). Souvent, les contrats d'assurance mélangent ces deux éléments, comme c'est le cas pour l'assurance auto multirisques.

Le principe des assurances de dommages stipule que l'assuré doit être indemnisé pour les dommages causés au tiers (responsabilité) et pour les pertes matérielles subies par l'assuré à la suite d'un accident.

Assurances personnelles

Les assurances de vie et les assurances contre les risques liés à la maladie ou aux accidents sont des moyens de protéger l'individu contre les événements qui affectent son existence et sa santé. On peut trouver :

Assurances de distribution

Elles comprennent l'indemnisation de l'assuré en cas d'accident du travail et la garantie d'un remboursement total ou partiel des frais médicaux en cas de maladie.

Les assurances de capital

Elles sont également appelées assurance-vie, qui est une assurance dans laquelle l'assureur s'engage à verser une somme d'argent déterminée, soit à l'intérêt de la famille des souscripteurs en cas de décès de celui-ci, soit à son propre intérêt en cas de survie.

En réalité, il existe plusieurs types d'assurance vie, notamment les assurances en cas de décès, les assurances en cas de vie et les assurances mixtes, qui sont des combinaisons d'assurances en cas de décès et en cas de vie.

1.2 La prime de l'assurance

Nous avons observé deux concepts de primes. La première est la prime pure et est la moyenne $E[X]$ pour un risque X . Si cette prime permet généralement à l'assureur de ne pas avoir de déficit, il est fort probable qu'il le soit. Pour obtenir la prime chargée $(1 + \mu)E[X]$, où μ est le chargement de sécurité, l'assureur ajoute une somme proportionnelle. Ce chargement réduit la probabilité de faillite de l'assureur.

Il est nécessaire d'ajouter la prime commerciale en ajoutant un deuxième chargement à la prime chargée pour compléter ces deux idées. Ce deuxième chargement comprend les dépenses de l'assureur telles que la rémunération du capital, les taxes, les frais de réassurance et les frais de gestion. De manière générale, chaque entreprise applique ses propres règles pour calculer le chargement de ses opérations.

Composantes d'une prime d'assurance

La prime d'assurance versée par l'assuré est constituée de plusieurs éléments :

- La prime pure est définie comme le montant moyen du sinistre auquel l'assureur devra faire face pour le risque.
- La prime pure est mathématiquement égale à l'espérance de perte.

- Le montant du chargement de sécurité est ajouté à la prime pure. Il donne à l'assureur la capacité de faire face à la volatilité inévitable des sinistres.
- Le chargement des frais de gestion comprend les coûts de gestion des sinistres et de rémunération des rapporteurs.
- Les taxes : la prime qui a été définie ainsi est une prime technique. La politique commerciale de la compagnie d'assurances modifie cette prime.

Calculez votre prime pure

Le calcul de la prime pure a pour but d'évaluer le montant attendu des sinistres pour la période d'assurance étudiée pour chaque assuré ou prospect. Le plus souvent, cette évaluation est effectuée à l'aide de techniques statistiques établies.

Il existe plusieurs éléments qui composent la sinistralité, chacun étant évalué séparément.

- La probabilité d'un accident typique.
- Le coût d'une catastrophe typique.
- La possibilité d'un accident grave.
- Le coût d'un accident grave.

1.3 Modélisation de l'actuariat

Modèles discrets

Modèle individuel

En premier lieu, nous présentons la définition officielle du modèle individuel.

Définition 1.1 *Le modèle individuel de risque est constitué d'une suite finie de variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément. Ensuite, le montant total des sinistres S est calculé par :*

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

1. Introduction à l'assurance

Dans ce modèle, la variable aléatoire X_k représente la somme totale des réparations versées pour les accidents qui ont eu un impact sur l'assuré k au cours de la période d'observation.

Définition 1.2 La prime pure est l'espérance mathématique $E[S]$ de la somme totale des dommages S . La suivante est une première conséquence de la définition du modèle individuel.

Proposition 1.1 Dans le modèle de risque individuel X_1, \dots, X_n avec le montant total des dommages définie par :

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

Nous disposons :

$$E[S] = nE[X_1] \text{ si } E[X_1] < +\infty$$

Et

$$Var[S] = nVar[X] \text{ si } E[|X|^2] < +\infty$$

Preuve. Cette proposition utilise simplement la définition du modèle individuel. Maintenant, nous cherchons à calculer la fonction de répartition du montant cumulé S . Il est important de souligner que dans le cas où a et b sont deux variables aléatoires réelles indépendantes des fonctions de répartition F_a et F_b , la variable aléatoire $a + b$ admet le produit de convolution $F_a \star F_b$ donné par la fonction de répartition.

$$F_a \star F_b(x) = \int_{\mathbb{R}} F_a(x - b) d\mathbb{P}_b(b) = \int_{\mathbb{R}} F_b(x - a) d\mathbb{P}_a(a)$$

En notant F_S la fonction de répartition de S et F_X celle des X_k la propriété suivante peut être obtenue en utilisant un raisonnement par récurrence. ■

Proposition 1.2 Dans le modèle individuel de risque X_1, \dots, X_n avec sinistre cumulé, la formule donnée par :

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

Nous avons :

$$F_S = F_X^{*n} = F_X \star \dots \star F_X \text{ (} n \text{ fois)}$$

Modèle collectif

En matière d'assurance non-vie, le modèle collectif est largement utilisé. L'assurance qui ne concerne pas la vie de l'assuré est connue sous le nom d'assurance non-vie. Ainsi, elle est principalement composée d'assurances de personnes, d'assurances de responsabilité ou de dettes et d'assurances de choses ou de biens. La survenance même du sinistre, qui est le plus souvent certaine en assurance vie, est la principale distinction entre l'assurance-vie et l'assurance non-vie. En assurance-vie, la survenance du sinistre est juste probable (avec une probabilité comprise entre 0 et 1). En outre, il est rare de connaître le coût du sinistre en assurance non-vie, ce qui est encore une spécificité. Pour cette raison, un modèle de sinistralité d'un portefeuille d'assurance non-vie doit permettre de simuler à la fois la fréquence de sinistres sur le portefeuille.

Hypothèses et présentation du modèle

Dans le cadre de la classe C de contrats d'une entreprise d'assurance dans une branche donnée, le modèle collectif (ou composé) est utilisé pour estimer la charge sinistre S associée à cette classe. Dans ce modèle, la charge sinistre est fonction du nombre de sinistres N et de leurs montants respectifs X_j .

Pour formaliser cela, soit S la charge sinistre de la classe C , N la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres affectant sur une période de temps donnée, et $X = (X_j)_{j \geq 0}$ la suite des variables aléatoires représentant les montants individuels de sinistre dans l'ordre de survenance, avec $X_0 = 0$ pour envisager simplement le cas où N réalise 0.

Dans ce contexte, la charge sinistre S est donnée par la somme des montants de

sinistres jusqu'au nombre de sinistres N , soit :

$$S = \sum_{j=0}^N X_j$$

Pour utiliser efficacement ce modèle, deux hypothèses importantes doivent être prises en compte :

1. Indépendance entre la fréquence et le coût des sinistres : cela signifie que les variables aléatoires N et $(X_j)_{j \geq 1}$ sont supposées indépendantes.
2. Indépendance et stationnarité des montants de sinistres : les variables $(X_j)_{j \geq 1}$ sont indépendantes et ne varient pas avec le temps.

Il convient de noter que ces hypothèses peuvent être simplificatrices et peuvent ne pas correspondre pleinement à la réalité. Par exemple, l'hypothèse de stationnarité des montants de sinistres peut être remise en question en raison de l'inflation qui impacte les coûts de sinistres sur le long terme. De même, l'indépendance des coûts de sinistres peut être remise en cause dans des situations où des facteurs externes influencent ces coûts, tels que des décisions judiciaires.

En conclusion, l'utilisation du modèle collectif nécessite une évaluation critique de ces hypothèses en fonction du contexte spécifique du portefeuille d'assurance étudié.

Les moments de la charge de sinistre

Lorsque l'existence du premier moment de N et de X est assurée, on peut établir plusieurs résultats importants dans le modèle collectif. En particulier, nous pouvons déduire des propriétés essentielles concernant la prime d'assurance et la charge sinistre.

- La prime pure $E(S)$, qui représente l'espérance de la charge sinistre, est égale au produit de la fréquence moyenne $E(N)$ par le coût moyen $E(X)$ des sinistres :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

- La variance de la charge sinistre peut être exprimée comme la somme de la variance de la fréquence des sinistres et du produit de la fréquence moyenne par la variance du coût des sinistres :

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E(X)^2$$

- En utilisant la prime pure et la variance de la charge sinistre, il est possible de calculer le coefficient de variation de la charge sinistre, qui mesure la variabilité relative de la charge par rapport à sa moyenne. Le coefficient de variation CV est défini comme le rapport entre l'écart type de la charge sinistre et sa moyenne :

$$CV = \frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$$

Effectivement, ces formules, largement utilisées dans le passé, expriment une relation fondamentale dans le modèle collectif. La première formule établit une égalité entre la prime pure $E(S)$ et le produit de la fréquence moyenne $E(N)$ par le coût moyen $E(X)$ des sinistres. Cette relation est cruciale pour estimer la prime d'assurance, car elle permet de déterminer la prime nécessaire en fonction de la fréquence attendue des sinistres et de leur coût moyen.

Cependant, bien que cette formule soit précieuse pour calculer les primes d'assurance, elle ne permet pas de déterminer la distribution de la charge sinistre S . De plus, elle limite les possibilités de calculs de probabilités de ruine et de charges de réassurance, puisqu'elle ne fournit pas une vision complète de la distribution de S .

Pour simplifier les calculs et faciliter l'analyse, un cas particulier a été envisagé, celui des distributions Poisson Composées. Dans ce cas, la distribution de la charge sinistre peut être exprimée de manière analytique, ce qui permet d'effectuer des calculs plus précis et de déduire des conclusions importantes sur la viabilité financière d'une entreprise d'assurance.

En résumé, bien que la formule établissant l'égalité entre prime pure et produit de fréquence moyenne par coût moyen soit utile pour déterminer les primes d'assurance, elle présente des limites quant à l'analyse approfondie de la distribution de la

charge sinistre. C'est pourquoi d'autres approches, telles que les simulations informatiques ou l'utilisation de distributions spécifiques comme les distributions Poisson Composées, sont souvent nécessaires pour une analyse plus complète et précise dans le domaine de l'assurance.

2 Notions de fiabilité

La fiabilité est l'une des composantes essentielles de la qualité d'un produit et elle est retenue comme critère fondamental dès le stade de la conception.

La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimé par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisations et pour une période de temps déterminée.

Définition 2.1 *La fiabilité est l'aptitude d'un système ou d'un élément à accomplir une fonction.*

2.1 Caractéristiques de fiabilité

Fonction de fiabilité

Admettons qu'à l'instant $t = 0$, l'élément où le système commence à fonctionner et qu'à la date ($t = w$), il se produit une panne. La variable aléatoire W est appelée "durée de vie" de l'élément.

$$F(t) = P(W \leq t)$$

est la fonction de répartition (f.d.r.) de la variable aléatoire (v.a.) W , c'est la probabilité de panne dans l'intervalle temps $(0, t)$.

On admet que la v.a. W est une v.a. à densité $f(x)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Définition 2.2 *On appelle fonction de fiabilité la probabilité de bon fonctionnement dans $(0, t)$, tels que :*

$$R(t) = 1 - F(t) = P(W \geq t) = \int_t^{+\infty} f(x) dx$$

Moyenne du temps de bon fonctionnement (MTBF)

La *MTBF* est définie durant une période déterminée dans des conditions spécifiques d'exploitation

$$T_0 = E(W) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} R(t) dt$$

Taux de défaillance (ou risque de panne)

Soit l'événement $A_{t_i, t_j} = \{\text{l'élément fonctionne sans défaillance dans l'intervalle temps } (t_i, t_j)\}$, la probabilité pour que l'élément fonctionne sans panne dans $(t, t + h)$ sachant qu'il a fonctionné sans panne dans $(0, t)$ est :

$$R(t, t + h) = P(A_{t, t+h} / A_{0, t}) = \frac{P(A_{t, t+h} \cap A_{0, t})}{P(A_{0, t})} = \frac{P(A_{0, t+h})}{P(A_{0, t})} = \frac{R(t + h)}{R(t)}.$$

La probabilité de panne dans $(t, t + h)$ est :

$$1 - R(t, t + h) = F(t, t + h) = \frac{R(t) - R(t, t + h)}{R(t)}$$

Définition 2.3 On appelle *taux de panne*, la fonction est :

$$r(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(t, t + h)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t, t + h)}{R(t) h} = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

De l'expression 1, on peut déduire à partir du taux de panne la fonction de fiabilité, il est aisé de constater que :

$$R(t) = \exp \left(-\int_0^t r(x) dx \right)$$

Définition 2.4 On appelle fonction de hasard, la fonction définie par :

$$H(x) = \int_0^x r(t) dt$$

Parfois, la connaissance de la MTBF ne suffit pas, c'est pourquoi il est souvent nécessaire d'avoir une idée sur la dispersion des valeurs de la durée de vie autour de T_0 .

$$\text{Var}(W) = E(W - T_0)^2 = E(W^2) - E(W)^2$$

2.2 Autres coefficients de fiabilité

Définition 2.5 La disponibilité ou coefficient d'aptitude (pointwise availability) $D(t)$ est la probabilité pour que le système soit capable d'accomplir correctement ses tâches lorsqu'il est sollicité, c'est la probabilité de bon fonctionnement à la date t .

Définition 2.6 La maintenabilité $M(t)$ est la probabilité de localiser et de réparer les éléments défectueux, c'est la probabilité que le système fonctionne à l'instant t sachant qu'il était en panne à tout instant $t' \in (0, t)$.

Définition 2.7 La sécurité $S(t)$ est la probabilité d'éviter les événements catastrophiques pour la mission considérée, c'est à dire la probabilité pour qu'une défaillance dont les effets sont catastrophiques ne survienne pas.

Définition 2.8 La sûreté peut être caractérisée par le vecteur :

$$\hat{S}(t) = \{R(t), D(t), M(t), S(t)\}.$$

Remarque 2.1 Il est évident que ces critères sont dépendants.

Remarque 2.2 La quantité T_0 est appelée parfois MTFE (mean time first failure).

3 Méthodes d'estimations usuelles

3.1 Méthode des moments

La méthode des moments est une approche intuitive pour estimer les paramètres d'une distribution en utilisant les moments empiriques. Elle consiste à estimer l'espérance mathématique par une moyenne empirique et la variance par une variance empirique, et ainsi de suite.

Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi de X_j , alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon. En d'autres termes, si $\eta = E(X)$, alors l'estimateur de η par la méthode des moments (EMM) est :

$$\hat{\eta}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

Plus généralement, pour $\eta \in \mathbb{R}$, si $E(\eta) = \Psi(\eta)$, où Ψ est une fonction inversible, alors l'estimateur de η par la méthode des moments est :

$$\hat{\eta}_n = \Psi^{-1}(\bar{X})$$

De même, on estime la variance de la loi des X_j par la variance empirique de l'échantillon, comme suit :

$$Var(X) = S_n^2 \text{ et } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2.$$

Plus généralement, si la loi des deux paramètres η_1 et η_2 est telle que :

$$(E(X), var(X)) = \Psi(\eta_1, \eta_2)$$

Où, Ψ est une fonction inversible, alors les estimateurs des η_1 et η_2 par la méthode des moments sont :

$$(\hat{\eta}_{1n}, \hat{\eta}_{2n}) = \Psi^{-1}(\bar{X}, S_n^2)$$

Ce principe peut être généralisé aux moments de tous ordres, centrés ou non centrés : $E((X - E(X))^p)$ et $E(X^p)$, $p \geq 1$.

3.2 Méthode du Maximum de vraisemblance

Dans le cas des données complètes, où X_1, X_2, \dots, X_n sont n observations indépendantes et identiquement distribuées, la fonction de vraisemblance pour un paramètre η est définie comme suit :

$$L(\underline{x}, \eta) = \prod_{j=1}^n f(x_j, \eta)$$

Où $f(x_j, \eta)$ est la fonction de densité de probabilité des observations. L'idée principale de la méthode du maximum de vraisemblance est de trouver la valeur du paramètre η qui maximise la probabilité d'observer les données $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'autres termes, on cherche la valeur de η pour laquelle les données observées sont les plus vraisemblables.

L'estimateur du maximum de vraisemblance η est défini comme la valeur de η qui maximise la fonction de vraisemblance $L(\underline{x}, \eta)$, c'est-à-dire

$$\hat{\eta}_n = \arg \max_{\eta \in \mathbb{R}} L(\underline{x}, \eta).$$

Souvent, pour faciliter le calcul, on maximise plutôt la log-vraisemblance, qui est le log de la fonction de vraisemblance :

$$\hat{\eta}_n = \arg \max_{\eta \in \mathbb{R}} \ln L(\underline{x}, \eta).$$

Lorsque $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$ et que toutes les dérivées partielles existent, l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\eta}_n$ est la solution du système d'équations appelées équations de vraisemblance :

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \frac{\partial \ln L(\underline{x}, \eta)}{\partial \eta_j} = 0$$

La solution de cette équation vérifie également la condition :

$$\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}, \eta)}{\partial \eta_j^2} < 0$$

Ainsi, $\hat{\eta}_n$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance qui maximise la log-vraisemblance et satisfait les conditions de convexité.

CHAPITRE 2

L'estimation Bayésienne

1 Introduction

Le terme "Bayésien" tire son origine du nom du révérend Thomas Bayes (Angleterre, XVIII^e siècle). En 1763, un article posthume attribué à Bayes expose le théorème suivant, depuis lors connu sous le nom de théorème de Bayes :

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A) + P(E|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Ce théorème a été reformulé de manière continue dans ses travaux :

$$g(x|y) = \frac{f(y|x)g(x)}{\int f(y|x)g(x)dx}$$

Dans cette formulation, X et Y sont deux variables aléatoires connaissant respectivement les réalisations x et y . $f(y|x)$ représente la distribution conditionnelle de Y sachant la réalisation de X , et $g(x)$ la distribution marginale de X .

Le mathématicien français Laplace a également découvert ces résultats indépendamment de Bayes. Tous deux ont étendu ces travaux en décrivant l'incertitude sur les paramètres γ d'un modèle paramétrique $f(y|\gamma)$ par une distribution de probabilité

π . Le Théorème de Bayes s'écrit alors :

$$p(\gamma|y) = \frac{f(y|\gamma)\pi(\gamma)}{\int f(y|\gamma)\pi(\gamma)d\gamma}$$

La différence fondamentale entre l'approche fréquentiste et l'approche Bayésienne réside dans le fait que cette dernière considère les paramètres non pas comme fixes, mais plutôt comme des variables aléatoires. Il s'agit donc d'une différence philosophique profonde, même si les deux approches ont des points de convergence. L'approche Bayésienne induit une distribution marginale $\pi(\gamma)$, appelée "a priori" ou "prior" en anglais. Sa spécification est à la fois un avantage de l'analyse Bayésienne, car elle permet de formaliser les hypothèses sur l'objet d'étude et d'en tenir compte dans la modélisation, mais aussi une faiblesse, car elle introduit nécessairement une subjectivité dans l'analyse. Ces deux aspects de l'analyse Bayésienne seront tour à tour mis en avant par les Bayésiens ainsi que par leurs détracteurs.

Les idées du révérend Bayes, découvertes indépendamment et ensuite approfondies par Laplace, ont eu une influence profonde sur le développement des statistiques au cours de la seconde moitié du *XVIII*e siècle et du *XIX*e siècle. Cependant, avec l'avènement des statistiques modernes grâce à Galton et Pearson, puis à Fisher et Neymann en particulier, la théorie fréquentiste est devenue dominante jusqu'au *XX*e siècle. Les statistiques Bayésiennes sont ensuite revenues sur le devant de la scène, notamment grâce à l'avènement de l'ordinateur et au développement de méthodes numériques efficaces qui ont permis de surmonter certaines limites précédemment présentes dans l'analyse Bayésienne.

Sous l'influence notamment de Fisher, qui a fortement rejeté le raisonnement Bayésien, le *XX*e siècle a vu la communauté statistique divisée entre les partisans de l'approche Bayésienne et les partisans de l'approche fréquentiste (considérant les paramètres fixes), avec parfois des débats virulents opposant les deux communautés.

Aujourd'hui, ces querelles sont dépassées, en partie en raison des succès pratiques rencontrés par les deux approches sur des problèmes modernes et complexes, notamment dans le domaine de la santé. De plus, un certain nombre de méthodes, telles que les méthodes empiriques Bayésiennes, se situent à la frontière entre les deux

approches. Le statisticien contemporain, qu'il soit dans le domaine de la biostatistique ou d'autres domaines, doit donc être pragmatique et polyvalent, en intégrant l'analyse Bayésienne dans sa boîte à outils pour résoudre efficacement les problèmes rencontrés.

2 Modélisation Bayésienne

Dans l'approche Bayésienne, le paramètre γ est considéré comme inconnu mais aléatoire. On suppose donc que γ est une variable aléatoire possédant une distribution "a priori" qui peut être suggérée par un retour d'expérience ou des connaissances préalables.

À partir de là, une distribution a posteriori sur γ peut être obtenue en intégrant l'information issue de l'échantillon $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Pour simplifier, nous supposons que le paramètre est de dimension 1, mais l'extension à une dimension quelconque ne présente pas de difficulté.

Comme mentionné précédemment, la loi a posteriori $\pi(\gamma|\underline{x})$ peut être interprétée comme un résumé de l'information disponible sur γ lorsque x est observé. On retient souvent la moyenne de la loi a posteriori comme une estimation pour le paramètre γ . En d'autres termes, l'estimateur Bayésien de la moyenne de γ est donné par :

$$\gamma_{Bayes} = \int_{\gamma} \gamma \pi(\gamma|\underline{x}) d\gamma$$

Cette estimation tient compte à la fois de l'information a priori sur γ et de l'information contenue dans les données observées x , en intégrant de manière pondérée les deux sources d'information.

Effectivement, dans de nombreux cas, il peut être difficile de disposer d'une quantité suffisante d'informations a priori sur le paramètre inconnu γ pour construire une distribution a priori précise. Dans de telles situations, l'information a priori est souvent utilisée pour déterminer les paramètres de la loi a priori, appelés hyperparamètres.

Cependant, lorsque l'information a priori est limitée ou inexistante, il est parfois nécessaire d'introduire la notion de loi a priori non informative. Cette approche permet de rester dans un cadre Bayésien même en l'absence d'information a priori.

Une loi a priori non informative est choisie de manière à minimiser son impact sur les résultats Bayésiens, tout en conservant les propriétés de cohérence et de validité du cadre Bayésien. Une loi a priori non informative est souvent choisie de manière à être "plate" ou "uniforme" sur un certain domaine, ce qui signifie qu'elle ne privilégie aucune valeur particulière du paramètre.

Il existe différentes formes de lois a priori non informatives, telles que la loi a priori uniforme, la loi a priori de Jeffrey, ou encore des lois a priori basées sur des principes de symétrie ou d'invariance. Le choix de la loi a priori non informative dépend souvent du contexte spécifique du problème et des préférences de l'analyste.

La loi a posteriori

La loi a posteriori, notée $\pi(\gamma|\underline{x})$, est la loi conditionnelle de γ sachant x , où x est l'ensemble des observations. Sa densité est obtenue en vertu de la formule de Bayes. Cette loi a posteriori exprime la mise à jour de nos croyances sur le paramètre γ après avoir observé les données x .

Si l'ensemble des valeurs possibles pour γ noté Θ est discret, alors la densité de probabilité conditionnelle $\pi(\gamma|\underline{x})$ est calculée comme suit :

$$\pi(\gamma|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}|\gamma)\pi(\gamma)}{\sum_{\gamma \in \Theta} f(\underline{x}|\gamma)\pi(\gamma)} \text{ si } \Theta \text{ est discret}$$

Où $f(x|\gamma)$ est la fonction de vraisemblance et $\pi(\gamma)$ est la loi a priori sur γ .

Si Θ est continu, la densité de probabilité conditionnelle $\pi(\gamma|\underline{x})$ est calculée de manière similaire, mais en utilisant une intégrale :

$$\pi(\gamma|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}|\gamma)\pi(\gamma)}{\int_{\Theta} f(\underline{x}|\gamma)\pi(\gamma) d\gamma} \text{ si } \Theta \text{ est continu}$$

Dans les deux cas, la densité de probabilité conditionnelle $\pi(\gamma|\underline{x})$ donne la distribution de γ sachant les données observées x , ce qui permet d'effectuer des inférences Bayésiennes sur le paramètre γ à la lumière des données observées.

Lois a priori conjuguées

Dans le contexte Bayésien, une loi a priori est dite conjuguée par rapport à une fonction de vraisemblance si, lorsque la loi a priori appartient à une certaine famille de lois de probabilité sur l'espace des paramètres Θ , la loi a posteriori $\pi(\gamma|\underline{x})$ obtenue après l'observation des données appartient également à cette même famille.

Formellement, soit F une famille de lois de probabilité sur Θ . Si la loi a priori $\pi(\gamma)$ appartient à F , si pour toute observation x , la loi a posteriori appartient également à F , alors on dit que la loi a priori est conjuguée par rapport à la fonction de vraisemblance et à la famille F .

En d'autres termes, une loi a priori est conjuguée si la forme fonctionnelle de la loi a priori reste inchangée après la mise à jour Bayésienne à partir des données observées.

L'utilisation de lois a priori conjuguées peut simplifier considérablement les calculs en permettant d'obtenir des expressions analytiques pour la loi a posteriori. Cela facilite également l'interprétation des résultats et permet une plus grande compréhension des propriétés de la distribution a posteriori.

Lois a priori non informatives

Les lois a priori non informatives jouent un rôle crucial en statistique Bayésienne lorsqu'on manque d'informations préalables sur les paramètres du modèle. Explorons quelques exemples de telles lois a priori non informatives dans le contexte d'un modèle statistique Bayésien où les observations suivent une loi de Bernoulli de paramètre γ avec $\gamma \in]0, 1[$.

- **Loi a priori uniforme sur γ** : En l'absence d'informations a priori sur γ , il est naturel de considérer une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. Cette loi assigne

une probabilité égale à chaque valeur possible de γ dans l'intervalle, reflétant ainsi notre ignorance sur la vraie valeur de γ .

- **Loi a priori (impropre) d'Haldane** : Une autre approche consiste à utiliser la loi a priori (impropre) d'Haldane, définie comme

$$\pi(\gamma) = [\gamma(1 - \gamma)]^{-1}]_{]0,1[}(\gamma)$$

Cette loi est souvent utilisée en arguant que l'espérance conditionnelle de γ sachant les données x est égale à l'estimateur du maximum de vraisemblance pour γ .

- **Loi a priori de Jeffrey** : En 1960, Harold Jeffrey a proposé une alternative pour les lois a priori non informatives. Cette approche repose sur l'utilisation d'une forme spécifique de distribution a priori qui équilibre l'information a priori et la vraisemblance des données. La forme précise de cette loi a priori dépend du modèle et peut être dérivée en utilisant des arguments informatifs.

Ces exemples illustrent différentes approches pour spécifier des lois a priori non informatives dans le contexte Bayésien. Le choix de la loi a priori appropriée dépend souvent du contexte du problème, des connaissances préalables disponibles et des propriétés désirées pour les estimations Bayésiennes.

3 Estimation sous différentes fonctions de perte

3.1 Fonction de perte quadratique

La fonction de perte quadratique est couramment utilisée dans le cadre de l'estimation Bayésienne. Elle est définie comme suit :

$$L(\gamma, s) = (\gamma - s)^2,$$

Où γ est le paramètre à estimer et s est l'estimateur de γ .

Une variante de cette fonction est la fonction de perte quadratique pondérée,

3. Estimation sous différentes fonctions de perte

également appelée fonction de perte quadratique généralisée, qui prend la forme :

$$L(\gamma, s) = \omega(\gamma)(\gamma - s)^2,$$

Où $\omega(\gamma)$ est une fonction pondérante dépendant du paramètre γ .

Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, l'estimateur de Bayes $\delta^\pi(x)$ de γ associé à une loi a priori π est la moyenne a posteriori de γ , définie comme suit :

$$\delta^\pi(x) = E_{\pi(\cdot|x)}(\gamma) = \int_{\gamma \in \Theta} L(\gamma, \delta(x)) \pi(\gamma|x) d\gamma$$

Cette moyenne a posteriori représente l'estimateur de γ qui minimise l'espérance de la fonction de perte sous la loi a posteriori $\pi(\gamma|x)$. Elle est souvent utilisée comme estimateur Bayésien dans le cadre de la fonction de perte quadratique.

3.2 Fonction de perte Linex

La fonction de perte Linex (Linear exponential loss function) est une fonction de perte asymétrique qui a été introduite par Varian en 1975. Elle est définie comme suit :

$$L(\Delta) \approx \exp[\varpi\Delta] - \varpi\Delta - 1, \varpi \neq 0$$

Où $\Delta = (\delta(x) - \gamma)$ est la différence entre l'estimateur $\delta(x)$ et le paramètre γ , et ϖ est un paramètre qui contrôle la forme de la fonction de perte. Le signe de ϖ détermine la direction et le degré de symétrie de la fonction de perte si $\varpi > 0$, la sur-estimation est plus sévère que la sous-estimation, et vice versa.

Pour approcher de zéro, la perte Linex devient approximativement équivalente à la fonction de perte quadratique :

$$E_\gamma(L(\delta(x) - \gamma)) \propto \exp[\varpi\delta(x)] E_\gamma(\exp[-\varpi\gamma]) - \varpi(\delta(x) - E_\gamma(\gamma) - 1)$$

Où $E_\gamma(\cdot)$ représente l'espérance par rapport à la densité a posteriori de γ .

L'estimateur de Bayes $\delta_\pi(x)$ qui minimise cette fonction de perte est alors donné

par :

$$\hat{\delta}_L(x) = -\frac{1}{\varpi} \ln(E\gamma(\exp[-\varpi\gamma]))$$

Il convient de noter que cette expression est valable sous l'hypothèse que $E\gamma(\exp[-\varpi\gamma])$ existe et est finie.

4 L'algorithme Metropolis-Hastings

4.1 Introduction

Il existe de nombreuses raisons pour lesquelles le calcul d'une intégrale comme

$$J(h) = \int h(x)d\pi(x)$$

Où $d\pi$ est une mesure de probabilité qui peut s'avérer intractable, de la forme du domaine X à la dimension de X (et x), à la complexité de l'une des fonctions h ou π . Les méthodes numériques standard peuvent être entravées pour les mêmes raisons. Des difficultés similaires (peuvent) se produire lorsque l'on tente de trouver l'extrême de π au-dessus du domaine X .

C'est pourquoi le recours aux méthodes de Monte Carlo peut s'avérer inévitable : exploiter la nature probabilistique de π et sa pondération du domaine X est souvent le moyen le plus naturel et le plus efficace de produire des approximations aux intégrales liées à π et de déterminer les régions du domaine x qui sont plus lourdement pondérées par π .

L'approche de Monte Carlo (Hammersley et Handscomb, 1964, Rubinstein, 1981) est apparue avec les ordinateurs, à la fin de la Seconde Guerre mondiale, car elle repose sur la capacité de produire un grand nombre de réalisations d'une variable aléatoire distribuée selon une distribution donnée, en profitant de la stabilisation de la moyenne empirique prédite par la Loi des grands nombres. Cependant, produire des simulations à partir d'une distribution spécifique peut s'avérer presque impossible ou assez coûteux et, par conséquent, le (standard) Monte Carlo peut également faire face à des situations intractables.

Une approche indirecte à la simulation des distributions complexes et en particulier à la malédiction de la dimensionnalité rencontrée par les méthodes régulières de Monte-Carlo est d'utiliser une chaîne Markov associée à cette distribution cible, en utilisant la théorie de la chaîne Markov pour valider la convergence des chaînes à la distribution d'intérêt et la stabilisation des moyennes empiriques (Meyn et Tweedie, 1994). Il est donc peu surprenant que les méthodes de la chaîne Markov Monte Carlo (**MCMC**) aient été utilisées presque aussi longtemps que les techniques originales de Monte Carlo, même si leur impact sur les statistiques n'a pas été vraiment senti jusqu'au début des années 1990. Une entrée complète sur l'histoire des méthodes *MCMC* peut être trouvée dans Robert et Casella (2010).

4.2 Les raisons de l'algorithme

Compte tenu d'une densité de probabilité π appelée la cible, définie sur un espace d'état X , et calculable jusqu'à une constante de multiplication, $\pi(x) \propto \tilde{\pi}(x)$, l'algorithme Metropolis-Hastings, nommé d'après Metropolis et al. (1953) et Hastings (1970), propose une façon générale de construire un Markov chaîne sur X qui est ergodique et stationnarité par rapport à π — signifiant que, si $X^{(t)} \sim \pi(x)$, alors $X^{(t+1)} \sim \pi(x)$ — et qui converge donc en distribution à π . Pendant qu'il y a d'autres moyens génériques de livraison Chaînes Markov associées à une distribution stationnaire arbitraire, voir par exemple, Barker (1965), la Metropolis-L'algorithme de Hastings est le cheval de travail des méthodes *MCMC*, à la fois pour sa simplicité et sa polyvalence, et par conséquent la première solution à considérer dans des situations intractables. La principale motivation pour utiliser les chaînes Markov est qu'elles fournissent des raccourcis dans les cas où l'échantillonnage générique exige trop d'efforts de la part de l'expérimentateur.

Au lieu de cibler immédiatement le « grand tableau », comme le ferait un algorithme d'acceptation et de rejet (Robert et Casella, 2009), les chaînes Markov construisent un tableau progressif de la distribution cible, en procédant à l'exploration locale de l'État espace X jusqu'à ce que toutes les régions d'intérêt aient été découvertes. Une analogie pour la méthode est le cas d'un visiteur à un musée forcé

par un blackout général de regarder une peinture avec une petite flèche. Avant de décrire l'algorithme lui-même, soulignons les fondements probabilistiques des algorithmes de la chaîne Markov Monte Carlo (*MCMC*) la chaîne Markov retournée par la méthode, $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(t)}, \dots$. Cela signifie que la chaîne peut être considérée comme un échantillon, bien que dépendant, et approximativement distribué à partir de π . En raison de la nature markovienne de la simulation, les premières valeurs sont fortement dépendantes de la valeur initiale $X^{(1)}$ et sont généralement retirées de l'échantillon en cas d'incendi ou de réchauffement. Bien qu'il y ait très peu de paramètres où le temps où la chaîne atteint la stationnarité peut être déterminé, voir, par exemple, Hobert et Robert (2004), il n'y a pas besoin de chercher un tel instant, puisque la moyenne empirique :

$$J_T(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(X^{(t)})$$

Converge presque certainement à $J(h)$, peu importe ce que la valeur de départ, si la chaîne Markov est ergotique, c'est-à-dire oublie de sa valeur de début.

Cela implique que, en théorie la simulation d'une chaîne Markov est intrinsèquement équivalente à une simulation standard i.i.d. de la cible, la différence étant dans une perte d'efficacité, c'est-à-dire dans la nécessité de simuler plus de termes pour atteindre une variance donnée pour l'estimateur de Monte Carlo ci-dessus. Le principe fondamental des algorithmes MCMC est donc simple, même si la mise en œuvre pratique de la méthode peut s'avérer délicate ou dans certains cas impossible.

Sans aller beaucoup plus loin dans la théorie de la chaîne de Markov, nous soulignons que l'existence d'une distribution stationnaire pour une chaîne implique que cette chaîne a automatiquement une forte stabilité appelée irréductibilité. Autrement dit, la chaîne peut se déplacer dans tout l'espace d'état, c'est-à-dire qu'elle peut finalement atteindre n'importe quelle région de cet espace, quelle que soit sa valeur initiale.

4.3 L'algorithme Metropolis-Hastings

Associé à une densité cible π nécessite le choix d'une densité conditionnelle ρ également appelée proposition ou candidat noyau. La transition de la valeur de la chaîne Markov ($X^{(t)}$) au moment t et sa valeur au moment $t + 1$ provient par l'intermédiaire de l'étape de transition suivante :

Donnée $X^{(t)} = x(t)$,

1. Générer $Z_t \sim f(z | x(t))$.
2. Prendre

$$X^{(t+1)} = \begin{cases} Z_t & \text{avec une probabilité de } \rho(x(t), Z_t) \\ x(t) & \text{avec une probabilité de } 1 - \rho(x(t), Z_t) \end{cases}$$

Où

$$\rho(x, z) = \min \left(\frac{\tilde{\pi}(z)f(z | x)}{\tilde{\pi}(x)f(x | z)}, 1 \right)$$

Ensuite, comme le montre Metropolis et al (1953), cette transition préserve la densité stationnaire π si la chaîne est irréductible, c'est-à-dire si f a une largeur suffisante de soutien pour atteindre finalement n'importe quelle région de l'espace d'état X avec masse positive sous π . Une condition suffisante est que f est positif partout. La nature même de l'étape d'acceptation-rejet introduite par ces auteurs est donc suffisante pour transformer une simulation d'une densité de proposition quasi arbitraire ρ en une génération qui préserve π comme la distribution stationnaire. Ça sonne à la fois incroyable et trop bon pour être vrai! mais c'est vrai, au sens théorique rédigé ci-dessus. Dans la pratique, les performances de l'algorithme dépendent évidemment fortement du choix de la transition f , puisque certaines options voient la chaîne incapable de converger dans un temps.

CHAPITRE 3

Modèles généralisés Estimations et applications en fiabilité

1 Modèle Odd Lindley G-family

Dans le cadre de la modélisation d'un montant de sinistres, on s'intéresse à la distribution Odd Lindley G-family, dont on déterminera l'estimation des paramètres et de la prime pure par différentes méthodes. De même, on s'intéresse à l'estimation de la fonction de fiabilité.

La distribution Odd Lindley G-family

La fonction de répartition Odd Lindley G-family

Définition 1.1 *La distribution Odd Lindley G-family est définie par :*

$$F_{(\alpha, \varepsilon)}(x) = \int_0^{\frac{G(x, \varepsilon)}{G(x, \varepsilon)}} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} (1 + t) \exp(-\alpha t) dt; \text{ tels que } t \geq 0$$

Proposition 1.1 *Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Odd Lindley G-*

1. Modèle Odd Lindley G-family

Family avec $\alpha > 0$ est donnée par

$$F_{(\alpha, \varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha + G(x, \varepsilon)}{(1 + \alpha)G(x, \varepsilon)} \exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right); & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{sinon } x < 0 \end{cases}$$

Tels que $\bar{G}(x, \varepsilon) = 1 - G(x, \varepsilon)$

Preuve. Par définition, on a

$$F_{(\alpha, \varepsilon)}(x) = \int_0^{\frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} (1 + t) \exp(-\alpha t) dt; \text{ tels que } t \geq 0$$

Ensuite

$$\begin{aligned} F_{(\alpha, \varepsilon)}(x) &= \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \left(\left[(1 + t) \frac{\exp(-\alpha t)}{-\alpha} \right]_0^{\frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}} - \int_0^{\frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}} \frac{\exp(-\alpha t)}{-\alpha} dt \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \left(\left(1 + \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)} \right) \frac{\exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right)}{-\alpha} - \frac{1}{-\alpha} + \frac{\exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right)}{-\alpha^2} - \frac{1}{-\alpha^2} \right) \\ &= \frac{-\alpha}{1 + \alpha} \exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right) - \frac{\alpha G(x, \varepsilon)}{(1 + \alpha)\bar{G}(x, \varepsilon)} \exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{\exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right)}{1 + \alpha} + \frac{1}{1 + \alpha} \\ &= 1 - \frac{(\alpha \bar{G}(x, \varepsilon) + \alpha G(x, \varepsilon) + \bar{G}(x, \varepsilon)) \exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right)}{(1 + \alpha) \bar{G}(x, \varepsilon)} \\ &= 1 - \frac{(\alpha - \alpha G(x, \varepsilon) + \alpha G(x, \varepsilon) + \bar{G}(x, \varepsilon)) \exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right)}{(1 + \alpha) \bar{G}(x, \varepsilon)} \\ &= 1 - \frac{\alpha + \bar{G}(x, \varepsilon)}{(1 + \alpha) \bar{G}(x, \varepsilon)} \exp\left(-\alpha \frac{G(x, \varepsilon)}{\bar{G}(x, \varepsilon)}\right) \end{aligned}$$

■

La fonction de densité Odd Lindley G-family

Définition 1.2 Soit v.a X qui suit une loi Odd Lindley G-Family avec $\alpha > 0$ est donnée par :

$$f_{(\alpha,\varepsilon)}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^2 g(x,\varepsilon)}{(1+\alpha)(\bar{G}(x,\varepsilon))^3} \exp\left(-\alpha \frac{G(x,\varepsilon)}{\bar{G}(x,\varepsilon)}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{, sinon } x < 0 \end{cases}$$

Preuve. On dérive la fonction de répartition pour trouver la fonction de densité avec $x \geq 0$, $\alpha > 0$:

$$f_{(\alpha,\varepsilon)}(x) = F'_{(\alpha,\varepsilon)}(x)$$

Telles que :

$$\begin{aligned} f_{(\alpha,\varepsilon)}(x) &= \left(\frac{-g(x,\varepsilon)\bar{G}(x,\varepsilon)(1+\alpha) + g(x,\varepsilon)(1+\alpha)(\alpha + \bar{G}(x,\varepsilon))}{((1+\alpha)\bar{G}(x,\varepsilon))^2} - \frac{\alpha + \bar{G}(x,\varepsilon)}{(1+\alpha)\bar{G}(x,\varepsilon)} \frac{-\alpha g(x,\varepsilon)}{\bar{G}(x,\varepsilon)^2} \right) \exp\left(-\alpha \frac{G(x,\varepsilon)}{\bar{G}(x,\varepsilon)}\right) \\ &= \left(\frac{-\alpha g(x,\varepsilon)\bar{G}(x,\varepsilon) + \alpha^2 g(x,\varepsilon) + \alpha \bar{G}(x,\varepsilon)g(x,\varepsilon)}{(1+\alpha)\bar{G}(x,\varepsilon)^3} \right) \exp\left(-\alpha \frac{G(x,\varepsilon)}{\bar{G}(x,\varepsilon)}\right) \\ &= \frac{\alpha^2 g(x,\varepsilon)}{(1+\alpha)\bar{G}(x,\varepsilon)^3} \exp\left(-\alpha \frac{G(x,\varepsilon)}{\bar{G}(x,\varepsilon)}\right) \end{aligned}$$

■

2 La distribution Exponentielle Exponentiée

La fonction de répartition Exponentielle Exponentiée

Proposition 2.1 Soit v.a X qui suit une loi Exponentielle Exponentiée avec $\lambda > 0$, $\theta > 0$ est :

$$G_{(\theta,\lambda)}(x) = \begin{cases} (1 - \exp(-\lambda x))^\theta; & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{sinon } x < 0 \end{cases}$$

La fonction de densité Exponentielle Exponentiée

Proposition 2.2 Soit v.a X qui suit une loi Exponentielle Exponentiée avec λ et $\theta > 0$ est :

$$g_{(\theta,\lambda)}(x) = \begin{cases} \theta \lambda \exp(-\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{\theta-1}; & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ sinon } x < 0 \end{cases}$$

Preuve. La démonstration de la fonction de répartition de $G_{(\theta,\lambda)}(x)$

$$G_{(\theta,\lambda)}(x) = \int_0^x \theta \lambda \exp(-\lambda t) (1 - \exp(-\lambda t))^{\theta-1} dt$$

On prend $z = 1 - \exp(-\lambda t)$ $dz = \lambda \exp(-\lambda t) dt$ d'où :

$$\begin{aligned} G_{(\theta,\lambda)}(x) &= \int_0^{1-\exp(-\lambda x)} \theta z^{\theta-1} dz \\ &= \theta \frac{1}{\theta} [z^\theta]_0^{1-\exp(-\lambda x)} \\ &= (1 - \exp(-\lambda x))^\theta \end{aligned}$$

Alors, on trouve la fonction de répartition telle que λ et $\theta > 0$:

$$G_{(\theta,\lambda)}(x) = (1 - \exp(-\lambda x))^\theta$$

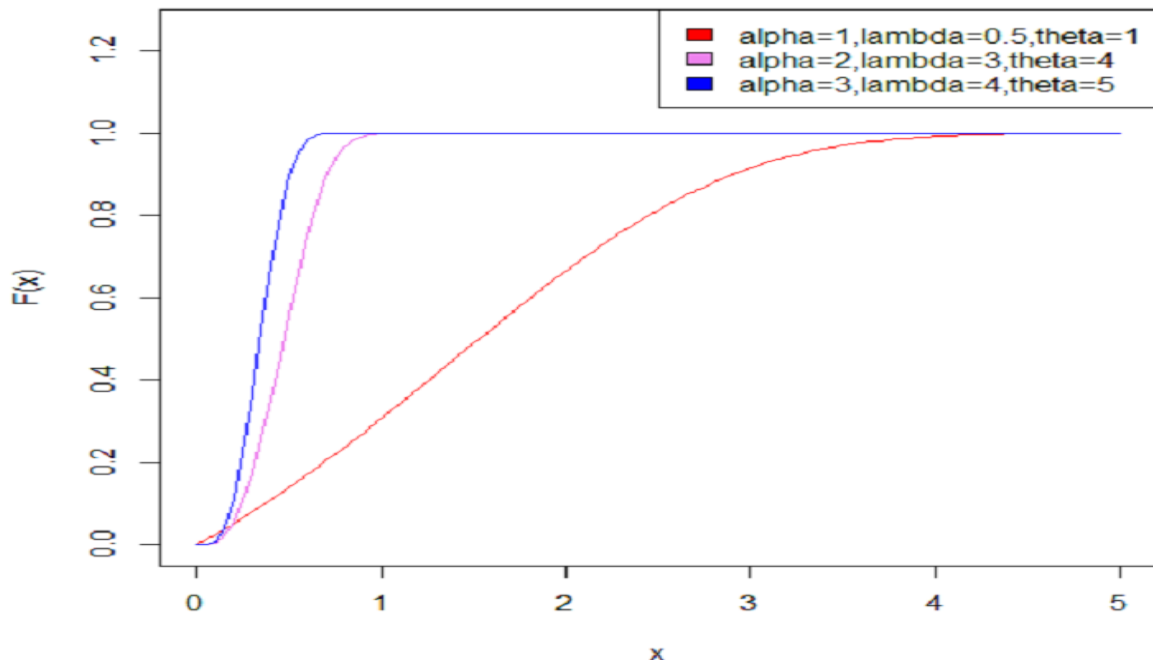
■

3 La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

La fonction de répartition d'une distribution (OLEE)

Soit v.a X qui suit une loi Exponentielle Exponentiée Odd Lindley avec $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ est donnée par :

$$F_{(\alpha,\theta,\lambda)}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha + (1 - \exp(-\lambda x))^\theta}{(1 + \alpha)(1 - \exp(-\lambda x))^\theta} \exp\left(-\alpha \frac{(1 - \exp(-\lambda x))^\theta}{1 - \exp(-\lambda x)}\right); & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{sinon } x < 0 \end{cases}$$



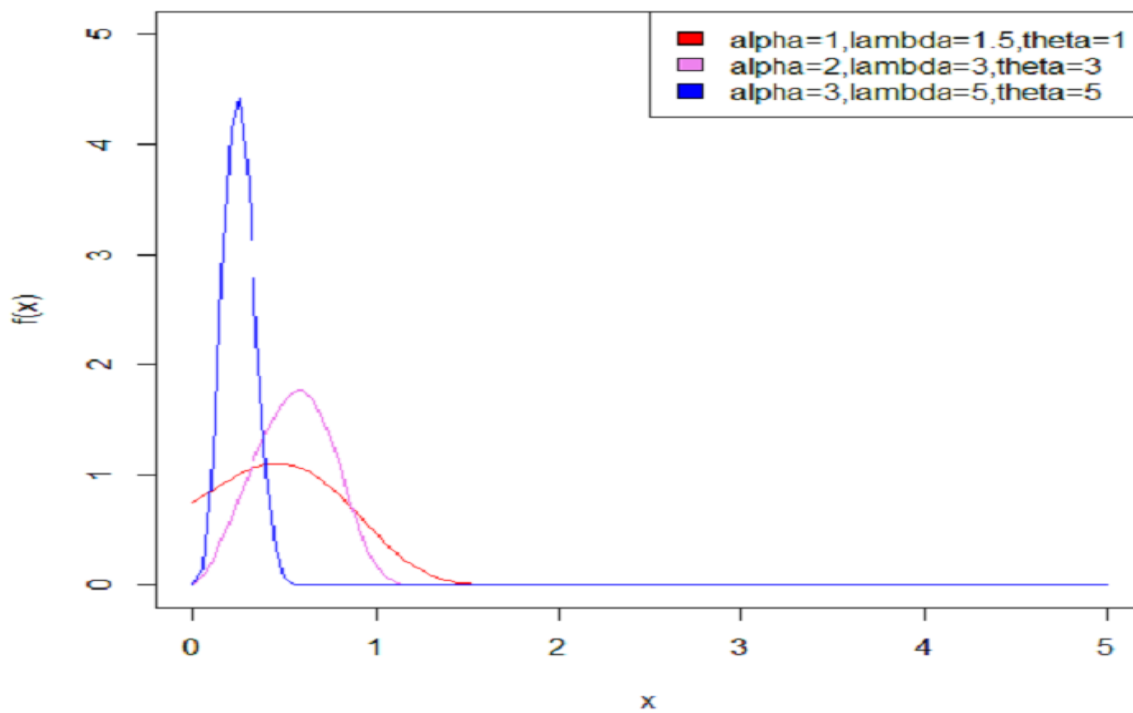
Fonction de Répartition OLEE différents paramètres.

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

La fonction de densité Exponentielle Exponentié Odd Lindley

Proposition 3.1 Soit v.a X qui suit une loi Exponentielle Exponentié Odd Lindley avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0, \theta > 0$ est :

$$f_{(\alpha,\theta,\lambda)}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^2 \theta \lambda \exp(-\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{\theta-1}}{(1+\alpha)(1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)^3} \exp\left(-\alpha \frac{(1 - \exp(-\lambda x))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta}\right); & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ sinon } x < 0 \end{cases}$$



Fonction de Densité OLEE différents paramètres.

Fonction de fiabilité

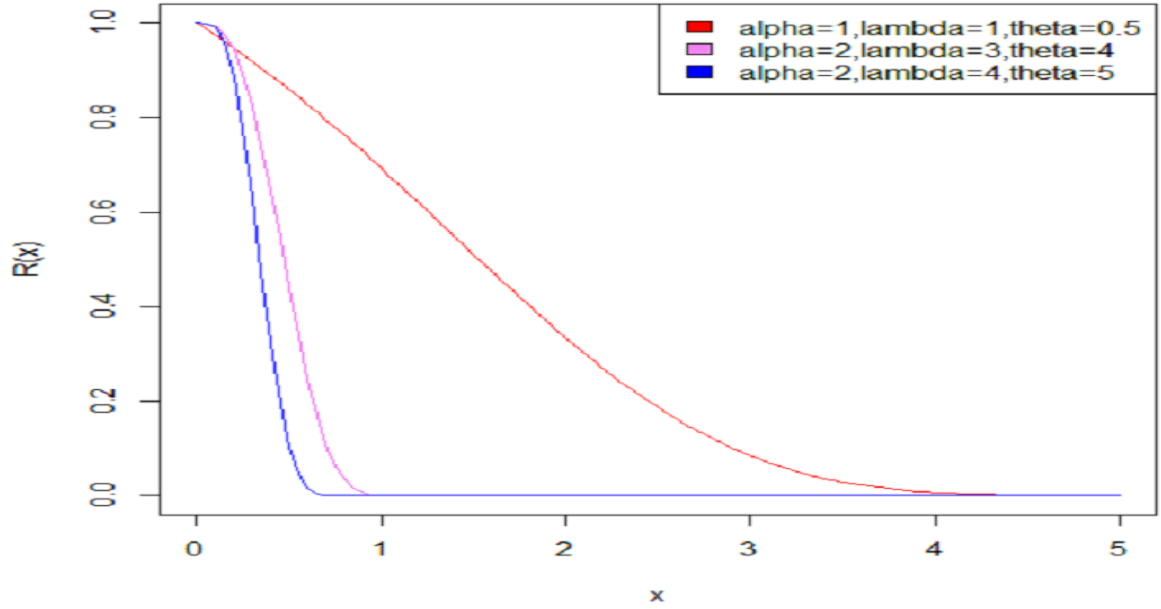
Définition 3.1 Soit la variable aléatoire X qui représente le temps de bon fonctionnement d'un matériel (temps de survie). La fonction de fiabilité est notée $R(x)$, définie sur $[0; 1]$ par :

$$R(x) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x)$$

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

Donc, la fonction de fiabilité de modèle d'Exponentielle Exponentiée Odd Lindley avec α et λ, θ des réels positifs est :

$$R_{(\alpha,\lambda,\theta)}(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{si } x < 0 \\ \frac{\alpha + (1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)}{(1 + \alpha)(1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)} \exp\left(-\alpha \frac{(1 - \exp(-\lambda x))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta}\right) & ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Fonction de fiabilité OLEE différents paramètres.

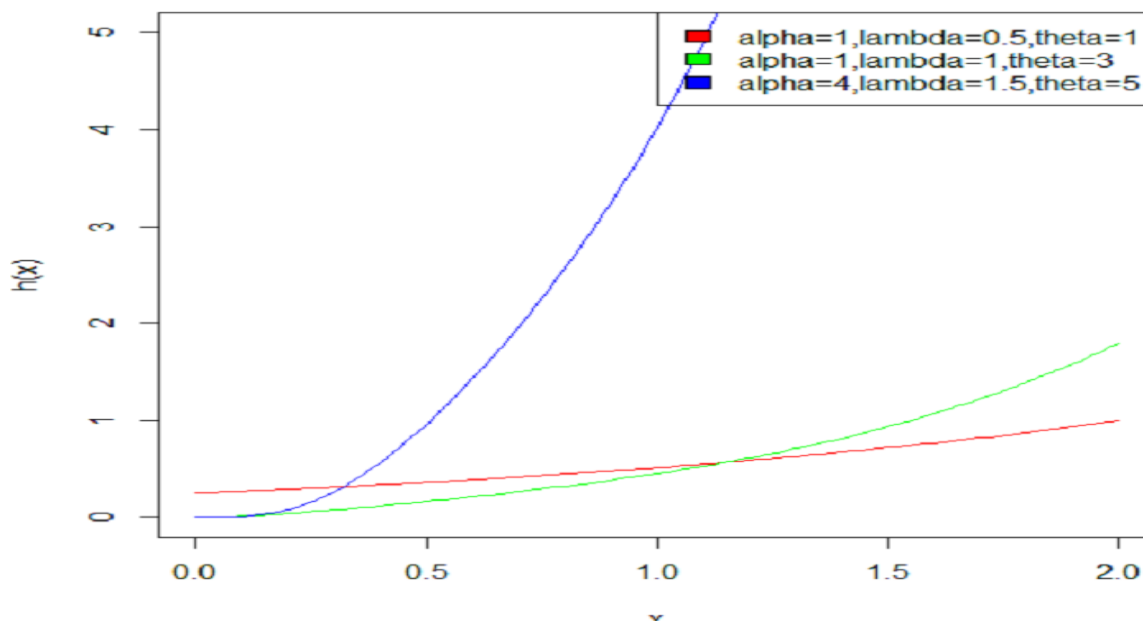
Le taux de hasard

Définition 3.2 Le taux de hasard de la loi Exponentielle Exponentiée Odd Lindley de trois paramètres α et λ, θ des réels positifs est :

$$\begin{aligned} h_{(\alpha,\lambda,\theta)}(x) &= \frac{f_{(\alpha,\lambda,\theta)}(x)}{R_{(\alpha,\lambda,\theta)}(x)} \\ &= \frac{\frac{\alpha^2 \theta \lambda \exp(-\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{\theta-1}}{(1 + \alpha)(1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)^3} \exp\left(-\alpha \frac{(1 - \exp(-\lambda x))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta}\right)}{\frac{\alpha + (1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)}{(1 + \alpha)(1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)} \exp\left(-\alpha \frac{(1 - \exp(-\lambda x))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta}\right)} \text{si } x \geq 0 \end{aligned}$$

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha^2 \theta \lambda \exp(-\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{\theta-1}}{(1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)^2} \\
 &= \frac{\alpha^2 \theta \lambda \exp(-\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{\theta-1}}{\alpha + (1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)} \\
 &= \frac{\alpha^2 \theta \lambda \exp(-\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{\theta-1}}{(1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta)^2 (\alpha + (1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta))}
 \end{aligned}$$



Fonction de Taux de hasard OLEE différents paramètres.

3.1 Estimation du maximum de vraisemblance

La loi Exponentielle Exponentiée Odd Lindley a trois paramètres α , λ et θ des réels positifs. Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un n -échantillon de $OLEE(\alpha, \lambda, \theta)$.

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

La fonction de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} L(\underline{x}, \alpha, \theta, \lambda) &= \prod_{j=1}^n \frac{\alpha^2 \theta \lambda \exp(-\lambda x_j) (1 - \exp(-\lambda x_j))^{\theta-1}}{(1 + \alpha) \left(1 - (1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta\right)^3} \exp\left(-\frac{(1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta}\right) \\ &= \frac{\alpha^{2n} \theta^n \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^n x_j\right)}{(1 + \alpha)^n} \prod_{j=1}^n \frac{(1 - \exp(-\lambda x_j))^{\theta-1}}{(1 - (1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta)^3} \exp\left(-\alpha \frac{(1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta}\right) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \ln(L(\underline{x}, \alpha, \theta, \lambda)) &= 2n \ln(\alpha) + n \ln(\theta) + n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{j=1}^n x_j - n \ln(1 + \alpha) \\ &\quad + (\theta - 1) \sum_{j=1}^n \ln(1 - \exp(-\lambda x_j)) \\ &\quad - 3 \sum_{j=1}^n \ln\left(1 - (1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta\right) - \alpha \sum_{j=1}^n \left(\frac{(1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x_j))^\theta}\right) \end{aligned}$$

On pose $\phi_\lambda(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$

$$\begin{aligned} \ln(L(\underline{x}, \alpha, \theta, \lambda)) &= 2n \ln(\alpha) + n \ln(\theta) + n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{j=1}^n x_j - n \ln(1 + \alpha) + (\theta - 1) \sum_{j=1}^n \ln(\phi_\lambda(x_j)) \\ &\quad - 3 \sum_{j=1}^n \ln(1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta) - \alpha \sum_{j=1}^n \left(\frac{\phi_\lambda(x_j)^\theta}{1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta}\right) \end{aligned}$$

Si α inconnu, λ et θ connus :

On dérive par rapport à α , on obtient :

$$\frac{\partial \ln(L(\underline{x}, \alpha, \theta, \lambda))}{\partial \alpha} = - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\phi_\lambda(x_j)^\theta}{1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta}\right) - \frac{n}{\alpha + 1} + \frac{2n}{\alpha}$$

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

Si θ inconnu, λ et α connus :

On dérive par rapport à θ , on obtient :

$$\frac{\partial \ln(L(\underline{x}, \alpha, \theta, \lambda))}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{j=1}^n \ln(\phi_\lambda(x_j)) + (3 - \alpha) \sum_{j=1}^n \frac{\ln(\phi_\lambda(x_j))\phi_\lambda(x_j)^\theta}{1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta} - \alpha \sum_{j=1}^n \frac{\ln(\phi_\lambda(x_j))(\phi_\lambda(x_j))^{2\theta}}{(1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta)^2}$$

Si λ inconnu, α et θ connus :

On dérive par rapport à λ , on pose $\frac{\partial(\phi_\lambda(x))}{\partial \lambda} = (\phi_\lambda(x))'$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\underline{x}, \alpha, \theta, \lambda))}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n x_j + (\theta - 1) \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))'}{\phi_\lambda(x_j)} + (3 - \alpha) \theta \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))'(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta} \\ &\quad - \alpha \theta \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))'(\phi_\lambda(x_j))^{2\theta-1}}{(1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta)^2} \end{aligned}$$

On obtient le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\phi_\lambda(x_j)^\theta}{1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta} \right) - \frac{n}{\alpha+1} + \frac{2n}{\alpha} = 0 \\ \frac{n}{\theta} + \sum_{j=1}^n \ln(\phi_\lambda(x_j)) + (3 - \alpha) \sum_{j=1}^n \frac{\ln(\phi_\lambda(x_j))(\phi_\lambda(x_j)^\theta)}{1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta} - \alpha \sum_{j=1}^n \frac{\ln(\phi_\lambda(x_j))(\phi_\lambda(x_j))^{2\theta}}{(1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta)^2} = 0 \\ \frac{n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{j=1}^n \frac{(\theta-1)(\phi_\lambda(x_j))'}{\phi_\lambda(x_j)} + (3 - \alpha) \sum_{j=1}^n \frac{\theta(\phi_\lambda(x_j))'(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta} - \alpha \theta \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))'(\phi_\lambda(x_j))^{2\theta-1}}{(1 - \phi_\lambda(x_j)^\theta)^2} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs approximées des estimateurs de maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\alpha}_{ML}$ et $\hat{\lambda}_{ML}$ des paramètres θ , α et λ sont obtenues à l'aide de méthodes numériques.

3.2 Estimation à l'aide d'une approche Bayésienne

On suppose que la loi a priori de α , λ et θ est strictement positive, comme suit :

$$\pi(\alpha, \lambda, \theta) \propto \alpha^{b-1} \lambda^{c-1} \theta^{d-1} \exp(-h\alpha - m\lambda - l\theta); \text{ tels que } \alpha > 0, \lambda, \theta > 0, b, c, d, h, m, l > 0$$

La loi posteriori est

$$\pi(\alpha, \lambda, \theta | \underline{x}) = \frac{L(\alpha, \lambda, \theta | \underline{x}) \pi(\alpha, \lambda, \theta)}{\int_{\alpha} \int_{\lambda} \int_{\theta} L(\alpha, \lambda, \theta | \underline{x}) \pi(\alpha, \lambda, \theta) d\alpha d\lambda d\theta}; \text{ tels que } \alpha > 0, \lambda > 0 \text{ et } \theta > 0$$

$$\text{On pose } K^{-1} = \int_{\alpha} \int_{\lambda} \int_{\theta} L(\alpha, \lambda, \theta | \underline{x}) \pi(\alpha, \lambda, \theta) d\alpha d\lambda d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \lambda, \theta | \underline{x}) &= K^{-1} \frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp\left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m\right) - h\alpha - l\theta\right) \\ &\quad \prod_{j=1}^n \left(\frac{(1-\exp(-\lambda x_j))^{\theta-1}}{(1-(1-\exp(-\lambda x_j))^{\theta})^3}\right) \exp\left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(1-\exp(-\lambda x_j))^{\theta}}{1-(1-\exp(-\lambda x_j))^{\theta}}\right) \end{aligned}$$

On pose $\phi_{\lambda}(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \lambda, \theta | \underline{x}) &= K^{-1} \frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp\left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m\right) - h\alpha - l\theta\right) \\ &\quad \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_{\lambda}(x_j))^{\theta-1}}{(1-(\phi_{\lambda}(x_j))^{\theta})^3}\right) \exp\left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_{\lambda}(x_j))^{\theta}}{1-(\phi_{\lambda}(x_j))^{\theta}}\right) \end{aligned}$$

Estimation sous la fonction de perte Linex

Pour la fonction de perte Linex, les estimateurs Bayesiens de $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ sont les suivants :

$$\hat{\alpha}_{BL} = -\frac{1}{\varpi} \ln(E_x[\exp(-\varpi\alpha)])$$

Tel que :

$$E_x[\exp(-\varpi\alpha)] = \int_0^{+\infty} \exp[-\varpi\alpha] \pi(\alpha, \lambda, \theta | \underline{x}) d\alpha$$

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

Leur estimateur est

$$\hat{\alpha}_{BL} = -\frac{1}{\varpi} \ln \left[K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - (h + \varpi) \alpha - l\theta \right) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\alpha \right]$$

– Et

$$\hat{\lambda}_{BL} = -\frac{1}{\varpi} \ln \left[K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m + \varpi \right) - h\alpha - l\theta \right) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\lambda \right]$$

– Et

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{1}{\varpi} \ln \left[K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j - m \right) - h\alpha - (l + \varpi) \theta \right) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\theta \right]$$

Les risques postérieurs sont :

$$PR(\hat{\alpha}_{BL}) = \varpi(\hat{\alpha}_{BQ} - \hat{\alpha}_{BL})$$

$$PR(\hat{\lambda}_{BL}) = \varpi(\hat{\lambda}_{BQ} - \hat{\lambda}_{BL})$$

$$PR(\hat{\theta}_{BL}) = \varpi(\hat{\theta}_{BQ} - \hat{\theta}_{BL})$$

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

Les estimateurs Bayesiens de la fiabilité et de la fonction de taux de hasard pour la fonction de perte Linex sont :

$$\hat{R}_{(\alpha,\lambda,\theta)}(x)_{BL} = -\frac{1}{\varpi} \ln \left[K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - h\alpha - \varpi R(x) - l\theta \right) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\alpha \right]$$

$$\hat{h}_{(\alpha,\lambda,\theta)}(x)_{BL} = -\frac{1}{\varpi} \ln \left[K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - h\alpha - \varpi h(x) - l\theta \right) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\alpha \right]$$

Estimation sous une fonction de perte quadratique

Pour la fonction de perte quadratique, les estimateurs Bayesiens de $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ sont :

$$\hat{\alpha}_{BQ} = E(\alpha|\underline{x}) = \int_0^{+\infty} \alpha \pi(\alpha, \lambda, \theta|\underline{x}) d\alpha$$

$$\hat{\alpha}_{BQ} = K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - h\alpha - l\theta \right) \right. \\ \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1-(\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\alpha$$

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

– Et

$$\hat{\lambda}_{BQ} = K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c} \theta^{n+d-1}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - h\alpha - l\theta \right) \right. \\ \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\lambda$$

– Et

$$\hat{\theta}_{BQ} = K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d}}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - h\alpha - l\theta \right) \right. \\ \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\theta$$

Les risques postérieurs sont :

$$\begin{aligned} PR(\hat{\alpha}_{BQ}) &= E_\pi(\alpha) - 2\hat{\alpha}_{BQ}E_\pi(\alpha) - \hat{\alpha}_{BQ}^2E_\pi(\alpha) \\ PR(\hat{\lambda}_{BQ}) &= E_\pi(\lambda) - 2\hat{\lambda}_{BQ}E_\pi(\lambda) - \hat{\lambda}_{BQ}^2E_\pi(\lambda) \\ PR(\hat{\theta}_{BQ}) &= E_\pi(\theta) - 2\hat{\theta}_{BQ}E_\pi(\theta) - \hat{\theta}_{BQ}^2E_\pi(\theta) \end{aligned}$$

Les estimateurs Bayesiens de la fiabilité et de la fonction de taux de hasard pour la fonction de perte quadratique sont donnés par :

$$\hat{R}_{(\alpha,\lambda,\theta)}(x)_{BQ} = K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1} R(x)}{(1+\alpha)^n} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - h\alpha - l\theta \right) \right. \\ \left. \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\alpha$$

Et

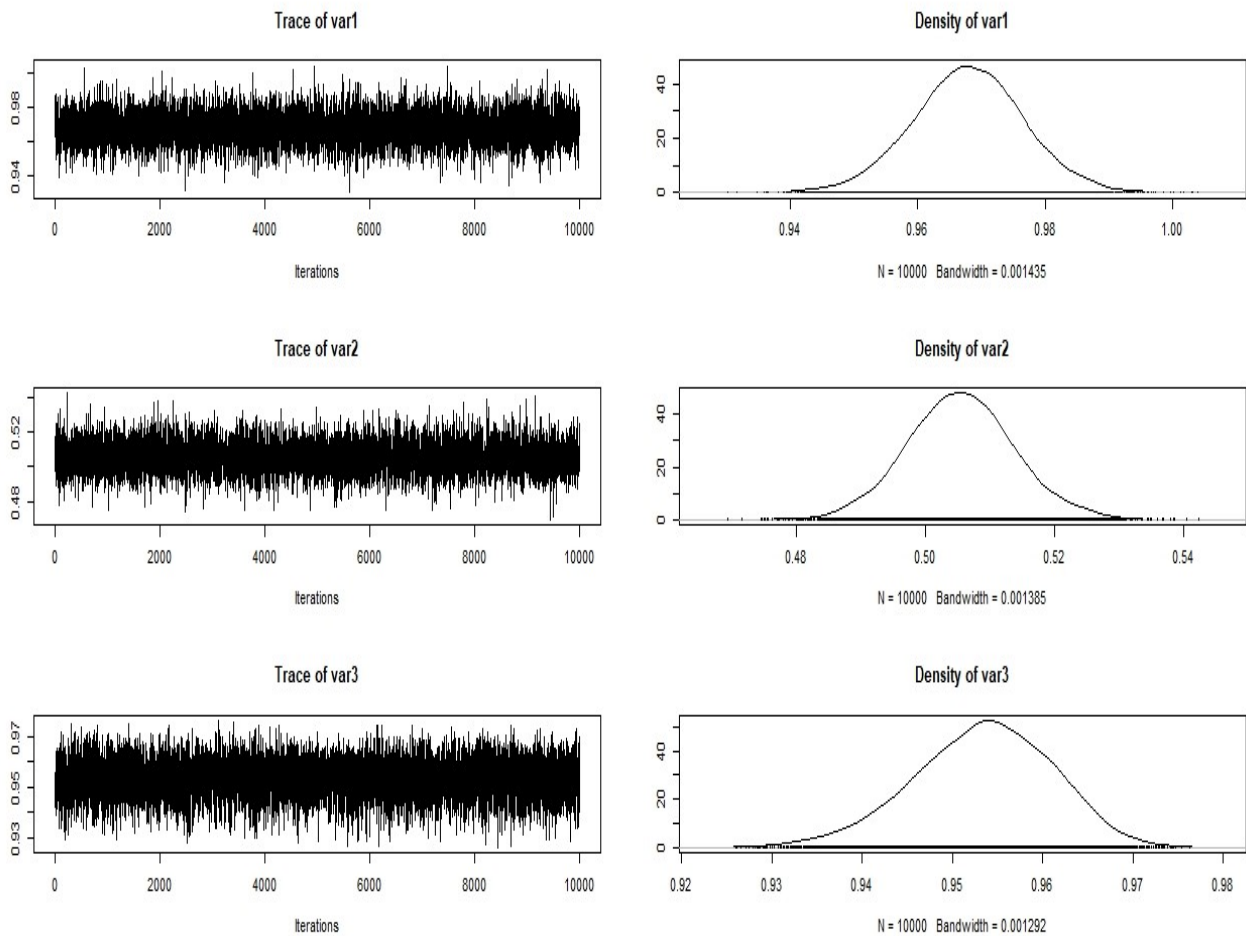
$$\hat{h}_{(\alpha, \lambda, \theta)}(x)_{BQ} = K^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n+b-1} \lambda^{n+c-1} \theta^{n+d-1} h(x)}{(1+\alpha)^n} \exp \left(\lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j + m \right) - h\alpha - l\theta \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{(\phi_\lambda(x_j))^{\theta-1}}{(1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta)^3} \right) \exp \left(-\alpha \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_\lambda(x_j))^\theta}{1 - (\phi_\lambda(x_j))^\theta} \right) \right) d\alpha$$

3.3 La vitesse de convergence

Un plan de séries temporelles qui illustre les réalisations de la chaîne Markov à chaque itération contre les nombres d'itérations, est l'un des outils graphiques largement utilisés pour le diagnostic de convergence MCMC. La trace de graphe indique des bits pour indiquer la convergence retardée, ce qui signifie que la chaîne MCMC est coincée dans une partie de l'espace d'état. En revanche, si la trace ressemble à une tortue poilue, cela indique que la méthode MCMC est efficace.

La chaîne Markov [17] est exécutée pour 10 000 itérations avec les paramètres suggérés α , λ et θ . Les parcelles de traces et de densité des échantillons de chaîne Markov sont illustrées dans la figure. Pour les trois paramètres, nous notons que la trace de graphe se mélange bien. En outre, nous pouvons constater à partir de la trace que l'incendie n'est pas nécessaire et notre décision semble être un point de départ acceptable.

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)



Graphes de la trace et de la densité MCMC.

3.4 Estimation de la prime pure

La prime pure dans le domaine de l'assurance est souvent calculée en fonction des distributions de probabilité des pertes potentielles associées au risque assuré. Il existe plusieurs distributions de probabilité couramment utilisées pour modéliser les pertes en assurance, telles que la distribution exponentielle, la distribution gamma, la distribution de Weibull, etc.

La prime pure pour la distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

3. La distribution Exponentielle Exponentiée Odd Lindley (OLEE)

calculée en fonction des paramètres $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $\theta > 0$.

La fonction de densité pour la distribution OLEE est définie comme suit :

$$f_{(\alpha,\theta,\lambda)}(x) = \frac{\alpha^2\theta\lambda \exp(-\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{\theta-1}}{(1 + \alpha) \left(1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta\right)^3} \exp\left(-\alpha \frac{(1 - \exp(-\lambda x))^\theta}{1 - (1 - \exp(-\lambda x))^\theta}\right) \text{ si } x \geq 0$$

La prime pure obtenue en calculant l'espérance mathématique de la distribution :

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x f_{(\alpha,\theta,\lambda)}(x) dx$$

Comme l'espérance de la distribution (OLEE) n'a pas une forme analytique simple, pour estimer la prime pure nous utilisons des méthodes numériques pour obtenir son estimateur par le logiciel Matlab.

Le mot "simulation" provient du mot latin "simulare", qui signifie copier, modifier des paramètres comme s'ils étaient réels. Simuler le fonctionnement d'un système consiste à imiter son fonctionnement au fil du temps en utilisant un modèle. Ainsi, la simulation est une technique très utile qui peut modéliser des systèmes à la fois conceptuels et existants.

1 Quelques Rappels

Les critères AIC et CAIC ainsi que BIC HQIC

Nous considérons quatre mesures de qualité d'ajustement comme le critère d'information d'Akaike "AIC" [[27], [14]], le critère d'information d'Akaike corrigé "CAIC", le critère d'information Bayésien "BIC" et le critère d'information de Hannan Quinn "HQIC", donnés par :

$$AIC = -2LL + 2p$$

$$CAIC = -2LL + 2p \frac{n}{n-p-1}$$

$$BIC = -2LL + p \log(n)$$

Et

$$HAIC = -2LL + 2p \log(\log(n))$$

Où LL est la log-vraisemblance, n est la taille de l'échantillon et p est le nombre de paramètres. Le tableau ci-dessous contient les calculs avec le logiciel R

Critères de Pitman

Nous comparons les meilleurs estimateurs Bayésiens ci-dessus avec MLE dans cette section. Pour cela, nous suggérons d'utiliser le critère de proximité de Pitman (1937) et Jozani (2012) [[11], [20]] et l'erreur quadratique moyenne intégrée définie comme suit.

- Un estimateur δ_1 d'un paramètre donne de meilleurs résultats qu'un estimateur δ_2 , selon le critère de proximité de Pitman.

$$P(|\delta_1 - \delta| < |\delta_2 - \delta|) > \frac{1}{2}$$

- L'estimateur δ_k est égal à l'erreur quadratique moyenne intégrée.

$$IMSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\delta_k - \delta)^2$$

Test de Kolmogorov-Smirnov

La formule mathématique du test de Kolmogorov-Smirnov (KS) dépend de la variante du test utilisée. Voici la formule générale pour le test bilatéral avec un échantillon :

Soit $F(x)$ la fonction de répartition de l'échantillon théorique et $F_n(x)$ la fonction de répartition empirique de l'échantillon de données observées. La statistique de test

1. Quelques Rappels

D est calculée comme la plus grande différence absolue entre les deux fonctions :

$$D = \max_x |F_n(x) - F(x)|$$

Si l'échantillon théorique est la distribution normale standard, alors la formule de répartition empirique $F_n(x)$ est simplement :

$$F_n(x) = \frac{\text{nombre de données } \leq x}{\text{nombre total de données}}$$

Pour le test à deux échantillons, où l'on compare deux échantillons de taille n_1 et n_2 , la formule est légèrement différente :

$$D = \max_x |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)|$$

Dans chaque cas, la valeur de D est comparée à une table de valeurs critiques pour déterminer si elle est suffisamment grande pour rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les deux échantillons proviennent de la même distribution.

Il est à noter que des ajustements peuvent être nécessaires en fonction de la taille de l'échantillon et de la distribution théorique testée. Déterminer si elle est suffisamment grande pour rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les deux échantillons proviennent de la même distribution.

2 Estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance

Tableau des résultats :

Dans cette section, nous avons mené une étude de simulation Monte Carlo en utilisant différentes tailles d'échantillons : 10, 30 et 50. Nous avons généré 10000 échantillons à partir de la distribution $OLEE(1, 0.5, 1)$. Les hyper-paramètres sont $b = 5$, $c = 7$ et $d = 6$, $l = 0.001$, $m = 0.002$, $h = 0.003$. Pour $x = 1.5$,

$$R(x) = 0.5100349, E(x) = 1.596347 \text{ et } h(x) = 0.3395893.$$

n	10	30	50
α	1.0822759	1.1120305	1.1000632
	(6.7693e - 07)	(1.2550e - 06)	(1.0012e - 06)
λ	0.4947097	0.4590154	0.4503721
	(2.798731e - 09)	(1.67974e - 07)	(8.77813e - 08)
θ	0.9467962	0.9699686	0.9645665
	(2.8306e - 07)	(9.0188e - 08)	(1.2555e - 06)
$R(x)$	0.4483764	0.489312	0.4783602
	(3.8017e - 07)	(4.2943e - 08)	(1.0032e - 06)
$h(x)$	0.3834711	0.3580764	0.3647678
	(1.9256e - 07)	(3.4177e - 08)	(6.3395 - 06)
$E(x)$	1.448511	1.561187	1.596825
	(4.325897e - 07)	(1.236195e - 07)	(2.288819e - 11)

Tableau 1 : Estimation de Maximum de Vraisemblance avec erreur quadratique (entre parenthèses).

3 Estimateurs obtenus à l'aide d'une approche Bayésienne

La perte linéaire et la perte quadratique avec l'algorithme de Metropolis-hasting

Tableaux des résultats : Tirés d'une loi d'Exponentielle Exponentielle Odd Lindley paramètres connus :

$\alpha = 1$, $\lambda = 0.5$ et $\theta = 1$. Pour la perte linéaire le paramètre donné par $\varpi = -0.5$, $x = 1.5$.

n	10	30	50
α	0.9653196	0.9664603	0.9678314
	($1.202e - 07$)	($1.124e - 07$)	($1.034e - 07$)
λ	0.5022732	0.5038764	0.5054845
	($5.1675e - 10$)	($1.5026e - 09$)	($3.0079e - 09$)
θ	0.9653196	0.9524761	0.9532078
	($2.3034e - 07$)	($2.2585e - 07$)	($1.1895e - 07$)
$R(x)$	0.4987497	0.4966746	0.4946228
	($1.273e - 08$)	($1.784e - 08$)	($2.37e - 08$)
$h(x)$	0.3352815	0.3370249	0.338831
	($1.855e - 09$)	($6.576e - 10$)	($5.75e - 11$)
$E(x)$	1.584855	1.560838	1.555188
	($1.320701e - 08$)	($1.26089e - 07$)	($1.694026e - 07$)

Tableau 2 : Estimation Bayésienne selon la fonction de perte quadratique et la RP (entre parenthèses).

3. Estimateurs obtenus à l'aide d'une approche Bayésienne

n		Linex			
		$\varpi = -0.5$	$\varpi = 0.5$	$\varpi = -1$	$\varpi = 1$
10	α	0.9520192	0.9649570	0.9650321	0.9648707
		$(1.201e - 07)$	$(1.228e - 07)$	$(1.2227e - 07)$	$(1.234067e - 07)$
	λ	0.5022931	0.5031456	0.5032177	0.5030205
		$(5.258e - 10)$	$(2.4686e - 05)$	$(2.4679e - 05)$	$(2.46988e - 05)$
	θ	0.9653398	0.9522974	0.9524344	0.9523551
		$(2.302e - 07)$	$(2.275e - 07)$	$(2.2624e - 07)$	$(2.27003e - 07)$
$R(x)$	0.4987251	0.4981335	0.498092	0.498346	
	$(1.279e - 08)$	$(1.7126e - 05)$	$(1.7122e - 05)$	$(1.71437e - 05)$	
$h(x)$	0.3353043	0.3357708	0.335837	0.3356173	
	$(1.836e - 09)$	$(2.3213e - 05)$	$(2.3201e - 05)$	$(2.32282e - 05)$	
$E(x)$	1.601562	1.564719	1.56459	1.565295	
	$(2.719912e - 09)$	$(1.00032e - 07)$	$(1.008482e - 07)$	$(9.642506e - 08)$	
30	α	0.9664799	0.9661772	0.9663137	0.9662440
		$(1.123e - 07)$	$(1.1439e - 07)$	$(1.1347e - 07)$	$(1.13946e - 07)$
	λ	0.5038955	0.5050546	0.5049795	0.5048338
		$(1.517e - 09)$	$(2.4497e - 05)$	$(2.4504e - 05)$	$(2.4518e - 05)$
	θ	0.9524899	0.9531147	0.9529576	0.9528284
		$(2.257e - 07)$	$(2.1982e - 07)$	$(2.2129e - 07)$	$(2.22515e - 07)$
$R(x)$	0.4966514	0.4958738	0.4958013	0.4959251	
	$(1.791e - 08)$	$(1.6939e - 05)$	$(1.6933e - 05)$	$(1.6943e - 05)$	
$h(x)$	0.3370468	0.3377334	0.3377661	0.3376402	
	$(6.464e - 10)$	$(2.3024e - 05)$	$(2.3021e - 05)$	$(2.303369e - 05)$	
$E(x)$	1.560774	1.55842	1.558269	1.558627	
	$(1.265463e - 07)$	$(1.438455e - 07)$	$(1.449972e - 07)$	$(1.422789e - 07)$	

3. Estimateurs obtenus à l'aide d'une approche Bayésienne

n		Linex			
		$\varpi = -0.5$	$\varpi = 0.5$	$\varpi = -1$	$\varpi = 1$
50	α	0.9678506	0.9678046	0.9679779	0.9678273
		$(1.033e - 07)$	$(1.0365e - 07)$	$(1.0254e - 07)$	$(1.03508e - 07)$
	λ	0.5055026	0.5056606	0.5067134	0.5068733
		$(3.027e - 09)$	$(3.2042e - 09)$	$(2.4333e - 05)$	$(2.4317e - 05)$
	θ	0.9532225	0.9533514	0.9542460	0.9540359
		$(2.188e - 07)$	$(2.1760e - 07)$	$(2.0934e - 07)$	$(2.11269e - 07)$
	$R(x)$	0.4946014	0.4945219	0.4937712	0.4935554
		$(2.381e - 08)$	$(2.406517e - 08)$	$(1.6767e - 05)$	$(1.67493e - 05)$
	$h(x)$	0.3388518	0.3389347	0.3397016	0.3398056
		$(5.439e - 11)$	$(4.28615e - 11)$	$(2.2836e - 05)$	$(2.28263e - 05)$
	$E(x)$	1.555129	1.554876	1.552653	1.552061
		$(1.6989e - 07)$	$(1.71984e - 07)$	$(1.90918e - 07)$	$(1.96124e - 07)$

Tableau 3 : Estimation Bayésienne selon la fonction de perte Linex et la RP (entre parenthèses).

Discussion : Pour les différentes valeurs de $n = 10$, les meilleurs estimateurs de λ , et sont obtenus pour $\varpi = -0, 5$. Cependant, pour θ et α les estimations sont presque équivalentes en termes de risque postérieur.

3.1 Comparatif des techniques d'estimation

Le tableau 4 présente une première comparaison entre les estimateurs classiques et les estimateurs Bayésiens en utilisant le critère de proximité de Pitman. Les estimateurs Bayésiens sont meilleurs que les estimateurs classiques.

n		Quadratique	Linex($\varpi = -0.5$)
10	α	1.0000	1.0000
	λ	0.2418	0.2426
	θ	0.6683	0.6728
	$R(x)$	1.0000	1.0000
	$h(x)$	1.0000	1.0000
30	α	1.0000	1.0000
	λ	0.9998	0.9998
	θ	0.8589	0.8622
	$R(x)$	0.9951	0.9951
	$h(x)$	0.9999	0.9999
50	α	1.0000	1.0000
	λ	0.9998	0.9998
	θ	0.9342	0.9353
	$R(x)$	0.9969	0.9969
	$h(x)$	1.0000	1.0000

Tableau 4 : Comparaison des méthodes à l'aide du critère de Pitman.

La deuxième comparaison est faite en utilisant l'erreur quadratique moyenne intégrée. Le tableau suivant contient les résultats. Nous remarquons que les estimateurs Bayésiens sont meilleurs que les estimateurs classiques.

n		<i>MLE</i>	<i>Quadratic</i>	<i>Linex</i> ($\varpi = -0.5$)
10	α	$1.147302e - 06$	$1.197123e - 07$	$1.193045e - 07$
	λ	$8.391364e - 08$	$9.087909e - 09$	$9.110775e - 09$
	θ	$4.715616e - 07$	$2.305556e - 07$	$2.297191e - 07$
	$R(x)$	$7.429486e - 07$	$2.929291e - 08$	$2.930238e - 08$
	$h(x)$	$3.954084e - 07$	$7.289941e - 09$	$7.268815e - 09$
30	α	$1.147302e - 06$	$1.197123e - 07$	$1.193045e - 07$
	λ	$8.391364e - 08$	$9.087909e - 09$	$9.110775e - 09$
	θ	$4.715616e - 07$	$2.305556e - 07$	$2.297191e - 07$
	$R(x)$	$7.429486e - 07$	$2.929291e - 08$	$2.930238e - 08$
	$h(x)$	$3.954084e - 07$	$7.289941e - 09$	$7.268815e - 09$
50	α	$1.163917e - 06$	$1.197873e - 07$	$1.193775e - 07$
	λ	$8.344384e - 08$	$9.353396e - 09$	$9.374588e - 09$
	θ	$4.825232e - 07$	$2.317138e - 07$	$2.308777e - 07$
	$R(x)$	$7.600464e - 07$	$2.994713e - 08$	$2.995526e - 08$
	$h(x)$	$4.051625e - 07$	$7.523594e - 09$	$7.501531e - 09$

Tableau 5 : Comparaison des méthodes utilisant l'IMSE.

4 Analyse de données réelles

Cette partie présente en détail une application réelle où nous prenons les périodes de relaxation de 20 patients sous analgésie (Gross et Clark (1975))[3], qui sont les suivantes :

1.1, 1.4, 1.3, 1.7, 1.9, 1.8, 1.6, 2.2, 1.7, 2.7, 4.1, 1.8, 1.5, 1.2, 1.4, 3, 1.7, 2.3, 1.6, 2.

Ensuite, nous comparons l'ajustement du modèle étudié avec des modèles classiques tels que Lindley, Lindley généralisé et Exponentielle pour ($\lambda, \beta > 0$).

La distribution de Lindley $L(\lambda)$ est donnée par :

$$F(x, \lambda) = 1 - \left(\frac{1 + \lambda + \lambda x}{1 + \lambda} \right) \exp(-\lambda x); x \geq 0$$

La distribution de Lindley généralisé $GL(\beta, \lambda)$ est :

$$F(x, \beta, \lambda) = 1 - \left(1 + \frac{\beta \lambda x}{\beta + \lambda} \exp(-\lambda x) \right); x \geq 0$$

La distribution Exponentielle $E(\lambda)$ est présentée par :

$$F(x, \lambda) = 1 - \exp(-\lambda x); x \geq 0$$

Voici le tableau des estimations par maximum de vraisemblance (MLE) des paramètres à partir des données.

Modèle	α	λ	β	θ
Lindley(λ)		0.8161184		
		(4.676e - 05)		
Lindley généralisé(β, λ)		0.575961	6.223813	
		(0.0027079)	(0.0020017)	
Exponentielle(λ)		0.5263157		
		(2.243e - 05)		
OLEE(α, λ, θ)	1.0590418	0.5161234		0.9926819
	(3.4859e - 07)	(2.599e - 08)		(5.3554e - 09)

Tableau 6 : Les estimations par maximum de vraisemblance (MLE) des paramètres à partir des données.

Modèle	AIC	BIC	CAIC	HAIC	-LL	K.S	p-valeur
$L(\lambda)$	62.4991	63.49483	62.72132	62.69348	30.24955	0.39108	0.004407
$LG(\beta, \lambda)$	110.3514	112.3429	110.7402	111.0573	53.17571	0.43826	0.0009213
$E(\lambda)$	67.67416	68.66989	67.89638	67.86853	32.83708	0.43951	0.0008817
$OLEE(\alpha, \lambda, \theta)$	53.10838	56.09558	54.60838	53.69151	23.55419	0.38345	0.005583

Tableau 7. Les différentes statistiques utilisant les données.

Nous notons que le modèle OLEE présente les valeurs les plus petites pour toutes les statistiques comparées aux autres modèles testés. Dans ce cas, nous pouvons affirmer que l'OLEE est le meilleur modèle pour l'ensemble des données. Nous appliquons

4. Analyse de données réelles

les méthodes proposées à ces données et les résultats sont répertoriés dans le Tableau 8.

n		MLE	Quadratique	Linex ($\varpi = -0.5$)
20	α	1.0590418	0.9667411	0.9667320
		$(3.485939e - 07)$	$(1.106759e - 07)$	$(1.106157e - 07)$
	λ	0.5161234	0.5016447	0.5016398
		$(2.599625e - 08)$	$(2.688846e - 10)$	$(2.704893e - 10)$
	θ	0.9926819	0.9693560	0.9693470
		$(5.355388e - 09)$	$(9.396084e - 08)$	$(9.390556e - 08)$
	$R(x)$	0.4604129	0.5081812	0.5081762
		$(2.462337e - 07)$	$(3.43596e - 10)$	$(3.454472e - 10)$
	$h(x)$	0.3823691	0.3319762	0.3319826
		$(1.830105e - 07)$	$(5.795958e - 09)$	$(5.786338e - 09)$

Tableau 8 : Résultats utilisant des données réelles.

n		Quadratique	Linex ($\varpi = -0.5$)
20	α	1	1
	λ	0.9992	0.992
	θ	0.0007	0.0007
	$R(x)$	1	1
	$h(x)$	1	1

Tableau 9 : Comparaison à l'aide du critère de Pitman pour les données réelles.

L'étude porte sur une distribution continue appelée "Exponentielle Exponentielle Odd Lindley". Les paramètres inconnus et les caractéristiques de ce modèle ont été estimés en utilisant les méthodes du maximum de vraisemblance et les méthodes Bayésiennes. Les calculs de ces estimations sont obtenus par des méthodes de Monte Carlo, où nous avons remarqué que les estimateurs Bayésiens (Linex où $\varpi = -0,5$) étaient plus performants que les classiques.

5 Conclusion et Perspectives

Dans cette étude, nous avons réalisé une analyse Bayésienne basée sur des données complètes pour la distribution Exponentielle Exponentié Odd Lindley à trois paramètres. Dans un premier temps, nous avons déterminé calculé des estimateurs du maximum de vraisemblance, puis nous avons dérivé les estimateurs Bayésiens en utilisant deux fonctions de perte différentes.

Les résultats des simulations pour l'estimation Bayésienne, sous les deux fonctions perte, ont été obtenus à l'aide des méthodes MCMC. Nous avons observé que sous la fonction de perte Linex pour $\varpi = -0,5$ les estimateurs Bayésiens ont généralement donné de meilleurs résultats que ceux du maximum de vraisemblance pour la distribution d'Exponentielle Exponentié Odd Lindley.

Nous avons utilisé trois critères, le critère de Pitman et le critère IMSE (Integrated Mean Squared Error) et test de Kolmogorov-Smirnov (KS), pour comparer les performances des deux approches. Nos résultats ont démontré que l'estimation Bayésienne est plus efficace que l'estimation par maximum de vraisemblance. Cette conclusion est étayée par une analyse approfondie des performances des deux méthodes selon ces critères, révélant une meilleure précision et une meilleure robustesse de l'estimation Bayésienne dans ce contexte particulier de données complètes.

Comme perspectives, pour compléter ce travail, il serait intéressant de considérer le cas où les observations proviennent d'un plan censuré. Les censures envisagées peuvent être de type II ou, dans le cas plus large, des censures progressives.

6 Annexe

Programme du Maximum de Vraisemblance

```
rm(list=ls())
N=10000
H1=numeric(N)
H2=numeric(N)
H3=numeric(N)
n=30; alpha<-1 ;theta<-1 ;lamda<-0.5 ; T=1.5
t=1.5
for(k in 1 :N){
  Finv<-function(x){1-((alpha+(1-(1-exp(-lamda*x))^theta))*exp((-alpha*(1-exp(-
lamda*x))^theta)
  /((1-(1-exp(-lamda*x))^theta)))/((1+alpha)*(1-(1-exp(-lamda*x))^theta))}
  Ur<-runif(10000)
  Xr<-Finv(Ur)
  Xr<-sort(Xr)
  g<-function(q){2*n*log(q[1])+n*log(q[2])+n*log(q[3])-q[3]*sum(Xr)-n*log(1+q[1])
  +(q[2]-1)*sum(log(1-exp(-q[3]*Xr)))-3*sum(log(1-(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2]))
  -q[2]*sum((((1-exp(-q[3]*Xr))^q[2])/(1-(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2])))
  f<-rep(NA,length(q))
  f[1]<- -sum((((1-exp(-q[3]*Xr))^q[2])/(1-(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2])))-(n/(q[1]+1))+((2*n)/q[1])
  f[2]<-(n/q[2])+sum(log(1-exp(-q[3]*Xr)))+(3-q[1])*sum((log(1-exp(-q[3]*Xr))
  *(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2])/(1-(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2]))
  -q[1]*sum((log(1-exp(-q[3]*Xr))*((1-exp(-q[3]*Xr))^2*q[2])/((1-(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2])^2))
  f[3]<-(n/q[3])-sum(Xr)+(q[2]-1)*sum((q[3]*exp(-q[3]*Xr))/(1-exp(-q[3]*Xr)))
  +(3-q[1])*q[2]*sum((q[3]*exp(-q[3]*Xr))*(1-exp(-q[3]*Xr))^(q[2]-1)
  /(1-(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2]))
  -q[1]*q[2]*sum((q[3]*exp(-q[3]*Xr))*(1-exp(-q[3]*Xr))^(2*q[2]-1)
  /(1-(1-exp(-q[3]*Xr))^q[2])^2)
}
```

```

}
q0=c(2.5,1.5,2)
library(BB)
g(q0)
v<-BBSolve( par=q0,fn=g)$par
v
alphaemv=v[1]
thetaemv=v[2]
lamdaemv=v[3]
alphaER<-sum(alphaemv-alpha)^2/N
thetaER<-sum(thetaemv-theta)^2/N
lamdaER<-sum(lamdaemv-lamda)^2/N
alphaER
thetaER
lamdaER
Semv<-((alphaemv+(1-(1-exp(-lamdaemv*t))^thetaemv))
/((1+alphaemv)*(1-(1-exp(-lamdaemv*t))^thetaemv)))
*exp(-alphaemv*(((1-exp(-lamdaemv*t))^thetaemv)/(1-(1-exp(-lamdaemv*t))^thetaemv))))
Hemv<-((alphaemv^2*thetaemv*lamdaemv*exp(-lamdaemv*t)
*(1-exp(-lamdaemv*t))^(thetaemv-1))/((1-(1-exp(-lamdaemv*t))^thetaemv)
*(alphaemv+(1-(1-exp(-lamdaemv*t))^thetaemv))))
s<-((alpha+(1-(1-exp(-lamda*t))^theta))/((1+alpha)*(1-(1-exp(-lamda*t))^theta)))
*exp(-alpha*(((1-exp(-lamda*t))^theta)/(1-(1-exp(-lamda*t))^theta)))
h<-((alpha^2*theta*lamda*exp(-lamda*t)*(1-exp(-lamda*t))^(theta-1))
/((1-(1-exp(-lamda*t))^theta)
*(alpha+(1-(1-exp(-lamda*t))^theta))))
SER<-sum(Semv-s)^2/N
HER<-sum(Hemv-h)^2/N
SER
HER
Semv

```

Programme de L'estimation des pertes quadratique et Linex avec IMSE :

```
rm(list=ls())
N=10000
p1<-numeric(N)
p2<-numeric(N)
p3<-numeric(N)
alphaq=numeric(N);lamdaq=numeric(N);thetaq=numeric(N);
alphaL=numeric(N);lamdaL=numeric(N);thetaL=numeric(N);k0=1;k2=1;k3=1;
g=2;s=1.5;
n=100;alpha=1;lamda=0.5;theta=1;w=-0.5;b=1;c=1;d=1;l=1;a3=1;a2=1;
a1=1;m=1;h=1
for(k in 1:N){
Finv<-function(x){1-((alpha+(1-(1-exp(-lamda*x))^theta))*exp((-alpha
*(1-exp(-lamda*x))^theta)
/(1-(1-exp(-lamda*x))^theta)))/((1+alpha)*(1-(1-exp(-lamda*x))^theta))}
u<-runif(10000)
t<-Finv(u)
t<-sort(t)
f<-function(alpha,lamda,theta){((alpha^(2*n+b-1)*lamda^(n+c-1)*theta^(n+d-
1)
*exp(-lamda*(sum(t)+m)-h*alpha-l*theta))
/(1+alpha)^n)*exp(-alpha*sum((1-exp(-lamda*t))^theta/(1-(1-exp(-lamda*t))^theta)))
*prod((1-exp(-lamda*t))^(theta-1)
/(1-(1-exp(-lamda*t))^theta)^3)}
v<-function(alpha,lamda,theta){k0*alpha*exp(-alpha*h)
*(1-exp(-alpha*h))^k0*k2*lamda*exp(-lamda*m)*(1-exp(-lamda*m))^k2*
k3*theta*exp(-theta*1)*(1-exp(-theta*1))^k3}
M=500; ind=N*3
X=matrix(rep(0,ind),ncol=3,M);
Y=numeric(3)
X[1,1]=1; X[1,2]=0.5;X[1,3]=1;
```

```

for(i in 2 :M ){
Y<-(rexp(3,15))^0.5+c(1,0.5,1)
Y
val<-(f(Y[1],Y[2],Y[3])*v(X[i-1,1],X[i-1,2],X[i-1,3]))
val
val1=(v(Y[1],Y[2],Y[3])*f(X[i-1,1],X[i-1,2],X[i-1,3]))
va=val/val1
va
a0<-min(1,va)
a0
u<-runif(1)
if(u<a0){X[i,1]=Y[1];X[i,2]=Y[2];X[i,3]=Y[3]} else {X[i,1]=X[i-1,1];
X[i,2]=X[i-1,2];X[i,3]=X[i-1,3]}
}
p1[k]<-mean(X[,1])
p2[k]<-mean(X[,2])
p3[k]<-mean(X[,3])
}
X
alphaq=mean(p1);
lamdaq=mean(p2);
thetaq=mean(p3);
alphaL=(-1/w)*(log(mean(exp(-w*p1))));
lamdaL=(-1/w)*(log(mean(exp(-w*p2))));
thetaL=(-1/w)*(log(mean(exp(-w*p3))));
#estimateur de linex et quadratique
veq<-c(alphaq,lamdaq,thetaq)
ve1<-c(alphaL,lamdaL,thetaL)
ve1
veq
IMSEaq=sum((alphaq-alpha)^2)/N;

```

```
IMSElaq=sum((lamdaq-lamda)^2)/N;
IMSEtq=sum((thetaq-theta)^2)/N;
IMSEaq
IMSElaq
IMSEtq
IMSEaL=sum((alphaL-alpha)^2)/N;
IMSElaL=sum((lamdaL-lamda)^2)/N;
IMSEtL=sum((thetaL-theta)^2)/N;
IMSEaL
IMSElaL
IMSEtL
alphaq=mean(p1);
lamdaq=mean(p2);
thetaq=mean(p3);
alphaL=(-1/w)*(log(mean(exp(-w*p1))));
lamdaL=(-1/w)*(log(mean(exp(-w*p2))));
thetaL=(-1/w)*(log(mean(exp(-w*p3))));
#estimateur de linex et quadratique
veq<-c(alphaq,lamdaq,thetaq)
veL<-c(alphaL,lamdaL,thetaL)
ve1
veq
T=1.5
Seq<-((alphaq+(1-(1-exp(-lamdaq*T))^thetaq))/((1+alphaq)*(1-(1-exp(-lamdaq*T))^thetaq)))
*exp(-alphaq*(((1-exp(-lamdaq*T))^thetaq)/(1-(1-exp(-lamdaq*T))^thetaq)))
SeL<-((alphaL+(1-(1-exp(-lamdaL*T))^thetaL))/((1+alphaL)*(1-(1-exp(-lamdaL*T))^thetaL)))
*exp(-alphaL*(((1-exp(-lamdaL*T))^thetaL)/(1-(1-exp(-lamdaL*T))^thetaL)))
Heq<-((alphaq^2*thetaq*lamdaq*exp(-lamdaq*T)
*(1-exp(-lamdaq*T))^(thetaq-1))/((1-(1-exp(-lamdaq*T))^thetaq)
*(alphaq+(1-(1-exp(-lamdaq*T))^thetaq))))
HeL<-((alphaL^2*thetaL*lamdaL*exp(-lamdaL*T)
```

```

*(1-exp(-lamdaL*T))^(thetaL-1)/((1-(1-exp(-lamdaL*T))^thetaL)
*(alphaL+(1-(1-exp(-lamdaL*T))^thetaL))))
s<-((alpha+(1-(1-exp(-lamda*T))^theta)/((1+alpha)*(1-(1-exp(-lamda*T))^theta)))
*exp(-alpha*(((1-exp(-lamda*T))^theta)/(1-(1-exp(-lamda*T))^theta))))
h<-((alpha^2*theta*lamda*exp(-lamda*T)*(1-exp(-lamda*T))^(theta-1))/((1-(1-
exp(-lamda*T))^theta)
*(alpha+(1-(1-exp(-lamda*T))^theta))))
SERq<-sum(Seq-s)^2/N
HERq<-sum(Heq-h)^2/N
SERL<-sum(SeL-s)^2/N
HERL<-sum(HeL-h)^2/N
SERL
HERL
SeL
HeL
SERq
HERq
Seq
Heq

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aiachi, H., Chadli, A., Talhi, H. (2022). Bayesian Inference of Three-Parameter Burr XII Based on Progressively Type II Censored Observations. *Journal of Applied Probability*, 17(2), 071-092.
- [2] Chadli, A., Talhi, H., Fellag, H. (2013). Comparison of the Maximum Likelihood and Bayes Estimators for Symmetric Bivariate Exponential Distribution Under Different Loss Functions. *African Statistical Journal*, 8, 499-514.
- [3] Gross, A., Clark, V. (1975). *Survival Distributions : Reliability Applications in the Biomedical Sciences*. John Wiley Sons.
- [4] Boumaraf, B., Seddik-Ameur, N., Barbu, V. S. (2022). Estimation of Beta-Pareto Distribution Based on Several Optimization Methods. *Mathematics*, 8(7), 1055.
- [5] Oluyede, B., Yang, T. (2015). A New Class of Generalized Lindley Distributions with Applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85, 2072-2100.
- [6] Robert, C. (2015). The Metropolis Hastings Algorithm. *Statistics and Computing*, 25, 157-171.
- [7] Denuit, M., Charpentier, A. (2004). *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome 1 : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque*. Economica.

-
- [8] Denuit, M., Charpentier, A. (2005). *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome 2 : Tarification et Provisionnement*. Economica.
- [9] Djemoui, N. El Houda, Chadli, A., Merah, I. (2024). Bayesian Estimation of the Odd Lindley Exponentiated Exponential Distribution : Applications in Reliability. *Statistics, Optimization and Information Computing*.
- [10] Elbatal, I., Handique, L., Chakraborty, S. (2023). Truncated Cauchy Power Kumaraswamy Generalized Family of Distributions : Theory and Applications. *Statistics, Optimization and Information Computing*.
- [11] Pitman, E. J. G. (1937). The Closest Estimates of Statistical Parameters. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 33, 212-222.
- [12] Gomes-Silva, F., Percontini, A., de Brito, E., Ramos, M. W., Venancio, R., Cordeiro, G. (2017). The Odd Lindley-G Family of Distributions. *Austrian Journal of Statistics*, 46, 65-87.
- [13] Chen, G., Balakrishnan, N. (1995). A General-Purpose Approximate Goodness-of-Fit Test. *Journal of Quality Technology*, 27, 154-161.
- [14] Goual, H., Yousof, H. M., Ali, M. M. (2019). Validation of the odd Lindley exponentiated exponential by a modified goodness of fit test with applications to censored and complete data. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 745-771.
- [15] Handique, L., Aidi, K., Chakraborty, S., Elbatal, I., Ali, M. M. (2023). Analysis and Model Validation of Right Censored Survival Data with Complementary Geometric-Topp-Leone-G Family of Distributions. *International Journal of Statistical Sciences*, 13-26.
- [16] Talhi, H., Aiachi, H. (2021). On Truncated Zeghdoudi Distribution : Posterior Analysis Under Different Loss Functions for Type II Censored Data. *Pakistan Journal of Statistics and Operational Research*, 17, 497-508.
- [17] Achcar, J., Leonardo, R. A. (1998). Use of Markov Chain Monte Carlo Methods in a Bayesian Analysis of the Block and Basu Bivariate Exponential. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 50, 403-416.

-
- [18] Kermoune, S., Chadli, A. (2021). Bayesian Inference for Rayleigh Pareto Distribution Under Progressively Type-II Right Censored Data. *Advances in Mathematics : Scientific Journal*, 3, 1787-1805.
- [19] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Nadarajah, S. (2008). Lindley Distribution and Its Applications. *Mathematics and Computers in Simulation*, 78, 493-506.
- [20] Jozani, M. J., Davies, K. F., Balakrishnan, N. (2012). Pitman Closeness Results Concerning Ranked Set Sampling. *Statistics and Probability Letters*, 82, 2260-2269.
- [21] Korkmaz, M. C., Yousof, H. M. (2017). The One-Parameter Odd Lindley Exponential Model : Mathematical Properties and Applications. *Stochastics and Quality Control*, 32, 25-35.
- [22] Petauton, P. (2000). *Théorie de l'assurance Dommages*. Paris.
- [23] Levine, R., Casella, G. (2001). Implementation of the Monte Carlo EM Algorithm. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 10, 422-439.
- [24] Gupta, R. D., Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential Family : An Alternative to Gamma and Weibull Distributions. *Biometrical Journal*, 43, 117-130.
- [25] Rohatgi, V. K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley Sons, New York.
- [26] Ravi, V., Grover, P. (2009). BB : An R Package for Solving a Large System of Nonlinear Equations and for Optimizing a High-Dimensional Nonlinear Objective Function. *Journal of Statistical Software*, 32, 1-26.
- [27] Yang, Y. (2005). Can the Strengths of AIC and BIC Be Shared? A Conflict Between Model Identification and Regression Estimation. *Sociological Methods Research*, 33, 167-187.
- [28] Wang, S. (1996). Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. *ASTIN Bulletin*, 26, 71-92.
- [29] Guyon, X. (1994). *Méthodes Numériques par Chaînes de Markov*. Université de Paris 1.