



Faculté des Sciences de L'Ingénieur

Département De Génie Civil

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention
du diplôme de Magister en Génie Civil
Option : Structures et Matériaux

THEME

**CONTRIBUTION A L'ANALYSE ELASTOPLASTIQUE
DES STRUCTURES FORMEES DE POUTRES**

Présenté par

Rania SOUICI épouse AISSAT

devant le jury

Président	Dr HADIDANE Yazid	MC	Université Badji Mokhtar-Annaba
Rapporteur	Dr DJEGHABA Kamel	MC	Université Badji Mokhtar-Annaba
Examineur	Dr HACENE-CHAOUICHE Abdelmadjid	MC	Université Badji Mokhtar-Annaba
Examineur	Dr MERZOUUD Mouloud	MC	Université Badji Mokhtar-Annaba

Année 2010



Dédicaces

Je dédie cet évènement marquant de ma vie

*A mes parents,
A mes beaux-parents,*

*Pour votre soutien, durant tout mon parcours,
Pour m'avoir aidée à surmonter les moments difficiles,
Pour votre confiance et votre tendresse,
Je vous remercie de tout mon cœur, que Dieu vous préserve en bonne santé.*

*A mes sœurs Khouty Labiba et Karima,
Milède, Sonia, Faiza et Ryma,
A Tonton Djamel,*

*Pour votre aide, votre soutien et vos encouragements incessants,
Merci d'avoir toujours été là pour moi,
Que l'esprit de famille nous unisse à jamais.*

*A la mémoire de ma grand-mère
Tu demeureras dans mon cœur, Allah Yarhimek « Mama »*

*A mes adorables neveux Iheb, Anis, Elyes et Sarah
A toute ma famille*

Je finis par ceux qui ont une place toute particulière,

*A Mon mari Tarik,
Pour m'avoir soutenue dans les moments de déprime et de fatigue,
Pour m'avoir encouragée à aller de l'avant et à ne jamais baisser les bras,
Pour tes sacrifices,
Pour tout ce que tu m'apportes.*

A Ma fille Inès, pour avoir tout simplement été là !

Rania



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Mr Djeghaba Kamel, Maître de Conférences à l'Université d'Annaba, pour m'avoir inculqué la méthode des éléments finis, pour ses orientations et ses conseils tout au long de cette riche période de recherche, je le remercie également pour la confiance qu'il a eu en moi malgré l'éloignement et les multiples périodes de flottements. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance et ma gratitude.

Je remercie vivement Mr Hadidane Yazid, Maître de Conférences à l'Université d'Annaba pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de Magister, je le remercie également pour ses encouragements et son aide tout au long de mon parcours universitaire. Je remercie également Mr Merzoud Mouloud, Maître de Conférences à l'Université d'Annaba pour la documentation qu'il m'a fournie à maintes reprises ainsi que Mr Hacène-Chaouche Abdelmadjid, Maître de Conférences à l'Université d'Annaba, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail en acceptant la lourde tâche d'examineurs.

Toute ma sympathie va à mes anciens collègues de travail de la Daira d'El-Hadjar, en particulier Rachida, Wided, Warda et Lynda avec qui j'ai partagé, pendant plusieurs années, bien plus qu'un lieu de travail, pour leurs encouragements continuels. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute mon estime et m'excusent de ne pas les avoir nommés un par un. Je leur souhaite à tous une bonne continuation et beaucoup de réussite.

Je remercie sincèrement mes collègues en post-graduation, en particulier Sameh, Samira, Nabil et Latifa pour leurs encouragements tout au long de ma période de recherche.

Je réserve mes derniers remerciements à toute ma famille, particulièrement à mes parents, et mes beaux-parents pour leur dévouement et leurs sacrifices, mes sœurs pour leur encouragement et leur aide et mon mari pour son soutien constant et impérissable. Merci à tous de m'avoir épaulée jusqu'à l'aboutissement de ce travail.

***A** tous ceux qui m'ont répété tous les matins,
au choix selon l'humeur du jour :*

- « **E**t alors, elle avance, ta thèse ? »*
- « **E**t ta thèse, quand est-ce que tu la soutiens ? »*
- « **A**lors, toujours pas finie cette thèse ? »*

***A** tous ceux-là, je leur dis ... **MERCI** !*

Rania



Introduction

Introduction

Le calcul des structures a connu une évolution importante étant donné l'intervention d'outils informatiques puissants et également de méthodes numériques très performantes, celle qui est la plus utilisée dans ce domaine est la Méthode des Eléments Finis (MEF), elle se base sur la résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. L'analyse des structures par la méthode des éléments finis est un sujet d'actualité qui fait l'objet de nombreuses recherches dans différents secteurs de pointe tels que le génie civil, la mécanique, la construction automobile, l'aéronautique, l'aérospatiale, la construction navale, le domaine nucléaire, et même la médecine où la méthode des éléments finis a été introduite dans la modélisation des organes du corps humain pour mieux cibler les zones à traiter.

La méthode des éléments finis est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds.

Les comportements mécaniques de chaque élément sont considérés séparément, puis ces éléments sont assemblés de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud. La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

La méthode des éléments finis a connu durant ces 30 dernières années une extension fantastique et n'a cessé de se développer allant de pair avec le perfectionnement des ordinateurs. Ce développement s'est accompagné de la mise au point de programmes de calcul capables de résoudre des problèmes extrêmement complexes. Il existe quelques codes de calculs dits généraux, c'est-à-dire couvrant un large domaine d'application (structures, interactions sol-structures et géotechnique). Les logiciels les plus indexés sont ANSYS, NASTRAN, ABAQUS et MARC selon la recherche effectuée par Mestat [MES 00].

Ayant recours à des outils d'une telle puissance, et dans le but de mieux exploiter la matière pour des raisons économiques, ainsi que l'emploi de composants structuraux toujours plus élancés, de connaître, de façon plus approfondie, le comportement des structures dans les régimes critiques en présence de grands déplacements sous fortes sollicitations tout en garantissant sécurité et économie, conduisent nécessairement à prendre en compte les non-linéarités affectant le système.

La conception de la majorité des structures de bâtiment ou de génie civil est basée essentiellement sur la stabilité linéaire. Or, il n'existe aucune structure, aucun matériau dont le comportement soit strictement élastique linéaire. Les non-linéarités que l'on observe peuvent être classées en deux grandes catégories : matérielles et géométriques.

Les non-linéarités matérielles nécessitent la maîtrise de la théorie de la plasticité dont la propriété fondamentale est l'absence d'une relation nette entre les contraintes et les déformations. Elles peuvent provenir de la loi de comportement capitale du matériau (loi de comportement élastoplastique, par exemple), de la fissuration du matériau, du comportement du béton tendu entre deux fissures ou du mode d'assemblage entre les composants élémentaires d'une structure. Les non-linéarités géométriques sont dues aux grands déplacements où on ne peut plus confondre l'état déformé de la structure avec l'état non déformé. Au sein de cette catégorie on peut distinguer les grands déplacements et les rotations modérées d'une part, et les grands déplacements et les grandes rotations d'autre part. Elle permet également de prédire le niveau de la charge critique pour le calcul au flambement des pièces élancées.

Notre travail de recherche a pour objectif final d'étudier le comportement non-linéaire des structures formées de poutres et de suivre la propagation de la plastification dans la structure soumise à des forces extérieures en utilisant la méthode des rotules plastiques.

Les méthodes matricielles et numériques employées dans cette étude seront décrites par la suite dans ce document. En plus d'un calcul linéaire des structures formées de poutres, nous aurons à tester quelques structures en analyse élastoplastique avec une validation et des discussions relatives aux résultats obtenus par le biais d'un programme élaboré en Fortran qui détecte la formation successive des rotules plastiques dans une structure jusqu'à la ruine.

L'intérêt pratique de cette recherche se situe dans la possibilité de dépister les zones les plus vulnérables des structures qui correspondent à celles où apparaissent les premières rotules plastiques afin de prévoir d'éventuels renforcements.

Ainsi, notre étude sera scindée en deux parties : la première consiste en une analyse linéaire des structures formées de poutres alors que la seconde correspond à une analyse non-linéaire élastoplastique des structures formées de poutres par la méthode des rotules plastiques.

Ce mémoire comprend six chapitres, le premier est consacré à l'étude bibliographique du sujet à partir des premiers travaux dédiés au calcul des structures dans le début des années 70. Nous présentons, dans ce chapitre, une synthèse de travaux récents visant à étudier les orientations actuelles des recherches dans le domaine non-linéaire.

Dans le second chapitre, nous abordons l'analyse linéaire des poutres droites en citant les théories de flexion existantes et les différents éléments finis de type poutre rectiligne dans le domaine linéaire, avec leur formulation matricielle, tels que la poutre de Timoshenko et celle de Bernoulli.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse non linéaire des structures, les types de problèmes non-linéaires, les méthodes de résolutions existantes et utilisées par de nombreux chercheurs qu'elles soient directes ou itératives. La méthode des rotules plastiques utilisée dans cette étude sera abordée plus loin dans le cinquième chapitre.

Le quatrième chapitre débute par un bref aperçu historique du développement du calcul plastique, nous y abordons également les notions de base de la théorie de la plasticité, la notion de « rotule plastique » et de « mécanisme », les critères de plasticité et l'écroutissement.

Le cinquième chapitre est entièrement dédié à la méthode des rotules plastiques, l'évolution de son utilisation dans le temps par les chercheurs, nous expliquerons ensuite comment se forme une rotule plastique ?, que se passe-t-il sur le plan matriciel lors de la formation d'une rotule plastique dans un élément de structure ?, nous présentons également la procédure à suivre pour exécuter la méthode des rotules plastiques avec l'organigramme du programme informatique correspondant.

Le dernier chapitre, à savoir le chapitre six, de ce mémoire regroupe des exemples de validation du programme informatique dans le domaine linéaire et non-linéaire par la méthode des rotules plastiques. A la fin de ce mémoire, nous présentons les conclusions et perspectives relatives à notre étude.



Chapitre 1

Travaux sur l'Analyse Linéaire et non Linéaire des Structures

Chapitre 1

Travaux sur l'Analyse Linéaire et non Linéaire des Structures

1.1. Introduction

En général, les structures de Génie Civil sont calculées de façon linéaire élastique, grâce à plusieurs méthodes, la plus répandue étant celle des éléments finis. Dans le domaine de la construction de structures ou d'ouvrages d'art, le calcul de la structure globale est généralement mené à partir d'une modélisation en éléments de type poutre, plaque ou coque. Nous ne nous intéresserons qu'aux éléments de type « poutre », chacun des deux nœuds de cet élément dispose des 6 degrés de libertés classiques, à savoir 3 translations et 3 rotations.

Voulant faire de notre mieux pour présenter l'évolution de la recherche dans ce domaine à travers le temps, nous avons adopté une démarche similaire à celle présentée par Robert Florent [ROB 99]. L'analyse bibliographique débute par la présentation des premiers travaux abordant le calcul des structures depuis les années 70, nous présentons dans un premier temps une synthèse des travaux ayant trait aux ossatures bidimensionnelles, puis celles relatives aux structures spatiales. Nous abordons ensuite un ensemble de travaux relativement récents que nous avons choisi de présenter par ordre chronologique.

1.2. Premiers travaux

1.2.1. Travaux relatifs aux problèmes bidimensionnels

En 1970, Franklin élabore une formulation plane ou apparaissent pour chaque nœud les 3 degrés de liberté plans habituels soit 2 translations et 1 rotation. La matrice de rigidité s'écrit sous la forme suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{K_0}{L} & 0 & -\frac{K_1}{L} & -\frac{K_0}{L} & 0 & \frac{K_1}{L} \\ & \frac{12K_2}{L^3} & \frac{6K_2}{L^2} & 0 & -\frac{12K_2}{L^3} & \frac{6K_2}{L^2} \\ & & \frac{4K_2}{L} & \frac{K_1}{L} & -\frac{6K_2}{L^2} & \frac{2K_2}{L} \\ & & & \frac{K_0}{L} & 0 & -\frac{K_1}{L} \\ & Sym & & & \frac{12K_2}{L^3} & -\frac{6K_2}{L^2} \\ & & & & & \frac{4K_2}{L} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

La non-linéarité matérielle est introduite par le biais du calcul de K_0 , K_1 et K_2 :

$$K_0 = \int_{\Omega} E.d\Omega \quad (1.2)$$

$$K_1 = \int_{\Omega} E.y.d\Omega \quad (1.3)$$

$$K_2 = \int_{\Omega} E.y^2.d\Omega \quad (1.4)$$

qui sont supposés constants le long de l'élément. La non-linéarité géométrique n'est pas prise en compte dans cette approche. L'auteur est conscient du fait que le centroïde de la section ne coïncide pas forcément avec l'axe de référence de l'élément. L'approche est tangente et les lois de comportement sont données point par point. La rigidité du béton tendu entre deux fissures est négligée, et la validation du modèle est faite sur quelques poutres isostatiques simplement fléchies.

Le premier à introduire dans une certaine mesure la non-linéarité géométrique est Gunnin en 1970. La matrice des contraintes initiales (rigidité géométrique) n'était pas encore connue. En ce qui concerne la matrice de rigidité matérielle, la rigidité flexionnelle supposée constante le long de l'élément tout comme la rigidité extensionnelle, est évaluée comme une pente dans un diagramme moment-courbure préétabli. La traction du béton n'est pas prise en compte. De nombreux calculs de comparaison sont effectués avec des résultats d'essais sur des colonnes et des cadres en béton armé.

Au début des années 70, des formulations semblables à celles données par Gunnin apparaissent, celle qui se distingue d'entre elles est donnée par Lazaro qui introduit une correction prenant en compte la fissuration.

En 1972, Blaauwendraad est le premier à faire des éléments finis « classiques » issus de la méthode des déplacements. Il introduit les fonctions de forme pour interpoler le champ de déplacements, et en déduire les quantités K_0 , K_1 et K_2 résultant d'une intégration numérique des déformations issues du champ de déplacements.

D'autres travaux se faisaient en parallèle, un article datant de 1968 dont l'auteur est Jennings, va être le point de départ d'une série de travaux qui depuis ne cessent de s'améliorer et s'enrichir toujours dans le but de représenter au mieux le comportement des structures et plus encore le comportement non-linéaire élastoplastique des structures. La non-linéarité géométrique en 2D, peut être prise en compte de façon exacte grâce à l'additivité et la commutativité des rotations planes. En général, une linéarisation des équations est effectuée, chose qui limite le domaine de validité aux déplacements modérés. Cette formulation est caractérisée par son approche semi inverse, par opposition à la méthode usuelle des déplacements. En effet, les fonctions de forme sont appliquées à l'effort normal N et au moment fléchissant M le long de l'élément. On en déduit la matrice de souplesse de l'élément qui, une fois inversée, donne la matrice de rigidité élémentaire, cette dernière est ensuite assemblée dans la matrice de rigidité globale de façon classique.

En 1973, Menegotto et Pinto étaient les premiers à utiliser cette technique en discrétisant l'élément en couches horizontales ; la résistance à la traction du béton n'était pas prise en compte. Viennent ensuite les travaux de Grelat en 1978 qui s'inspire très fortement

du programme de Menegotto et Pinto. Il introduit la loi de Sargin élaborée en 1971, pour le béton comprimé ainsi qu'une forme originale et efficace de tension-stiffening et valide son programme par de nombreux tests.

Les travaux de Grelat ont été poursuivis par Ferraro-Maia au début des années 80 en développant la prise en compte des effets différés et de la précontrainte. Cette dernière est introduite par la méthode dite interne explicitée par Fauchart en 1972. L'inclinaison des câbles par rapport à la section n'est pas prise en compte.

On retrouve également l'approche semi-inverse dans les travaux de Carol et Murcia en 1984.

L'approche par éléments finis classiques de type « déplacement » se poursuit : en 1975, Aldstedt reprend les fonctions de formes de Blaauwendraad en les intégrant dans un cadre de description Lagrangienne actualisée approchée. Ces travaux sont ensuite poursuivis par Kang de 1977 à 1980. Les développements de ce type se sont ainsi succédés dans les années 80, on cite également Espion qui a introduit en 1986 un élément de poutre plan à 9 degrés de liberté. Cette approche s'avère plus complète et plus réaliste vis-à-vis des non-linéarités matérielles et géométriques. Le « tension-stiffening » est pris en compte. Le programme élaboré par Espion est confronté à un grand nombre d'essais expérimentaux ou théoriques publiés. En outre, dans une deuxième partie, la prise en compte des effets différés est présentée en détail.

Dans tous les travaux précédemment cités, la déformation due à l'effort tranchant n'est pas prise en compte.

1.2.2. Travaux relatifs aux problèmes tridimensionnels

Le premier élément de poutre 3D en béton armé a vraisemblablement été développé par Chan en 1982. L'analyse prend en compte le second ordre ainsi que les effets différés. L'influence de l'effort tranchant n'est toujours pas prise en considération, alors que la torsion est tout à fait découplée. Au lieu de découper les sections en couches, elles sont découpées en fibres. La rigidité torsionnelle provient d'une pente dans un diagramme idéalisé trilineaire moment de torsion-rotation de torsion construit à l'aide d'une théorie de treillis pour déterminer le moment et la rotation de plastification sans tenir compte de l'effort normal.

En 1984, Mari poursuit les travaux de Chan, la matrice des contraintes initiales est complétée, la précontrainte est introduite selon la méthode de Kang. Malheureusement, la validation du programme ne se fait que sur des exemples théoriques. Les développements en éléments finis classiques vont être nombreux.

Bien que ne relevant pas du domaine du béton armé, mais plutôt des structures métalliques, on peut citer le travail effectué en 1989 par de Ville de Goyet [DEV 89] qui faisant suite aux travaux de Frey élaborés en 1977, établit un bilan des différentes formulations en grands déplacements et se livre à une comparaison très complète de différents éléments finis. Il introduit un élément fini dit de Marguerre modifié à 7 degrés de liberté modélisant le gauchissement des sections. Cet élément est intégré à une description corotationnelle qui est développée en détails et qui présente de nombreux avantages.

L'élément ainsi proposé s'avère très performant, plusieurs recherches se sont poursuivies dans ce sens notamment pour l'analyse des coques minces, parmi elles, celle effectuée par Dr Djeghaba Kamel [DJE 90], depuis, ses recherches ont été approfondies dans le but d'élaborer un code de calcul élément finis en langage FORTRAN 90 aussi complet que possible, capable de faire le calcul de structures en comportement linéaire et non-linéaire et dont le présent travail en est une portion.

Le seul élément supportant la comparaison avec celui de Marguerre est l'élément de Jennings qui se limite malheureusement au calcul des problèmes plans. La validation s'effectue sur un grand nombre d'exemples aussi bien théoriques qu'expérimentaux.

En 1990, Nait-Rabah poursuit le travail de Grelat basé sur les coordonnées convectées introduites par Jennings. Le programme est étendu aux problèmes tridimensionnels et où la prise en compte de la non-linéarité matérielle est complète. Les effets dus à l'effort tranchant et au moment de torsion sont introduits, la non-linéarité géométrique n'est que partiellement appréhendée. En effet, les déplacements doivent rester modérés et les rotations petites. Le programme est validé sur de nombreux cas expérimentaux.

1.3. Synthèse de quelques travaux de recherche

Les développements les plus récents sur le béton armé concernent la formulation de nouvelles lois de comportement s'appuyant sur la théorie de l'endommagement. Cette approche est dictée par le calcul aux séismes, pour lequel le chargement est cyclique, dans l'annexe 1 nous présentons quelques définitions et notions élémentaires sur la sismologie et le génie parasismique.

Le modèle d'endommagement qui fait référence en France est celui développé par Laborderie en 1991 faisant suite aux travaux de Mazars. Ce modèle est issu d'une formulation thermodynamique des milieux continus. La loi de comportement, dans le cas uniaxial s'exprime selon $\varepsilon = \delta\chi/\delta\sigma$ où χ est l'énergie libre de Gibbs. L'utilisation de ce modèle nécessite l'identification de 9 paramètres, chose qui n'est pas toujours aisée. L'endommagement en compression est distingué de celui en traction.

En 1994, Ulm utilise également un modèle d'endommagement en adoptant une approche semi-globale : l'élément poutre qu'il utilise est en fait discrétisé en fibres parallèles à la ligne moyenne de l'élément. Chaque fibre dispose d'une loi de comportement, d'un endommagement et d'un historique. Cet élément est inséré dans une description corotationnelle dans le but de prendre en compte les effets de la non-linéarité géométrique.

Dans ce qui suit, nous présenterons la synthèse de quelques travaux de recherche (articles et thèses) récemment effectués dans le but d'avoir une vue plus au moins générale sur les orientations actuelles des chercheurs dans le calcul non-linéaire des structures planes ou spatiales.

1.3.1. Travaux de HACENE-CHAOUICHE BOULMAALI, 1990

Dans le second chapitre de sa thèse [HAC 90], l'auteur présente les principaux éléments finis de poutres planes proposés dans la littérature avec un classement intéressant en faisant ressortir les avantages et les inconvénients de chacun de ces éléments à savoir :

- poutre rectiligne
- poutre de Bernoulli
- poutre de Hencky-Mindlin

A la fin de ce chapitre, l'auteur propose la modélisation d'une poutre par éléments finis.

1.3.2. Travaux de PARK, 1996

L'auteur [PAR 96] a développé et examiné un élément poutre élastoplastique 3D capable d'incorporer les grands déplacements et les grandes rotations.

Les équations constitutives de l'élastoplasticité sont appliquées à l'élément poutre basé sur l'hypothèse des petites déformations qui sera ensuite mené à une formulation matérielle complètement objective dans la mise à jour de l'application des contraintes. Un algorithme d'intégration des équations constitutives a été également établi.

En premier lieu, l'auteur donne une présentation des équations pour le cas des poutres, ensuite procède à une linéarisation des équations éléments finis suivie par l'intégration des équations constitutives de l'élastoplasticité. La matrice raideur matérielle tangente a été dérivée en utilisant un module élastoplastique résultant de l'algorithme d'intégration, elle sera ensuite développée et combinée à la matrice géométrique de raideur tangente (d'où combinaison entre non linéarité matérielle et géométrique).

Comparativement aux autres éléments, celui présenté dans cet article possède un cisaillement flexible et peut satisfaire les conditions de plasticité. Plusieurs exemples numériques ont été analysés par l'auteur puis comparés aux exemples présents dans la littérature.

L'élément poutre proposé a été vérifié non seulement dans le but de donner des résultats satisfaisants mais aussi dans le but de développer un élément efficace dans l'analyse du pré-flambage et des grandes flèches des structures spatiales.

1.3.3. Travaux de ROBERT, 1999

L'objectif de la thèse présentée par l'auteur [ROB 99] est d'implanter les formulations non-linéaires (géométriques et matérielles) des éléments de type « poutre » dans un produit existant le PCP (ponts construits par phases) que l'auteur présente en détail dans le second chapitre de cette thèse. PCP étant à l'origine un programme de calcul linéaire d'ouvrages d'art qui dispose de toutes les fonctionnalités nécessaires à la simulation de la construction des ouvrages à savoir : chargements quelconques, phasage de construction, mise en précontrainte phasée, prise en compte des effets différés (fluage, retrait du béton,

relaxation des aciers de précontrainte), mise en tension des haubans. L'ensemble de ces fonctionnalités devait être maintenu dans le cadre d'un calcul non-linéaire.

L'auteur propose d'introduire la non-linéarité géométrique en grands déplacements et en grandes rotations à partir de l'analyse non linéaire matérielle de Nait-Rabah établie en 1991 dont les performances ont été améliorées, l'approche sera développée en coordonnées convectées en 2D puis en 3D avec prise en compte de la non-linéarité matérielle.

La matrice de rigidité 3D sera formée à partir de l'équilibre non linéaire d'une section droite de la poutre qui sera intégré le long de l'élément.

L'auteur présente l'algorithme de résolution de l'équilibre des sections et l'algorithme permettant de trouver l'équilibre global de la section (incluant tous les réglages nécessaires), ensuite il intègre les effets différés à son algorithme, il propose également l'extension de son algorithme de résolution de chargement statique au cas de chargement dynamique à l'aide d'un schéma de Newmark.

Le modèle est validé et les résultats obtenus numériquement sont comparés aux résultats expérimentaux. Les exemples choisis sont des poutres continues, des poteaux isostatiques et des portiques, les matériaux utilisés sont le béton armé, le béton précontraint et le métal.

En dernier lieu, l'auteur utilise son programme pour un projet réel : la simulation du remplacement du système de suspension du pont de Tancarville, phase par phase, et tire les conclusions générales de son étude.

1.3.4. Travaux de MACKERLE, 1999

Mackerle J. présente dans son article [MAC 99] un ensemble de références, que ce soit : publications dans des journaux scientifiques, conférences, ou thèses présentés dans la période s'étendant de 1995 à 1998, on retrouve toutes ces références dans la base de données de l'auteur MACBASE. Ces références sont classées dans deux grandes catégories :

- éléments finis
- éléments de pondération

Dans la première catégorie nous avons relevé des références se rapprochant des orientations de notre recherche sur l'analyse des structures formées de poutres soumises à de fortes sollicitations de type sismiques et qui sont les suivantes : [AYV 97], [BAR 97], [KAR 97], [RED 97], [YEG 97].

1.3.5. Travaux de PAJUNEN, 2000

Dans cet article [PAJ 00], l'auteur affirme que la théorie des poutres de Reissner est plus intéressante à utiliser que la théorie de Timoshenko dans le cas de calculs élastoplastiques.

La théorie de Reissner est efficace car les relations élastoplastiques entre contraintes et déformations résultantes sont calculées sans aucune intégration sur la hauteur de la poutre.

L'auteur rappelle en premier lieu (en section2) les équations de Reissner, puis considère la projection du point le plus proche (section3), il teste l'approche proposée pour l'analyse d'une poutre encastree et d'une poutre de section circulaire creuse (section4). Il conclue en confirmant que l'utilisation d'éléments basés sur les déformations résultantes en analyse non-linéaire offre des avantages par rapport aux éléments finis conventionnels.

Il a également précisé que l'élément proposé n'est pas efficace dans le cas de poutres en béton pour lesquelles les relations contraintes-déformations élastoplastiques en traction et en compression sont complètement différentes. L'approche proposée est économique du point de vue calculs et offre un outil efficace pour le calcul de coques axisymétriques et de coques minces.

1.3.6. Travaux de CHEN, 2000

Dans cet article [CHE 00], l'auteur a présenté un modèle élastoplastique discret dans le but de représenter le comportement mécanique d'un système de poutre élastoplastiques en fondation (BoF).

L'auteur propose une procédure analytique pour l'analyse de (BoF) sous un chargement général quasi-statique, et décrit également en détail la simulation numérique et l'analyse de (BoF) soumis à une charge concentrée à mi-portée de la poutre d'où l'identification de différents mécanismes plastiques de ruine de l'élément (BoF).

Deux phénomènes singuliers ont été démontrés lors de cette étude :

- la migration des rotules plastiques dans l'élément poutre
- la propagation successive de la zone plastique dans la fondation.

L'étude a démontré que le système (BoF) élastique parfaitement plastique peut être caractérisé par 3 paramètres non dimensionnels, quant à l'état limite d'un système (BoF) rigide parfaitement plastique, il est déterminé par un paramètre non dimensionnel seulement.

La rigidité relative non dimensionnelle de (BoF) et le rapport de l'énergie maximale de la déformation élastique dissipée dans la poutre et la fondation jouent toutes les deux un rôle important dans le cheminement et la détermination du schéma de déformation d'un système de poutres (BoF) élastoplastique.

1.3.7. Travaux de GRUTTMANN, 2000

Une théorie des poutres courbes spatiales avec sections droites arbitraires ainsi qu'une formulation en éléments finis (EF) associée est présentée dans l'article [GRU 00].

Dans la présente théorie de poutre, le point de référence, le centroïde, le centre de cisaillement et le point de chargement sont tous des points arbitraires de la section de l'échantillon. Les déformations de la poutre sont basées sur une supposition cinématique où le gauchissement de torsion est inclus. Chacun des nœuds de l'élément fini dérivé possède 7 degrés de liberté.

La mise à jour des paramètres rotationnels aux nœuds EF est accomplie dans un cheminement additif, les déformations sont dérivées à partir du tenseur de déformation de Green-Lagrange.

L'auteur considère pour l'élément développé un comportement élastoplastique matériel soumis au critère de plasticité de Von-Mises et associé aux règles d'écoulement. Dans l'application du concept isoparamétrique, les quantités cinématiques sont approximées à l'aide des fonctions d'interpolation lagrangienne.

Grâce aux équations constitutives implémentées pour l'approche matérielle, l'élément développé peut être utilisé pour évaluer la capacité de chargement des structures formées de poutres. Les multiples exemples donnés par l'auteur montrent l'applicabilité de l'élément poutre développé aux problèmes non-linéaires géométriques et physiques.

1.3.8. Travaux de IZZUDDIN, 2000

L'auteur présente dans cet article [IZZ 00] une nouvelle méthode d'analyse non-linéaire des ossatures 3D en béton armé en utilisant les concepts de l'analyse adaptative.

Les deux premiers composants de la méthode adaptative proposée qui sont les formulations élastiques et élastoplastiques des éléments poutres-colonnes sont décrits dans cet article, les détails du raffinement automatique du maillage représentant le 3^{ème} composant de la méthode adaptative en question sont ensuite présentés. Cela inclue la construction d'une surface d'interaction effective qui représente les états de contraintes généralisées à la limite de l'élasticité avec détermination et vérification des contraintes généralisées au-delà de la limite élastique le long d'un élément à comportement élastique ainsi que le raffinement du domaine élastique en un nombre approprié de sous-domaines élastiques et élastoplastiques.

L'auteur teste son programme d'analyse non-linéaire ADAPTIC sur des exemples de structures formées de poutres-colonnes dont une ossature de bâtiment 3D à trois étages illustrant l'exactitude et l'efficacité de la méthode d'analyse proposée.

1.3.9. Travaux de HJELMSTAD, 2003

Pendant très longtemps, la théorie de poutre de Bernoulli-Euler est restée la méthode standard pour l'analyse des structures réticulées. La nécessité d'introduire le calcul des réponses non-linéaires (matérielles ou géométriques) de ces structures a renouvelé l'intérêt de l'application d'approches mixtes variationnelles à cette théorie de poutre et cela dans le but de trouver quelle est la meilleure approche à l'analyse des poutres.

L'auteur présente dans cet article [HJE 03] un, deux et trois domaines de formulations variationnelles pour la théorie de poutres non-linéaires de Bernoulli-Euler qui sont :

- Le domaine **CS** : Classical-Stiffness approach
- Le domaine **HR** : Hellinger-Reissner approach
- Le domaine **ME** : Mixed Enhanced approach

L'étude est scindée en deux parties : dans la première il y a la formulation des méthodes mixtes de ladite théorie et son extension aux problèmes incluant les non-linéarités géométriques. Dans la seconde, la performance des différentes formulations est étudiée à travers la présentation d'un ensemble de traitements en particulier les trois domaines (**CS**),

(HR) et (ME). L'idée d'étendre cette étude aux poutres Bernoulli-Euler est directe, elle peut être considérée comme une extension pour les poutres de Timoshenko où les formulations mixtes ont le mérite de mettre en évidence le phénomène de blocage-verrouillage (shear locking).

Cet article répond à la question : comment étendre l'approche de flexibilités non linéaires aux problèmes de non-linéarités géométriques?

Dans certaines circonstances, l'un des domaines de réponses peut être plus important que les autres :

- Pour les problèmes où une résolution exacte des domaines courbes est recherchée (ex : réponse inélastique), les éléments ME sont les meilleurs.
- Pour les problèmes où on recherche une résolution exacte pour les moments, les éléments HR sont les meilleurs.
- Si on recherche seulement un domaine de déplacements exactes, les éléments CS sont les meilleurs (ex : pour le cas de l'analyse de poutres non prismatiques avec non-linéarité géométrique et linéarité matérielle). Contrairement à d'autres articles récents sur les méthodes mixtes d'éléments poutres, on conclue qu'en dépit de certaines différences de performances, il n'y a pas d'avantages clairs dans l'ensemble des formulations mixtes utilisées comparativement aux méthodes classiques de calcul des déplacements pour les poutres de Bernoulli-Euler.

1.3.10. Travaux de Li, 2003

Dans cet article [LI 03], une technique d'éléments fins non-linéaires dynamiques a été développée dans le but d'analyser la réponse élastoplastique dynamique des coques unicouches réticulées soumises à de fortes sollicitations sismiques et ce en employant l'élément de poutre 3D non-linéaire. La matrice de raideur tangente élastoplastique pour la poutre 3D est dérivée en utilisant la formulation Lagrangienne dans laquelle ont été utilisés : le modèle isotrope rigide, le critère de Von-Mises et les relations de Prandtl-Reuss. Cette procédure considère les linéarités géométriques et matérielles.

Plusieurs méthodes de simplification, des techniques de réduction des calculs des matrices et des degrés de liberté ont été utilisées dans cette analyse. L'auteur s'est servi d'une technique incrémentale itérative basée sur la méthode d'intégration directe de Newmark ainsi que la méthode de Newton-Raphson modifiée dans le but de résoudre les équations d'équilibre dynamique non-linéaire. En outre, une méthode exacte a été développée pour le calcul des grandes rotations des structures spatiales.

Pendant un séisme, certains éléments d'une structure ont une réponse inélastique. Cela peut altérer les caractéristiques dynamiques de la structure. L'article prend en compte les non-linéarités géométriques et matérielles. Les résultats numériques obtenus révèlent que la nature des fréquences de la coque unicouche réticulée est concentrée d'une manière symétrique, les caractéristiques dynamiques de ces structures sont complexes. Pour ce cas,

l'auteur suggère l'application de la méthode d'intégration directe pour l'analyse de la réponse dynamique de l'élément.

Comparativement aux réponses linéaires, les réponses non-linéaires sont largement supérieures. La méthode qui a été proposée peut estimer raisonnablement la capacité de résistance de la structure lors de fortes actions sismiques. De plus, à travers l'analyse non-linéaire élastoplastique, le rendement des mécanismes avec ductilité et force adéquate peut être sélectionné dans le but de concevoir des structures performantes en considérant les facteurs sécurité et économie de la structure.

1.3.11. Travaux de DAVENNE, 2003

Cet article [DAV 03] concerne la modélisation de structures en béton précontraint soumises à des sollicitations sismiques. Vu la complexité du comportement des matériaux et des structures, des outils numériques efficaces ont été développés dans le but de garantir l'exactitude et la fiabilité des calculs à grande échelle. L'étude concerne l'utilisation d'un élément simplifié de poutre multifibres décrivant la réponse des composantes de structures et la représentation par macro-élément de l'interaction sol-structure. La simulation numérique de deux tests du programme de recherche européen CAMUS est présentée dans cette étude. Le premier met en évidence le comportement du béton précontraint tandis que le second traite l'influence de l'interaction sol-structure. Les résultats de la simulation concordent avec les résultats expérimentaux.

1.3.12. Travaux de RABCZUK, 2004

Ce travail [RAB 04] concerne l'analyse de poutres en béton précontraint soumises à un chargement quasistatique. Une analyse combinée entre l'élément libre de Galerkin et une approche éléments finis est choisie. Le béton est modélisé en particules et la précontrainte par des éléments poutres. Une loi constitutive élastoplastique avec durcissement isotrope et « tension-cutoff » est appliquée à l'acier. Le béton quant à lui, est modélisé par un modèle d'endommagement continu combiné à un modèle d'endommagement plastique, un couplage entre particules et éléments est proposé dans cette étude.

L'approche proposée est appliquée à 2 poutres en béton précontraint, l'une de section rectangulaire, l'autre de section en I soumises à des contraintes planes 2D avec différents mécanismes de rupture (flexion et cisaillement).

Cette étude peut s'étendre dans le futur à des simulations en 3D.

Les résultats expérimentaux obtenus sont comparés aux résultats de l'analyse numérique qui reproduisent très bien le mécanisme de rupture des poutres.

1.3.13. Travaux de KHALFALLAH, 2004

L'analyse des structures en béton armé est une tâche très complexe. Plusieurs facteurs la compliquent tenant compte du comportement non-linéaire des matériaux, l'auteur [KHA 04] propose dans son article la modélisation des structures les plus utilisées dans le domaine des constructions civiles et industrielles telles que : poutres, poteaux, dalles et murs. La modélisation du comportement du béton fissuré et sa contribution après sa fissuration, le problème de la modélisation de l'adhérence béton-acier et l'effet de l'écroutissement du béton et des aciers. Tous ces facteurs sont incorporés à l'élaboration d'un programme SCNL d'analyse du comportement non-linéaire des structures pour examiner la réponse des poutres en béton armé soumises à un chargement monotone.

Deux modèles élastoplastique et élastique endommageable sont pris en considération, ils sont implantés dans l'élaboration du programme sus cité. Plusieurs paramètres physiques et numériques sont étudiés. L'analyse non-linéaire reflète fidèlement le comportement expérimental.

Dans l'analyse des poutres selon les deux représentations citées (cut-off et tension-stiffening) , le facteur de transfert de cisaillement et le comportement du béton fissuré ont une faible influence.

Finalement, les résultats numériques obtenus concordent avec les résultats expérimentaux.

1.3.14. Travaux de PALIZZOLO, 2004

L'auteur étudie dans cet article [PAL 04] la conception optimale des poutres élastoplastiques soumises à un chargement qui varie quasi-statiquement à l'intérieur d'un domaine donné en développant une formulation minimale de volume et une formulation maximale du multiplicateur de charge toutes deux exprimées par des approches aussi bien statique que cinématique.

Les problèmes de recherches sont formulés selon trois différents critères de limite agissant simultanément, pour chaque critère un facteur de sécurité correspondant a été sélectionné et imposé et les équations d'Euler-Lagrange en rapport avec les problèmes précités sont déduites.

L'auteur propose une technique itérative spéciale consacrée à la résolution des problèmes présentés dans cet article et conclue par quelques exemples numériques en utilisant le model classique de la poutre Bernoulli-Navier.

1.3.15. Travaux de DIDES, 2005

Des modèles de plasticité concentrée (CP) fréquemment utilisés dans l'analyse statique et dynamique des bâtiments en génie civil ont été implantés dans les logiciels de calculs commercialisés.

La recherche effectuée dans cet article [DID 05] prend en considération 3 modèles (CP) différents.

- Un modèle macroélément simplifié (SEM) pour suivre l'historique complète du bâtiment.
- Une ossature en poutres avec interactions élastoplastiques entre les éléments au niveau des articulations (PH).
- Une ossature en poutres avec articulations en fibres (FB).

L'objectif de ce travail est d'évaluer la qualité des réponses aux sollicitations sismiques que prédisent les modèles sus-cités et d'identifier les aspects importants de leur mise en œuvre et leurs limitations pour l'analyse dynamique.

Les trois éléments sont testés pour un bâtiment à un seul étage dans un plan asymétrique puis pour une ossature métallique de bâtiment à trois étages.

Les résultats obtenus pour les trois modèles (CP) sont discutés et comparés. La question qui en ressort par l'auteur est : Comme l'analyse inélastique des structures devient de plus en plus accessible, pourquoi ne pas se baser lors de la conception sur un système à un seul étage équivalent ? En conclusion, l'auteur affirme que les modèles de plasticité concentrée (CP) sont un outil efficace pour l'analyse inélastique des structures. Ils mènent toujours à de meilleurs résultats pour les structures métalliques. Les modèles élastiques étant incapable de prédire les caractéristiques particulières du comportement « réel » des structures soumises aux sollicitations sismiques, les codes de calcul en bâtiment devraient nécessairement commencer l'analyse inélastique dynamique au moins par la validation de la conception de bâtiments asymétriques.

1.3.16. Travaux de BARHAM, 2005

L'auteur présente dans cet article [BAR 05] la mise en œuvre d'un algorithme pour la méthode incrémentale d'augmentation de la flexibilité (LIM : large increment method). L'avantage principal du (LIM) est qu'il sépare l'usage de l'équation à trois systèmes en deux étapes : l'une linéaire globale et l'autre non-linéaire locale.

Le déplacement de l'élément fini et l'approche de la force ont été développés pour résoudre les problèmes non-linéaires des structures. L'élément fini à déplacement basé exige une approche pas à pas pour l'analyse non-linéaire matérielle qui dépend de la théorie de l'écoulement. En outre, un affinage considérable du maillage est souvent exigé dans les zones plastiques pour mieux cerner la zone de transition du comportement élastique vers un comportement plastique.

Dans cet article, l'auteur développe les formulations (LIM) pour une poutre plane contrôlée par modèle à matériau élastique parfaitement plastique. Ces nouvelles formulations sont démontrées en utilisant de simples exemples non-linéaires dont les résultats sont comparés à ceux obtenus par le programme ABAQUS se basant sur la méthode déplacement, ces exemples mettent en évidence l'exactitude et l'efficacité de la méthode choisie pour l'analyse des problèmes structuraux.

En conclusion, à travers cet article, la grande méthode incrémentale paraît convenable pour la résolution d'une gamme de problèmes structuraux non-linéaires.

En plus du problème présenté par l'auteur, (LIM) peut être étendue à d'autres éléments structuraux ayant différents modèles. En outre, l'extension de la méthode la résolution de problèmes géométriquement non-linéaires paraît faisable.

1.3.17. Travaux de LELLEP, 2005

L'auteur propose dans cet article [LEL 05] une méthode de calcul pour les poutres rigides-plastiques soumises à des chargements intensifs. Les solutions théoriques ont été dérivées pour des poutres parfaitement plastiques obéissant au carré du critère de rendement (square yield criterion) qui retient aussi bien la force de cisaillement transversal que le moment de flexion.

La poutre considérée est encadrée d'une part et simplement appuyée de l'autre. La solution présentée diffère de celles obtenues dans le cas des poutres encadrées ou simplement appuyées respectivement des deux extrémités.

Les résultats obtenus démontrent que le glissement au cisaillement est plus important pour les poutres courtes, sa contribution est moins importante pour les poutres élancées.

1.3.18. Travaux de MA, 2005

Cet article [MA 05] traite l'instabilité dynamique des poutres élastoplastiques en utilisant un élément de poutre à trois degrés de liberté. L'instabilité asymétrique induite par une charge symétrique est particulièrement discutée elle est également considérée comme second ordre du mode de flambage.

La poutre est soumise à 4 types de perturbations :

- un mauvais alignement géométrique.
- La disparité des propriétés matérielles.
- Une charge appliquée de façon non symétrique.
- Trouble des conditions aux limites.

Ces perturbations sont introduites pour activer les réponses asymétriques caractérisées par la participation du facteur α_2 correspondant à un mode de forme asymétrique. La trajectoire plane et le schéma de Poincaré illustrent les caractéristiques chaotiques de la réponse de la poutre.

Les résultats montrent que si les perturbations sont assez faibles, le type de perturbation aura une influence négligeable sur la charge critique pour le cas de l'instabilité asymétrique et que cette dernière est une caractéristique intrinsèque de l'élément poutre. Cependant, avec l'augmentation de la magnitude des perturbations, l'influence de la vibration symétrique sera ramenée à une grande extension des paramètres de chargement.

1.3.19. Travaux de LEE, 2006

L'auteur présente dans cet article [LEE 06] le développement d'un élément fini de poutre de section L en 3D dans le but de l'analyser en larges déformations élastoplastiques aussi bien qu'en analyse linéaire. On peut résumer les étapes de cette analyse comme suit :

- Proposition d'un schéma d'interpolation généralisé pour la formulation isoparamétrique de l'élément fini présenté.
- Développement d'une procédure numérique pour l'analyse des grandes déformations élastoplastiques.
- La formulation est générale et effective pour d'autres sections modélisées par un élément fini de poutre.
- Procéder à l'implantation d'un élément fini de poutre 3D à deux nœuds dans un code de calcul afin de vérifier la validité de la formulation proposée.
- Prise d'exemples numériques : en premier lieu celui d'une structure formée de poutres encastées soumises à différents types de chargements dans le domaine élastique des petites et grandes déformations, puis l'analyse des grandes déformations élastoplastiques de cette même structure sous chargement cyclique réversible.
- En second lieu, analyser les ruptures des structures formées de poutres de différentes longueurs et dont le rapport longueur/largeur est aussi différent, simplement appuyées, soumises à de grandes déformations élastoplastiques.
- Les mêmes problèmes ont été résolus en utilisant un modèle élément fini de coque.

Pour l'analyse non-linéaire de l'élément développé, il est nécessaire de connaître :

- le comportement de la structure en 3D
- Les charges axiales, les charges de flexion, les cisaillements.
- Disponibilités de poutres de différentes longueurs (courtes et longues) avec différents rapports longueur/largeur.
- Non-linéarités géométriques potentielles
- Non-linéarités matérielles potentielles
- Excentricités des charges et déplacements.

Les résultats obtenus pour le cas de la poutre sont comparés à ceux de l'élément coque (MITC9), dans le but de chercher l'influence du nombre d'éléments finis de poutre et le nombre de points d'intégration à utiliser dans l'analyse élastoplastique. La solution de l'élément de poutre converge rapidement vers le modèle élément finis de coque ce qui confirme son efficacité. En dernier lieu il a été conclu que l'élément fini de poutre de section (L) était très intéressant dans l'analyse des grandes déformations élastoplastiques.

1.3.20. Travaux de DHAKAL, 2006

Dans cet article [DHA 06], l'auteur propose une méthode établie dans le but d'identifier les mouvements sismiques pouvant être utilisés dans les études physiques et numériques avancées sur la répartition des performances sismiques.

La procédure d'identification du mouvement sismique consiste à suivre les étapes majeures suivantes :

- Choisir la suite convenable des mouvements terrestres avec une intensité de mesure appropriée.
- Sélectionner un outil numérique et modéliser la structure en conséquence.
- Exécuter l'analyse dynamique incrémentale sur un modèle non-linéaire de la structure.
- Interpréter les résultats obtenus et identifier les mouvements sismiques critiques basés sur les courbes de l'analyse dynamique incrémentale IDA (Incremental Dynamic Analysis).

Par la suite, l'auteur donne un exemple qui illustre bien le mouvement de terre critique pour la répartition des performances sismiques, il s'agit d'une pile de pont en béton précontraint (dont on retrouve les caractéristiques physiques et géométriques détaillées dans l'article), le pont en question se situe en Nouvelle Zélande dans une zone à haute sismicité.

L'auteur applique sa méthode sur l'exemple choisi et passe ensuite à la validation de sa procédure, il soumet également la pile de pont à un test pseudo-dynamique (voir annexe 1) et utilise l'accélération spectrale.

Les résultats obtenus sont discutés avec une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux. La procédure proposée par l'auteur est recommandée particulièrement pour les essais destructifs.

1.3.21. Travaux de MOHRI, 2008

Dans cet article [MOH 08], l'auteur propose un élément fini de poutre pour l'analyse non-linéaire des éléments structuraux minces.

Le but est de rechercher un modèle théorique et numérique capable d'étudier le comportement des poutres minces à section ouverte en présence de grandes rotations. Le présent modèle tient en compte cette grande rotation ainsi que le gauchissement linéaire et non-linéaire qu'on appelle couramment effet de raccourcissement, déformation de pré-flambage et de couple flexion-torsion.

En analyse numérique, une poutre 3D avec deux nœuds et 7 degrés de liberté par nœud est adoptée. Les équations d'équilibre et le comportement matériel sont dérivés en forme discrète sans supposition de l'amplitude de l'angle de torsion.

Suite au contexte de grande torsion toutes les équations d'équilibre sont non-linéaires et extrêmement couplées.

Le comportement linéaire est rendu possible en ignorant les termes non-linéaires. Pour le comportement non-linéaire et la stabilité, la matrice raideur tangente est prise en charge.

Toujours suite au contexte de grande torsion, de nouvelles matrices sont présentées. L'élément est incorporé dans un code de calcul élément fini. La méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée avec divers paramètres de contrôle. Dans le but de prouver l'efficacité du modèle proposé, plusieurs exemples de comportement linéaire et non-linéaire ont été présentés en présence de bifurcation. L'auteur a également effectué des comparaisons avec le logiciel ABAQUS en comportement linéaire et lors de la stabilité au flambage latéral des poutres en (I) bi-symétriques.

Dans cet article, seules les charges constantes sont prises en compte. Les effets des charges variables ne sont pas incluses dans l'étude de ce modèle élément fini et les travaux de recherche se poursuivent dans ce sens.

1.3.22. Travaux de ORDAZ-HERNANDEZ, 2008

Dans cet article [ORD 08], une nouvelle manière d'obtenir la réponse dynamique de la poutre d'Euler-Bernoulli sous grande flèche est introduite. Elle est simulée à l'aide d'un modèle parcimonieux basé sur deux réseaux de neurones intégrés. Cet article prouve que la modélisation par réseaux de neurones permet d'effectuer des simulations mécaniques dans le but de réduire le temps de la procédure sans grande perte d'exactitude.

Ce modèle de technique de réduction assure un bon compromis erreur-rapidité d'exécution. Il mène rapidement à un modèle algébrique générique égalant la simulation interactive ou les exigences d'un prototype hautement réaliste multi sensoriel. L'originalité de la solution consiste en l'enchaînement de deux réseaux de neurones intégrés dans une boucle de condition.

En premier lieu, cet article présente une technique numérique systématique qui permet aux utilisateurs de construire efficacement un réseau de neurones optimal. Cette approche est basée sur le traitement de la technique évolutive de l'optimisation discrète. Le processus d'optimisation proposé est appliqué à la construction des deux réseaux de neurones. En partant d'une base de données d'apprentissage (learning base) créée à partir de l'analyse en série d'éléments finis.

En second lieu, l'auteur décrit clairement les deux réseaux de neurones basés sur des modèles réduits. Le premier réseau de neurones permet de déterminer les déplacements aux nœuds à partir des conditions de pondération et qui est ensuite relié au second réseau qui a pour but de déterminer les conditions de pondération à partir de l'état de déformation.

La nouvelle relation est finalement analysée afin de justifier le succès de la méthode proposée. L'auteur explique en détails le nouveau processus numérique qui supervise l'élaboration d'une boucle de réseau de neurones intégrée qui est une nouvelle manière de représenter le comportement non-linéaire des modèles de poutres.

1.3.23. Travaux de MERGOZ, 2010

La majorité des structures existantes en béton armé n'étant pas dimensionnées selon les codes sismiques modernes, l'auteur [MER 10] traite dans cet article tout récent l'analyse des dégâts sismiques sur les structures en béton armé dans le domaine inélastique. La première étape du travail présenté par l'auteur consiste en le développement d'un modèle analytique capable de prédire le comportement non linéaire des structures lors de fortes sollicitations sismiques. La modélisation explicite d'un cisaillement inélastique va jouer un rôle important dans l'étude de cet aspect. L'auteur a récemment développé un nouvel élément fini constitué de deux sous-éléments connectés entre eux, avec une flexibilité distribuée. Ces deux sous-éléments combinent entre la flexion inélastique et les déformations dues au cisaillement.

Se basant sur ce modèle, un index de dommage sismique est proposé prenant en considération les deux déformations précédemment citées tout comme leur interaction. L'élément fini de type poutre-colonne développé dans le cadre de cette étude ainsi que l'index de dommage sismique sont tous deux utilisés dans l'analyse des structures en béton armé soumises à un chargement cyclique et périssant par cisaillement ou par flambement. Les résultats obtenus dans cet article décrivent bien la réponse hystérétique des structures étudiées avec différents modes de ruine.

1.4. Conclusion

L'analyse des structures par la méthode des éléments finis est un sujet d'actualité qui fait l'objet de nombreuses recherches dans différents secteurs de pointe tels que le génie civil, la mécanique, la construction automobile, l'aéronautique, l'aérospatiale, la construction navale, le domaine nucléaire, et même la médecine où la méthode des éléments finis a été introduite dans la modélisation des organes du corps humain pour mieux cibler les zones à traiter.

Nous avons essayé, dans cette partie de notre mémoire, de présenter, suite à une recherche bibliographique relativement importante, l'évolution de l'utilisation de la méthode des éléments finis dans l'analyse des structures utilisant un maillage par éléments finis de type poutre.

Nous avons également présenté les premiers travaux effectués par les chercheurs au début des années 70 et suivi les orientations qu'ont prises les recherches récentes effectuées jusqu'à ce jour allant du calcul linéaire vers le calcul non linéaire, de structures planes vers des structures tridimensionnelles de plus en plus complexes, de la statique vers la dynamique et ce, dans le but de représenter, au mieux, le comportement réel des structures et de développer des logiciels de calcul performants.



Chapitre 2

Analyse Linéaire des Poutres Droites

Chapitre 2

Analyse linéaire des poutres droites

2.1. Introduction

Le présent chapitre aborde l'analyse linéaire des poutres droites. Nous commençons par présenter les principaux effets mécaniques pris en compte qui sont :

- la traction-compression
- la torsion
- la flexion selon les 2 plans principaux d'inertie
- le cisaillement

Par la suite, nous présentons les éléments finis de poutres les plus usuels dans le domaine linéaire.

2.2. Effets mécaniques [TRO 92]

En mécanique des structures, par définition dans une poutre, une section droite reste plane. La plupart des éléments finis de poutre sont rectilignes, géométriquement définis par deux points I et J situés sur l'axe neutre ; un troisième point K est nécessaire pour définir un des deux plans principaux d'inertie. La matrice raideur de ces éléments est calculée dans un système d'axes locaux (figure 2.1.) constitué de l'axe neutre IJ et de deux autres axes orthogonaux construits à partir de cet axe neutre et du plan IJK. Dans ce système, les effets mécaniques sont découplés, du moins pour un grand nombre de géométries les plus usuelles. Soit S la section de la poutre ; elle est supposée constante et il peut s'agir d'une aire équivalente, différente selon les effets envisagés. Les déplacements sont u , v , w et les rotations θ_y , θ_z .

En l'absence de cisaillement les rotations θ_y , θ_z sont égales, en valeur absolue, aux pentes dw/dx et dv/dx ($\theta_y = -dw/dx$, $\theta_z = dv/dx$). La torsion est repérée par la rotation θ_x de la section autour de Ox.

2.2.1. Effet de traction – compression. Equations d'équilibre

La traction – compression est établie ici à partir de la théorie de l'élasticité des corps unidimensionnels, afin d'être regroupée avec les autres effets dans une approche unique.

Soit Ox l'axe longitudinal local ; le vecteur

$$\langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \rangle \quad (2.1)$$

est le vecteur des contraintes s'exerçant sur la section droite est

$$\langle \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \rangle \quad (2.2)$$

celui des contraintes dans la section.

Les équations d'équilibre de l'élasticité sont

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.3)$$

Les forces de volume sont supposées nulles ou négligeables ($f_i = 0$). Les équations (2.3) sont intégrées sur une section droite, soit pour $i=1, j=1, 2, 3$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_S \sigma_{xx} dS + \int_S \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dS = 0 \quad (2.4)$$

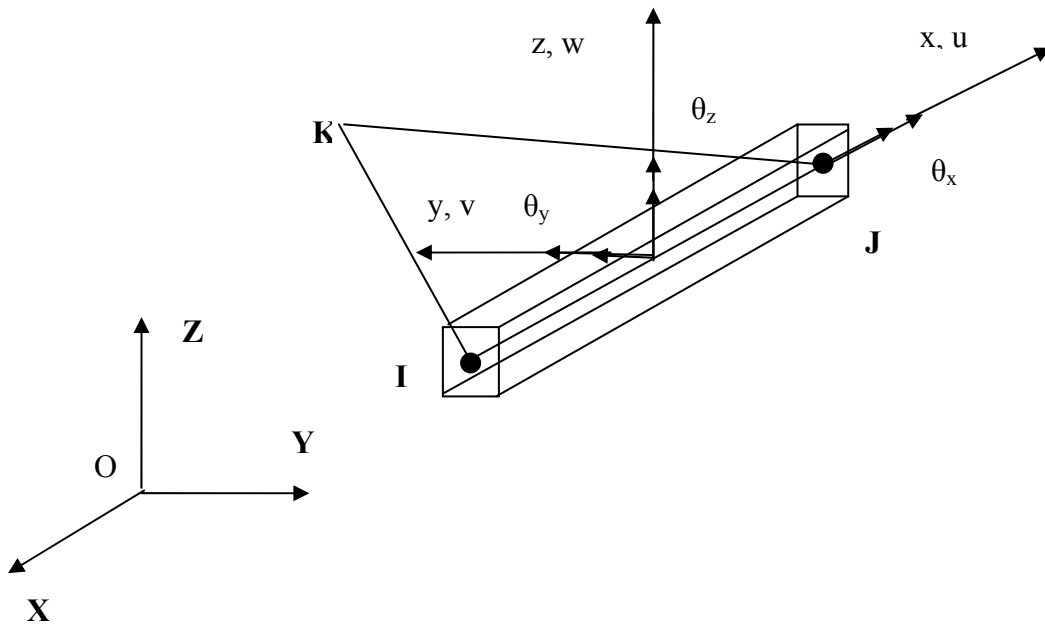


Figure 2.1- Repère local et déplacements d'une poutre

En transformant la deuxième intégrale en intégrale de contour, en désignant par N_x l'effort normal et par n_y, n_z , les composantes du vecteur normal au contour de S , (2.4) devient

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \oint_{\partial S} (\sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) d\Gamma = 0 \quad (2.5)$$

S'il n'y a pas de contraintes de cisaillement sur le contour, l'équation d'équilibre se réduit à

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

S'il y a du cisaillement il faut simplement ajouter la force par unité de longueur au premier membre de (2.6). (Dans un certain nombre d'ouvrages de RDM, cette équation est directement écrite à partir de l'équilibre d'un tronçon de poutre de longueur dx).

Quand les contraintes σ_{yy} et σ_{zz} sont négligées devant σ_{xx} , cette équation donne

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Matrice de rigidité locale de traction - compression

Bien entendu, l'expression de l'énergie de déformation déduite de (2.6) et de (2.7) est identique à

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{1}{2} \int_I^J \langle \sigma_{xx} \rangle \{ \varepsilon_{xx} \} S dx \\ &= \frac{1}{2} \int_I^J ES \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_I^J \left(\frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{dx}{d\xi} d\xi \end{aligned}$$

en axes locaux

$$U_{d(tc)} = \frac{1}{2} \langle \overline{u}_i, \overline{u}_j \rangle \frac{ES}{L} \begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

et une matrice raideur elle-même identique à $\mathbf{K}_{||} = \frac{ES}{L} \begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}$

Cette matrice est une fois singulière (son déterminant est nul), car il faut pouvoir traduire des déplacements d'ensemble $\{u\} \neq 0$ sans déformations.

2.2.2. Effet de flexion. Equations d'équilibre

Cet effet est étudié dans l'un des deux plans principaux d'inertie, par exemple le plan (X,Z). Cela concerne la troisième équation d'équilibre $i=3, j=1, 2, 3$ qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_S \sigma_{xz} dS + \int_S \left(\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dS = 0 \quad (2.9)$$

La première intégrale est celle qui définit l'effort tranchant Q_z . la seconde intégrale est transformée comme dans (2.5) en intégrale de contour

$$\int_S \left(\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dS = \oint_{\partial S} (\sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z) d\Gamma \quad (2.10)$$

Cette intégrale représente la charge répartie sur la surface latérale puisque la quantité sous le signe \int est un produit $|\Sigma| \{n\}$ d'où l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + p_z = 0 \quad (2.11)$$

Il faut ensuite établir une équation sur les moments. En multipliant par Z la première équation d'équilibre, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_S z \sigma_{xx} dS + \int_S z \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dS = 0 \quad (2.12)$$

ou

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} + \int_{\partial S} z (\sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) d\Gamma - \int_S \sigma_{xz} dS = 0 \quad (2.13)$$

La première intégrale s'interprète comme un moment linéique qui généralement n'existe pas compte tenu des chargements habituels.

Il reste :

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z = 0 \quad (2.14)$$

Les relations déformations-déplacements fournissent des équations supplémentaires (rappel : σ_{yy} et σ_{zz} sont négligées devant σ_{xx}).

La première égalité est :

$$\int_S z \sigma_{xx} dS = \int_S z E \varepsilon_{xx} dS = \int_S z E \frac{\partial u}{\partial x} dS = \int_S z^2 E \frac{\partial \theta_y}{\partial x} dS$$

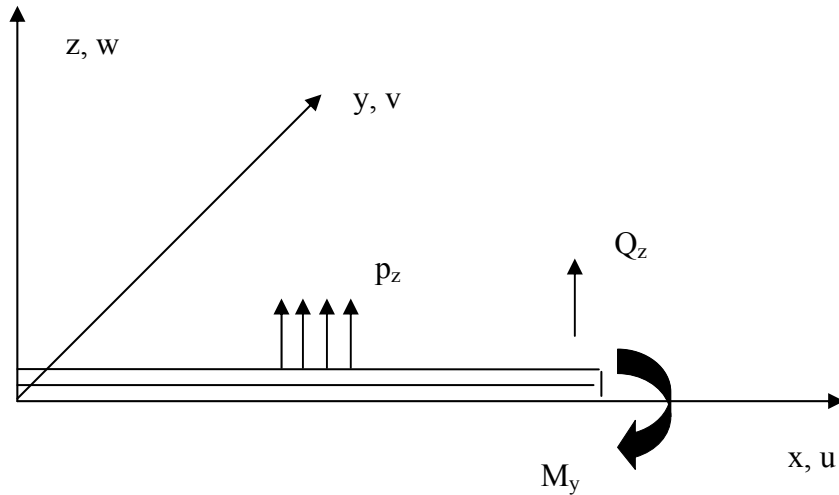


Figure 2.2 – Poutre en flexion. Relations avec les déplacements

Soit
$$M_y = E I_y \partial \theta_y / \partial x \quad (2.15)$$

Puis la deuxième

$$\int_S \sigma_{xz} dS = \int_S 2G \varepsilon_{xz} dS = \int_S G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dS = \int_S G \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dS$$

Soit
$$Q_z = GS \left[\partial w / \partial x + \theta_y \right] \quad (2.16)$$

Dans cette dernière expression il est supposé que la contrainte σ_{xz} est uniformément répartie dans la section, ce qui n'est pas toujours vrai.

C'est pourquoi (2.16) est remplacé par

$$Q_z = G S_e \left[\partial w / \partial x + \theta_y \right] \quad (2.17)$$

Dans laquelle S_e est l'aire équivalente au cisaillement.

Pour une section rectangulaire et l'hypothèse d'une répartition parabolique de σ_{xz} dans la hauteur on trouve que $S_e = 5/6 S$.

Il y a deux théories de la flexion, l'une qui prend en compte tous les termes précédents (poutre de Timoshenko) et l'autre qui néglige les effets de cisaillement (poutre de Kirchoff-Love). Ces deux théories conduisent à définir des éléments finis très différents.

a-Théorie de Kirchoff-Love : $\varepsilon_{xz} = 0$

Dans ce cas $dw/dx = -\theta_y$ (2.16), ce qui donne à la place de (2.15)

$$M_y = -EI_y d^2w/dx^2 \quad (2.18)$$

$$Q_z = -EI_y d^3w/dx^3 \quad (2.19)$$

$$EI_y d^4w/dx^4 - p_z = 0 \quad (2.20)$$

et enfin une énergie de déformation due à la flexion :

$$2U_{df} = \int_V (\sigma_{xx})(\epsilon_{xx})dV = \int_0^L \int_{S_0} z^2 E \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dx dS = \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.21)$$

b-Théorie de Timoshenko : $\epsilon_{xz} \neq 0$

$$Q_z = G S_e \left[dw/dx + \theta_y \right] \quad (2.22)$$

$$M_y = EI_y d\theta_y/dx \quad (2.23)$$

L'énergie est la somme de deux termes, l'un de flexion et l'autre de cisaillement

$$2U_{df} = \int_V (\sigma_{xx})(\epsilon_{xx})dV = \int_0^L EI_y \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.24)$$

$$2U_{dc} = \int_V (\sigma_{xz})(\epsilon_{xz})dV = \int_0^L G S_e \left(\frac{dw}{dx} + \theta_y \right)^2 dx \quad (2.25)$$

En apparence, il n'y a pas une différence fondamentale entre les 2 théories, la première étant une version simplifiée de la seconde, d'autant plus valable que la poutre est plus mince, c'est-à-dire que le cisaillement est plus faible. En réalité les éléments finis obtenus avec l'une et l'autre de ces théories sont fortement différents ; en effet, la relation (2.21) montre que l'énergie de déformation U_d s'exprime en fonction de la dérivée seconde de la flèche W seule. Cette remarque a 2 conséquences :

-seule la flèche w a besoin d'être interpolée dans l'élément.

-la présence de la dérivée seconde sous le signe intégral exige, pour que la sommation des intégrales sur chaque élément ait un sens, la continuité par morceaux de cette fonction. Il faut donc que w et dw/dx existent en tant que variables nodales ; l'élément fini doit être à continuité C_1 .

Par contre, dans (2.24) et (2.25) les quantités à intégrer w et θ_y sont des dérivées premières, la continuité C_0 suffit.

• **Eléments à continuité C_1**

Pour finir l'intégration de l'énergie, il reste à interpoler w selon la coordonnée x . évidemment une interpolation nodale linéaire n'aurait aucun sens (dérivées secondes nulles), il faut donc avoir au moins une interpolation du second ordre.

Si w et w' sont variables nodales, cela signifie pour un élément à 2 nœuds I et J que le champ peut dépendre de 4 constantes, w_i , w_j , dw_i/dw_j , dw_j/dw_i , donc que w a un développement de type cubique soit,

$$w = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 \quad (2.26)$$

d'où

$$dw/d\xi = b + 2c\xi + 3d\xi^2 \quad (2.27)$$

en identifiant aux nœuds

$$\begin{aligned} w_i &= a - b + c - d \\ w_j &= a + b + c + d \\ (dw/dx)_{\xi=-1} &= dw_i/dw_\xi = b - 2c + 3d \\ (dw/dx)_{\xi=+1} &= dw_j/dw_\xi = b + 2c + 3d \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} w_i \\ dw_i/d\xi \\ w_j \\ dw_j/d\xi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

D'où par inversion

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ -3/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ dw_i/dx \\ w_j \\ dw_j/dx \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Par ailleurs

$$dw/dx = (dw/d\xi) d\xi/dx = (dw/d\xi) 2/l \quad (2.31)$$

Ce qui conduit à l'interpolation

$$w = 1/4 (1-\xi)^2 (2+\xi) w_i + 1/4 (1-\xi^2)(1-\xi) dw_i/d\xi + 1/4 (1+\xi)^2 (2-\xi) w_j + 1/4 (-1+\xi^2)(1+\xi) dw_j/d\xi \quad (2.32)$$

En dérivant 2 fois et en reportant dans (2.21) on calcule l'énergie de déformation de la poutre en flexion, dans le plan principal d'inertie concerné.

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 = \frac{1}{16} \langle w_i \frac{dw_j}{d\xi} w_j \frac{dw_j}{d\xi} \rangle \begin{pmatrix} 6\xi \\ 6\xi-2 \\ -6\xi \\ 6\xi+2 \end{pmatrix} \langle 6\xi 6\xi - 2 - 6\xi 6\xi + 2 \rangle \begin{pmatrix} w_{ij} \\ dw/d\xi_i \\ w_j \\ dw_j/d\xi \end{pmatrix}$$

où,

$$d^2 w/d\xi^2 = 1/4(6\xi w_i + (6\xi-2) dw_i/d\xi - 6\xi w_j + (6\xi+2) dw_j/d\xi) \quad (2.33)$$

Après intégration

$$u_d = \frac{1}{2} \langle w_i \frac{dw_i}{d\xi} w_j \frac{dw_j}{d\xi} \rangle \frac{El_y}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 \\ & 16 & -12 & 8 \\ & & 12 & -12 \\ & & & 16 \end{vmatrix}_{sym} \begin{pmatrix} w_i \\ dw_i/d\xi \\ w_j \\ dw_j/d\xi \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Ou encore en multipliant la 2ème et la 4ème ligne par L/2

$$u_d = \frac{1}{2} \langle w_i \frac{dw_i}{dx} w_j \frac{dw_j}{dx} \rangle \frac{El_y}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 12 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{vmatrix}_{sym} \begin{pmatrix} w_i \\ dw_i/dx \\ w_j \\ dw_j/dx \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

La matrice raideur de la poutre est donc en coordonnées locales

$$|k_i| = \frac{El_y}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

Dans l'autre plan d'inertie la matrice est évidemment identique (I_Y remplacé par I_Z). En se reportant à la figure (2.1), on rappelle que $dv/dx = \theta_z$ et $dw/dx = -\theta_y$.

Il est assez facilement démontré que la matrice donnée en (2.33) est deux fois singulière : l'une des singularités correspond à un mode de translation et l'autre à une rotation du corps rigide. La première est définie par

$$w_i = w_j = w_0 \quad dw_i/dx = dw_j/dx = 0$$

et la seconde par

$$w_i = 0, dw_i/dx = dw_j/dx = \theta, w_j = L \theta.$$

- **Éléments de continuité C_0**

La continuité C_1 a été imposée par l'hypothèse de Kirchhoff qui, en supposant le cisaillement nul, induit une relation entre la pente dw/dx (ou dv/dx) et l'angle de rotation de la section droite. Cette continuité peut poser problème, s'il faut raccorder cet élément de poutre à des éléments à continuité C_0 . Comme dans la modélisation de la figure (2.3).

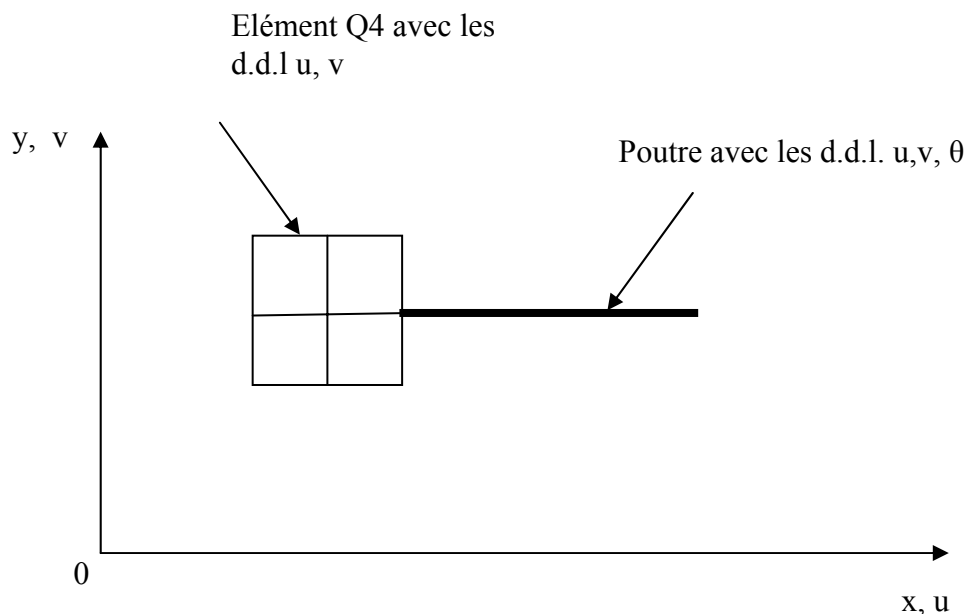


Figure 2.3- Raccordement poutre - encastrement

Par ailleurs, la continuité C_1 ne se généralise pas sans difficultés à 2 dimensions (plaques). Ces deux observations expliquent les recherches entreprises pour construire des éléments à continuité C_0 . Par rapport au calcul précédent, il ne faut plus de dérivées secondes dans la fonctionnelle – énergie de déformation – à minimiser (équation 2.24 et 2.25) car ce sont ces dérivées qui exigent ce type de continuité. Ce résultat est donc facilement atteint en abandonnant l'hypothèse d'un cisaillement nul.

Pour un élément linéaire à 2 nœuds, les variables nodales sont alors la rotation et la flèche, avec les développements :

$$\begin{aligned}
\theta_y &= (1-\xi)/2 \overline{\theta_{yi}} + (1+\xi)/2 \overline{\theta_{yj}} \\
w &= (1-\xi)/2 \overline{w_{yi}} + (1+\xi)/2 \overline{w_{yj}} \\
x &= (1-\xi)/2 \overline{x_{yi}} + (1+\xi)/2 \overline{x_{yj}}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ce qui donne

$$U_{df} = \frac{1}{2} \langle \overline{\theta_y} \rangle |K_{\beta\beta}{}^1| \{ \overline{\theta_y} \} \tag{2.38}$$

$$U_{dc} = \frac{1}{2} [\langle \overline{\theta_y} \rangle |K_{\beta\beta}{}^2| \{ \overline{\theta_y} \} + \langle \overline{w} \rangle |K_{ww}| \{ \overline{w} \} + 2 \langle \overline{w} \rangle |K_{w\beta}| \{ \overline{\theta_y} \}] \tag{2.39}$$

avec

$$\begin{aligned}
|K_{\beta\beta}{}^1| &= \frac{EI_y}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & |K_{ww}| &= \frac{GS_e}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
|K_{\beta\beta}{}^2| &= \frac{GS_e L}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & |K_{w\beta}| &= \frac{GS_e}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Puisque l'hypothèse d'un cisaillement nul est abandonnée, il convient de vérifier comment se comporte cet élément quand le rapport hauteur/longueur tend vers 0, car c'est précisément dans ce cas que le cisaillement est négligeable.

Pour cette vérification, on regarde le comportement d'une poutre encastree-libre sous chargement concentré, (figure (2.4)), modélisée par un seul élément du type précédent. Les deux conditions limites sont en $x=0$, $w=0$, et $\beta_y = 0$; il reste les équations :

$$\begin{aligned}
GS_e/L \overline{w_j} + \frac{1}{2} GS_e \overline{\theta_{yj}} &= P \\
\frac{1}{2} GS_e \overline{w_j} + (EI_y/L + GS_e L/3) \overline{\theta_{yj}} &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$d'o\grave{u} \quad \overline{w_j} = \frac{PL}{GS_e} \frac{4 + 12EI_y / GS_e L^2}{1 + 12EI_y / GS_e L^2} \tag{2.41}$$

Pour une poutre rectangulaire ($b \times h \times L$) et avec $G \approx 0.4 E$

$$12EI_y / GS_e L^2 \approx 3h^2 / L^2 \tag{2.42}$$

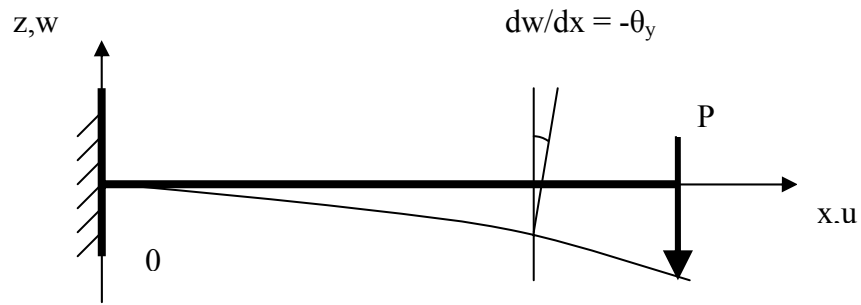


Figure 2.4 – Poutre encastrée-libre

Donc la flèche se comporte comme 4 fois celle due au cisaillement quand h/L tend vers 0, chose qui n'est pas logique. Ce résultat montre que le cisaillement devient prépondérant au moment même où il devrait devenir négligeable. On dit alors qu'il y a verrouillage par cisaillement, ce qui rend ce type d'élément inopérant dans la plupart des configurations.

Afin d'améliorer ce comportement, 2 techniques sont proposées dans la littérature à savoir :

Technique 1 : l'intégration réduite du cisaillement : Il s'agit d'une idée très efficace, simple et facile à mettre en œuvre, mais difficile à trouver, elle consiste à intégrer de manière inexacte les termes de cisaillement. Le résultat obtenu est intéressant puisque la flèche devient égale au $\frac{3}{4}$ de la flèche théorique due à la flexion, quand l'élanement h/L tend vers 0.

Cette technique se généralise facilement aux éléments de plaques.

Technique 2 : Hypothèse de Kirchhoff discrétisée : L'idée ici est de satisfaire l'hypothèse de Kirchhoff de manière discrète et non plus partout dans l'élément. Afin d'atteindre cet objectif il faut commencer par remarquer que les développements polynomiaux de w et de θ_y (ou de v et de θ_z) doivent être cohérents, c'est-à-dire que si par exemple θ_y est linéaire, w doit être quadratique pour pouvoir écrire $dw/dx + \theta_y = 0$

2.2.3. Effet de torsion. Equations d'équilibre

Il reste à prendre en compte l'effet de torsion qui est représenté par la rotation θ_x de la section supposée varier linéairement le long de l'axe Ox ($d\theta_x/dx = Cte = \alpha$). Compte tenu de l'hypothèse de Saint Venant selon laquelle les sections droites restent droites, les déplacements sont les suivants :

$$u = \alpha, v = -z\theta_x, w = y\theta_x \quad (2.43)$$

Les seules déformations non nulles sont alors :

$$\varepsilon_{xy} = -zd\theta_x/dx \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xz} = yd\theta_x/dx \quad (2.44)$$

Le couple résultant vaut :

$$M_x = \int_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dS = \int_S G(y\varepsilon_{xz} - z\varepsilon_{xy}) dS = \int_S G(y^2 + z^2) \frac{d\theta_x}{dx} dS$$

$$M_x = GJ\theta_x/dx \quad (2.45)$$

$$\text{d'où l'énergie correspondante } 2U_t = \int_I^J GJ \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 dx \quad (2.46)$$

Un développement linéaire de l'angle θ_x suffit, ce qui conduit à l'expression matricielle

$$\text{usuelle } U_t = \frac{1}{2} \langle \overline{\theta_{xi}} \quad \overline{\theta_{xj}} \rangle \frac{GJ}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\theta_{xi}} \\ \overline{\theta_{xj}} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

2.2.4. Matrice raideur totale de la poutre

Il reste à regrouper tous ces effets. Dans le système d'axes choisis, ils sont découplés, si bien que la matrice raideur totale locale $|K_l|$ n'est que la simple superposition de toutes les précédentes mais avec les degrés de liberté :

$$\langle \overline{u_i}, \overline{v_i}, \overline{\theta_{zi}}, \overline{u_j}, \overline{v_j}, \overline{\theta_{zj}}, \overline{w_i}, \overline{\theta_{yi}}, \overline{w_j}, \overline{\theta_{yj}}, \overline{\theta_{xi}}, \overline{\theta_{xj}} \rangle$$

Dans la pratique il faut regrouper les degrés de liberté dans l'ordre : déplacements + rotations comme suit :

$$\langle \overline{u_i}, \overline{v_i}, \overline{w_i}, \overline{\theta_{xi}}, \overline{\theta_{yi}}, \overline{\theta_{zi}}, \overline{u_j}, \overline{v_j}, \overline{w_j}, \overline{\theta_{xj}}, \overline{\theta_{yj}}, \overline{\theta_{zj}} \rangle \quad (2.48)$$

Cette opération revient à permuter les lignes et les colonnes de $|K_l|$ ce qui détruit son caractère quasi diagonal ; cela n'a pas beaucoup d'importance car il reste encore une transformation à effectuer : celle qui consiste à se référer au système d'axes absolus afin de pouvoir superposer les autres matrices élémentaires.

Si Λ est la matrice de changement d'axes (3x3) formée des cosinus directeurs $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, m_x, m_y, m_z, n_x, n_y, n_z$, des directions O_x, O_y, O_z par rapport aux axes

$$\begin{pmatrix} \overline{u_i} \\ \overline{v_i} \\ \overline{w_i} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_x & m_x & n_x \\ \lambda_y & m_y & n_y \\ \lambda_z & m_z & n_z \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u_{xi}} \\ \overline{v_{yi}} \\ \overline{w_{zi}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } |K_a| = |\varphi|^T |K_l| |\varphi| \text{ avec } |\varphi| = \begin{vmatrix} |L| & & & \\ & |I| & & \\ & & |L| & \\ & & & |I| \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

2.3. Types d'éléments finis de poutres [DEV 89], [DJE 90]

Nous présentons dans cette section, les différents types d'éléments finis de poutres rectilignes dans le domaine linéaire.

En mécanique des milieux continus, la plupart des éléments finis de type déplacement sont développés selon le concept isoparamétrique. Leur géométrie et leur champ de déplacements sont discrétisés avec les mêmes fonctions et par un changement de variables,

le domaine d'intégration de forme quelconque est transformé en un domaine de forme simple. Les développements mathématiques ne sont donc pas, à priori, plus compliqués lorsque la forme initiale de l'élément est quelconque.

La technique des éléments isoparamétriques pourrait elle aussi être adoptée cependant cette méthode n'est pas toujours idéale pour les corps minces, pour notre cas on se limitera aux coordonnées cartésiennes.

2.3.1. Poutre de Timoshenko (analytique)

2.3.1.1 Champ des déplacements

Le champ des déplacements d'une poutre plane s'écrit généralement de la manière suivante (Fig. 2.5) :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x) - y \sin \theta(x) \\ v(x, y) &= v(x) - y(1 - \cos \theta(x)) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Avec les hypothèses classiques que nous connaissons :

- la poutre est un corps transversalement rigide.
- Sa section droite reste plane
- Sa section est constante
- En déformation, l'axe des centres de gravité est une droite.

Puisque on est en hypothèse des petits déplacements en théorie linéaire, l'équation (2.50) est transformée en assimilant $\sin \theta(x)$ à $\theta(x)$ et $\cos \theta(x)$ à 1, on obtient donc :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x) - y\theta(x) \\ v(x, y) &= v(x) \end{aligned} \quad (2.51)$$

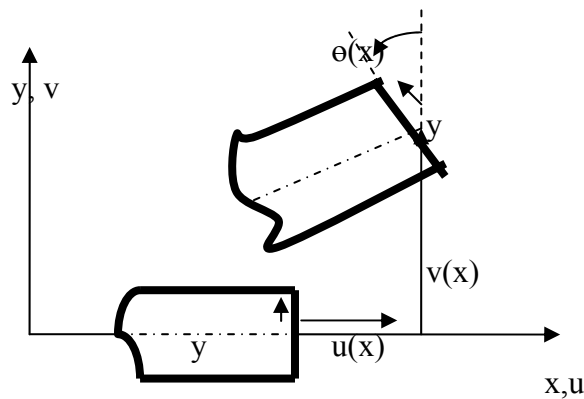


Figure 2.5. Champ des déplacements d'une poutre plane

2.3.1.2 Champ des déformations

Dans le plan, les deux seules composantes non-nulles du tenseur des déformations, ε_{ij} , en théorie linéaire s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.52)$$

Avec le champ (2.51), les relations (2.52) deviennent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= u'(x) - y\theta'(x) \\ 2\varepsilon_{xy} &= v'(x) - \theta(x)\end{aligned}\quad (2.52')$$

N.B. : dans ces paragraphes, la notation « ' » est adoptée pour $\partial/\partial x$ chaque fois que la fonction à dériver dépend de la seule variable x .

2.3.1.3 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre sont établies à partir du principe des travaux virtuels

(PTV) :

$$\int_{V_0} (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta\varepsilon_{xy}) dV_0 = \int_{V_0} (f_x \delta u(x,y) + f_y \delta v(x,y)) dV_0 \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}\int_{V_0} (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta\varepsilon_{xy}) dV_0 &= N_1 \delta u_1 + T_1 \delta v_1 + M_1 \delta \theta_1 \\ &+ N_2 \delta u_2 + T_2 \delta v_2 + M_2 \delta \theta_2\end{aligned}\quad (2.54)$$

Avec la définition des déformations (2.52'), le premier membre de (2.54) se transforme en faisant appel à l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int_{V_0} [\sigma_{xx} (\delta\mu(x) - y\delta\theta(x)) + \sigma_{xy} (\delta v'(x) - \delta\theta(x))] dV_0 \\ &= \overline{N} \delta\mu(x) \Big|_0^L - \int_L \overline{N}' \delta\mu(x) dx + \overline{M} \delta\theta(x) \Big|_0^L - \int_L \overline{M}' \delta\theta(x) dx \\ &+ \overline{T} \delta v(x) \Big|_0^L - \int_L \overline{T}' \delta v(x) dx - \int_L \overline{T} \delta\theta(x) dx \\ &\overline{N}_2 \delta\mu_2 - \overline{N}_1 \delta\mu_1 + \overline{M}_2 \delta\theta_2 - \overline{M}_1 \delta\theta_1 + \overline{T}_2 \delta v_2 - \overline{T}_1 \delta v_1 = \\ &\quad - \int_L \overline{N}' \delta\mu(x) dx - \int_L \overline{M}' \delta\theta(x) dx - \int_L \overline{T}' \delta v(x) dx - \int_L \overline{T} \delta\theta(x) dx\end{aligned}\quad (2.55)$$

Avec les notations :

$$\overline{N} = \int_A \sigma_{xx} dA ; \quad \overline{M} = - \int_A \sigma_{xx} y dA ; \quad \overline{T} = \int_A \sigma_{xy} dA \quad (2.56)$$

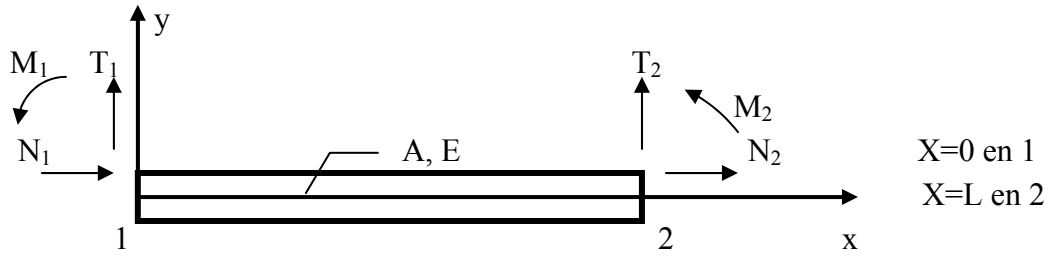


Figure 2.6. Efforts intérieurs

En exprimant que $\langle \delta\mu(x, y), \delta v(x,y), \delta\theta(xy) \rangle$ est un champs des déplacements quelconque cinématiquement admissible et en égalant (2.55) au second membre de (2.54), on obtient les équations d'équilibre de volume :

$$\begin{aligned} \bar{N}' &= 0 \text{ ou } \bar{N} = cste \\ \bar{T}' &= 0 \text{ ou } \bar{T} = cste \\ \bar{M}' + \bar{T} &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

les équations d'équilibre aux extrémités sont :

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= -N_1; \bar{N}_2 = N_2 \\ \bar{T}_1 &= -T_1; \bar{T}_2 = T_2 \\ \bar{M}_1 &= -M_1; \bar{M}_2 = M_2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Compte tenu les relations (2.52') et (2.56) et la loi de Hooke qui s'écrit :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}; \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \quad (2.59)$$

on obtient la relation entre les efforts intérieurs et les déplacements :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= EAu'(x) \\ \bar{M} &= EI\theta'(x) \\ \bar{T} &= GA^*(v'(x) - \theta(x)) \end{aligned} \quad (2.60)$$

où A est la section, I est l'inertie et A* la section réduite.

A partir des relations ((2.57), (2.58), (2.60), on peut trouver les solutions déformées-déplacements caractéristiques pour quelques cas de sollicitations, elles sont qualifiées de solutions théoriques qui serviront de base pour la vérification de l'efficacité des éléments finis proposés.

2.3.1.4. Poutre sollicitée par un moment constant

Soit une poutre bi-appuyée, sollicitée à ses deux extrémités par des moments M égaux mais de sens opposés (Fig. 2.7).

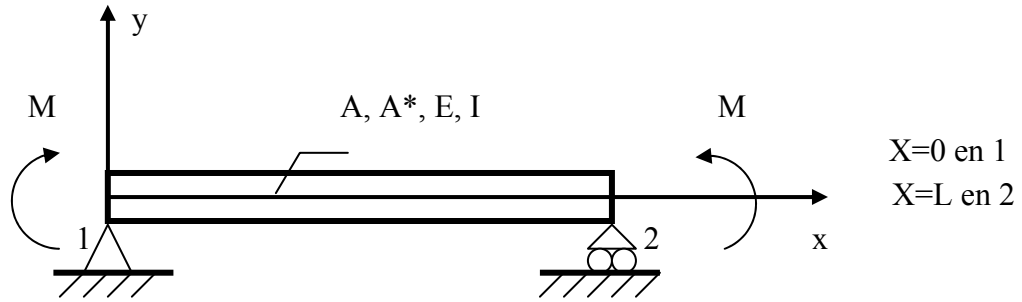


Figure 2.7. Poutre sollicitée par un moment constant

en examinant la figure (2.7) on déduit immédiatement :

$$N_1 = N_2 = T_1 = T_2 = 0 \quad ; \quad M_1 = -M, \quad M_2 = M \quad (2.61)$$

et à partir de la relation (2.58) on déduit également que :

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{T}_1 = \bar{T}_2 = 0 \quad ; \quad \bar{M}_1 = M, \quad \bar{M}_2 = M \quad (2.62)$$

en combinant les relations (2.62), (2.57) et (2.60), on obtient :

$$u(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) - \theta(x) = 0 \quad ; \quad EI\theta''(x) = 0 \quad (2.63)$$

en intégrant une première fois la dernière relation on obtient : $EI\theta'(x) = a$ (2.64)

par la relation (2.60), on constate que $\bar{M} = \text{constante}$, et par la relation (2.61) que la constante a vaut M. Compte tenu de (2.63), l'intégrale de (2.64) nous donne :

$$v(x) = \frac{M}{2EI}x^2 + bx + c \quad (2.65)$$

où les constantes b et c sont obtenues en exprimant les conditions d'appuis de la figure 2.7. le champs des déplacements de cette poutre a donc pour expression :

$$u(x) = 0$$

$$v(x) = \frac{M}{2EI}(x^2 - xL); \theta(x) = \frac{M}{2EI}(2x - L) \quad (2.66)$$

les rotations de la section aux extrémités de la poutre sont :

$$\theta_1 = -\theta_2 = -\frac{M}{2EI} \quad (2.67)$$

2.3.1.5. Poutre console sollicitée par une charge transversale

Soit une poutre console, encadrée à son extrémité en $x=0$ et libre en $x=L$, sollicitée à son extrémité libre par une charge transversale P (Fig. 2.8).

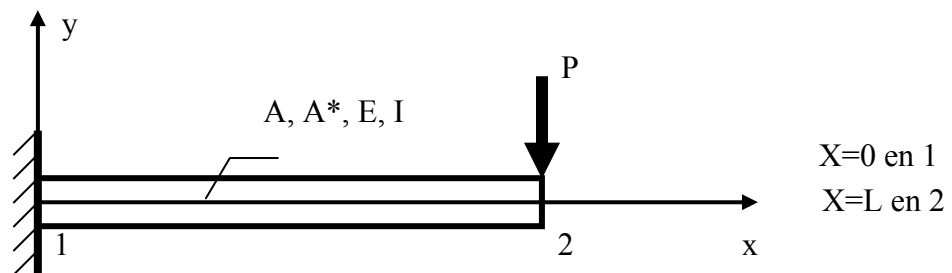


Figure 2.8. Poutre console sollicitée par une charge transversale

en examinant la figure (2.8) on déduit immédiatement :

$$N_1 = N_2 = 0 \quad ; \quad T_1 = P \quad , \quad T_2 = -P \quad ; \quad M_1 = PL \quad , \quad M_2 = 0 \quad (2.68)$$

et avec la loi de Hooke (2.59) on obtient :

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 0 \quad ; \quad \bar{T}_1 = -P \quad , \quad \bar{T}_2 = -P \quad ; \quad \bar{M}_1 = -PL \quad , \quad \bar{M}_2 = 0 \quad (2.69)$$

en combinant les relations (2.69), (2.57) et (2.60), on a tout d'abord :

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \\ GA^*(v'(x) - \theta(x)) &= -P \\ EI\theta''(x) - P &= 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

En intégrant les deux dernières relations et en exprimant les conditions d'appuis à l'encastrement, on obtient l'équation de la rotation :

$$\theta(x) = \frac{P}{2EI}(x^2 - 2xl) \quad (2.71)$$

et celle du déplacement transversal :

$$v(x) = \frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - x^2L\right) - \frac{Px}{GA^*} \quad (2.72)$$

la rotation et le déplacement de l'extrémité libre sont :

$$\theta_2 = -\frac{PL^2}{2EI} \quad ; \quad v_2 = -\frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3EI}{GA^*L^2}\right) \quad (2.73)$$

on constate que la flèche de la poutre dépend de la section A^* ; en d'autres termes, l'effort tranchant, non nul dans ce cas de sollicitation, contribue à la déformée de la poutre. La solution (2.73) est bien entendu égale à celle obtenue en mécanique des matériaux.

Pour la suite, il est important d'observer que le champs des déplacements proposé par Hencky-Mindlin (2.51) permet donc de trouver la déformée exacte, au sens de la mécanique des matériaux avec la notion de section réduite, que l'effort tranchant soit nul (cas 2.3.1.4), ou différent de zéro.

2.3.2. Poutre de Bernoulli (analytique)

2.3.2.1. Champ des déplacements et des déformations

Bernoulli complète les hypothèses de Timoshenko (en 2.3.1.1) en imposant qu'après déformation, les sections droites restent perpendiculaires à leur fibre moyenne, de plus comme les déplacements (en terme de rotations) sont petits, l'angle de rotation de la section est assimilé à la pente (Fig 2.9).

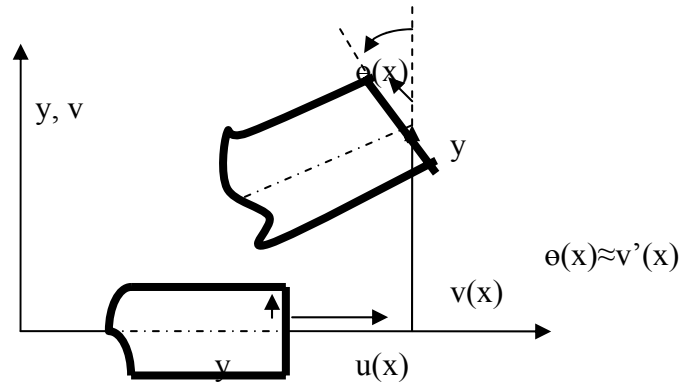


Figure 2.9. Champ des déplacements et des déformations poutre de Bernoulli (analytique)

l'expression du champs de déplacements est :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x) - yv'(x) \\ v(x, y) &= v(x) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Le champ des déformations est obtenu grâce aux formules (2.52) :

$$\varepsilon_{xx} = u'(x) - yv''(x) \quad ; \quad 2\varepsilon_{xy} = 0 \quad (2.75)$$

2.3.2.2. Equations d'équilibre

Pour établir les équations d'équilibre, on procède exactement de la même façon qu'au paragraphe (2.3.1.3), tout en tenant compte des nouvelles expressions des déformations (2.75). d'où l'obtention des équations d'équilibre de volume :

$$\bar{N}' = 0 \text{ où } \bar{N} = cste \quad (a)$$

$$\bar{M}'' = 0 \text{ où } \bar{M}' = cste \quad (b) \quad (2.76)$$

les équations d'équilibre aux extrémités :

$$\bar{N}_1 = -N_1 \quad ; \quad \bar{N}_2 = N_2 \quad (a)$$

$$\bar{M}'_1 = T_1 \quad ; \quad \bar{M}'_2 = -T_2 \quad (b)$$

$$\bar{M}_1 = -M_1 \quad ; \quad \bar{M}_2 = M_2 \quad (c) \quad (2.77)$$

Comme pour la poutre de Timoshenko, ces équations d'équilibre combinées à la loi de Hooke (2.59), vont permettre de trouver la déformée d'une poutre sollicitée par des efforts extérieurs appliqués à ses extrémités.

2.3.2.3. Poutre sollicitée par un moment constant

Le processus de calcul est identique à celui du paragraphe (2.3.1.4), ne sont repris ici que les résultats essentiels. En utilisant la loi de Hooke (2.59) en plus des équations (2.76) et en tenant compte des sollicitations extérieures et des conditions d'appui, (Fig 2.7.), on a :

$$u(x) = 0$$

$$EIv''(x) = M \quad (2.78)$$

après intégration on a :

$$v(x) = \frac{M}{2EI}(x^2 - xL) \quad (2.79)$$

Cette solution est identique à celle obtenue par la théorie de Timoshenko chose qui est logique étant donné que dans le premier type de poutre l'énergie de déformation de cisaillement est prise en compte qui est nulle dans cet exemple puisque le moment de flexion est constant.

2.3.2.4. Poutre console sollicitée par une charge transversale

En dehors du déplacement axial qui est nul, on obtient en combinant les équations (2.76 b), (2.77 b) et (2.69) :

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \\ EIv''''(x) &= P \end{aligned} \quad (2.80)$$

et après intégration :

$$EIv(x) = \frac{Px^3}{6} + ax^2 + bx + c \quad (2.81)$$

les conditions d'appui :

$$v(x) = 0, v'(x) = 0, \text{ en } X = 0 \quad (2.82)$$

Cela combiné à l'annulation du moment \bar{M} à l'extrémité libre fournissent l'équation de la déformée transversale :

$$v(x) = \frac{P}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - x^2L \right) \quad (2.83)$$

Cette solution diffère de celle obtenue par Timoshenko, (2.72) par l'absence du terme Px/GA^* qui tient compte de la déformation due à l'effort tranchant. En effet, avec Bernoulli, la déformation de cisaillement ε_{xy} est nulle par hypothèse (2.75). Il est donc logique que ce terme n'apparaisse pas dans (2.83). De plus, si l'effort tranchant \bar{T} est obtenu au moyen d'une équation d'équilibre de volume (2.57), pour Timoshenko on ne trouve son équivalent pour Bernoulli qu'au moyen d'une équation d'équilibre global (2.77 b).

2.3.3. Poutre de Timoshenko (élément fini)

2.3.3.1. Élément fini classique

D'après les paragraphes précédents, la poutre de Timoshenko développée analytiquement fournit des résultats dits « exacts » que la poutre soit soumise ou pas à un effort tranchant. Maintenant, on va faire ressortir le phénomène de surrigidité qui apparaît dès que le champ des déplacements est discrétisé dans le cadre d'un élément fini.

L'examen du champ de déplacement (2.51) conduit à discrétiser $u(x)$, $v(x)$ et $\theta(x)$ séparément en adoptant comme inconnues nodales les déplacements U_i , V_i , θ_i en deux points nodaux ($i=1,2$), on prend par exemple la poutre de la figure (2.10) :

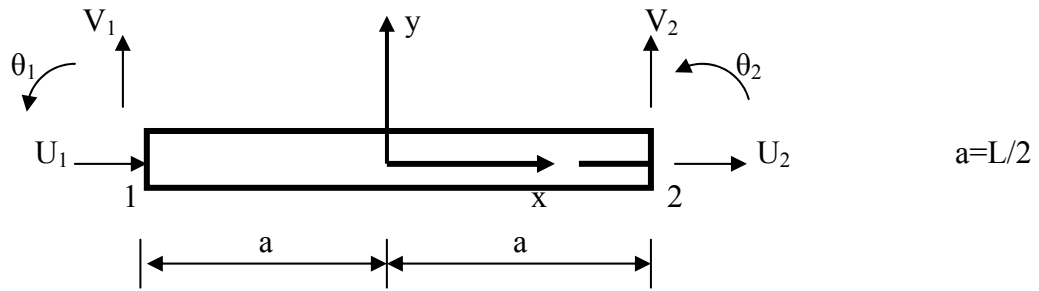


Figure 2.10. Elément fini classique poutre de Timoshenko (élément fini)

D'après (2.51), le champ discrétisé des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U_i h_i(x) - y \theta_i h_i(x) \\ v(x, y) &= V_i h_i(x) \text{ avec } (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Avec les fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (1 - x/a)/2 \\ h_2(x) &= (1 + x/a)/2 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Le champ discrétisé des déformations est déduit de (2.52) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= (U_2 - U_1)/2a - y(\theta_2 - \theta_1)/2a \\ 2\varepsilon_{xy} &= (V_2 - V_1)/2a - \theta_1(1 - x/a)/2 - \theta_2(1 + x/a)/2 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Trouver les équations d'équilibre d'une structure dans la méthode des éléments finis linéaires revient à construire la matrice de rigidité correspondante qui a pour expression :

$$\underline{K}_{HC} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & \theta_1 & U_2 & V_2 & \theta_2 \\ EA & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ 0 & GA^* & aGA^* & 0 & -GA^* & aGA^* \\ 0 & aGA^* & EI + \frac{4}{3}a^2GA^* & 0 & -aGA^* & -EI + \frac{2}{3}a^2GA^* \\ -EA & 0 & 0 & EA & 0 & 0 \\ 0 & -GA^* & -aGA^* & 0 & GA^* & -aGA^* \\ 0 & aGA^* & -EI + \frac{2}{3}a^2GA^* & 0 & -aGA^* & EI + \frac{4}{3}a^2GA^* \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

2.3.3.2. Elément fini sous-intégré

Dans la littérature, STOLARSKI et BELYTSCHKO ont abordé le phénomène de « shear locking » qui apparaît dans tous les éléments finis de poutre où le déplacement transversal $v(x)$ et la rotation $\theta(x)$ sont discrétisés séparément.

Afin de réduire la rigidité au cisaillement de l'élément fini, les deux auteurs proposent de calculer les termes de la matrice de rigidité en procédant à une intégration sélective et cela en intégrant de manière exacte les termes relatifs à la flexion et en sous-intégrant les termes relatifs au cisaillement.

Dans le cas de la poutre à deux nœuds, cela revient à intégrer les termes de flexion par voie analytique et les termes de cisaillement avec un seul point d'intégration. Dès lors, on

ne prend plus en compte la variation du cisaillement le long de l'axe de la poutre. Pour la poutre sollicitée par un moment de flexion constant, l'énergie de déformation de cisaillement sera nulle puisque là où se situe le point d'intégration ε_{xy} est nul. On peut donc s'attendre à obtenir de meilleurs résultats. Le champ discrétisé des déplacements est identique à celui de l'élément fini classique. La matrice de rigidité \underline{K}_{HS} de cet élément est obtenue en intégrant exactement les termes de flexion et avec un seul point d'intégration en $x=0$ ceux de cisaillement. Elle s'écrit sous la forme :

$$\underline{K}_{HS} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1 & \boldsymbol{\theta}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_2 & \boldsymbol{\theta}_2 \\ EA & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ 0 & GA^* & aGA^* & 0 & -GA^* & aGA^* \\ 0 & aGA^* & EI + a^2GA^* & 0 & -aGA^* & -EI + a^2GA^* \\ & & & EI & 0 & 0 \\ & SYM. & & 0 & GA^* & -aGA^* \\ & & & 0 & -aGA^* & EI + a^2GA^* \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

2.3.4. Poutre de Bernoulli (élément fini)

Son champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U_1 h_1(x) + U_2 h_2(x) - y[V_1 h'_3(x) + \theta_1 h'_4(x) + V_2 h'_5(x) + \theta_2 h'_6(x)] \\ v(x, y) &= V_1 h_3(x) + \theta_1 h_4(x) + V_2 h_5(x) + \theta_2 h_6(x) \end{aligned} \quad (2.89)$$

La matrice de rigidité \underline{K}_{BE} a pour expression :

$$\underline{K}_{BE} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1 & \boldsymbol{\theta}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_2 & \boldsymbol{\theta}_2 \\ EA & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/a^2 & 3EI/a & 0 & -3EI/a^2 & 3EI/a \\ 0 & 3EI/a & 4EI & 0 & -3EI/a & 2EI \\ & & & EA & 0 & 0 \\ & SYM. & & 0 & 3EI/a^2 & -3EI/a \\ & & & 0 & -3EI/a & 4EI \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

On peut vérifier facilement que les deux matrices de rigidité \underline{K}_{HE} et \underline{K}_{BE} sont identiques si :

$$\alpha = EI/a^2GA^* = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 1/(1 + 3\alpha) = 1$$

2.4. Conclusion

Après avoir rappelé les solutions analytiques basées sur les deux hypothèses classiques de la théorie des poutres Timoshenko ou Bernoulli, différents types d'éléments finis ont été présentés avec la mise en évidence de leurs qualités ou leurs défauts en comparant les solutions analytiques et numériques sur quelques exemples.



Chapitre 3

Analyse Non-Linéaire des Structures

Chapitre 3

Analyse Non-Linéaire des Structures

3.1. Introduction

De manière générale, on a recours à l'analyse non-linéaire des structures lorsque l'une des deux hypothèses suivantes n'est plus satisfaite :

- Les déplacements sont considérés petits de manière à confondre l'état initial de la structure avec sa déformée après sollicitation (linéarité géométrique)
- Le comportement du matériau composant la structure est considéré comme élastique linéaire (linéarité matérielle).

Ces deux hypothèses sont généralement admises pour le dimensionnement de la plupart des structures courantes notamment celles formées de poutres. Cependant l'utilisation dans la conception et la construction des ouvrages en génie civil de formes de plus en plus élancées d'une part et la réalisation de structures plus économiques tout en garantissant le facteur « sécurité » et cela en introduisant des coefficients de sécurité vis-à-vis de la ruine d'autre part nous conduit à abandonner les hypothèses de l'élasticité linéaire.

Il est donc nécessaire d'introduire des comportements plus proches de la réalité et ce par l'élaboration d'une analyse non-linéaire afin de traduire correctement le comportement géométrique ou matériel des structures.

L'analyse non-linéaire est maintenant largement utilisée dans le calcul des structures, c'est un sujet d'actualité qui fait d'ailleurs l'objet de nombreuses recherches dans le domaine, où, le but est de combiner précision, simplicité et économie (en coût et en temps de calcul).

3.2. Types de problèmes non-linéaires

Les problèmes non-linéaires ont en général deux sources principales : La non-linéarité géométrique et la non-linéarité matérielle.

3.2.1. La non-linéarité géométrique (cinématique)

Cette non-linéarité se caractérise par de grands déplacements pouvant être à l'origine des phénomènes d'instabilité par flambement surtout pour les pièces élancées. Plusieurs auteurs se sont penchés sur ce type de non-linéarité [DJE 90], [PAR 96], [HJE 03].

3.2.2. La non-linéarité matérielle (rhéologique)

Cette non-linéarité est liée au comportement du matériau et elle est caractérisée par de grandes déformations. Celles-ci peuvent conduire à la plasticité ou au fluage. Elles peuvent également engendrer de grands déplacements. La littérature est également riche en ce qui concerne ce type de non-linéarité [GRU 00], [LI 03], [DAV 03], [KHA 04], [LEE 06].

3.3. Méthodes de résolution des systèmes non-linéaires

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes non-linéaires [DEV 89], [DJE 90], [ZIE 00], [BRI 04], [BOU 06b], [WON 09] :

- les méthodes *directes* : elles aboutissent à la solution en un nombre fini d'opérations.
- les méthodes *itératives* : La solution est atteinte en un nombre infini d'opérations convergeant vers la solution. On arrête les itérations lorsqu'on estime qu'on est suffisamment près de la solution. Si on utilise une telle méthode de résolution, le logiciel demande généralement de préciser le critère d'arrêt des itérations. La convergence de ces méthodes peut poser problème : il faut parfois ajuster des paramètres algorithmiques pour obtenir une solution. D'autre part, la solution d'un système non linéaire n'est pas toujours unique et il n'est pas toujours évident de savoir vers laquelle des solutions l'algorithme a convergé.

3.3.1. Méthode des rotules plastiques :

La méthode des rotules plastique ne s'appuie pas sur le principe itératif tel que les méthodes d'approximation qui vont être citées dans ce chapitre, cette méthode noyau de notre travail, sera abordée en détails dans le chapitre 5 de ce mémoire.

3.3.2. Méthodes d'approximation incrémentales et itératives :

Elles sont dans leur quasi-totalité basées sur le même principe suivant :

A partir d'une approximation initiale des déplacements, on calcule les contraintes selon le modèle constitutif. Ces contraintes sont équivalentes à un système de forces internes $\{F_i\}$ devant équilibrer les forces nodales extérieures $\{F\}$. Généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence $\Delta F = F - F_i$ est appelée « résidu » ou « force résiduelle ». Afin d'assurer l'équilibre, ces résidus doivent être éliminés.

Pour un niveau de charge donné, un certain nombre d'itérations linéaires est nécessaire pour réduire les forces résiduelles à un certain degré de précision fixé. La qualité des résultats finaux dépend des différents paramètres numériques associés à la méthode utilisée, à savoir :

- dimension de l'incrément ;
- précision requise ;
- critère de convergence ; et autres.

Il existe de nombreuses méthodes non-linéaires qui peuvent être groupées en trois classes :

- les méthodes incrémentales ;
- les méthodes itératives ;
- les méthodes mixtes (combinant les deux méthodes précédentes)

3.3.2.1. Méthode incrémentale

Le chargement est subdivisé en plusieurs incréments (pas forcément égaux). Durant chaque incrément, on obtient les déplacements par la résolution d'un système linéaire : $[K]\{U\} = \{F\}$ où $[K]$ est déduite des résultats de l'incrément précédent auxquels sont ajoutés les déplacements précédemment cumulés. Le processus est répété jusqu'à chargement final. Cependant cette méthode compte quelques inconvénients :

Principaux inconvénients :

- il n'y a aucune itération pour restaurer l'équilibre.
- Cumul d'erreurs
- Impossibilité de prévoir la taille minimale des incréments dans le but de satisfaire une tolérance fixée.

L'une des variantes médianes de la technique est la méthode médiane de Runge-Kutta où la matrice de rigidité $[K]$ est évaluée au milieu de l'incrément

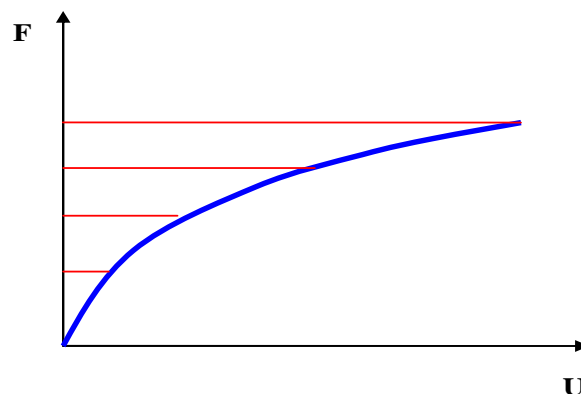


Figure 3.1. Méthode incrémentale

3.3.2.2. Méthode itérative

Le chargement est appliqué en un seul incrément. Les forces résiduelles déduites des résultats de l'itération précédente sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouveaux résidus. Le procédé continue jusqu'à élimination des résidus à la précision désirée.

La redistribution des forces résiduelles peut se faire avec une matrice de rigidité constante ou variable (tangente ou sécante). Les méthodes itératives sont plus lentes que les méthodes incrémentales mais permettent un meilleur contrôle de la précision et le procédé d'itération peut être facilement inclus dans un algorithme linéaire.

Principaux inconvénients :

- Les contraintes et les déformations ne sont déterminées que pour un seul incrément.
- D'autre part, si le chargement (statique ou dynamique) est variable dans le temps, et ou si le chargement final est inconnu (recherche de l'instabilité ou de la rupture), et ou si les lois constitutives sont incrémentales et dépendent du chemin parcouru (fluage, plasticité...etc) alors, la méthode itérative est inutilisable.

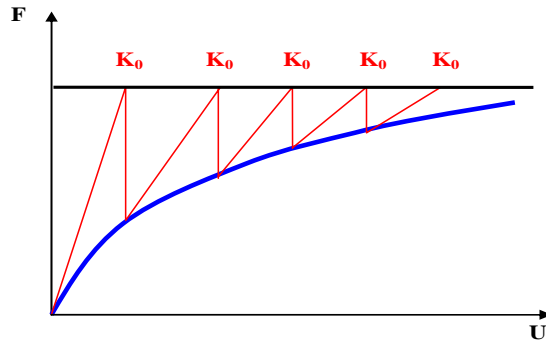


Figure 3.2.a. Méthode itérative K : constante

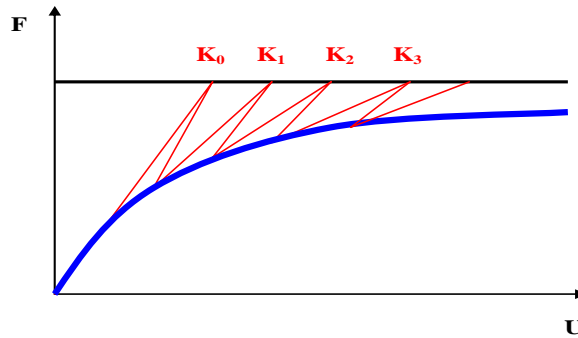


Figure 3.2.b. Méthode itérative K : variable tangente

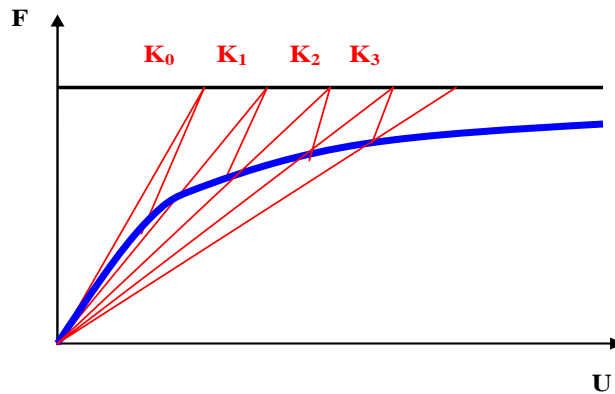


Figure 3.2.c. Méthode itérative K : variable sécante

3.3.2.3. Méthodes mixtes

Elles combinent à la fois les avantages des deux méthodes précédentes et elles sont toutefois plus lentes. Le chargement est appliqué par incrément et dans chaque incrément, plusieurs itérations sont effectuées afin d'assurer la convergence. Les algorithmes de ces méthodes peuvent se ramener aisément à un seul incrément de la méthode itérative.

3.4. Principales méthodes numériques itératives en analyse non-linéaire

Il existe trois méthodes principales de calcul non linéaire des structures, leurs algorithmes sont similaires et consistent à éliminer les forces résiduelles.

Le résidu initial ΔF^0 étant bien entendu l'incrément de charge appliquée. Les conditions F^0 et U^0 sont connues. Le résidu appliqué à l'itération est ΔF^0 qui est égal à la différence entre les forces extérieures et les forces nodales internes résultant de l'état de contraintes à l'itération $i=1$: $\Delta F^{i-1} = F - F_1^{i-1}$

Parmi ces méthodes itératives, celles qui sont les plus connues et les plus utilisées par les chercheurs sont :

3.4.1. La méthode de Newton-Raphson (méthode de la rigidité tangente)

Avantage de la méthode : rapidité de la convergence

Inconvénients : coût élevé à cause des actualisations des matrices de rigidité élémentaires $[K_i]$ à chaque itération et de la nécessité de prévoir des algorithmes de résolution des systèmes dissymétriques dans le cas où $[K_i]$ perdrait sa forme symétrique.

3.4.2. La méthode de la rigidité sécante

Avantage de la méthode : rapidité de la convergence

Inconvénients : coût élevé à cause des actualisations des $[K_i]$ à chaque itération.

3.4.3. La méthode de Newton-Raphson modifiée (méthode de la rigidité modifiée)

Avantage de la méthode : cette méthode est plus économique que les deux précédentes car elle évite les actualisations répétées de la matrice de rigidité $[K]$.

Inconvénients : la convergence de cette méthode est plus lente.

Pour de plus amples détails sur ces méthodes consulter [CRI 00], [BEL 01], [BRI 04].

3.5. Les critères de convergence des méthodes numériques itératives

Les critères de convergences contrôlent le nombre d'itérations à réaliser dans un incrément. Le critère de convergence choisi ainsi que la tolérance exigée influent sur les résultats, cependant le fait d'imposer une limite exagérée risque d'être coûteux pour une précision inutile. Les critères de convergence sont formulés soit directement en fonction des forces résiduelles ou bien directement à travers les autres grandeurs (contraintes, déformations ou déplacements). Il est très difficile et très coûteux de vérifier la convergence de toutes les composantes des forces, des déplacements et autres grandeurs. Une estimation globale est utilisée avec les normes en général les moindres carrés.

Les critères de convergences les plus usuels sont les suivants :

a-Convergence en forces :

$$\frac{\|\Delta F^i\|}{\|F^i\|} \leq T_F \quad \text{Tolérance en forces}$$

$$\text{Avec } \|F\| = (F^T F)^{1/2} \text{ et } \|\Delta F\| = (\Delta F^T \Delta F)^{1/2}$$

b- Convergence en déplacements :

$$\|\Delta U^i\| \leq T_D \quad \text{Tolérance en déplacements}$$

$$\text{Ou bien } \frac{\|\Delta U^i\|}{\|U^i\|} \leq T_D$$

c- convergence en énergie :

L'utilisation d'un seul critère de convergence en forces ou en déplacements peut s'avérer insuffisant car dans certains cas de discontinuités (tels que la fissuration par exemple) les forces peuvent augmenter alors que les déplacements diminuent. Le critère le plus objectif est donc celui qui prend en considération les deux précédents avec une variation de la tolérance entre 0,1 et 1% dans la plupart des cas.

$$\frac{\Delta U^T \Delta F}{\Delta U^T} \leq T_E \quad \text{Tolérance en énergie. Ou bien } \frac{U^T \Delta F}{U^T F} \leq T_E$$



Chapitre 4

Notions de Base de la Plasticité

Chapitre 4

Notions de base de la plasticité

4.1. Théorie de la plasticité

4.1.1. Bref aperçu historique du développement du calcul plastique des structures [MAS 67]

C'est un ingénieur Hongrois, G.d de Kazinczy, qui en 1914 a été le premier à évaluer quantitativement la réserve de résistance plastique existant dans les structures hyperstatiques fléchies. Par son expérience sur des poutres bi-encastées, il a clairement mis en évidence les notions de rotule plastique et de mécanisme de ruine.

Ses idées ont également été précisées par N. C. Kist en 1917. Entre les deux guerres, le sujet a été activement étudié dans les pays de langue allemande, où il faut signaler particulièrement l'ouvrage de Grüning et les importants mémoires de H. Bleich, E. Melan, Stüssi, Koll-brunner et F. Bleich [MAS 67].

Par ses expériences, Maier-Leibnitz fut le premier à démontrer que la charge limite d'une poutre continue est complètement insensible à de petites dénivellations des appuis. Après cela, le calcul plastique a été abandonné dans ces pays.

A partir de 1938, la question est activement étudiée en Grande-Bretagne à l'université de Cambridge, sous l'impulsion du professeur Sir John Baker, qui avait constaté par de nombreuses mesures directes sur des ossatures métalliques que les contraintes réelles diffèrent de celles prédites par la théorie de l'élasticité de plusieurs dizaines de pour cent à cause des défauts de montage et des erreurs sur l'emplacement des appuis. L'école anglaise comprend des chercheurs tels que Heyman, Horne et Neal, qui ont apporté des contributions de premier plan au calcul plastique. Aux Etats-Unis, après la publication d'un livre et d'un article de van den Broek où l'on retrouve les idées fondamentales du calcul plastique, un très important programme de recherche a été mené à bien depuis 1948 à l'université Lehigh à Bethlehem. Les efforts des chercheurs de cette université ont surtout été dirigés vers une étude détaillée des phénomènes d'instabilité plastique. Des progrès locaux dans le domaine du voilement local des parois, du déversement des barres fléchies et du flambement des colonnes comprimées et fléchies ont été obtenus par Johnston, Beedle, Ketter, Thürlimann et bien d'autres.

En Italie, Colonnetti a proposé dès 1912 de prendre en compte les phénomènes plastiques et viscoélastiques et a établi des théorèmes généraux permettant d'attaquer ces questions. Cette méthode a été appliquée à des problèmes pratiques importants de béton armé et précontraint par F. Levi et G. Macchi. Des contributions importantes dans le domaine de la stabilisation plastique ont été apportées par Franciosi.

En France, J. Dutheil a précisé dans diverses mémoires l'application du calcul aux ossatures métalliques.

En Belgique, Ch. Massonnet et R. Dechaene ont apporté quelques contributions au problème.

Parallèlement aux recherches théorico-expérimentales mentionnées ci-dessus, les principales étapes des progrès théoriques sont les suivants :

- Etablissement des théorèmes fondamentaux de l'analyse limite par Gvozdev en 1938, indépendamment par Greenberg, Drucker et Prager et par R. Hill en 1951.
- Mise au point des grandes méthodes d'étude de la charge de ruine des ossatures par Horne, Neal et Symonds.
- Etude des déformations à la ruine par Neal, Symonds, Heymann et Horne.
- Etude de la stabilisation plastique par Melan, H. Bleich, Neal et Prager.
- Dimensionnement automatique par Foulkes, Livesley, Prager et Heymann.

Les pays de l'Europe orientale et avant tout l'ex-URSS ont apporté à la nouvelle discipline de nombreuses contributions de valeur. Parmi eux, le travail fondamental de Gvozdev et l'excellent livre de Rjanitsyn.

Les principaux livres étrangers consacrés au calcul plastique des structures sont par ordre chronologique (entre 1951 et 1964) ceux de Gvozdev, Levi et Pizzetti, Baker, Horne et Heymann, Neal, Hodge, Prager, Rjanitsyn, Beedle, Heymann, Sobodka et Franciosi.

4.1.2. Notions de base [SUQ 04]

Au-delà de la limite d'élasticité apparaissent des déformations plastiques. Le but de la partie suivante est d'expliquer QUAND et COMMENT apparaissent ces déformations plastiques ?

Hypothèse des petites perturbations :

_ Configuration actuelle = configuration initiale.

_ Tenseur des déformations linéarisées :

$$\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}} + {}^T\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}} \right), \quad (4.1)$$

- Tenseur vitesse de déformation :

$$\underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\dot{\xi}}}} + {}^T\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\dot{\xi}}}} \right) = \underline{\underline{\underline{d}}}(\underline{\underline{\underline{v}}}), \quad \boxed{\underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{d}}}(\underline{\underline{\underline{v}}}).} \quad (4.2)$$

Evolution quasi-statique : les termes d'accélération sont négligés.

Evolution isotherme : les variations de température sont négligées.

4.1.2.1. Rappel du cas uniaxial

Nous avons limité notre étude à des problèmes d'évolution quasi-statique dans l'hypothèse des petites perturbations. Par quasi-statique, nous supposons qu'au cours de cette évolution les variations des sollicitations données sont suffisamment lentes pour exclure les

phénomènes dynamiques. Nous verrons cependant que le comportement plastique dépend du chemin de chargement, c'est-à-dire de l'histoire des déformations plastiques. Le paramètre temps joue donc un rôle qui n'est que relatif, c'est pourquoi, dans ces conditions, on parle généralement de *pseudo-temps* et de *plasticité indépendante du temps*.

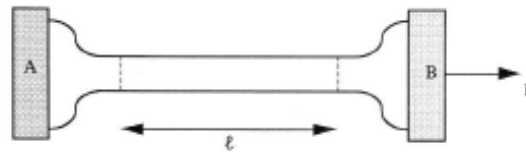
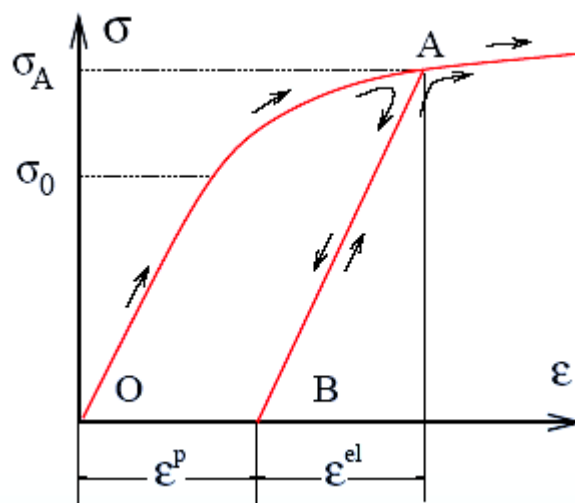


Figure 4.1 – Essai de traction simple



Limite d'élasticité = seuil de plasticité

- Limite élastique **initiale** (en partant de 0) : σ_0
- Limite élastique **actuelle** (en partant de B) : σ_A .

Figure 4.2. Chargement uniaxial (limite d'élasticité)

Considérons une éprouvette d'un matériau écrouissable soumise à un essai de traction uniaxial (Fig. 4.1) dans lequel les phénomènes liés à la vitesse de mise en charge peuvent être négligés. La partie A est encastree et la partie B est soumise à une force F . On considère que la section S de la partie utile de l'éprouvette est constante (hypothèse des petites perturbations).

Si on note l la longueur de la partie utile de l'éprouvette et Δl son allongement résultant de la charge appliquée F , on peut calculer :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{F}{S} \quad (4.3)$$

et tracer le diagramme contrainte - déformation de la Fig. 4.2.

4.1.2.2. Chargements multiaxiaux, surface initiale de plasticité

En général dans une structure, l'état de contrainte est multi-axial : $\underline{\underline{\sigma}}$

Généralisation de la notion de seuil de plasticité :

- Il existe un domaine dans l'espace des contraintes tel que :
 - à l'intérieur de ce domaine, le régime est élastique, c'est le domaine d'élasticité.
 - sur les frontières du domaine, le régime est élastoplastique, c'est la surface seuil de plasticité.

- Critère = toute fonction f telle que :

- pour le domaine d'élasticité nous avons : $\{\underline{\underline{\sigma}}, f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0\}$ (4.4)

- pour la surface seuil de plasticité nous avons : $\{\underline{\underline{\sigma}}, f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0\}$, (4.5)

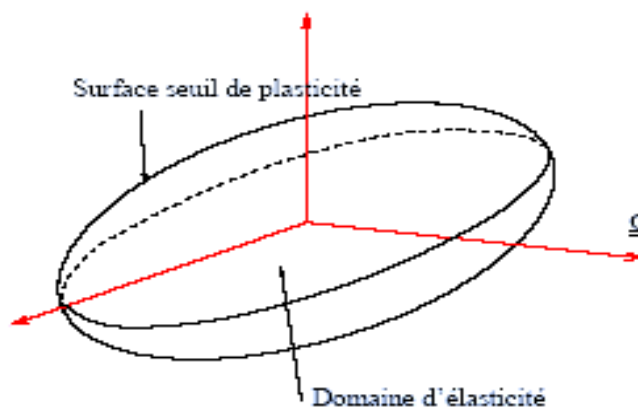


Figure 4.3. Domaine de plasticité

Le domaine de plasticité est obtenu en combinant le domaine d'élasticité et la surface seuil de plasticité, on peut donc noter :

Domaine d'élasticité + surface seuil de plasticité = Domaine de plasticité

4.1.3. Ecrouissage et plasticité

On constate sur beaucoup de matériaux, qu'une fois la limite initiale d'élasticité atteinte, il est possible de poursuivre une augmentation de chargement, le matériau se déformant alors plastiquement. Si l'on opère à partir de ce stade une décharge suivie d'une charge, on met alors expérimentalement en évidence le fait que la surface seuil a varié. Ce phénomène est appelé **écrouissage**. La variation de la surface seuil sera alors fonction de la déformation plastique créée dans le matériau.

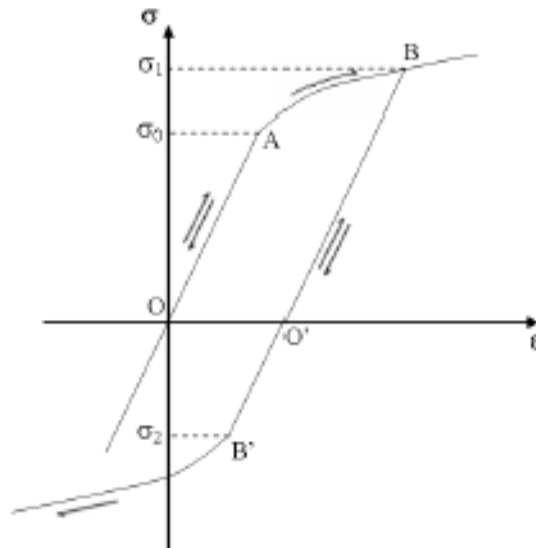


Figure 4.4 – courbe contraintes-déformations d'un matériau écrouissable

Supposons que l'on fasse croître l'effort à partir de l'instant $t = 0$. L'expérience montre que tant que σ ne dépasse pas une valeur σ_e (appelée *limite d'élasticité* du matériau), il existe une relation de proportionnalité entre la contrainte et la déformation : $\sigma = E\varepsilon$, le coefficient E étant le module de Young du matériau. Dans ces conditions, on reste dans le *domaine élastique linéaire* du matériau caractérisé par des phénomènes réversibles. Cette hypothèse est celle dans laquelle on s'est placé dans les chapitres précédents de ce travail.

Supposons maintenant que l'on fasse croître l'effort de telle manière que $\sigma = \sigma_1 > \sigma_0$. On décrit alors une courbe AB non linéaire et il y a plastification du matériau. La courbe AB fait partie du *domaine d'écrouissage* du matériau.

Si on diminue alors l'effort, on va cette fois décroître, à partir de B, une droite parallèle à OA. On parle de *décharge élastique* dans le matériau. Si on procède ensuite à une nouvelle augmentation de la charge, tant que la contrainte reste inférieure à σ_1 , celle-ci s'effectue en suivant le trajet identique, au sens de parcours près, à celui décrit lors de la décharge. Le comportement demeure réversible tout au long de O'B. Quand σ dépasse σ_1 , le point figuratif suit la courbe de première charge au-delà de B. Ainsi lors de la nouvelle charge, σ_1 apparaît comme le nouveau seuil en traction. Si au lieu de recharger l'éprouvette, on prolonge la décharge à partir du point B, lorsque l'effort s'annule il existe une *déformation plastique* permanente OO' qui exprime le caractère irréversible de la plastification du matériau. C'est de cette irréversibilité que vient la dépendance de la solution vis-à-vis de l'histoire de la mise en charge.

Si après la décharge, on sollicite la même éprouvette en compression, on aura à nouveau plastification lorsqu'on atteindra le point B' correspondant à une contrainte $-\sigma_2 > -\sigma_0$. Autrement dit, l'écrouissage en traction, qui correspond à un relèvement de la limite d'élasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) de la limite d'élasticité en compression. Ce phénomène est connu sous le nom d'*effet Bauschinger*. Nous verrons plus loin qu'il est modélisé par l'introduction d'un *écrouissage cinématique*.

Ce dernier est à opposer au modèle d'*écrouissage isotrope* dans lequel on assiste à une modification égale de la limite élastique quelle que soit l'orientation des contraintes ultérieurement imposées. Ces deux types d'écrouissage peuvent être combinés pour modéliser plus exactement le comportement de certains matériaux. On parlera dans ce cas d'*écrouissage mixte*.

4.1.4. Critères de plasticité

Lorsqu'un élément de matière est soumis à des sollicitations multiaxiales caractérisées par le champ de contraintes σ , l'expérience montre qu'il existe un domaine d'élasticité initial qui est l'homologue du segment $[-\sigma_0, \sigma_0]$ de l'essai uni-axial. C'est pourquoi la théorie générale de la plasticité fait intervenir la notion de surface de charge plastique. Elle suppose l'existence d'un scalaire $f(\sigma, \alpha)$ tel que :

- $f(\sigma, \alpha) < 0$ correspond au domaine élastique,
- $f(\sigma, \alpha) = 0$ correspond à l'apparition des déformations plastiques,
- $f(\sigma, \alpha) > 0$ correspond au domaine inaccessible par le matériau.

Les paramètres α , appelés *paramètres internes*, mesurent l'ensemble des phénomènes irréversibles (écrouissage isotrope, effet Bauschinger,...). Ce sont ces paramètres qui servent à enregistrer l'histoire de la déformation. La fonction $f(\sigma, \alpha)$ est appelée *fonction de charge* ou *fonction seuil*.

Cette fonction est *convexe* dans l'espace des contraintes pour des matériaux stables au sens de Drucker. La convexité de la fonction de charge assure l'unicité d'un incrément de déformation plastique pour un état de contraintes donné. La surface définie par $f(\sigma, \alpha) = 0$ dans l'espace des contraintes est appelée *surface de charge*.

De nombreux travaux ont eu pour objet d'essayer de trouver les critères de plasticité les mieux adaptés aux résultats expérimentaux observés. Parmi les critères les plus classiquement employés, on peut distinguer les critères isotropes et anisotropes. Nous présentons dans cette section les critères de Tresca et de Von Mises qui sont les deux critères les plus couramment utilisés dans le cas de matériaux isotropes, homogènes et présentant le même comportement en traction et en compression. Ce qui est généralement le cas des matériaux métalliques.

Dans l'hypothèse d'une isotropie physique, le régime plastique est obtenu pour des états de contraintes indépendants de l'orientation du repère dans lequel sont appliquées les contraintes par rapport à un repère matériel donné. Il est donc naturel que la dépendance de la fonction seuil vis-à-vis des contraintes se traduise soit par l'intermédiaire des contraintes principales, soit par celui des invariants de contraintes.

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha) \quad \text{ou} \quad f = f(I_1, I_2, I_3, \alpha) \quad (4.6)$$

De plus, l'expérience a montré qu'un accroissement hydrostatique de l'état de contraintes ne peut provoquer de déformations plastiques. Dans le cas où on choisit d'écrire f en fonction des invariants, il apparaît donc logique d'exprimer cette fonction seuil en termes des invariants du déviateur de contraintes :

$$f = f(J_2, J_3, \alpha) \quad (4.7)$$

Pour rappel, la décomposition du champ de contraintes en sa partie sphérique σ_8 et déviatorique σ_d s'écrit :

$$\sigma = \sigma_8 + \sigma_d = (\sigma_m j) + (\sigma - \sigma_m j) \quad (4.8)$$

$$\text{Avec } \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad \text{et} \quad j^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (4.9)$$

4.1.4.1. Exemples de critères

Les principaux critères de plasticité sont :

- Matériaux homogènes isotropes : Tresca (1870), Von Mises (1910)
- Matériaux orthotropes : Hill (1950)
- Sols : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager (1950)

Ces critères bien qu'ils soient anciens, restent largement utilisés étant donné que les méthodes d'identification des paramètres caractérisant le comportement élastoplastique ont fait leurs preuves pour ces critères. Depuis, de nombreux travaux ont permis d'élaborer des critères modélisant de mieux en mieux le comportement des matériaux. Cependant, il reste toujours la difficulté de définir des processus expérimentaux simples et fiables permettant d'identifier les paramètres du modèle que l'on veut utiliser.

➤ Critère de Tresca

Le premier critère utilisé pour les matériaux métalliques a été proposé par Tresca.

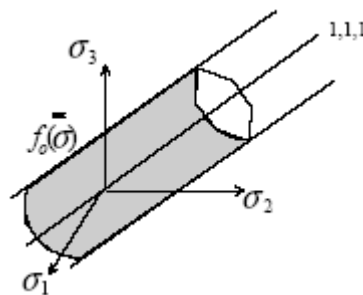


Figure 4.5. Critère de Tresca

Ce critère postule que la limite d'élasticité est atteinte lorsque la contrainte tangentielle maximale atteint une valeur critique k . La surface de charge est donc déterminée par :

$$f = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}\right) - k = 0 \quad (4.10)$$

La limite élastique en cisaillement k peut être déterminée par un essai de traction uniaxial (Fig. 4.1) pour lequel la limite élastique est égale à $\sigma_Y = 2k$.

➤ **Critère de Von Mises**

Le critère de Von Mises revient à considérer que la fonction de charge ne dépend que de l'invariant J_2 . La surface de charge est définie par :

$$f = J_2 - k^2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - k^2 = 0 \quad (4.11)$$

La limite élastique en cisaillement k est cette fois donnée par $\sigma_Y/\sqrt{3}$.

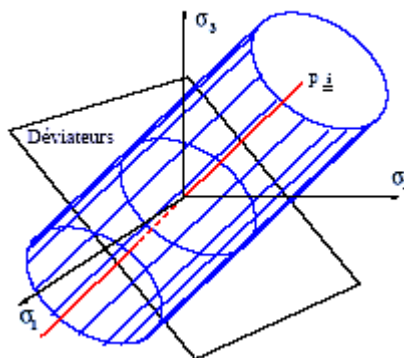
La représentation dans l'espace des contraintes principales correspond à un cylindre dont l'axe à pour cosinus directeurs $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

On utilise généralement le critère de Von Mises sous la forme :

$$f = \sigma_{VM} - \sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2}}(\boldsymbol{\sigma}_d^T L \boldsymbol{\sigma}_d)^{1/2} - \sigma_Y = 0 \quad (4.12)$$

avec,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$



Le domaine de plasticité de von Mises est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe des pressions.

Figure 4.6. Critère de Von Mises

➤ **Autres critères :**

Les autres critères sont souvent construits à partir des deux précédents. Ainsi on retrouve :

- Le critère de Hill : qui est une généralisation du critère de Von Mises, il est utilisé pour les matériaux anisotropes.
- Le Critère de Mohr-Coulomb : est une généralisation de celui de Tresca sauf que la contrainte critique de cisaillement n'est plus constante' elle dépend de la contrainte normale.

- Le critère de Drucker – Prager : une approximation de la loi de Mohr-Coulomb a été présentée par Drucker et Prager en 1952 comme une modification du critère de Von mises. L'influence des composantes sur la contrainte hydrostatique (contrainte intermédiaire σ_2) sur l'écoulement était introduite par l'inclusion d'un terme additionnel dans l'expression de Von Mises. Pour de plus amples détails consulter [BRI 04].

Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca :

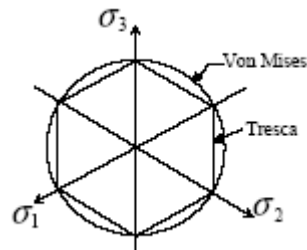


Figure 4.7. Critères de plasticité

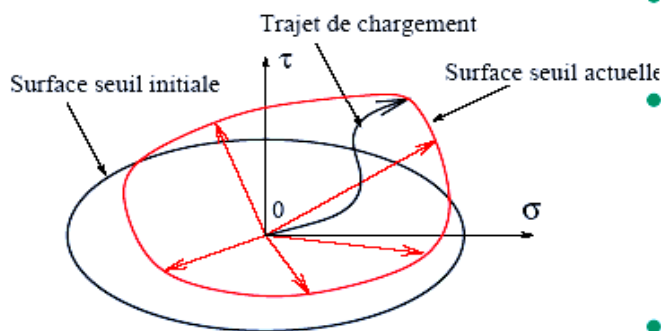
Le critère de Tresca est plus sévère que celui de Von Mises, l'écart maximal entre les deux critères est $1 - \sqrt{3}/2$ soit un écart de l'ordre de 13%.

Le critère de Tresca est dit critère de cisaillement maximal, en effet si les contraintes principales sont ordonnées $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Le critère ne fait plus apparaître que le cisaillement maximal $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Le critère de Tresca correspond au prisme à base hexagonale inscrit dans le cylindre (Fig.4.5), le critère de Von Mises est donc plus « défavorable » si l'on se place dans le sens de la sécurité.

4.1.4.2. L'érouissage

Comme cela a été dit, dans le cas de matériaux élastoplastiques présentant de l'érouissage, la surface de charge f dépend également de paramètres internes α qui tiennent compte de l'histoire du chargement. Les deux modèles d'érouissage simples que l'on peut combiner pour tenir compte au mieux du comportement d'un matériau sont l'érouissage isotrope et l'érouissage cinématique. La Figure 4.8.b. schématise ces deux modèles dans l'espace des contraintes principales 2D.

Manifestations de l'écroutissement



- **Modification de taille** : écroutissement "isotrope".
- **Translation du centre du domaine d'élasticité** : écroutissement "cinématique" \Rightarrow effet Bauschinger (limite d'élasticité en compression < limite élasticité en traction après écroutissement).
- **Distorsion ou changement de forme de la surface seuil**.

Figure 4.8.a. Modèles d'écroutissement

➤ Ecroutissement isotrope

Ce type d'écroutissement consiste en un gonflement de la surface de charge de la même manière dans toutes les directions de l'espace des contraintes. On le traduit par la dépendance de la contrainte de plastification σ_p vis-à-vis d'un paramètre interne scalaire κ appelé paramètre d'écroutissement.

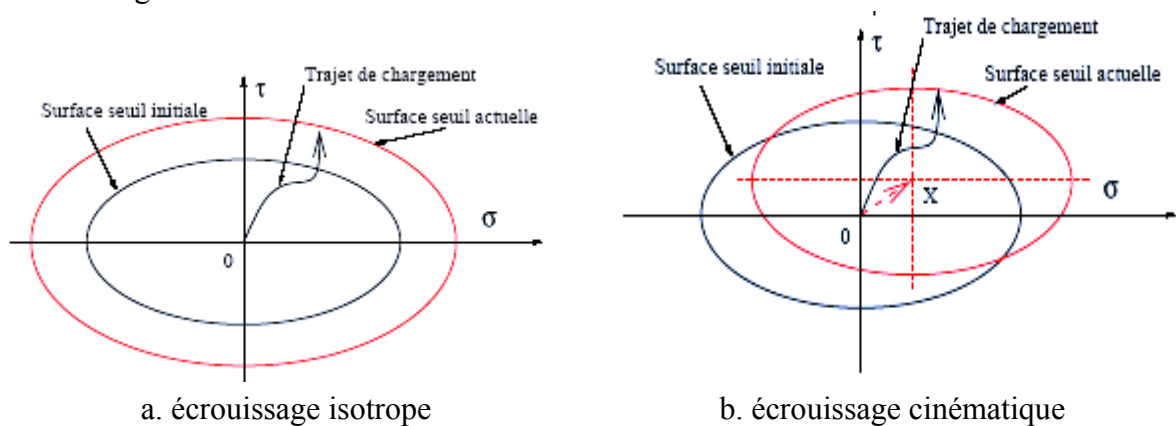


Figure 4.8.b. Modèles d'écroutissement

Il existe deux manières de définir ce paramètre. La première consiste à supposer que l'écroutissement dépend du travail produit par la déformation plastique, c'est l'*écroutissement en travail* dont le paramètre est noté κT .

La seconde consiste à supposer que l'écroutissement dépend uniquement de la déformation plastique, dans ce cas il s'agit de l'*écroutissement en déformation*.

4.2. La notion de rotule plastique (cas de l'acier) [MAS 67], [FRE 00], [BOU 06b]

La théorie de la flexion pure peut s'appliquer avec une très bonne approximation à des poutres sollicitées par flexion simple sous l'effet de forces transversales. Dans le domaine plastique, l'effort tranchant a une influence très faible sur la valeur du moment plastique ultime, tant qu'il ne dépasse pas une certaine limite pour laquelle l'âme du profil se plastifie avant les semelles.

La théorie s'applique également pour les colonnes comprimées et fléchies, pour autant que l'effort normal reste une fraction suffisamment faible (<15%) de l'effort normal plastique $N_p \equiv \Omega R_e$.

Un facteur qui joue un rôle sensible dans les poutres industrielles est la présence d'importantes contraintes résiduelles dues surtout au refroidissement inégalement rapide de l'âme et des semelles après laminage à chaud du profilé. Ces contraintes provoquent une plastification prématurée de certaines fibres, abaissent la valeur du moment maximum élastique, et déforment la courbe $M/M_e = F(\chi / \chi_e)$ de la manière présentée à la figure 4.9, courbe 2. Cependant, ces contraintes ne modifient pas la valeur du moment plastique car, d'une part, la tension dans une fibre ne peut dépasser σ_e , donc le moment plastique $M_p = Z\sigma_e$ correspond certainement au plus grand moment fléchissant que la poutre peut supporter.

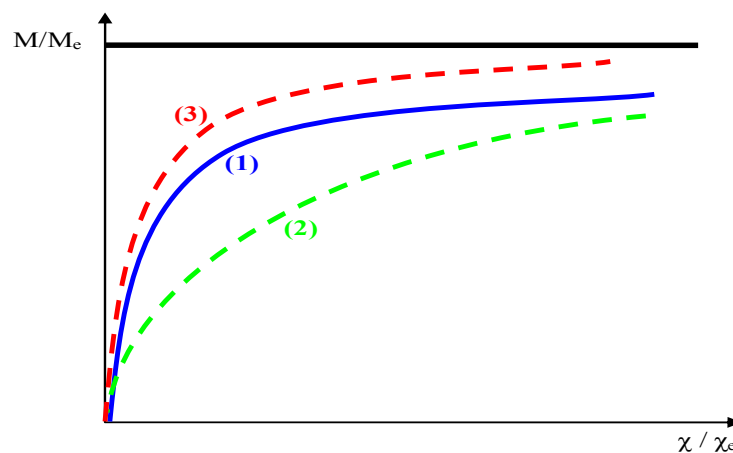


Figure 4.9. Courbe $M/M_e = F(\chi / \chi_e)$

D'autre part, ce n'est que quand la distribution des contraintes est bi-rectangulaire que la courbure peut devenir infinie car, pour toute autre distribution, il existe un noyau élastique qui correspond nécessairement à une courbure finie.

L'existence éventuelle d'une limite supérieure fait remonter le moment maximum élastique de la valeur $\sigma_{el}W$ à la valeur $\sigma_{es}W$. La courbe 4.9 passe de la forme 1 à la forme 3 mais la valeur du moment plastique n'est pas affectée car dans le stade ultime, la pointe du diagramme correspond à un bras du levier interne tendant vers 0 (Figure 4.10).

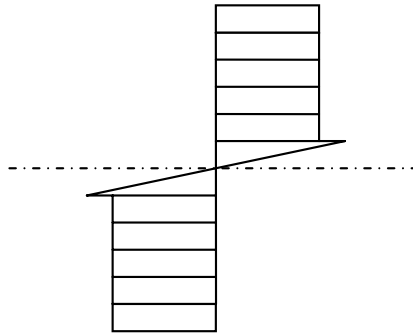


Figure 4.10. Diagramme du moment plastique

Notons également que le métal d'une poutrelle n'est pas identique en tout point, mais que sa limite élastique varie appréciablement selon l'endroit de la section envisagée. Les opérations industrielles telles que perçage, poinçonnage de trous, soudage de renforts, etc., occasionnent elles aussi des perturbations.

En première approximation, le moment fléchissant maximum qu'une barre quelconque d'une ossature à nœuds rigides en acier doux peut supporter est bien déterminé. Il est donné par la formule $M_p = \sigma_e Z$ où σ_e est la limite élastique apparente de l'acier utilisé et Z le module plastique de la section.

Ce moment provoque dans la barre une courbure très grande (théoriquement infinie).

4.3. Analyse plastique des poutres continues et des portiques [MAS 67], [FRE 00], [BOU 06b]

Dans ce qui suit, nous allons décrire les méthodes classiques d'analyse plastique utilisant les rotules plastiques ainsi que les méthodes élémentaires de mécanique des structures en considérant un comportement parfaitement plastique (Fig 4.11).

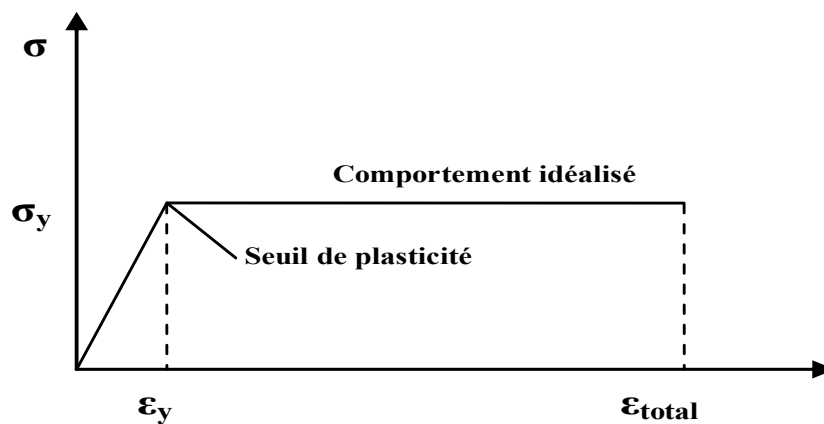


Figure 4.11. Relation idéaliste contrainte-déformation

4.4. Calcul du moment final [FRE 00], [BOU 06a]

Considérons une poutre dont la section transversale possède un axe de symétrie (fig. 4.12), cette poutre est soumise à une flexion dans son plan de symétrie. Si le moment de flexion est petit, la contrainte et la déformation changent linéairement à travers la section suivant les indications de la figure (Fig. 4.12.a). Lorsqu'on augmente le moment, le champ de contraintes atteint les fibres supérieures (Fig. 4.12.b), et avec un accroissement ultérieur le champ de contrainte touche les fibres inférieures (Fig. 4.12.c). Si le moment de flexion continue à augmenter, le champ de contraintes s'étalera des fibres externes vers l'intérieur jusqu'à ce que les deux zones du champ de contraintes se rencontrent (Fig. 4.12.d). La section transversale à ce stade serait entièrement plastique.

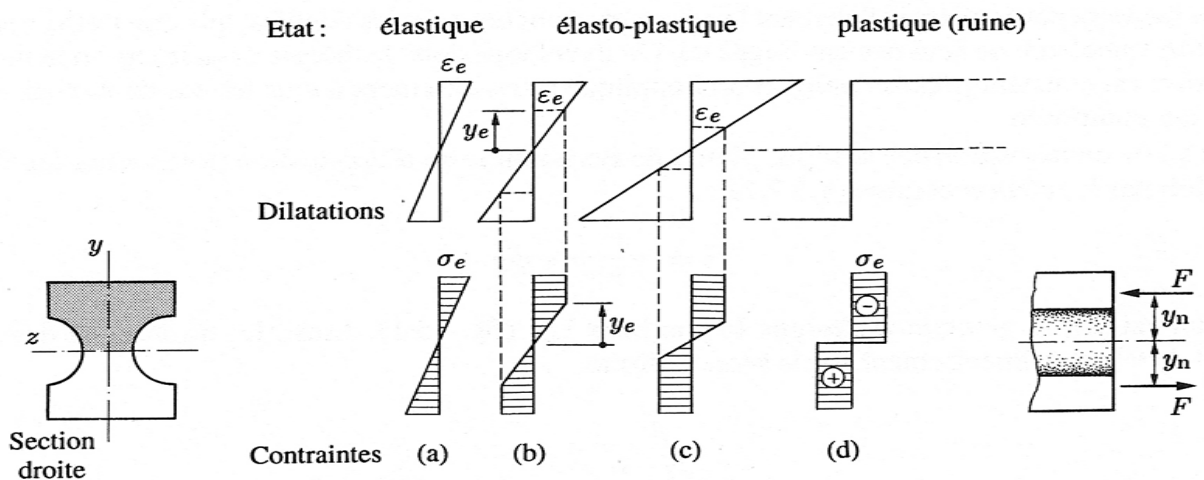


Figure 4.12. Distribution de la contrainte dans une section transversale symétrique soumise à un moment de flexion dont la grandeur est croissante. (a) état élastique, (b) et (c) état élastoplastique, (d) fibres extérieures et inférieures plastifiées provoquant ruine de la structure

La valeur du moment final dans l'état entièrement plastique peut être calculée en fonction de la contrainte de flexion. Puisque la force est égale à zéro dans le cas considéré, l'axe neutre dans l'état entièrement plastique divise la section en deux secteurs égaux à σ_e , la tension et compression sont chacune égale à $\sigma_e/2$ formant un couple égal au moment final.

$$M_p = \frac{1}{2} \alpha \sigma_e (\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \quad (4.13)$$

où h_1 et h_2 sont respectivement la distance des centres d'inertie de la section comprimée et de la section tendue à l'axe neutre dans l'état entièrement plastique.

Le moment maximum qu'une section peut supporter sans excéder la contrainte élastique est $M_e = \sigma_e Z$, où Z est le module de section. Le rapport $\alpha = M_p / M_e$ dépend de la forme de la section transversale il est appelé facteur de forme ; α est toujours plus grand que l'unité.

4.5. Comportement plastique d'une poutre simple

Pour considérer le déplacement supposant une relation idéalisée entre le moment de flexion et la courbure à une section suivant les indications de la figure 4.13.

Si une charge P appliquée à mi-travée d'une poutre simple (Fig. 4.12.a) est augmentée jusqu'à ce que le moment dans la section transversale de mi-travée atteigne entièrement le moment plastique M_p , alors une rotule plastique se forme à cette section et l'effondrement se produira sous toute autre augmentation de la charge P . Selon la relation idéalisée supposée, la courbure, et par conséquent la rotation augmentent à l'endroit où s'est formée la rotule plastique à une charge constante provoquant la déflexion.

La charge critique P_c peut être facilement calculée à partir de la statique $P_c = 4M_p / l$ (4.14)

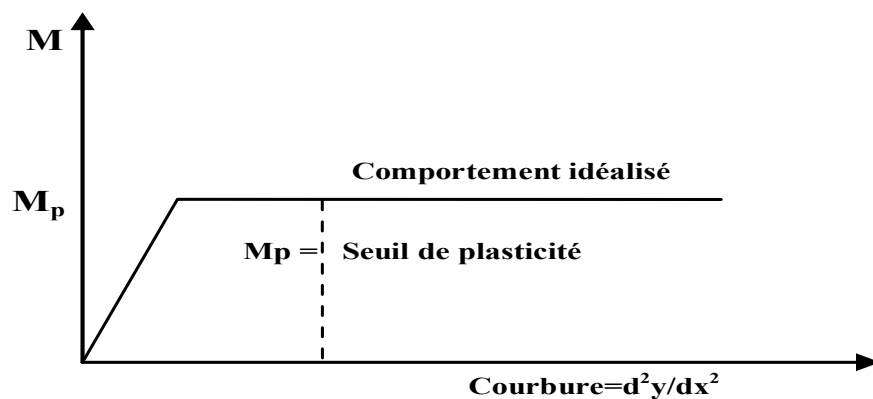


Figure 4.13. Relation idéalisée moment-courbure

Le moment de flexion est inférieur à M_p aux sections autres que la mi-travée, et en vertu des relations idéalisées la poutre demeure élastique loin de cette section. La configuration poutre fléchie dans les étapes élastiques et plastique est montrée dans la figure (Fig.4.14.b). L'augmentation dans la flexion pendant l'effondrement est provoqué par la rotation de la poutre à la rotule centrale sans changement simultané de la courbure des deux moitiés de la poutre. La figure (Fig.4.14.c) représente le changement dans la flexion de la poutre pendant son effondrement ; c'est une ligne droite pour chaque moitié de la poutre. La même figure montre également le mécanisme d'effondrement de la poutre.

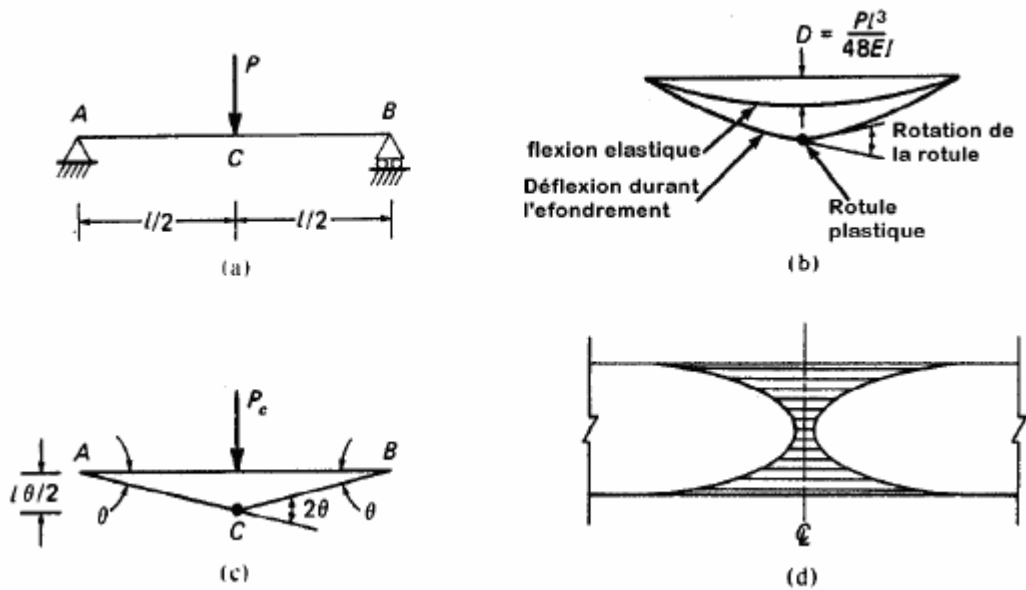


Figure 4.14. Comportement plastique d'une poutre simple, (a) poutre, (b) lignes de flexion, (c) changement dans la flexion pendant l'effondrement, (d) faisceau montrant la fragilité de la poutre dans sa section à mi-travée

La charge d'effondrement ou de ruine de la poutre (et ceci s'applique également à une structure statiquement indéterminée) peut être calculée en égalisant le travail externe et le travail interne pendant un mouvement virtuel du mécanisme de ruine. Laissons chaque moitié de la poutre dans la figure 4.14.c acquérir un angle θ virtuel de rotation, de sorte que la rotation correspondante à la rotule soit 2θ , et le déplacement de haut en bas de charge P_c est de $l\theta/2$. En égalisant le travail effectué par la charge P_c au travail du moment plastique, nous obtenons : $P_c = \frac{l\theta}{2} = M_p 2\theta$ qui donne le même résultat que l'équation (4.14).

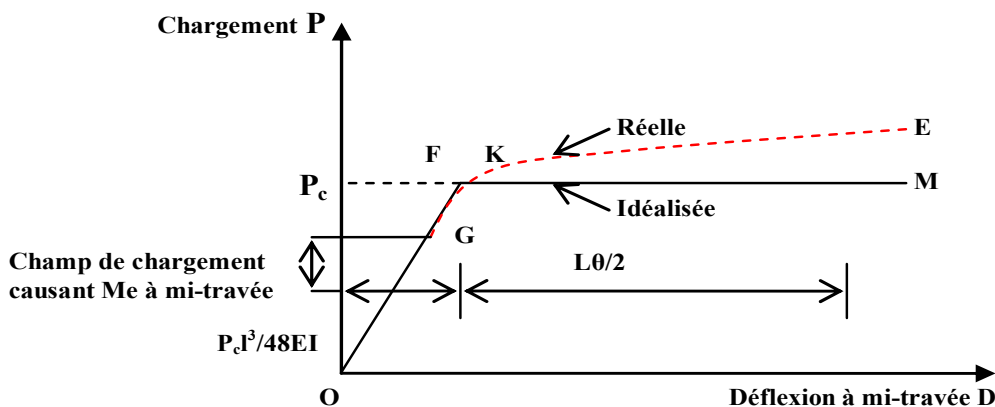


Figure 4.15. Relation charge-flexion pour la poutre simple chargée jusqu'à la ruine

La relation idéalisée entre la charge et la flexion centrale de la poutre est représentée par la ligne OFM dans la figure 4.15 ; quand la charge de ruine correspondant au point F est atteinte, la flexion élastique à la mi-travée s'écrit :

$$D_F = P_c \frac{l^3}{48EI} \quad (4.15)$$

Cependant, la relation réelle de la charge de flexion suit la courbe pointillée GKE. Lorsque le moment élastique $M_e = \sigma_e Z$ est atteint à la section de mi-travée, le champ et le comportement élastique se terminent. Si la charge est augmentée par la suite, le comportement élastique est diffusé à l'intérieur de cette section et aussi latéralement à d'autres sections voisines. La figure 4.14.d illustre cette diffusion. Après que M_e ait été atteint, la flexion surcroît par augmentation d'une unité de charge jusqu'à ce que le moment plastique M_p soit atteint, ce qui est indiqué par la courbe GK sur la figure 4.15. Dans la pratique, les sections en acier roulé continuent à montrer une petite élévation dans la courbe de charge flexion pendant la ruine (ligne KE) ; cela est dû à l'écroutissement qui n'est pas généralement considéré dans l'analyse plastique ordinaire.

4.6. Résistance ultime des poutres continues et des poutres encastrees aux deux extrémités

1. Considérons une poutre de section prismatique encastree aux deux extrémités soumise à une charge uniforme d'intensité q figure 4.16.a. les moments de flexion résultants sont :

$$M_A = M_C = -ql^2/12 \quad \text{et} \quad M_B = ql^2/24$$

Lorsque l'intensité de la charge est augmentée jusqu'à q_1 de telle façon que les moments aux appuis atteignent le moment plastique $M_p = q_1 l^2/12$, des rotules se forment en A et C. Si q est augmentée d'avantage, le moment aux appuis demeurera constant et égal à M_p et la rotation libre prend place de sorte que la flexion due à une charge supérieure à q_1 soit la même que pour une poutre simplement appuyée. L'effondrement ou la ruine se produira à une charge d'intensité q_c qui produit le moment de grandeur M_p à mi-travée, de sorte qu'une troisième rotule soit formée au point B. les diagrammes du moment de flexion dus à la charge d'intensité q pour les cas $q=q_1$, $q_1 < q < q_c$, et $q=q_c$ sont montrés dans la figure 4.16.b et le mécanisme d'effondrement dans la figure 4.16.c. la charge d'effondrement q_c est calculée par l'équation des travaux virtuels.

$$M_p(\theta + 2\theta + \theta) = 2\left(\frac{q_c l}{2}\right) \frac{\theta l}{4} \quad (4.16)$$

où $\theta, 2\theta, \theta$ sont respectivement les rotations virtuelles dues aux rotules plastiques aux points A,B et C et $\frac{\theta l}{4}$ est le déplacement de haut en bas correspondant à la charge résultante sur la moitié de la poutre. L'équation (4.16) donne l'intensité de la charge d'effondrement $q_c = \frac{16M_p}{l^2}$.

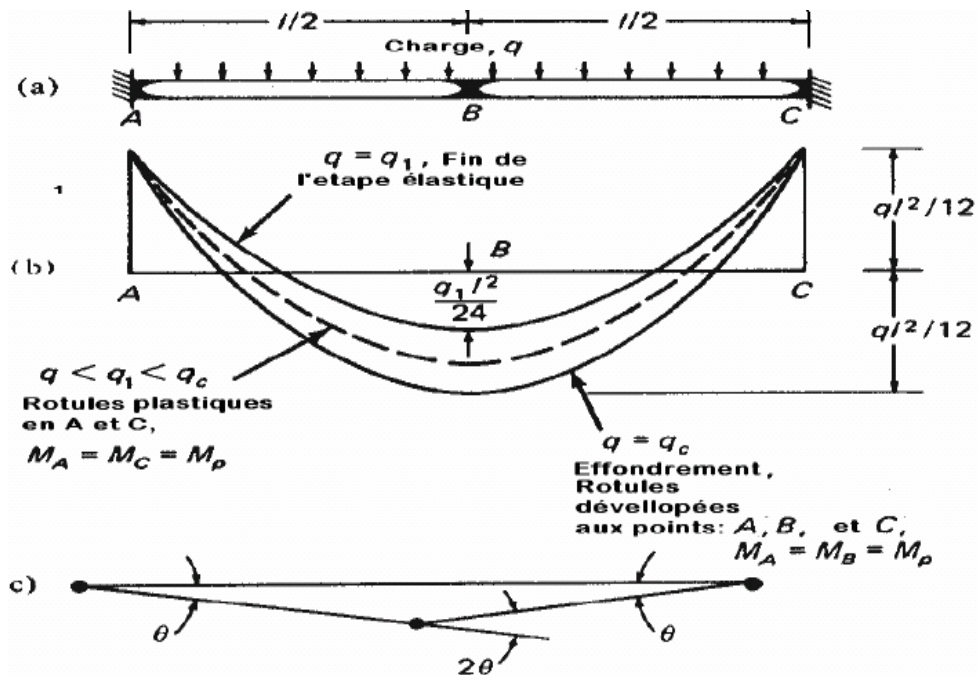


Figure 4.16. Effondrement d'une poutre doublement encastree sous une charge uniformement repartie. (a) poutre chargée. (b) diagrammes du moment de flexion pour les trois intensités de charge. (c) mécanisme d'effondrement ou de ruine.

Si la poutre est de section rectangulaire, le moment plastique $M_p = 1.5 M_e$ et l'intensité maximale du chargement calculée par la théorie de l'élasticité ayant σ_e comme contrainte maximale est $q_e = \frac{12M_e}{l^2}$. Ainsi le rapport $q_c/q_e = 2$, chose qui indique clairement que la conception de la poutre considérée par la théorie de l'élasticité est conservatrice.

2. Dans la conception plastique des poutres continues, nous traçons le diagramme du moment fléchissant pour chaque travée comme une simple poutre chargée avec la charge de calcul multipliée par le facteur de charge. Des valeurs arbitraires peuvent être choisies pour le moment fléchissant aux appuis et une ligne fermée AB'C'D est tracée sur la figure 4.17d. La valeur du moment de flexion à n'importe quelle section sera alors l'ordonnée entre la ligne fermée et le diagramme du moment d'une simple poutre. La poutre peut avoir la capacité de résistance finale exigée si les sections sont alors choisies de sorte que le moment plastique résistant soit partout égal ou supérieur au moment de flexion. Cependant, la conception la plus économique est généralement acquise lorsqu'une section régulière d'une certaine dimension est utilisée pour qu'un mécanisme de ruine puisse se développer.

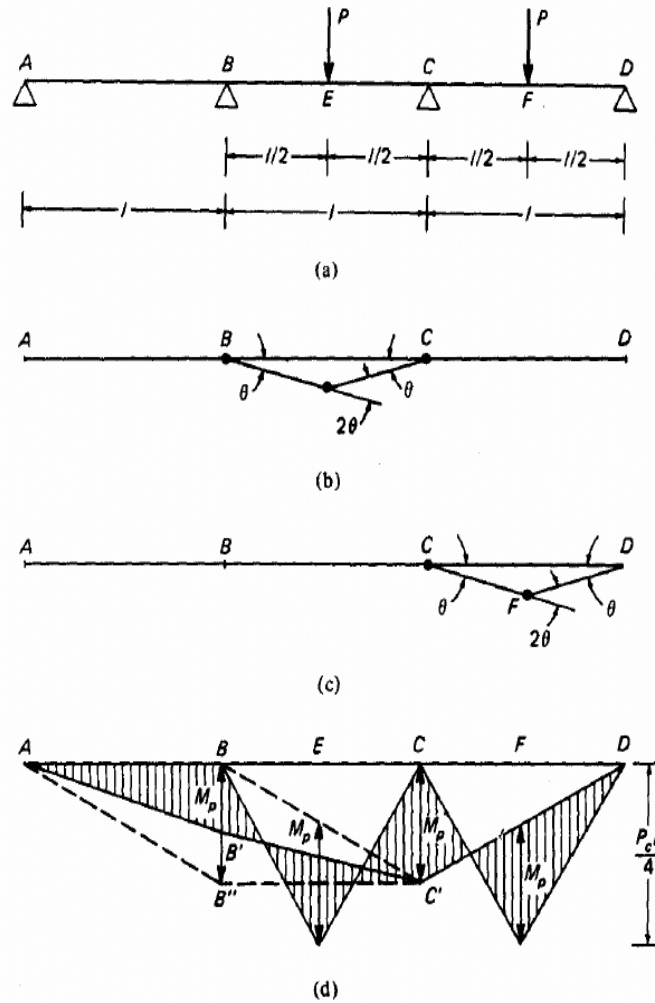


Figure 4.17. Analyse plastique des poutres continues. (a) poutre continue de section constante et de moment plastique de résistance M_p . (b) mécanisme 1 de ruine. (c) Mécanisme 2 de ruine. (d) diagramme du moment de flexion.

Si les sections de la poutre sont données, les valeurs de la charge de ruine correspondant à tous les mécanismes possibles sont déterminées, la charge réelle de ruine est la plus petite de ces dernières. Pour l'exemple de la figure (4.17), la poutre continue qui possède une section constante avec un moment de résistance plastique M_p . Nous voulons trouver la valeur des deux charges égales à la charge P qui provoque la ruine de la structure. On dénote cette valeur par la charge critique P_c .

La ruine peut se produire seulement par un des deux mécanismes montrés dans les figures 4.17 (b) et (c). Par l'équation des travaux virtuels pour chacun des deux mécanismes, on obtient :

$$\text{Pour le mécanisme 1 (fig4.17.b) : } P_{c1} \left(\frac{l \cdot \theta}{2} \right) = M_p (\theta + 2\theta + \theta) \text{ d'où } P_{c1} = \frac{8M_p}{l} \quad (4.17)$$

Pour le mécanisme 2 (fig4.17.c) : $P_{c2} \left(\frac{l\theta}{2} \right) = M_p(\theta + 2\theta)$ d'où $P_{c2} = \frac{6M_p}{l}$ (4.18)

La plus petite de ces deux valeurs est la véritable charge de ruine $P_c = \frac{6M_p}{l}$. Le diagramme correspondant du moment de flexion est montré dans la figure (4.17.d) dans lequel les valeurs du moment de flexion aux points C et F sont égales à M_p . Quand la ruine se produit, le segment de la poutre entre A et C reste à l'étape élastique, et la valeur du moment de flexion au point B peut être calculée en analysant une poutre ABC continue, articulée aux points A et C et soumise à un couple dans le sens horaire de grandeur M_p au point C et à une charge verticale $P_c = \frac{6M_p}{l}$ au point E. il est clair que la ligne AB'C' fermée du diagramme du moment de flexion puisse prendre n'importe quelle position entre les lignes limites AB''C et ABC avec un moment de flexion n'excédant pas M_p en aucune section.

4.7. Portique rectangulaire

Déterminons la charge d'effondrement du portique présenté dans la figure 4.18.a, prenons $2M_p$ comme moment de résistance plastique pour la poutre BC et M_p pour les poteaux. Il y a trois mécanismes d'effondrement possibles, montrés sur les figures 4.18 (b), (c) et (d).

L'équation des travaux virtuels pour chacun des mécanismes donne :

Pour le mécanisme1 (fig4.18.b): $M_p(\theta + \theta) + 2M_p(2\theta) = 2P_{c1} \left(\frac{l\theta}{2} \right)$ d'où $P_{c1} = \frac{6M_p}{l}$ (4.19)

Pour le mécanisme2 (fig4.18.c): $M_p(\theta + \theta + \theta) = 2P_{c2}(0.6l\theta)$ d'où $P_{c2} = \frac{6.67M_p}{l}$ (4.20)

Pour le mécanisme3 (fig4.18.d): $M_p(\theta + \theta + 2\theta) + 2M_p(2\theta) = 2P_{c3}(0.6l\theta) \left(\frac{l\theta}{2} \right)$
d'où $P_{c3} = \frac{5M_p}{l}$ (4.21)

La charge de ruine du portique est la plus petite des charges P_{c1} , P_{c2} et P_{c3} , ainsi $P_c = P_{c3} = 5M_p/l$ et l'effondrement du portique peut se produire avec le mécanisme 3. Le diagramme correspondant du moment de flexion dans la figure 4.18.e a une valeur M_p aux rotules plastiques A, C et d et $2M_p$ à la rotule E, avec le moment de résistance plastique excédé en aucun autre point de la structure.

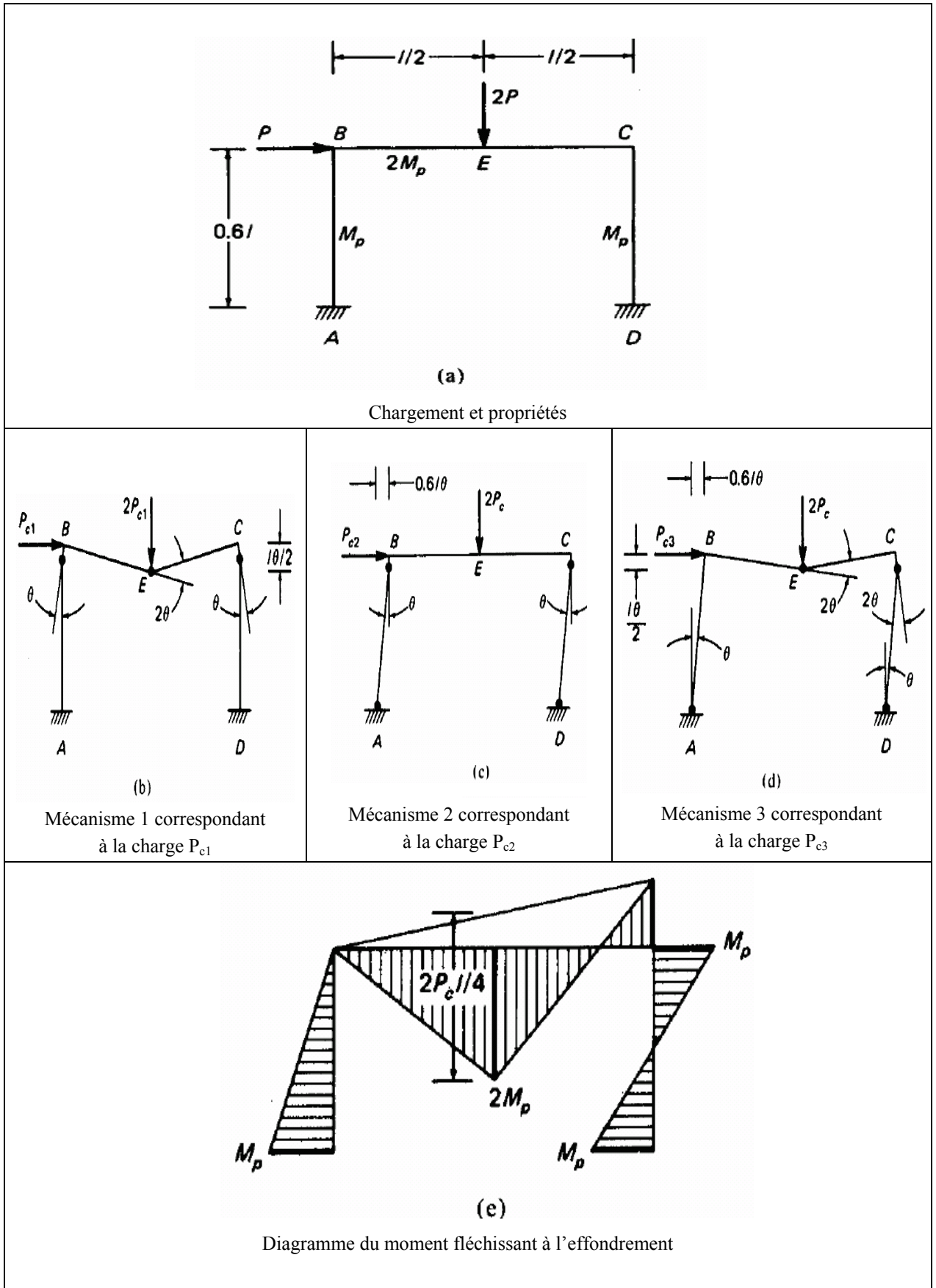


Figure 4.18. Analyse plastique d'un portique rectangulaire

4.7.1. Localisation des rotules plastiques sous charges uniformément réparties

Considérons le portique analysé dans le paragraphe précédent mais avec une charge répartie sur la poutre BC avec une intensité de $4P$ suivant les indications de la figure 4.19.a ; la charge horizontale P est inchangée. Dans ce cas, la position du moment de flexion positif maximum dans BC n'est pas connue, nous devons donc déterminer l'endroit de la création de la rotule plastique.

Appliquons l'équation du travail virtuel au mécanisme dans la figure 4.18.d chargé selon la figure 4.19.a avec la rotule dans la poutre supposée à mi-travée et $P_c = 5M_p/l$.

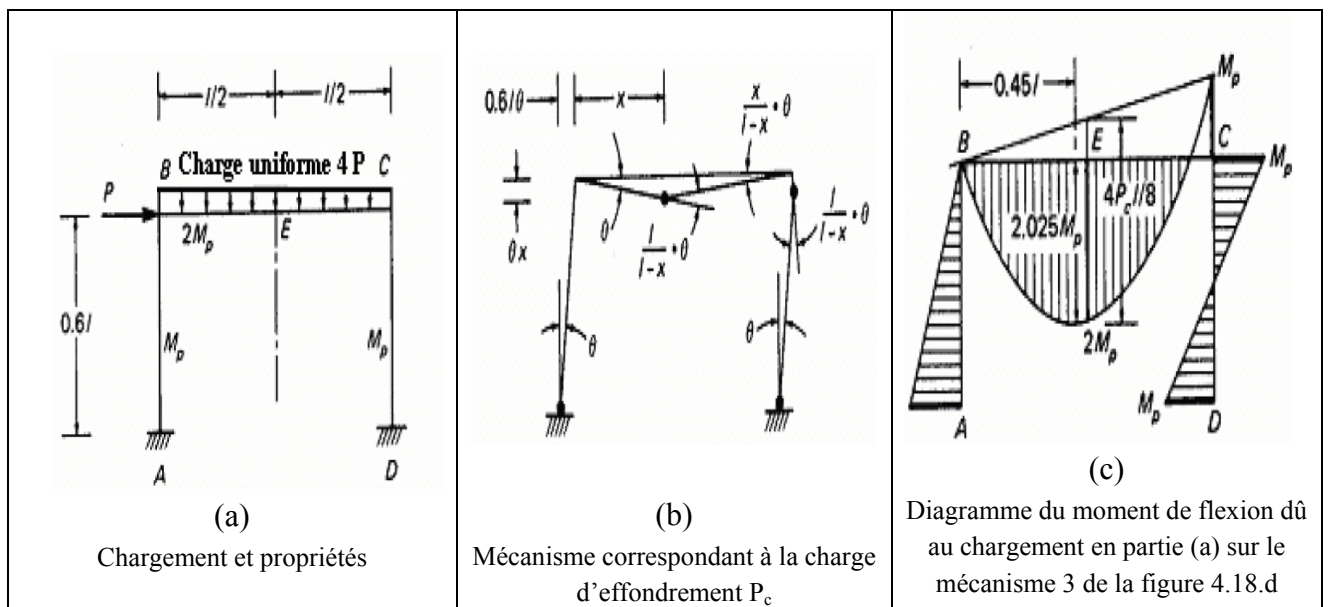


Figure 4.19. Portique soumis à une charge uniformément répartie

Le diagramme du moment de flexion correspondant au chargement de la figure 4.19.a est montré sur la figure 4.19.c à partir duquel on peut déduire que le moment complètement plastique $2M_p$ est légèrement plus grand dans la moitié gauche de la poutre.

4.7.2. Combinaison des mécanismes élémentaires

Nous pouvons considérer maintenant l'analyse plastique des structures planes formées de poutres tels que les portiques. Un nombre suffisant de rotules plastiques est introduit aux endroits proposés pour former un mécanisme et la charge de ruine correspondante est calculée à partir de l'équation des travaux virtuels. La valeur déterminée de cette façon est une limite supérieure de la valeur exacte de la charge, en d'autres termes, si le moment plastique M_p exigé pour n'importe quel effondrement particulier est calculé selon n'importe quel mécanisme, puis la valeur résultante du moment plastique M_p est une limite inférieure au moment de résistance plastique. En pratique, le mécanisme exacte peut être

obtenu en considérant les mécanismes élémentaires et en les combinant pour obtenir le plus bas qui donne la valeur exacte de la charge de ruine.

Considérons le portique multi compartiments de la figure 4.20.a avec les membres prismatiques ; les valeurs relatives du moment totalement plastique sont indiquées. Trois mécanismes élémentaires sont montrés dans les figures 4.20(b), (c) et (d).

$$\text{Pour le mécanisme 1: } M_p\theta + 2M_p(2\theta + \theta) = 4P_{c1}(l.\theta) \text{ d'où } P_{c1} = 1.75\frac{M_p}{l} \quad (4.22)$$

$$\text{Pour le mécanisme 2: } 3M_p(\theta + 2\theta) + 2M_p\theta = 5P_{c2}\left(\frac{3}{2}l.\theta\right) \text{ d'où } P_{c2} = 1.47\frac{M_p}{l} \quad (4.23)$$

$$\text{Pour le mécanisme 3: } M_p(\theta + \theta) + 2M_p(\theta + \theta + \theta + \theta) = 3P_{c3}(2l.\theta) \\ \text{d'où } P_{c3} = 1.67\frac{M_p}{l} \quad (4.24)$$

$$\text{Pour le mécanisme 4: } M_p(2\theta) + 2M_p(5\theta) + 3M_p(2\theta) = 5P_{c4}\left(\frac{3l.\theta}{2}\right) + 3P_{c4}(2l.\theta) \\ \text{d'où } P_{c4} = 1.33\frac{M_p}{l} \quad (4.25)$$

$$\text{Pour le mécanisme 5: } M_p(\theta) + 2M_p(8\theta) + 3M_p(2\theta) = 4P_{c5}(l.\theta) + 5P_{c5}\left(\frac{3l.\theta}{2}\right) + 3P(2l.\theta) \\ \text{d'où } P_{c5} = 1.31\frac{M_p}{l} \quad (4.26)$$

Le mécanisme 2 donne la charge critique P_c la plus basse et la combinaison avec les autres mécanismes nous permet d'atteindre une valeur plus petite de P_c . deux combinaisons sont montrées sur les figures 4.20.(e) et (f). Le mécanisme 4 est une combinaison des mécanismes 2 et 3 avec une modification de l'endroit de la rotule au dessus du poteau central. La charge de ruine résultante est $P_{c4}=1.33 M_p/l$. Le mécanisme 5 est une combinaison des mécanismes 1, 2 et 3 avec la même modification précédente, donnant une valeur de $P_{c5}=1.31 M_p/l$ qui est inférieure à toutes les valeurs précédentes.

Pour déterminer si P_{c5} est la limite inférieure de P_c , le diagramme correspondant du moment fléchissant est tracé ; si le moment en aucune section n'est plus grand que son moment plastique, P_{c5} est la limite inférieure et la solution est correcte. Le diagramme du moment fléchissant de la figure 4.20.g prouve que le mécanisme 5 est le plus correct. Dans la construction de ce diagramme, les valeurs connues des moments aux rotules plastiques ont été marquées la première fois, et les autres ordonnées sont déterminées alors par des calculs simples.

Il est possible qu'en traçant le diagramme du moment fléchissant nous constatons que le moment à une certaine section excède le moment de résistance plastique ; si l'excès est petit de l'ordre de 5% alors on peut considérer que le portique peut supporter les charges précédemment calculées, chacune réduite de 1/1.05. Certains travaux de recherche suggèrent que si pour une charge d'effondrement particulière calculée pour un faux mécanisme le

moment de résistance plastique n'exède 30% dans n'importe quel point, une évaluation raisonnable de la résistance à la flexion exigée peut être obtenue en augmentant la valeur calculée de M_p de la moitié du plus grand moment.

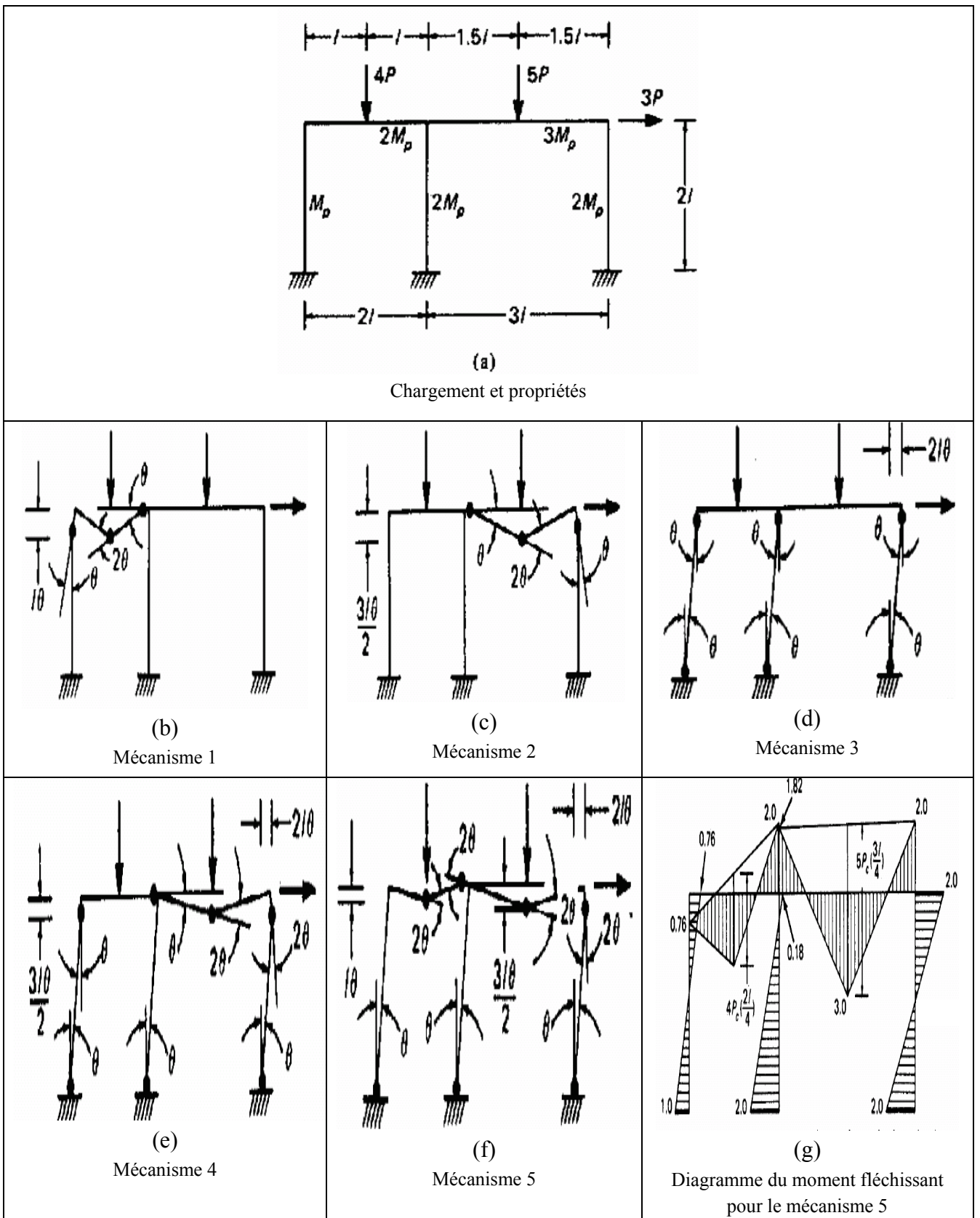


Figure 4.20 Analyse plastique d'un portique multi-compartiments



Chapitre 5

La Méthode des Rotules Plastiques

CHAPITRE 5

LA METHODE DES ROTULES PLASTIQUES

5.1. Introduction

L'objectif essentiel de notre étude est de comprendre le comportement des structures planes formées de poutres et de suivre la propagation de la plastification dans celles-ci sous charges concentrées jusqu'à la ruine, et ce en utilisant la méthode des rotules plastiques ce basant sur le concept d'analyse élastoplastique incrémentale rotule-par-rotule qui suppose un comportement linéaire élastique entre la formation de deux rotules successives.

On voit donc que la résolution d'un système non linéaire se ramène à la résolution d'une suite de problèmes linéaires.

Notre choix s'est arrêté sur cette méthode car elle compte de nombreux avantages :

- Cette méthode nous donne des informations pratiques sur le comportement non linéaire de la structure jusqu'à l'effondrement,
- Détection des zones faibles de la structure là où apparaissent les premières rotules plastiques,
- La méthode peut être utilisée pour évaluer la vulnérabilité des structures existante, ou encore pour concevoir des constructions futures en se basant sur la performance et la résistance et pas seulement sur la capacité portante,
- Simplicité des calculs.

5.2. Evolution de l'utilisation de la méthode des rotules plastiques [VAN 08a]

Pendant les 40 dernières années, les techniques de calculs dans le domaine non linéaire ont fait d'énorme progrès allant de paire avec l'évolution des outils informatiques, cela a motivé les chercheurs à aller vers l'élaboration d'outils numériques performants dans le design et le calcul des structures.

Les structures formées de poutres ont toujours été sujettes à des tests, beaucoup de logiciel ont été développés dans divers centres de recherche à travers le monde pour traiter le comportement de ce type de structures. Par exemple, dans le Département de Mécanique des Structures et Stabilité des Constructions de l'Université de Liège, deux programmes informatiques de calcul des structures ont été établis à la fin des années 1970 : FINELG un programme d'élément fini pour l'analyse non-linéaire étape-par-étape était construit par FREY F.; et le programme CEPAO développé par Nguyen-Dang, qui est un programme de calcul et d'optimisation des portiques plans [VAN 08a].

Il est à noter qu'il faut différencier entre la méthode de la zone plastique (plasticité distribuée) et celle de rotules plastiques (plasticité concentrée), dans la première, on a plutôt recours à un maillage par élément de coque tridimensionnelle, la solution par cette méthode est décrite comme étant « quasi-exacte » mais elle reste « couteuse » et exige un énorme temps de calcul. L'approche par rotules plastique se fait quant à elle par élément de poutre car c'est les éléments les mieux adaptés pour modéliser les propriétés non-linéaires des structures, elle permet également de réduire les temps de calcul.

En 1969, Zienkiewicz était le premier à introduire la formulation de la matrice physique élastoplastique dans la méthode des éléments finis. Par la suite les recherches se sont succédées dans ce sens en utilisant la mise à jour de la matrice de rigidité de la structure tels que Nguyen-Dang (1970), Beckers (1972), d'autres auteurs ont proposé l'implémentation d'une mise à jour indirecte de la matrice de rigidité de la structure par le biais de programmes mathématiques tel que Maier (1979) [VAN 08a]. En résumé, on peut dire que la méthode des rotules plastique (step-by-step) ou (hinge-by-hinge) a bénéficié de longue expérience vu le nombre énorme de travaux de recherche effectués dans ce domaine durant de nombreuses années, on peut citer les travaux effectués par [WHI 93], [BOE 93], [McG 94], [KRU 95], [LIE 00], [COC 03], [MAR 04], [EHR 05], [INE 06], [PEN 08], [VAN 08a], [VAN 08b], [BLE 09], [THA 09], et également la multitude de livres qui proposent des algorithmes et des technique de résolution par la méthode des rotules plastiques tels que Massonnet (1961,1967) [MAS 61] et [MAS 67], Bathe (1982, 1996), Zienkiewicz (1989, 1991), Géraudin (1997), Doghri (2000), Ghali (2003, 2009) [GHA03], et enfin, Wong [WON09] qui est l'un des principaux ouvrages sur lequel nous nous sommes basés dans le choix de cette méthode pour l'analyse élastoplastique des structures formées de poutres.

5.3. Formation d'une rotule plastique [MAS 67], [FRE 00]

On considère une poutre en double T sur deux appuis simples chargée d'une force concentrée P en son milieu (figure 5.1.a). Le diagramme des moments correspondant est donné à la figure 5.1.b. Faisons croître la force P jusqu'à ce que le moment maximum $Pl/4$ atteigne le moment plastique M_p . Les déformations plastiques s'étendent sur toute la zone où le moment dépasse le moment maximum élastique M_e (figure 5.1.b). Si le facteur de forme de la section vaut $\alpha = 1.14$, cette zone a pour longueur $\Delta l = l(M_p - M_e / M_p) = 0.123l$. Vu la forme du diagramme moment-courbure (figure 4.13) du chapitre précédent, la courbure reste très faible aux environs des extrémités C et D de la zone plastifiée ; par contre, aux environs du point E d'application de la charge, la courbure est extrêmement forte comme le montre la figure 5.1.c, de sorte que la poutre prend la déformée représentée à la figure 5.1.d et que tout se passe à peu près comme si la poutre était formée de deux tronçons rigides articulés l'un sur l'autre au point E (figure 5.1.e), c'est exactement ce point où s'est formée ce qu'on appelle la rotule plastique.

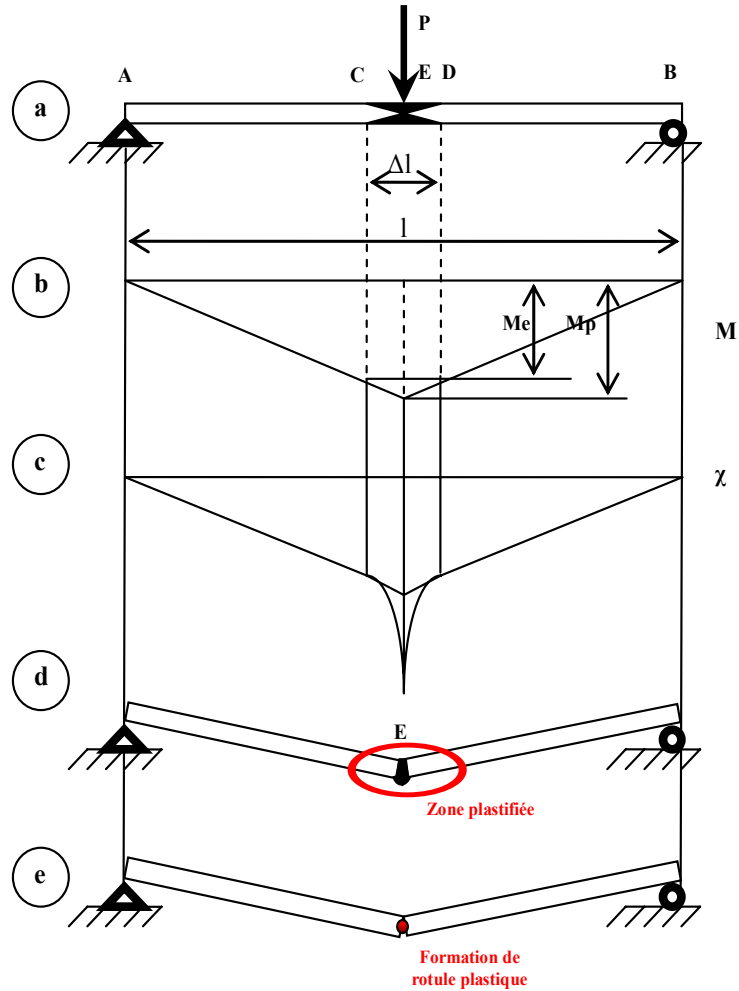


Figure 5.1. Formation d'une rotule plastique

D'après François Frey [FRE 00], le terme « rotule plastique » est abusif car il fait naître l'idée de rotation libre tandis qu'il s'agit ici de rotation bridée, mais il est employé par tous les chercheurs du domaine. La figure 5.2 montre l'aspect de rotules plastiques obtenues sous charge concentrée dans des poutrelles laminées. Les zones plastifiées sont effectivement très localisées et les lignes dessinées par l'écaillage de la chaux ne sont peut être pas étrangères au choix de l'appellation « rotule plastique ».

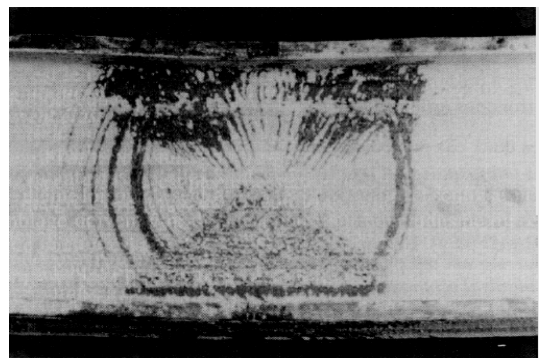
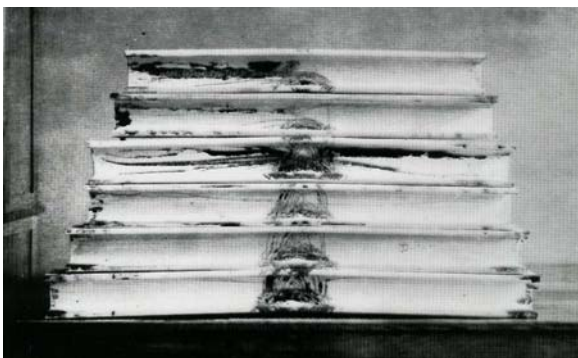


Figure 5.2. Aspect de rotule plastique



(1)



(2)



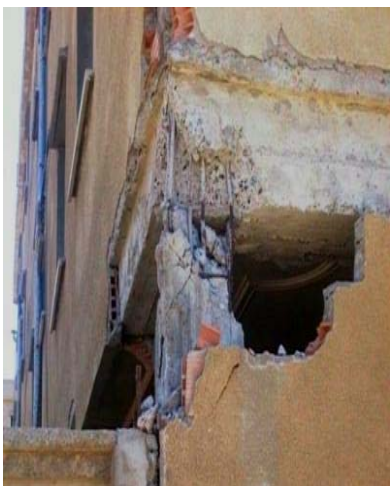
(3) Formation de rotule plastique au niveau d'un poteau
Alger Séisme du 21 mai 2003



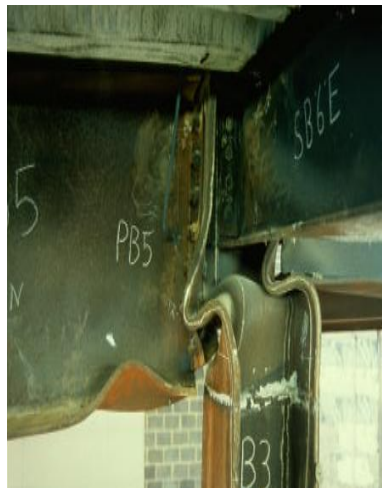
(4) Formation de rotule plastique au niveau d'un poteau
Alger Séisme du 21 mai 2003



(5) Formation de rotule plastique au niveau d'une poutre



(6)



(7)



(8)

Figure 5.3. Quelques images illustrant les dégâts engendrés par la formation de rotules plastiques

(1), (2) Source www.structureparasismic.com

(3), (4), (6), (8) Source Ecole Nationale des Travaux Publics d'Alger www.entp.edu.dz

(5), (7) Plastic hinge www.ucsd.edu

5.4. Etude du comportement élastoplastique des structures formées de poutres [MAS 67], [FRE 00], [GHA 03], [BOU 06b], [WON 09]

5.4.1. Introduction

Dans cette partie, nous décrivons l'extension de la méthode matricielle pour traiter le comportement élastoplastique des structures formées de poutres en utilisant la méthode des rotules plastiques. Après formation de chaque rotule plastique, la matrice de rigidité de l'élément correspondant est corrigée et assemblée dans la matrice de rigidité globale de la structure. Le vecteur force est également corrigé en cas de présence des charges réparties sur l'élément. Le comportement structural entre la formation de deux rotules plastiques successives demeure linéaire. Ce fait est exploité pour éviter des itérations. L'indice de charge causant l'apparition de la prochaine rotule plastique est déduit par l'extrapolation linéaire d'un incrément standard.

5.4.2. La méthode des rotules plastiques

En supposant un comportement élastoplastique parfait (sans durcissement) et sans aucune dépendance de l'histoire du chargement, les contraintes à travers une section soumise à la flexion seront élastiques (figure 5.4) à de basses charges. Quand la charge est augmentée les déformations plastiques apparaissent dans les fibres extrêmes, c'est la plastification partielle ; et la propagation de la déformation à travers la section donne la plastification totale.

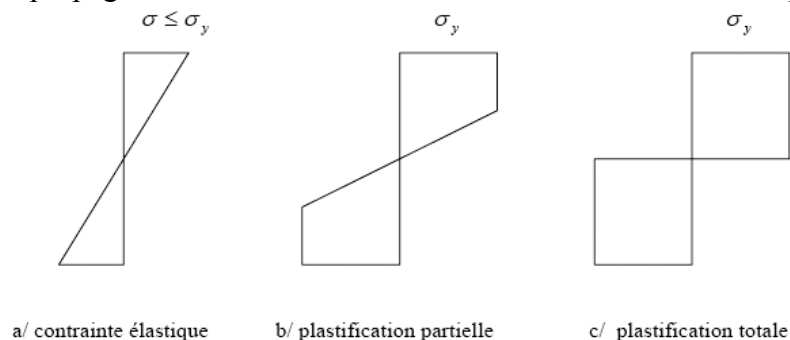


Figure 5.4. Contraintes dans une section fléchie

Le moment plastique M_p où la section est entièrement plastifiée est plus grand que le moment élastique M_e où la fibre extrême atteint la limite d'élasticité. M_p est proportionnel à une quantité géométrique fonction de la forme de la section droite appelée module plastique Z et égale à deux fois le moment statique de la demi section droite par rapport à l'axe neutre.

Pour une section rectangulaire $b \times h$ par exemple nous avons :

$$\begin{cases} M_p = Z \cdot \sigma_e \\ Z = \frac{A}{2} (h_1 + h_2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Avec :

- σ_e : limite d'élasticité du matériau (ex : pour le béton $20 \leq \sigma_e \leq 50$ MPA)
- A : surface de la section droite, $A = b \times h$
- h_1 : distance entre le centre de gravité de la zone tendue et l'axe neutre de flexion plastique ($h_1 = h/4$ pour une section rectangulaire)
- h_2 : distance entre le centre de gravité de la zone comprimée et l'axe neutre de flexion plastique ($h_2 = h/4$ pour une section rectangulaire)

$$M_e = \frac{b \sigma_e}{2} \frac{h}{2} \frac{2h}{3} = \frac{bh^2 \sigma_e}{6} \quad \text{et} \quad M_p = Z \cdot \sigma_e = \frac{b \cdot h}{2} \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4} \right) \sigma_e = \frac{bh^2 \sigma_e}{4} = 1.5 M_e \quad (5.2)$$

par conséquent le facteur de forme $\alpha = 1.5$ pour une section rectangulaire, pour une section circulaire d'un solide $\alpha = 1.7$. Pour les poutres en I et les canaux, α varie entre 1.15 et 1.17.

Une section totalement plastifiée ne peut supporter plus longtemps un moment de flexion. Elle se comporte comme une rotule (articulation). La méthode des rotules plastiques a été employée pendant des années dans l'analyse limite de plasticité. La technique alternative intéressante de l'analyse élastoplastique des structures consiste à suivre pas à pas la formation de rotules plastiques et l'histoire du chargement par accroissement.

La formation de chaque rotule plastique diminue le degré d'hyperstaticité de la structure d'une unité. Le dernier chargement plastique sur une structure avec un degré d'hyperstaticité n peut être atteint après la formation de $(n+1)$ rotules. La structure devient donc un mécanisme articulé à un degré de liberté qui prend sous charge constante des déplacements indéfinis conduisant à la mise hors service de la structure. Ce mécanisme s'appelle mécanisme de ruine.

On appelle charge limite, la mise en charge qui correspond à l'apparition de $(n+1)^{\text{ième}}$ rotule plastique. C'est elle qui est la charge de ruine, et c'est donc vis-à-vis de cette charge qu'il faut calibrer la sécurité lorsqu'on dimensionne selon la méthode des rotules plastiques.

Avec la correction convenable de la matrice de rigidité de la structure après la formation d'une rotule plastique, le comportement demeure linéaire. Des analyses linéaires successives peuvent être alors utilisées pour suivre le comportement élastoplastique de la structure. En comparant les rapports des moments réels aux moments plastiques pour chaque extrémité d'élément, il est possible de détecter la position de la prochaine rotule plastique. Ceci nous permettra d'éviter des itérations entre deux rotules successives. Cette technique détermine non seulement la charge plastique finale mais fournit également des informations intéressantes sur la chronologie de la formation de ces rotules. Elle peut être employée dans le but de détecter les régions les plus faibles (position des premières rotules plastiques) dans une structure existante pour un renforcement éventuel.

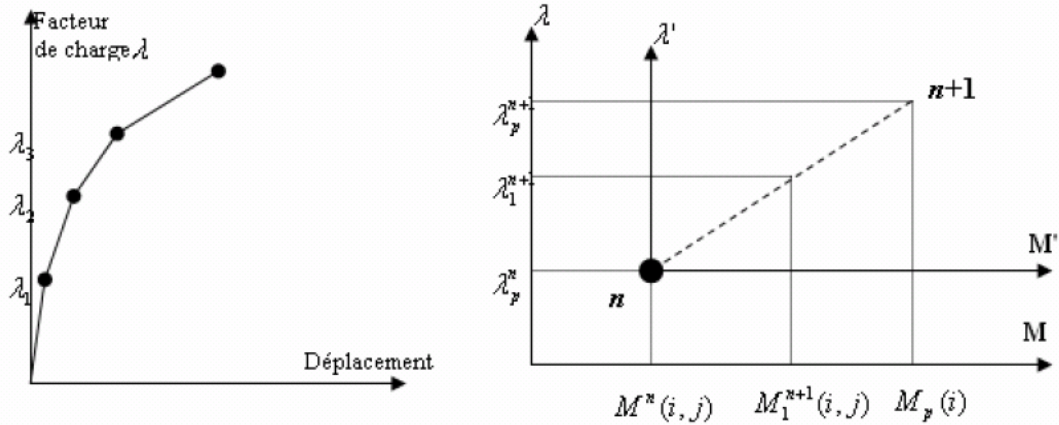


Figure 5.5. (a) formation successive des rotules plastiques, (b) interpolation linéaire entre deux rotules plastiques successives

A un point (i,j) correspond un nœud j (j=1 ou j=2) de l'élément i (i=1 au nombre total d'éléments).

λ_p^n est le facteur de charge à la formation de la rotule plastique numéro n.

$M^n(i,j)$ est le moment correspondant dans le point (i,j) non rotulé encore.

$M_p(i)$ est le moment plastique pour l'élément i.

λ_p^{n+1} est le facteur de charge inconnu qui doit provoquer la prochaine rotule plastique numérotée n+1.

λ_1^{n+1} est le facteur de charges standard pour rechercher la rotule n+1.

$M_1^{n+1}(i,j)$ est le moment correspondant au point (i,j) non rotulé encore.

Le seul inconnu est le facteur de charge λ_p^{n+1} qu'on peut déterminer par l'interpolation linéaire de la figure 5.5.b comme suit :

$$\lambda_p^{n+1} = \lambda_p^n + (\lambda_1^{n+1} - \lambda_p^n) \left(\frac{M_p(i) - M^n(i,j)}{M_1^{n+1}(i,j) - M^n(i,j)} \right) \quad (5.3)$$

Ce facteur doit être déterminé pour le nœud qui est le plus proche de la rotation, c'est le point avec le plus grand rapport du moment réel réduit et du moment plastique réduit donnés par les formules suivantes :

$$\text{Moment réel réduit : } M^n(i,j) = M_1^{n+1}(i,j) - M^n(i,j) \quad (5.4)$$

$$\text{Moment plastique réduit : } M_p^n(i,j) = M_p(i) - M^n(i,j) \quad (5.5)$$

Les analyses linéaires successives sont faites en effectuant des changements d'axes λ' et M' à chaque fois et en cumulant ensuite les moments et les facteurs de charge.

Avec le changement des axes, la relation (5.3) devient :

$$\lambda_p^{n+1} = \lambda_1^{n+1} \frac{M_p^n(i,j)}{M^n(i,j)} \quad (5.6)$$

5.5. Méthode des rotules plastique sur le plan matriciel

Une analyse élastique est lancée pour chaque étape de calcul, et les moments au niveau des nœuds de la structure sont enregistrés.

Lorsque le moment plastique M_p est atteint à une section, une rotule plastique apparaît, la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ de la section plastifiée, puis la matrice de rigidité globale $[K]$ de la structure sont modifiées [FRE 00], [GHA 03], [BOU 06a],[WON 09].

La ruine est atteinte lorsque :

- $[K]$ devient singulière (son déterminant tend vers zéro)
- Un des membres k_{ii} de la diagonale de $[K]$ devient nul
- De très grands déplacements sont obtenus.
- $(h+1)$ rotules se forment, sachant que h est le degré d'hyperstatisme de la structure (ce dernier cas n'est pas toujours valable car il peut y avoir ruine partielle d'une structure avec un nombre de rotules plastiques inférieur à $(h+1)$, ou bien une ruine plus que complète lorsque le nombre de rotule plastiques entraînant la ruine dépasse $(h+1)$ [MAS 61], [FRE 00].

Après formation d'une rotule plastique au nœud i ou j d'un élément donné, sa matrice de rigidité élémentaire est modifiée en introduisant des conditions aux limites internes au nœud touché selon le principe suivant :

5.5.1. Introduction des conditions aux limites internes [BEN 97], [GHA 03]

Une structure formée de poutres avec existence de rotules internes est un réseau dont la continuité de la rotation des sections n'est pas assurée au niveau de la rotule. L'introduction de ce type de conditions dans la structure provoque une modification au niveau local de la matrice de rigidité et des charges nodales équivalentes dans le domaine de calcul linéaire et non linéaire.

Nous nous sommes limités dans cette étude aux systèmes de poutres plane articulées. L'introduction des conditions aux limites internes est simple à mettre en œuvre et donnent des résultats satisfaisants.

5.5.1.1. Principe de l'introduction des conditions aux limites internes

Soit une poutre à deux nœuds (i,j) d'une structure considérée dans son repère local présenté dans la figure 5.6. suivante :

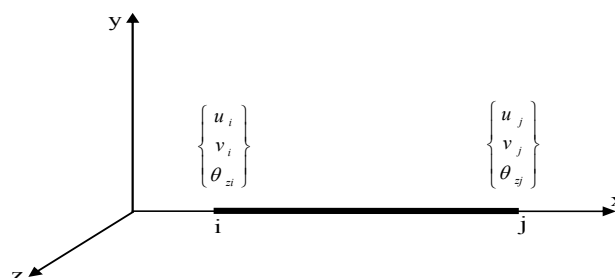


Figure 5.6. Élément poutre dans son repère local

L'équation intrinsèque d'équilibre de cette poutre s'écrit :

$$\{p^{ij}\} = [K^{ij}]\{q^{ij}\} - \{\bar{F}^{ij}\} \quad (5.7)$$

avec

$\{p^{ij}\}$: est le vecteur des actions des nœuds (i) et (j) sur la poutre (i,j)

$[K^{ij}]$: est la matrice de rigidité élémentaire de la poutre (i,j) s'écrivant sous la forme

$$\text{matricielle } [K^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$\{q^{ij}\}$: représente le vecteur des déplacements inconnus des nœuds (i) et (j) de la poutre

$\{\bar{F}^{ij}\}$: représente le vecteur des actions de la poutre supposée parfaitement encastree en ses nœuds (i) et (j).

La formule (5.7) s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} & K_{2,5} & K_{2,6} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} \\ K_{5,1} & K_{5,2} & K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Cas 1 : Le développement d'une rotule plastique au nœud (i) de la poutre entraine un moment nul ($M_{zi} = 0$), de l'équation (5.9) on tire l'expression suivante :

$$0 = K_{3,1} \cdot u_i + K_{3,2} \cdot v_i + K_{3,3} \cdot \theta_{zi} + K_{3,4} \cdot u_j + K_{3,5} \cdot v_j + K_{3,6} \cdot \theta_{zj} - \bar{M}_{zi} \quad (5.10)$$

$$\text{d'où } \theta_{zi} = \frac{\bar{M}_{zi}}{K_{3,3}} - \frac{K_{3,1}}{K_{3,3}} \cdot u_i - \frac{K_{3,2}}{K_{3,3}} \cdot v_i - \frac{K_{3,4}}{K_{3,3}} \cdot u_j - \frac{K_{3,5}}{K_{3,3}} \cdot v_j - \frac{K_{3,6}}{K_{3,3}} \cdot \theta_{zj} \quad (5.11)$$

En reportant la valeur de θ_{zi} dans l'expression (5.9) on obtient :

Ligne 3 et colonne 3
réduites à zéro

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ 0 \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1,1} & \bar{K}_{1,2} & 0 & \bar{K}_{1,4} & \bar{K}_{1,5} & \bar{K}_{1,6} \\ \bar{K}_{2,1} & \bar{K}_{2,2} & 0 & \bar{K}_{2,4} & \bar{K}_{2,5} & \bar{K}_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{K}_{4,1} & \bar{K}_{4,2} & 0 & \bar{K}_{4,4} & \bar{K}_{4,5} & \bar{K}_{4,6} \\ \bar{K}_{5,1} & \bar{K}_{5,2} & 0 & \bar{K}_{5,4} & \bar{K}_{5,5} & \bar{K}_{5,6} \\ \bar{K}_{6,1} & \bar{K}_{6,2} & 0 & \bar{K}_{6,4} & \bar{K}_{6,5} & \bar{K}_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ 0 \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

L'équation (5.12) s'écrit sous la forme condensée de la manière suivante :

$$\{p^{ij}\} = [K^{ij}] \{q^{ij}\} - \{F^{ij}\} \quad (5.13)$$

où :

$[K^{ij}]$: est la matrice de rigidité élémentaire mise à jour de la poutre (i,j) articulée en (i)

$\{F^{ij}\}$: représente le vecteur des actions de la poutre supposée parfaitement encastree en (j) et articulée en (i).

Cas 2 : Si le nœud (j) de l'élément est rotulé, on adopte la même démarche que pour le cas précédent, la rotule simple est considérée cette fois en (j) donc ($M_{zj} = 0$) de l'équation (5.9) on tire l'expression suivante :

$$0 = K_{6,1} u_i + K_{6,2} v_i + K_{6,3} \theta_{zi} + K_{6,4} u_j + K_{6,5} v_j + K_{6,6} \theta_{zj} - \bar{M}_{zj} \quad (5.14)$$

$$\text{d'où } \theta_{zj} = \frac{\bar{M}_{zj}}{K_{6,6}} - \frac{K_{6,1}}{K_{6,6}} u_i - \frac{K_{6,2}}{K_{6,6}} v_i - \frac{K_{6,3}}{K_{6,6}} \theta_{zi} - \frac{K_{6,4}}{K_{6,6}} u_j - \frac{K_{6,5}}{K_{6,6}} v_j \quad (5.15)$$

En reportant la valeur de θ_{zj} dans l'expression (5.9) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1,1} & \bar{K}_{1,2} & \bar{K}_{1,3} & \bar{K}_{1,4} & \bar{K}_{1,5} & 0 \\ \bar{K}_{2,1} & \bar{K}_{2,2} & \bar{K}_{2,3} & \bar{K}_{2,4} & \bar{K}_{2,5} & 0 \\ \bar{K}_{3,1} & \bar{K}_{3,2} & \bar{K}_{3,3} & \bar{K}_{3,4} & \bar{K}_{3,5} & 0 \\ \bar{K}_{4,1} & \bar{K}_{4,2} & \bar{K}_{4,3} & \bar{K}_{4,4} & \bar{K}_{4,5} & 0 \\ \bar{K}_{5,1} & \bar{K}_{5,2} & \bar{K}_{5,3} & \bar{K}_{5,4} & \bar{K}_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Ligne 6 et colonne 6
réduites à zéro

Cas 3 : Si les deux nœuds (i,j) d'un élément de type poutre sont rotulés en même temps, il faudra combiner les deux cas précédents.

5.6. Procédure à suivre pour exécuter la méthode des rotules plastiques [GHA 03], [WON 09]

Dans ce qui suit, nous mettons en œuvre une procédure afin de minimiser les calculs répétitifs à chaque étape de chargement. Nous rappelons que pour la méthode des rotules plastiques l'analyse est élastique et linéaire entre deux rotules successives donc nous n'avons pas eu recours aux méthodes d'approximation incrémentales ou itératives. Nous devons pour la première étape du calcul :

1. Effectuer une analyse élastique linéaire de la structure soumise à un chargement λP avec un facteur de charge $\lambda=1$ pour la première étape de calcul seulement.
2. Dresser une table de calcul telle que celle montrée ci-dessous :

Colonne1	Colonne2	Colonne3	Colonne4	Colonne5	Colonne6	Colonne7	Colonne8
ELEMENT	NŒUD	M_0	M_p	$\lambda = M_p - M_i / M_0$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$	$M_{pr} = M_p - M_{cr}$	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$
1	1						
	2						

Tableau 5.1. Table de calcul en analyse élastoplastique par la méthode des rotules plastiques

Puis entrer les valeurs des moments M_0 (colonne 3) à partir des résultats de l'analyse linéaire et transcrire les moments plastiques M_p des éléments de la structure (colonne 4).

3. Calculer le facteur de charge λ pour chaque membre contenant 2 nœuds à partir de la relation $\lambda = M_p - M_i / M_0$ (colonne 5). Il est à noter que pour la première étape $M_i = 0$.
4. Choisir le plus petit des facteurs de charge $\lambda_{cr} = \text{Min}(\lambda_i)$ qui est le facteur de charge critique pour cette étape. Et calculer les moments critiques M_{cr} (colonne 6).
5. Calculer le moment plastique résiduel M_{pr} pour toutes les autres sections (colonne 7) et insérer une rotule plastique à la structure là où le moment plastique M_p (colonne 4) est atteint puis calculer les moments cumulés M_{i+1} (colonne 8).
6. Mettre à jour la matrice de rigidité élémentaire de la section rotulée en suivant la méthode expliquée dans la section (§ 5.5) en introduisant les conditions aux limites internes là où une rotule plastique s'est formée, puis réassembler la matrice de rigidité globale de la structure.
7. Répéter les étapes 1 à 6 jusqu'à ruine complète de la structure survenant lorsque la matrice de rigidité globale de la structure devient singulière (son déterminant tend vers 0), avec $M_i = M_{i+1}$ de l'étape précédente.
8. Calculer le facteur de charge critique cumulé $\lambda_{ruine} = \sum \lambda_{cr}$ de toutes les étapes de calcul et la charge de ruine correspondante $P_{ruine} = \lambda_{cr} \cdot P$, P étant la charge initiale appliquée en analyse linéaire.

5.7. Organigramme de l'analyse élastoplastique par la méthode des rotules plastiques

L'organigramme de la figure 5.7 résume les différentes étapes employées dans le programme informatique pour dépister la formation successive de rotules plastiques jusqu'à l'instabilité complète de la structure correspondant à un facteur de charge critique final.

On peut facilement savoir si la structure a atteint un état instable car cela correspond à une matrice de rigidité singulière entraînant l'arrêt du programme.

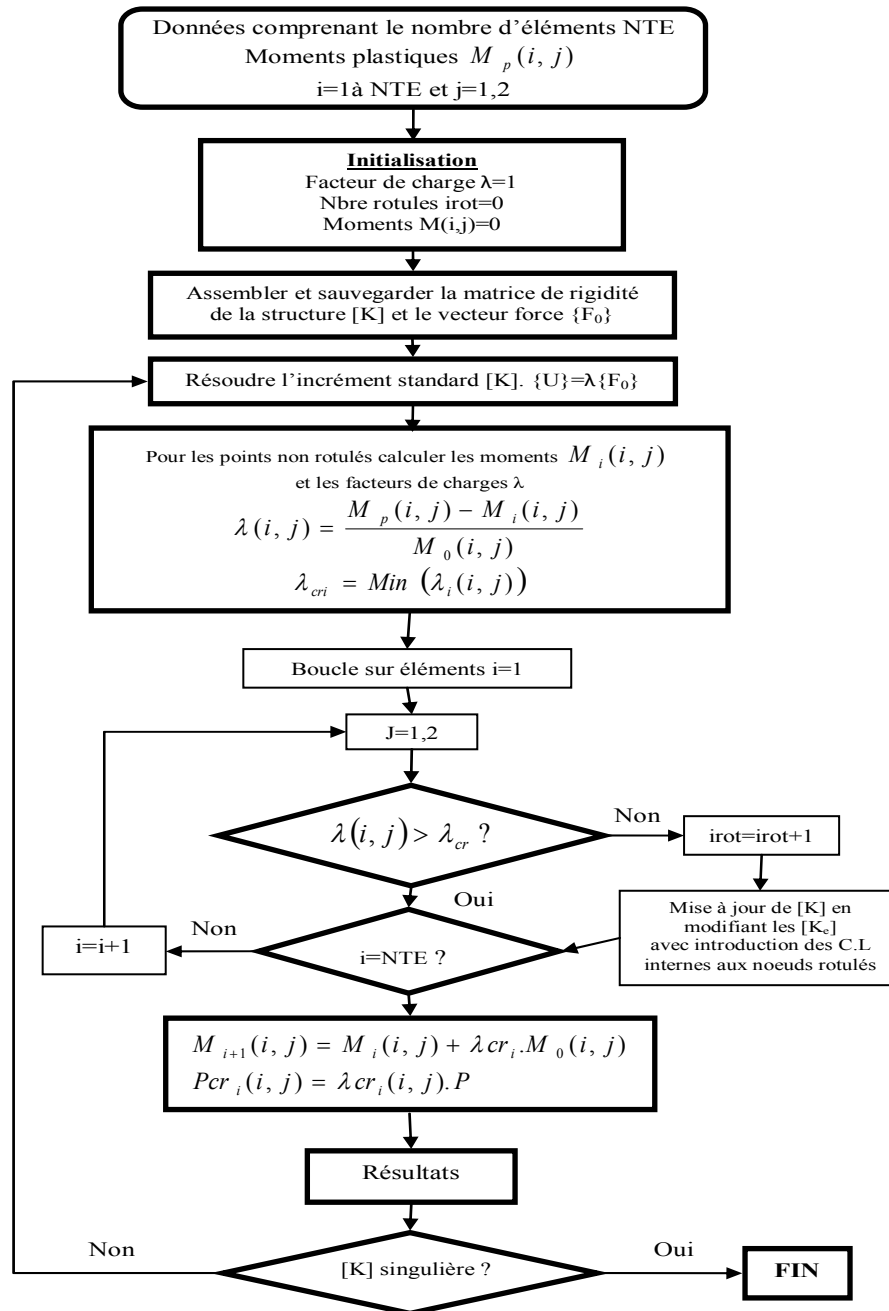


Figure 5.7. Organigramme de la méthode des rotules plastiques



Chapitre 6

Programmation et Validation

CHAPITRE 6

PROGRAMMATION ET VALIDATION

6.1. Introduction

Le but de notre travail étant de présenter un algorithme de résolution de systèmes formés de poutres en analyse élastoplastique par la méthode des rotules plastiques et ce en suivant l'évolution de la formation des rotules plastiques dans la structure. Cela ne peut se faire sans passer tout d'abord par la résolution linéaire des structures proposées.

Dans un programme de résolution linéaire, nous joignons des parties liées à la méthode de calcul élastoplastique que nous avons choisie pour notre travail : la méthode des rotules plastiques. Le programme de résolution linéaire constitue de ce fait le noyau du programme non-linéaire et suit les étapes logiques classiques de calcul par éléments finis qui sont citées ci-dessous :

- Définir les nœuds, les éléments et les connexions (créer le maillage)
- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$.
- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K]\{U\}=\{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites.
- Résoudre le système $[K]\{U\}=\{F\}$ et obtenir les déplacements et les efforts aux nœuds.

Dans ce chapitre, nous présentons la structure générale du programme informatique réalisé, sa mise en œuvre ainsi que les résultats obtenus suite à son exécution dans les domaines linéaire et non linéaire sur un ensemble de structures formées de poutres.

6.2. Organisation générale et programmation

Le programme de la partie linéaire développé dans cette étude en langage FORTRAN 90 est une adaptation du code de calcul CASEF, élaboré par Dr DJEGHABA Kamel [DJE 90], et basé principalement sur la méthode des éléments finis.

Notre intervention réside dans l'amélioration de certaines sous-routines pour la partie linéaire en utilisant Microsoft Fortran Power Station 4.0, et l'élaboration du programme complet quant à l'introduction de la formulation de l'élastoplasticité par la méthode des rotules plastiques.

L'exécution du programme général implémenté s'effectue selon l'organigramme de la Figure 6.1. L'exécution du programme élastoplastique par la méthode des rotules plastiques s'effectue selon l'organigramme de la Figure 5.7 du chapitre précédent.

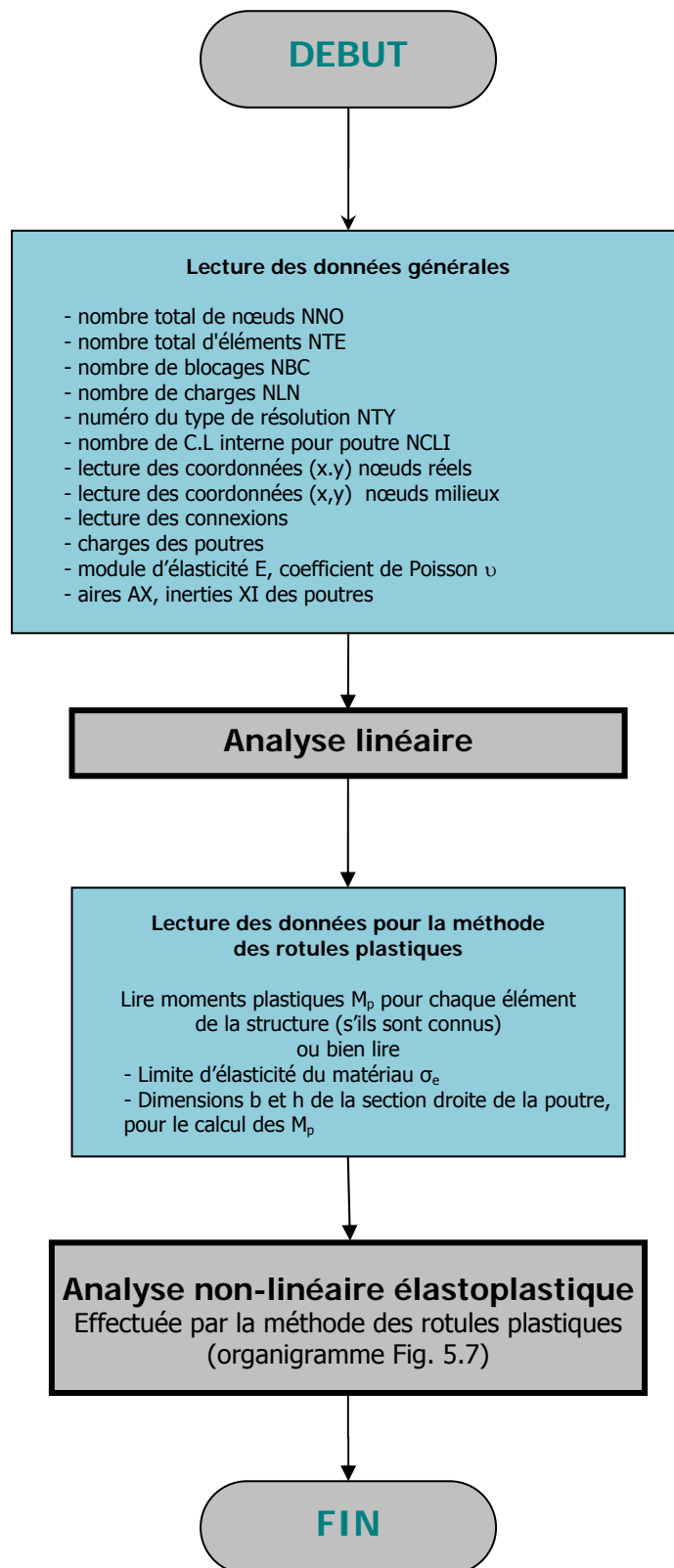


Figure 6.1. Organigramme général du programme de calcul EF (Eléments Finis)

6.3. Organisation du programme de résolution linéaire

6.3.1. Lecture des données

Le lancement du programme s'effectue par le biais d'un fichier de données dans lequel se trouvent les informations relatives à l'état des nœuds (nombre de nœuds, lecture des coordonnées des nœuds, conditions aux limites...), celles concernant les éléments (nombre d'éléments, connectivités, coefficients et propriétés physiques des matériaux E, ν ...).

Le fichier de données reste indépendant du programme général afin de faciliter l'intervention sur le changement des paramètres de la structure à étudier, sans devoir intervenir sur les instructions du programme.

6.3.2. Construction de la matrice de rigidité [K] et du vecteur force {F}

C'est une étape importante et utile pour les prochaines phases de calcul, elle se résume en :

- la construction de la matrice de rigidité élémentaire [Ke] pour chaque élément de la structure,
- assemblage de l'ensemble des matrices de rigidité élémentaires pour former la matrice de rigidité globale [K] de la structure,
- sauvegarde de la rigidité sur un fichier,
- formation du vecteur {F} pour l'élément de type poutre avec prise en compte des conditions aux limites,
- assemblage des forces nodales et calcul des forces nodales équivalentes dans le repère global.

6.3.3. Résolution du système d'équations linéaires

- Résolution du système d'équation $[K]\{U\}=\{F\}$,
- Calcul des déplacements aux nœuds U, V et la rotation θ ,
- Equilibre des nœuds et des réactions,
- Calcul des efforts dans les éléments, effort normal N, effort tranchant T et moment fléchissant M_0 .
- Impression des résultats.

6.4. Validation des résultats de la partie linéaire

Pour les exemples traités, nous avons choisi de calculer l'erreur relative

Erreur (%) = $100 \cdot (X_{\text{numérique}} - X_{\text{analytique}}) / X_{\text{analytique}}$ (avec X=U, V ou θ) [SEG 04]

et cela pour mieux visualiser la performance du programme EF.

6.4.1. Exemples traités

6.4.1.1. Poutre console sollicitée par une charge transversale

Il s'agit de l'exemple très simple d'une poutre console soumise, à son extrémité, à une charge transversale et dont les caractéristiques sont données sur la figure 6.2

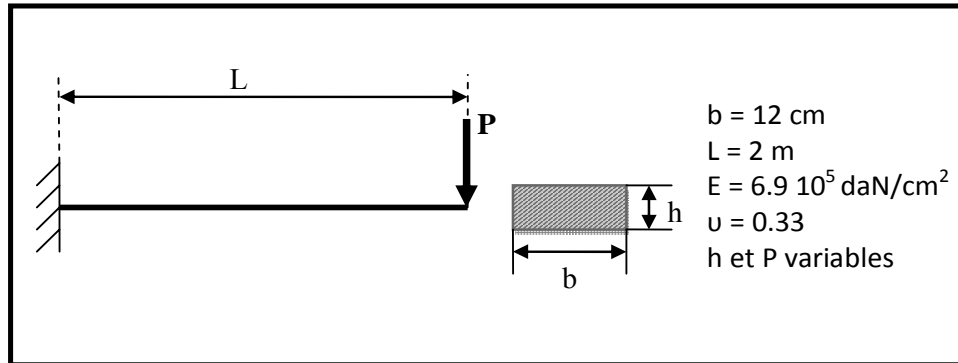


Figure 6.2. Données générales d'une poutre console sollicitée par une charge transversale

b (cm)	h (cm)	S (cm ²)	P (daN)	I _y (cm ⁴)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)	θ SAP (rad)	θ MEF (rad)	Erreur (%)
12	10	120	10	1.00E+03	-3.87E-02	-3.86E-02	0%	-2.90E-04	-2.90E-04	0%
12	10	120	15	1.00E+03	-5.81E-02	-5.80E-02	0%	-4.35E-04	-4.35E-04	0%
12	10	120	20	1.00E+03	-7.74E-02	-7.73E-02	0%	-5.80E-04	-5.80E-04	0%
12	10	120	25	1.00E+03	-9.68E-02	-9.66E-02	0%	-7.25E-04	-7.25E-04	0%
12	10	120	30	1.00E+03	-1.16E-01	-1.16E-01	0%	-8.70E-04	-8.70E-04	0%
12	10	120	35	1.00E+03	-1.36E-01	-1.35E-01	0%	-1.01E-03	-1.01E-03	0%
12	10	120	40	1.00E+03	-1.55E-01	-1.55E-01	0%	-1.16E-03	-1.16E-03	0%
12	10	120	45	1.00E+03	-1.74E-01	-1.74E-01	0%	-1.30E-03	-1.30E-03	0%
12	10	120	50	1.00E+03	-1.94E-01	-1.93E-01	0%	-1.45E-03	-1.45E-03	0%
12	10	120	55	1.00E+03	-2.13E-01	-2.13E-01	0%	-1.59E-03	-1.59E-03	0%

Tableau 6.1. Résultats de l'analyse linéaire d'une poutre console sollicitée par une charge transversale variable

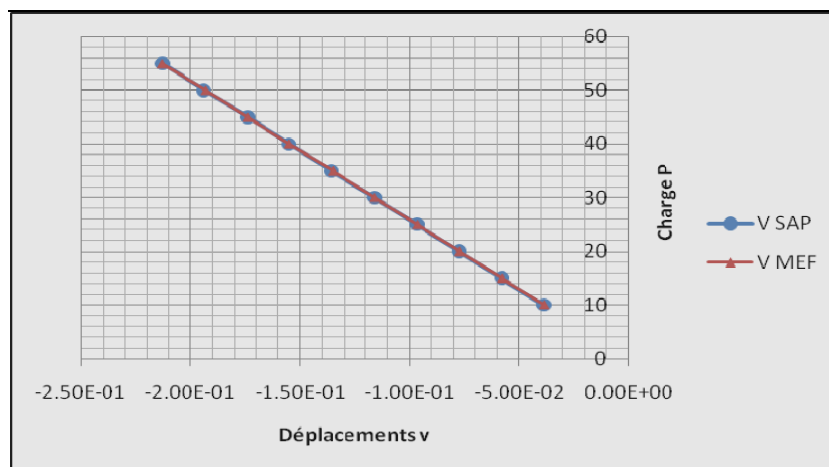


Figure 6.3. Courbe Charge-Déplacement d'une poutre console sollicitée par une charge transversale

b (cm)	h (cm)	S (cm ²)	P (daN)	I _y (cm ⁴)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)	θ SAP (rad)	θ MEF (rad)	Erreur (%)
12	10	120	10	1.00E+03	-3.87E-02	-3.86E-02	0%	-2.90E-04	-2.90E-04	0%
12	11	132	10	1.33E+03	-2.91E-02	-2.91E-02	0%	-2.18E-04	-2.18E-04	0%
12	12	144	10	1.73E+03	-2.24E-02	-2.23E-02	0%	-1.68E-04	-1.68E-04	0%
12	13	156	10	2.20E+03	-1.77E-02	-1.76E-02	1%	-1.32E-04	-1.32E-04	0%
12	14	168	10	2.74E+03	-1.41E-02	-1.41E-02	0%	-1.06E-04	-1.06E-04	0%
12	15	180	10	3.38E+03	-1.15E-02	-1.14E-02	1%	-8.58E-05	-8.58E-05	0%
12	16	192	10	4.10E+03	-9.50E-03	-9.43E-03	1%	-7.07E-05	-7.07E-05	0%
12	17	204	10	4.91E+03	-7.87E-03	-7.87E-03	0%	-5.90E-05	-5.90E-05	0%
12	18	216	10	5.83E+03	-6.70E-03	-6.63E-03	1%	-4.97E-05	-4.97E-05	0%
12	19	228	10	6.86E+03	-5.70E-03	-5.63E-03	1%	-4.23E-05	-4.23E-05	0%

Tableau 6.2 Résultats de l'analyse linéaire d'une poutre console de hauteur h variable sollicitée par une charge transversale

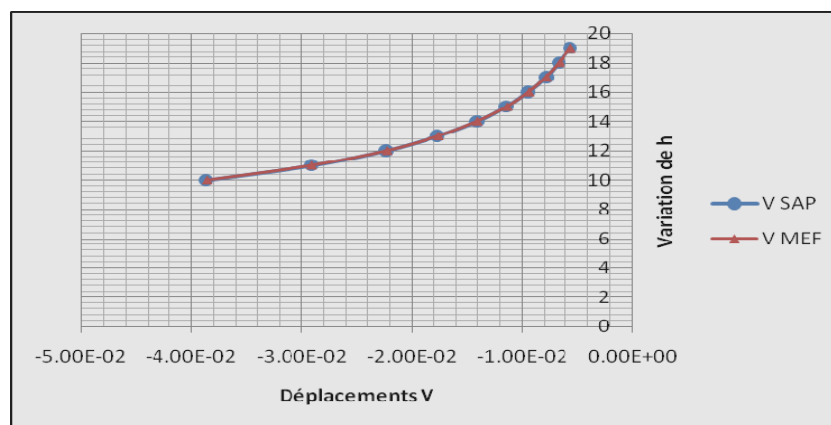


Figure 6.4. Courbe Hauteur-Déplacement d'une poutre console sollicitée par une charge transversale

Commentaires : Pour démontrer l'efficacité du programme proposé en analyse linéaire, nous avons choisi de faire varier une première fois la charge P et une seconde fois la hauteur h de la poutre, les résultats analytiques (obtenus par le logiciel SAP 2000 Version 9) qu'on appellera d'ailleurs résultats « SAP », et les résultats numériques « MEF » sont respectivement reportés sur les tableaux 6.1 et 6.2 ci-dessus avec illustration de la concordance des résultats analytiques et numérique sur les graphes 6.3 et 6.4.

Nous avons modélisé cette poutre avec un seul élément à deux nœuds et les résultats donnant l'évolution des déplacements V en fonction de la charge P puis en fonction de la hauteur h de la poutre sont pratiquement identiques aux résultats analytiques, le calcul de l'erreur relative montre bien la cohérence des résultats obtenus.

6.4.1.2. Cadre de LEE

Cet exemple est considéré par de nombreux chercheurs comme particulièrement intéressant (figure 6.5). Une solution analytique montrant l'évolution du déplacement horizontal U et vertical V et de la rotation θ en fonction de la charge P est obtenue à l'aide du logiciel de calcul SAP2000 version 9. Ces résultats analytiques en analyse linéaire sont ensuite comparés aux résultats obtenus à l'aide du programme MEF proposé.

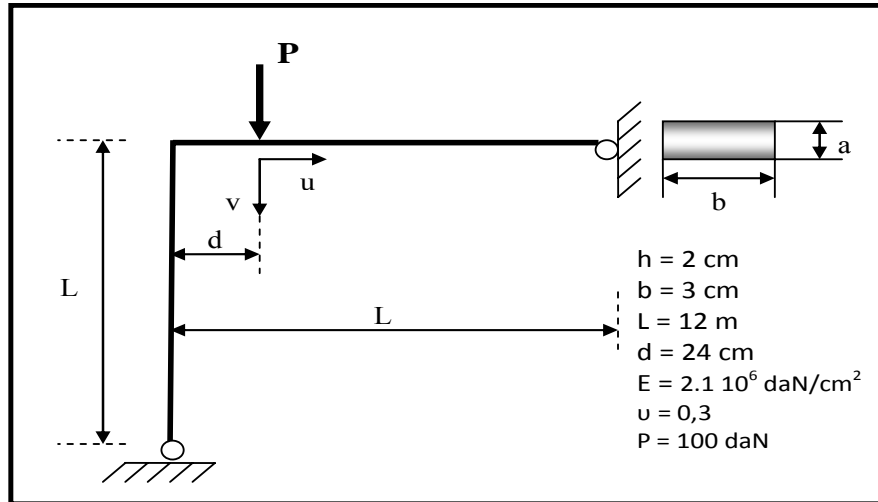


Figure 6.5. Données générales Cadre de LEE

Nous avons modélisé ce cadre avec 10 éléments en analyse linéaire et les résultats donnant l'évolution des déplacements U , V et θ en fonction de la charge $P=100$ daN appliquée au nœud 7 sont reportés sur le tableau 6.3.

Cadre de LEE 10 éléments $P=100$ daN

Numéro du Nœud	U SAP (cm)	U MEF (cm)	Erreur (%)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)	θ SAP (rad)	θ MEF (rad)	Erreur (%)
01	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.41090E-02	.41118E-02	0.1%
02	-.94720E-01	-.94736E-01	0%	-.17000E-03	-.16609E-03	2%	.36160E-02	.36184E-02	0.1%
03	-.16575E+00	-.16579E+00	0%	-.33218E-03	-.33218E-03	0%	.21360E-02	.21379E-02	0.1%
04	-.18942E+00	-.18946E+00	0%	-.50000E-03	-.49827E-03	0%	-.33100E-03	-.32956E-03	0.4%
05	-.14204E+00	-.14207E+00	0%	-.66436E-03	-.66436E-03	0%	-.37850E-02	-.37840E-02	0%
06	.70000E-04	.68540E-04	2%	-.83044E-03	-.83044E-03	0%	-.82254E-02	-.82254E-02	0%
07	.54800E-04	.54832E-04	0%	-.21013E+00	-.20963E+00	0%	-.71811E-02	-.71811E-02	0%
08	.41124E-04	.41124E-04	0%	-.30511E+00	-.30471E+00	0%	-.10340E-02	-.10355E-02	0.1%
09	.27416E-04	.27416E-04	0%	-.27365E+00	-.27338E+00	0%	.33560E-02	.33542E-02	0.1%
10	.13708E-04	.13708E-04	0%	-.15790E+00	-.15776E+00	0%	.59910E-02	.59880E-02	0.1%
11	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.68690E-02	.68659E-02	0%

Tableau 6.3. Résultats de l'analyse linéaire Cadre de LEE 10 éléments pour $P=100$ daN

Nous avons ensuite modélisé ce cadre avec 20 éléments avec une charge P = 100 daN appliquée au nœud 13 de cette structure.

Cadre de LEE 20 éléments P=100 daN

Numéro du Nœud	U SAP (cm)	U MEF (cm)	Erreur (%)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)	θ SAP (rad)	θ MEF (rad)	Erreur (%)
01	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.41118E-02	.41118E-02	0%
02	-.48800E-01	-.48849E-01	0.1%	-.83040E-04	-.83044E-04	0%	.40000E-02	.39885E-02	0%
03	-.94700E-01	-.94736E-01	0.038%	-.18000E-03	-.16609E-03	8%	.36000E-02	.36184E-02	1%
04	-.13470E+00	-.13470E+00	0%	-.23000E-03	-.24913E-03	8%	.30000E-02	.30015E-02	0%
05	-.16579E+00	-.16579E+00	0%	-.310008E-03	-.33218E-03	7%	.21000E-02	.21379E-02	2%
06	-.18502E+00	-.18502E+00	0%	-.40000E-03	-.41522E-03	4%	.10000 E -02	.10275 E -02	2%
07	-.18946E+00	-.18946E+00	0%	-.50000E-03	-.49827E-03	0%	-.32000E-03	-.32956E-03	6%
08	-.17613E+00	-.17613E+00	0%	-.60000E-03	-.58131E-03	3%	-.19000E-02	-.19334E-02	2%
09	-.14207E+00	-.14207E+00	0%	-.69000E-03	-.66436E-03	4%	-.38000E-02	-.37840E-02	0%
10	-.84325E-01	-.84325E-01	0%	-.74000E-03	-.74740E-03	1%	-.59000E-02	-.58813E-02	0%
11	.68530E-04	.68540E-04	0.015%	-.8000E-03	-.83044E-03	4%	-.82000E-02	-.82254E-02	0%
12	.61670E-04	.61686E-04	0.026%	-.10860E+00	-.10836E+00	0%	-.92000E-02	-.91980E-02	0%
13	.54820E-04	.54832E-04	0.022%	-.21010E+00	-.20963E+00	0%	-.72000E-02	-.71811E-02	0%
14	.47970E-04	.47978E-04	0.017%	-.27610E+00	-.27561E+00	0%	-.39000E-02	-.38888E-02	0%
15	.41124E-04	.41124E-04	0%	-.30510E+00	-.30471E+00	0%	-.10000E-02	-.10355E-02	4%
16	.34260E-04	.34270E-04	0.029%	-.30260E+00	-.30221E+00	0%	.14000E-02	.13788E-02	2%
17	.27416E-04	.27416E-04	0%	-.27370E+00	-.27338E+00	0%	.34000E-02	.33542E-02	1%
18	.20562E-04	.20562E-04	0%	-.22370E+00	-.22347E+00	0%	.49000E-02	.48906E-02	0%
19	.13710E-04	.13708E-04	0.015%	-.15790E+00	-.15776E+00	0%	.60000E-02	.59880E-02	0%
20	.68530E-05	.68540E-05	0.015%	-.81600E-01	-.81513E-01	0%	.66000E-02	.66465E-02	1%
21	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.69000E-02	.68659E-02	0%

Tableau 6.4. Résultats de l'analyse linéaire Cadre de LEE 20 éléments

Déplacements U et V du nœud 7 du cadre de Lee 10 éléments selon la variation de P=100 à 450 daN

Nous avons tracé une courbe représentative de la concordance des résultats obtenus en analyse linéaire effectuée par SAP2000 avec ceux obtenus par le Programme CASEF élaboré en FORTRAN. Le choix s'est arrêté sur les déplacements du nœud 7 de la structure la où est appliqué la charge P.

Charge P (daN)	U SAP (cm)	U MEF (cm)	Erreur (%)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)
100	.54800E-04	.54832E-04	0%	-.21013E+00	-.20963E+00	0%
150	.82230E-04	.82248E-04	0.02%	-.31520E+00	-.31444E+00	0.24%
200	1.10E-04	1.10E-04	0%	-4.20E-01	-4.19E-01	0.25%
250	1.37E-04	1.37E-04	0%	-5.25E-01	-5.24E-01	0.24%
300	1.65E-04	1.65E-04	0%	-6.30E-01	-6.29E-01	0.24%
350	1.92E-04	1.92E-04	0%	-7.34E-01	-7.34E-01	0.02%
400	2.10E-04	2.10E-04	0%	-8.41E-01	-8.39E-01	0.24%
450	2.48E-04	2.48E-04	0%	-9.50E-01	-9.48E-01	0.24%

Tableau 6.5. Comparaison des déplacements SAP-MEF du nœud 7 du Cadre de LEE en analyse linéaire

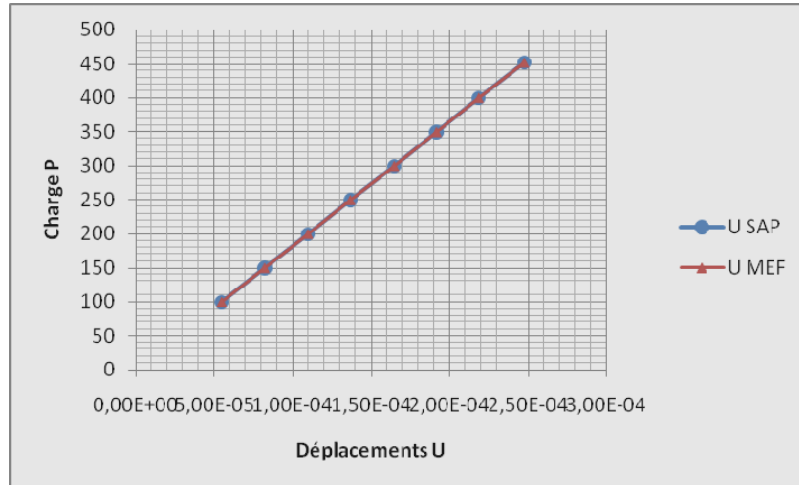


Figure 6.6. Courbe Charge-Déplacement U du nœud 7 du Cadre de LEE en analyse linéaire

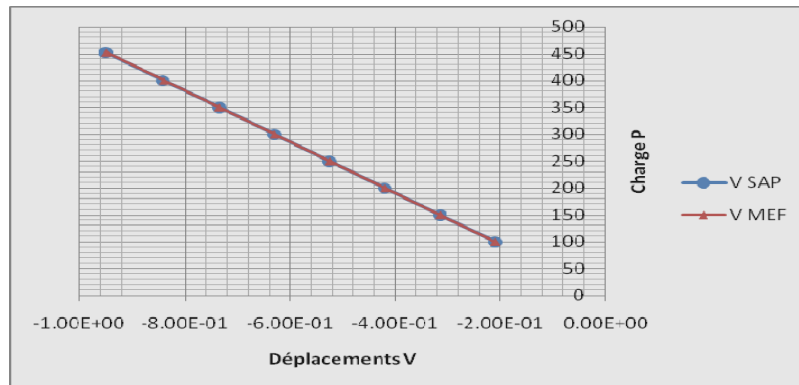
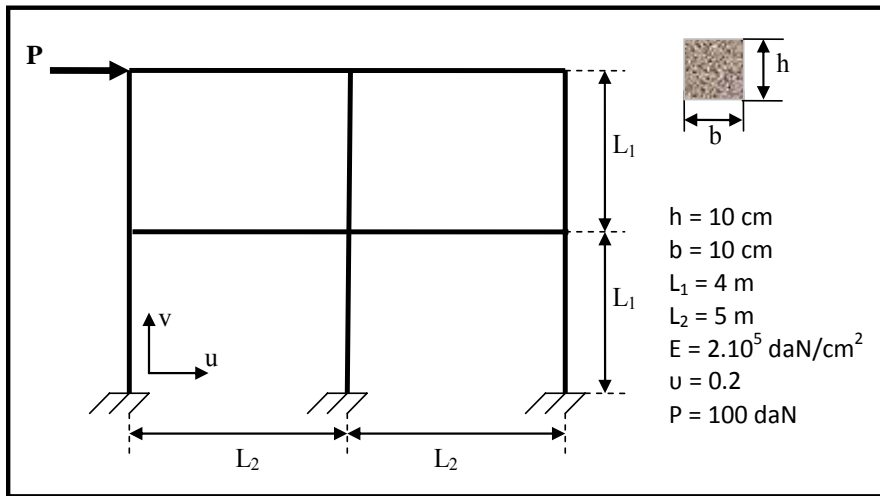


Figure 6.7. Courbe Charge-Déplacement V du nœud 7 du Cadre de LEE en analyse linéaire

Commentaires : Ces deux courbes montrent la concordance des résultats numériques avec les résultats analytiques avec un maillage de 10 éléments.

6.4.1.3. Portique à deux planchers et deux compartiments



Nous avons modélisé ce portique avec 10 éléments en analyse linéaire et les résultats donnant l'évolution des déplacements U , V et θ en fonction de la charge P appliquée au nœud 3 sont reportés sur le tableau 6.6.

Figure 6.8. Données générales Portique à deux planchers et deux compartiments

P=100 daN

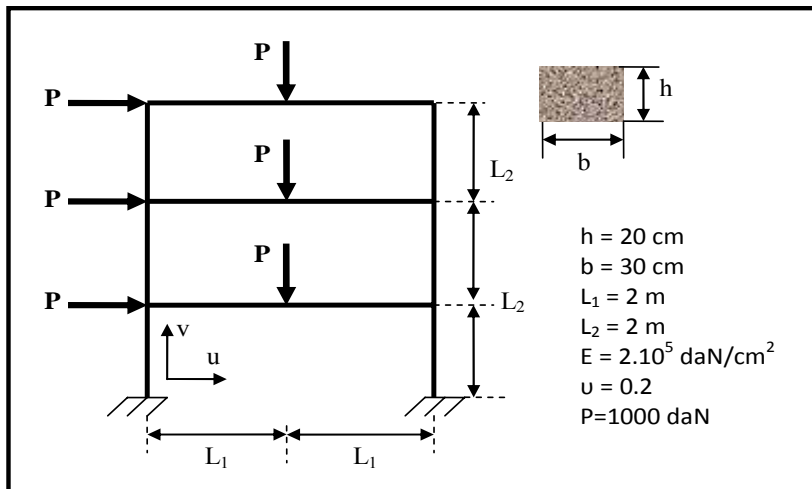
Numéro du Nœud	U SAP (cm)	U MEF (cm)	Erreur (%)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)	θ SAP (rad)	θ MEF (rad)	Erreur (%)
01	0.00E+00	0.00E+00	0%	0.00E+00	0.00E+00	0%	0.00E+00	0.00E+00	0%
02	1.94E-03	1.98E-03	2%	1.11E-04	1.11E-04	0%	-4.91E-05	-5.25E-05	7%
03	4.84E-03	4.76E-03	2%	1.55E-04	1.55E-04	0%	-3.80E-05	-4.06E-05	7%
04	0.00E+00	0.00E+00	0%	0.00E+00	0.00E+00	0%	0.00E+00	0.00E+00	0%
05	1.94E-03	1.99E-03	2%	-4.47E-06	-4.47E-06	0%	-3.31E-05	-3.48E-05	5%
06	4.58E-03	4.58E-03	0%	-7.30E-06	-7.30E-06	0%	-2.17E-05	-2.17E-05	0%
07	0.00E+00	0.00E+00	0%	0.00E+00	0.00E+00	0%	0.00E+00	0.00E+00	0%
08	1.94E-03	1.97E-03	2%	-1.10E-04	-1.06E-04	3%	-4.90E-05	-5.00E-05	2%
09	4.48E-03	4.52E-03	1%	-1.50E-04	-1.48E-04	1%	-3.49E-05	-3.62E-05	4%

Tableau 6.6. Résultats de l'analyse linéaire Portique à deux planchers et deux compartiments soumis à P=100 daN

Commentaires :

Les résultats numériques restent cohérents avec les résultats obtenus par SAP 2000.

6.4.1.4. Portique à trois planchers



Nous avons modélisé ce portique à trois planchers dont les caractéristiques sont définies dans la figure ci-contre avec 12 éléments en analyse linéaire.

Les résultats donnant l'évolution des déplacements U , V et θ en fonction de la charge $P=1000\text{daN}$ appliquée aux nœuds selon les plans horizontaux et verticaux sont reportés sur le tableau 6.7.

Figure 6.9. Données générales Portique à trois planchers

P = 1000 daN

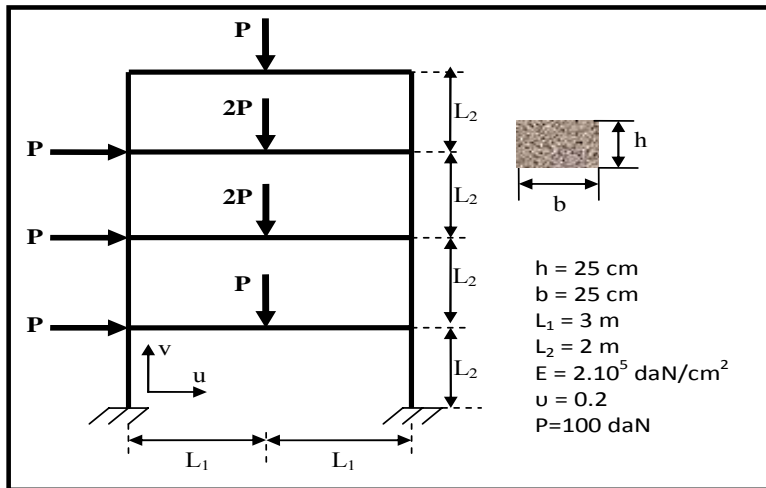
Numéro du Nœud	U SAP (cm)	U MEF (cm)	Erreur (%)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)	θ SAP (rad)	θ MEF (rad)	Erreur (%)
01	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%
02	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%
03	.5585E+00	.54885E+00	1,73%	.75050E-03	.75309E-03	0,35%	-.33000E-02	-.32341E-02	2,00%
04	.5570E+00	.54815E+00	1,59%	-.11140E+00	-.11110E+00	0,27%	.14000E-02	.14663E-02	4,74%
05	.55600E+00	.54744E+00	1,54%	-.59000E-02	-.57531E-02	2,49%	-.27288E-02	-.27288E-02	0%
06	.12660E+01	.12494E+01	1,31%	.85440E-03	.85692E-03	0,29%	-.24813E-02	-.24813E-02	0%
07	.12500E+01	.12488E+01	0,10%	-.99999E-01	-.99776E-01	0,22%	.11416E-02	.11416E-02	0%
08	.12650E+01	.12482E+01	1,33%	-.91902E-02	-.91902E-02	0%	-.22358E-02	-.22358E-02	0%
09	.17150E+01	.16930E+01	1,28%	.62578E-03	.62738E-03	0,26%	-.17000E-02	-.16912E-02	0,52%
10	.17130E+01	.16916E+01	1,25%	-.13378E+00	-.13388E+00	0,07%	.57566E-03	.57566E-03	0%
11	.17000E+01	.16902E+01	0,58%	-.10620E-01	-.10627E-01	0,07%	-.80000E-03	-.78024E-03	2,47%

Tableau 6.7. Résultats de l'analyse linéaire Portique à trois planchers soumis à $P=1000 \text{ daN}$

Commentaires :

L'erreur relative reste acceptable pour cette exemple également ce qui confirme l'efficacité du programme de calcul linéaire en élément fini dont les résultats sont quasi identiques à ceux obtenus par le Logiciel SAP2000 V9.

6.4.1.5. Portique à quatre planchers



Nous avons modélisé ce portique à trois planchers dont les caractéristiques sont définies dans la figure ci-dessus avec 16 éléments en analyse linéaire.

Les résultats donnant l'évolution des déplacements U , V et θ en fonction de la charge $P=100$ daN appliquée aux nœuds selon les plans horizontaux et verticaux sont reportés sur le tableau 6.8.

Figure 6.10. Données générales Portique à quatre planchers

P = 100 daN

Numéro du Nœud	U SAP (cm)	U MEF (cm)	Erreur (%)	V SAP (cm)	V MEF (cm)	Erreur (%)	θ SAP (rad)	θ MEF (rad)	Erreur (%)
01	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%
02	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%	.00000E+00	.00000E+00	0%
03	.55700E-01	.55950E-01	0,45%	-.11487E-03	-.11487E-03	0%	-.37180E-03	-.37180E-03	0%
04	.57925E-01	.55925E-01	3,45%	-.20800E-01	-.20362E-01	2,11%	.17540E-03	.17540E-03	0%
05	.56901E-01	.55901E-01	1,76%	-.84513E-03	-.84513E-03	0%	-.34000E-03	-.33711E-03	0,85%
06	.14282E+00	.14082E+00	1,40%	-.30000E-03	-.27239E-03	2,72%	-.38134E-03	-.38134E-03	0,00%
07	.14275E+00	.14075E+00	1,40%	-.42500E-01	-.41614E-01	2,08%	.17000E-03	.16705E-03	1,74%
08	.14067E+00	.14067E+00	0%	-.15000E-02	-.14876E-02	0,83%	-.29902E-03	-.29902E-03	0%
09	.21130E+00	.20857E+00	1,29%	-.38733E-03	-.38733E-03	0%	-.27059E-03	-.27059E-03	0%
10	.21120E+00	.20843E+00	1,31%	-.42136E-01	-.41136E-01	2,37%	.11344E-03	.11344E-03	0%
11	.21100E+00	.20829E+00	1,28%	-.18527E-02	-.18527E-02	0%	-.20000E-03	-.19784E-03	1,08%
12	.25350E+00	.25035E+00	1,24%	-.42274E-03	-.42274E-03	0%	-.16572E-03	-.16572E-03	0%
13	.25007E+00	.25007E+00	0%	-.23688E-01	-.23688E-01	0%	.61613E-04	.61613E-04	0%
14	.25290E+00	.24979E+00	1,23%	-.20000E-02	-.19773E-02	1,14%	-.96278E-04	-.96278E-04	0%

Tableau 6.8. Résultats de l'analyse linéaire Portique à quatre planchers soumis à P=100 daN

Commentaires :

Les résultats obtenus dans cet exemple viennent également confirmer et valider l'efficacité du programme élaboré en Fortran pour le calcul linéaire des structures formées de poutres.

6.4.2. Conclusion concernant la validation des exemples traités en analyse linéaire

Pour cette première partie du traitement des résultats dans le domaine linéaire nous pouvons constater que :

- Le programme informatique en langage Fortran présenté dans le cadre de cette étude donne des résultats satisfaisants qui sont en parfait accord avec les résultats analytiques obtenus par le logiciel SAP2000 dans le domaine linéaire. L'erreur relative est acceptable pour tous les exemples traités.
- Cette concordance des résultats du programme Fortran nous ouvre la possibilité d'aller vers le domaine élastoplastique et nous permet d'analyser des structures planes formées de poutres par la méthode des rotules plastiques en vue de suivre la propagation de la plastification étape par étape jusqu'à la ruine.

6.5. Organisation du programme de résolution élastoplastique par la méthode des rotules plastiques

6.5.1. Lecture des données

Le calcul élastoplastique des structures est introduit par un système conversationnel avant le lancement du calcul linéaire de la structure à étudier. Après la fin de l'exécution de la partie linéaire, le programme enchaîne avec le calcul élastoplastique en localisant la première rotule qui apparaît dans le système puis celles qui viennent ensuite successivement avec mise à jour de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément atteint puis mise à jour de la matrice globale de la structure à chaque étape de calcul jusqu'à la ruine de la structure survenant lorsque la matrice de rigidité globale de cette dernière devient singulière.

6.5.2. Exemples traités

6.5.2.1. Portique avec un membre incliné (3 éléments)

[WON 09]

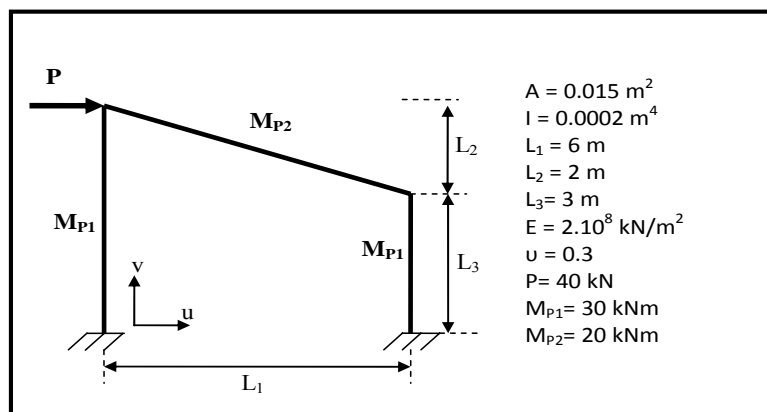


Figure 6.11. Données générales et chargement du portique avec un membre incliné

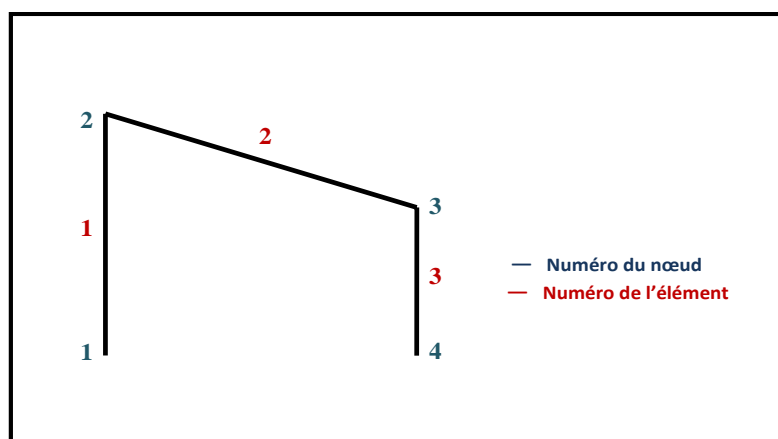


Figure 6.12. Maillage du portique avec un membre incliné

Localisation de la première rotule plastique

ETAPE 1

$$M_i=0$$

$$\lambda_{cr1} = 0.503$$

ELEMENT	NŒUD	M_0 (kN. m)	M_p (kN. m)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	$M_{PR} = M_p - M_{cr}$ (kN. m)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	Rotules formées
1	1	2.721E+01	3.0000E+01	1.10254	13.69	16.31	13.69	
	2	-2.175E+01	-3.0000E+01	1.37931	-10.94	-19.06	-10.94	
2	2	-2.175E+01	-2.0000E+01	0.91954	-10.94	-9.06	-10.94	
	3	3.100E+01	2.0000E+01	0.64516	15.60	4.40	15.60	
3	3	3.100E+01	3.0000E+01	0.96774	15.60	14.40	15.60	
	4	-5.962E+01	-3.0000E+01	0.50319	-30.00	0.00	-30.00	1

Tableau 6.9. Localisation de la première rotule plastique dans la structure Portique avec un membre incliné

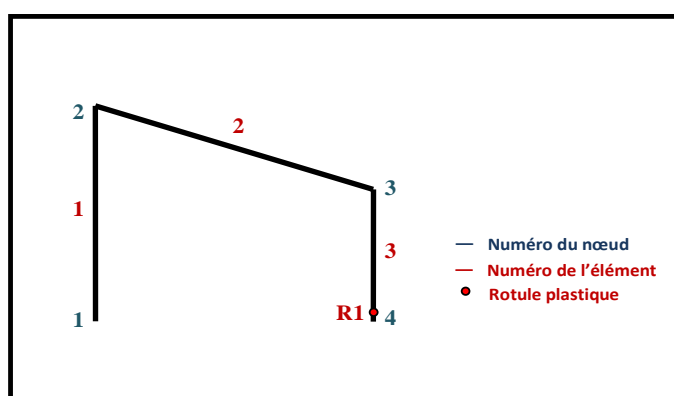


Figure 6.13. Position de la première rotule plastique apparaissant dans la structure

Commentaires :

L'exemple traité est extrait du livre intitulé « Plastic analysis and design of steel structures » [WON 09], nous avons choisi cet exemple afin d'expliquer l'exécution de la méthode des rotules plastiques et suivre ainsi la formation de rotules successives jusqu'à la ruine de la structure tout en comparant les résultats que nous avons obtenus avec ceux de la littérature. La première rotule plastique s'est formée au niveau du deuxième nœud de l'élément 3 de la structure correspondant au nœud 4 dans le repère global de la structure avec un facteur de charge critique égal à 0.503. Cela concorde parfaitement avec les résultats obtenus par [WON 09].

Localisation des rotules plastiques suivantes jusqu'à la ruine

La localisation des rotules plastique apparaissant dans la structure après formation de la première rotule s'est faite par le biais du programme EF en langage Fortran que nous avons développé dans le cadre de cette étude. Ce programme détecte la formation des rotules successives étape par étape en faisant à chaque étape la mise à jour de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément contenant une rotule et ce en introduisant des conditions limites internes aux nœuds rotulés, réassemble la matrice de rigidité globale de la structure, recalcule les moments, détermine le facteur de charge critique λ_{cr} puis détecte la position de la rotule

qui se forme en précisant le numéro de l'élément ainsi que la position 1 ou 2 du nœud concerné puis lui affecte le numéro du nœud correspondant dans le repère global.

ETAPE 2

$$\lambda_{cr2} = 0.084$$

ELEMENT	NCEUD	M ₀ (kN. m)	M _p (kN. m)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	M _{cr} = $\lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	M _{PR} = M _p - M _{cr} (kN. m)	M _{i+1} = M _i + $\lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	Rotules formées
1	1	6,51E+01	3,00E+01	0,25055	5,45	24,55	19,14	
	2	-4,72E+01	-3,00E+01	0,40346	-3,95	-26,05	-14,90	
2	2	-4,72E+01	-2,00E+01	0,19173	-3,95	-16,05	-14,90	
	3	5,26E+01	2,00E+01	0,08366	4,40	15,60	20,00	2
3	3	5,26E+01	3,00E+01	0,27373	4,40	25,60	20,00	
	4	0,00E+00	-3,00E+01	-	-	-30,00	-30,00	1

Tableau 6.10. Localisation de la deuxième rotule plastique dans la structure Portique avec un membre incliné

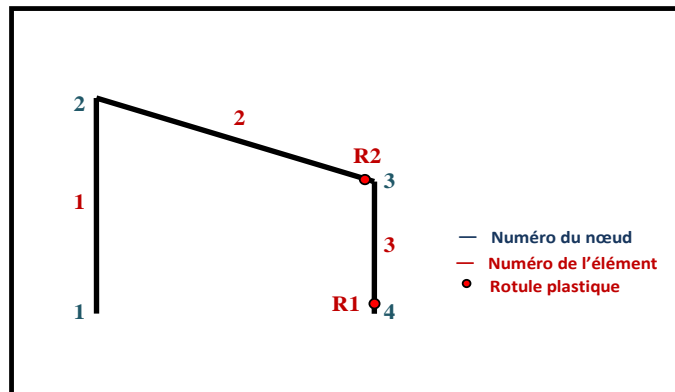


Figure 6.14. Position des deux rotules plastiques apparaissant dans la structure

Commentaires :

La deuxième rotule plastique s'est formée au niveau du deuxième nœud de l'élément 2 de la structure correspondant au nœud 3 dans le repère global de la structure avec un facteur de charge critique pour cette étape égal à 0.084. Ces mêmes résultats sont obtenus par [WON 09].

ETAPE 3

$$\lambda_{cr3} = 0.073$$

ELEMENT	NCEUD	M ₀ (kN. m)	M _p (kN. m)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	M _{cr} = $\lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	M _{PR} = M _p - M _{cr} (kN. m)	M _{i+1} = M _i + $\lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	Rotules formées
1	1	1,297E+02	3,00E+01	0,08375	9,42	20,58	28,55	
	2	-7,031E+01	-3,00E+01	0,21483	5,10-	24,90-	-20,00	
2	2	-7,031E+01	-2,00E+01	0,07260	5,10-	14,90-	-20,00	3
	3	0,000E+00	2,00E+01	-	-	20,00	20,00	2
3	3	0,000E+00	3,00E+01	-	-	30,00	20,00	
	4	0,000E+00	-3,00E+01	-	-	30,00-	-30,00	1

Tableau 6.11. Localisation de la troisième rotule plastique dans la structure Portique avec un membre incliné

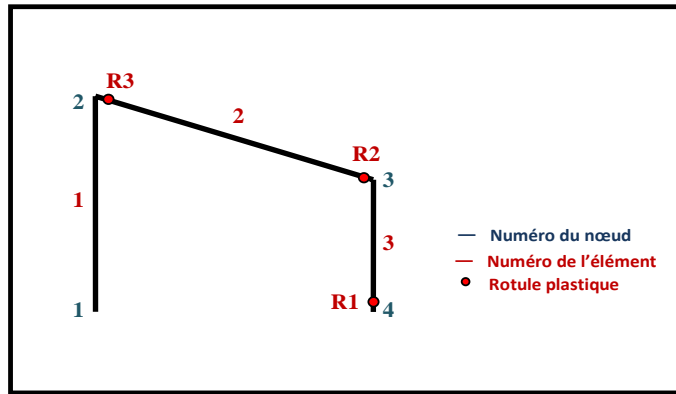


Figure 6.15. Position des trois rotules plastiques apparaissant dans la structure

Commentaires :

La troisième rotule plastique s'est formée au niveau du premier nœud de l'élément 2 de la structure correspondant au nœud 2 dans le repère global avec un facteur de charge critique pour cette étape égal à 0.073, cela correspond parfaitement aux résultats obtenus par [WON 09].

ETAPE 4

$\lambda_{cr4} = 0.00723$

ELEMENT	NŒUD	M_0 (kN. m)	M_p (kN. m)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	$M_{PR} = M_p - M_{cr}$ (kN. m)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	Rotules formées
1	1	2,00E+02	3,00E+01	0,00723	1,45	28,55	30,00	4
	2	0,00E+00	-3,00E+01	-	-	-30,00	-20,00	
2	2	0,00E+00	-2,00E+01	-	-	-20,00	-20,00	3
	3	0,00E+00	2,00E+01	-	-	20,00	20,00	2
3	3	0,00E+00	3,00E+01	-	-	30,00	20,00	
	4	0,00E+00	-3,00E+01	-	-	-30,00	-30,00	1

Tableau 6.12. Localisation de la quatrième rotule plastique dans la structure Portique avec un membre incliné

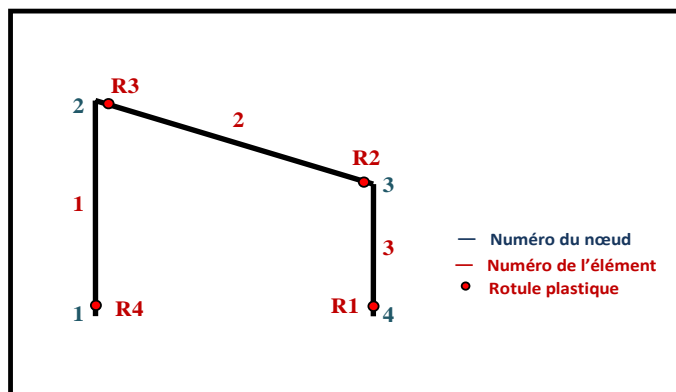


Figure 6.16. Position des quatre rotules plastiques apparaissant dans la structure

Commentaires :

La quatrième et dernière rotule plastique s'est formée au niveau du premier nœud de l'élément 1 de la structure correspondant au nœud 1 dans le repère global avec un facteur de charge critique pour cette dernière étape de calcul égal à 0.00723, après formation de cette dernière rotule, le programme s'arrête automatiquement après détection d'une matrice de rigidité singulière marquant ainsi l'atteinte de l'état de ruine de la structure.

Tableau récapitulatif de la formation de 4 rotules successives jusqu'à la ruine

Numéro de la rotule	Numéro de l'élément	Position du nœud dans le repère local	Numéro du nœud dans repère global	λ_{cr}	λ_{cr} cumulés	Charges critiques P_{cr} cumulées (kN)	Déplacements U du nœud 2 (m)	Déplacements $U_{cumulés}$ du nœud 2 (m)
1	3	2	4	0.503	0.503	20.12	.34E-02	.34E-02
2	2	2	3	0.084	0.587	23.48	.86E-02	1.20E-02
3	2	1	2	0.073	0.659	26.36	.19E-01	3.17E-02
4	1	1	1	0.0072	0.667	26.68	.41E-01	7.34E-02
$\sum \lambda_{cr}$				0.667				

Tableau 6.13. Formation des rotules successives jusqu'à la ruine

La charge de ruine du portique à un membre incliné est égale à :

$$P_{cr} = \sum \lambda_{cr} \cdot P = 0.667 \times 40 = 26.68 \text{ kN}$$

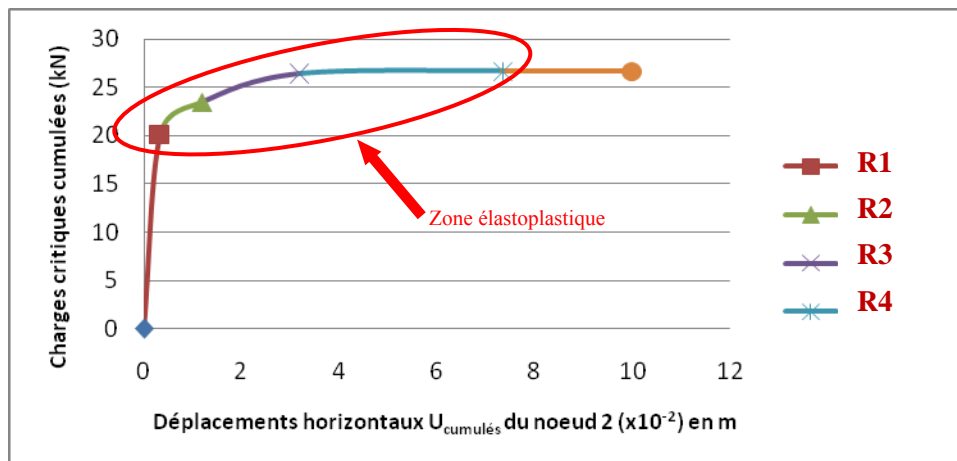


Figure 6.17. Courbe Charge-Déplacement horizontal cumulé du nœud 2

Commentaires

La ruine de la structure est survenue après formation de 4 rotules plastiques, 2 au niveau des poteaux et 2 au niveau du membre incliné. Le facteur de charge λ_{cr} total est égal à 0.667 donc la charge de ruine de cette structure vaut 26.68 kN avec un déplacement horizontal du nœud 2 équivalent à 7.34 cm. Les résultats obtenus sont identiques à ceux de [WON 09] ce qui confirme l'efficacité et l'exactitude du programme élaboré dans le cadre de cette étude.

6.5.2.2. Portique avec un membre incliné (6 éléments)

Dans ce qui suit, nous allons analyser la même structure précédente en affinant son maillage, nous passerons de trois à six éléments, par la suite nous allons traiter les résultats obtenus.

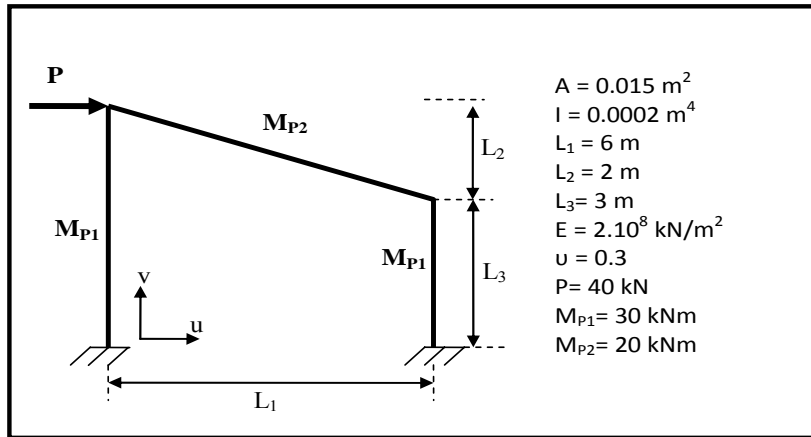


Figure 6.18. Données générales et chargement du portique avec un membre incliné

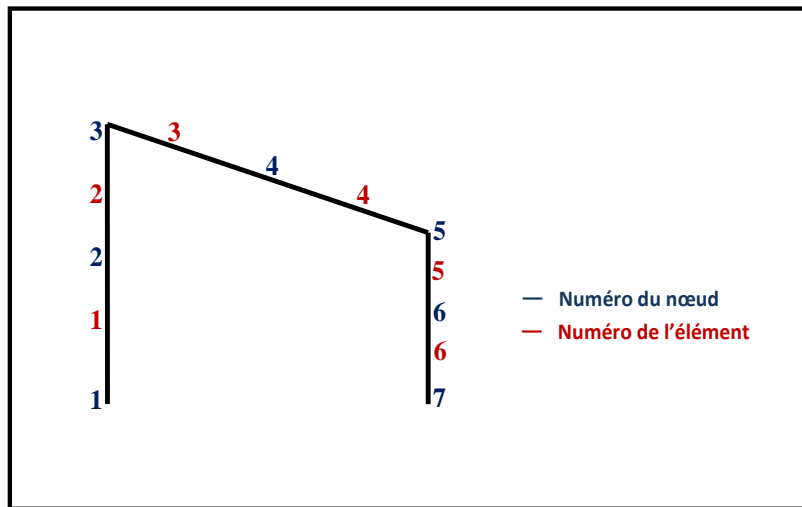


Figure 6.19. Maillage du portique avec un membre incliné

Localisation de la première rotule plastique

ETAPE 1

$$M_i=0$$

$$\lambda_{cr1} = 0.503$$

LEMENT	NCEUD	M_0 (kN. m)	M_p (kN. m)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	$M_{PR} = M_p - M_{cr}$ (kN. m)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN. m)	Rotules formées
1	1	.2721E+02	30	.1103E+01	.1369E+02	.1631E+02	.1369E+02	
	2	.2730E+01	30	.1099E+02	.1374E+01	.2863E+02	.1374E+01	
2	2	.2730E+01	30	.1099E+02	.1374E+01	.2863E+02	.1374E+01	
	3	-.2175E+02	30	.1380E+01	-.1094E+02	-.1906E+02	-.1094E+02	
3	3	-.2175E+02	20	.9197E+00	-.1094E+02	-.9059E+01	-.1094E+02	
	4	.4629E+01	20	.4320E+01	.2329E+01	.1767E+02	.2329E+01	
4	4	.4629E+01	20	.4320E+01	.2329E+01	.1767E+02	.2329E+01	
	5	.3100E+02	20	.6451E+00	.1560E+02	.4400E+01	.1560E+02	
5	5	.3100E+02	30	.9676E+00	.1560E+02	.1440E+02	.1560E+02	
	6	-.1431E+02	30	.2096E+01	-.7200E+01	-.2280E+02	-.7200E+01	
6	6	-.1431E+02	30	.2096E+01	-.7200E+01	-.2280E+02	-.7200E+01	
	7	-.5962E+02	30	.5032E+00	-.3000E+02	.0000E+00	-.3000E+02	1

Tableau 6.14. Localisation de la première rotule plastique dans la structure Portique avec un membre incliné

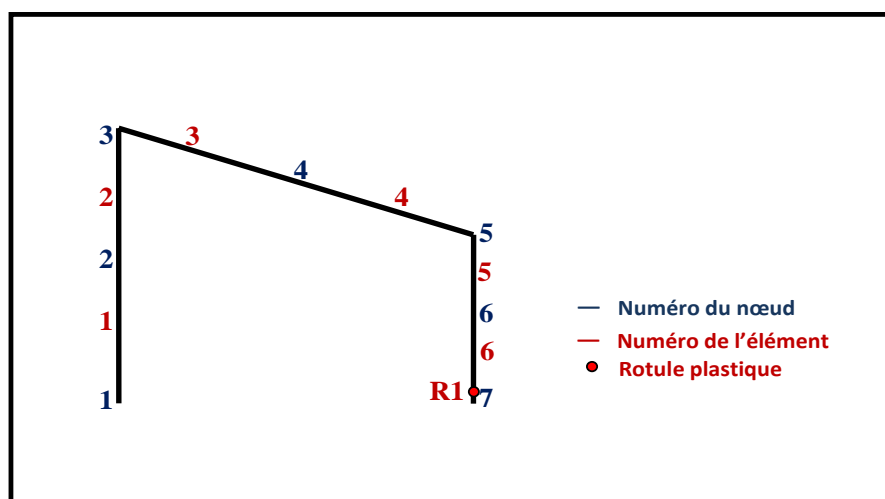


Figure 6.20. Position de la première rotule plastique apparaissant dans la structure

Commentaires :

La première rotule plastique s'est formée au même emplacement que pour le maillage de cette structure avec 3 éléments, le facteur de charge correspondant est également le même ayant une valeur de 0.503.

Localisation des rotules plastiques suivantes jusqu'à la ruine

Les résultats de l'analyse de la structure portique avec un membre incliné (à 6 éléments) par notre programme informatique sont les suivants :

Tableau récapitulatif de la formation de 4 rotules successives jusqu'à la ruine

Numéro de la rotule	Numéro de l'élément	Position du nœud dans le repère local	Numéro du nœud dans repère global	λ_{cr}	λ_{cr} cumulés	Charges critiques P_{Cr} cumulées (kN)	Déplacements U du nœud 3 (m)	Déplacements $U_{cumulés}$ du nœud 3 (m)
1	6	2	7	0.503	0.503	20.12	.34E-02	.34E-02
2	4	2	5	0.084	0.587	23.48	.86E-02	1.20E-02
3	3	1	3	0.073	0.659	26.36	.19E-01	3.17E-02
4	1	1	1	0.0072	0.667	26.68	.41E-01	7.34E-02
$\Sigma \lambda_{cr}$				0.667				

Tableau 6.15. Formation des rotules successives jusqu'à la ruine

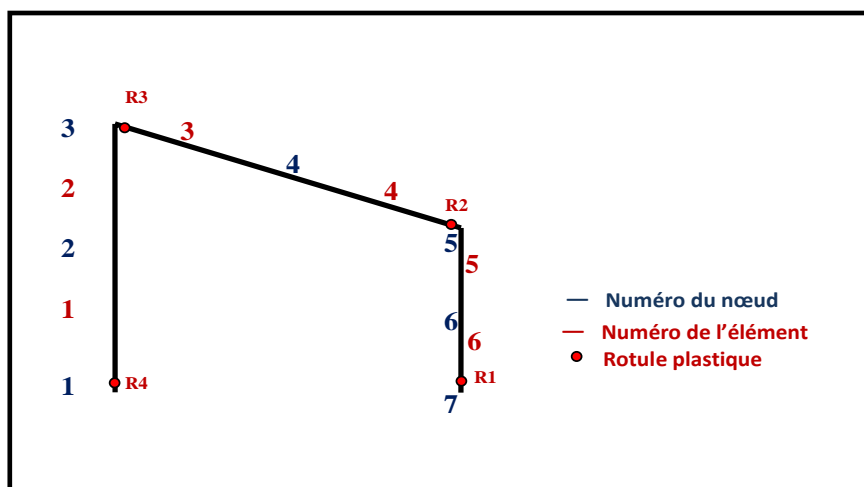


Figure 6.21. Position des rotules successives jusqu'à la ruine

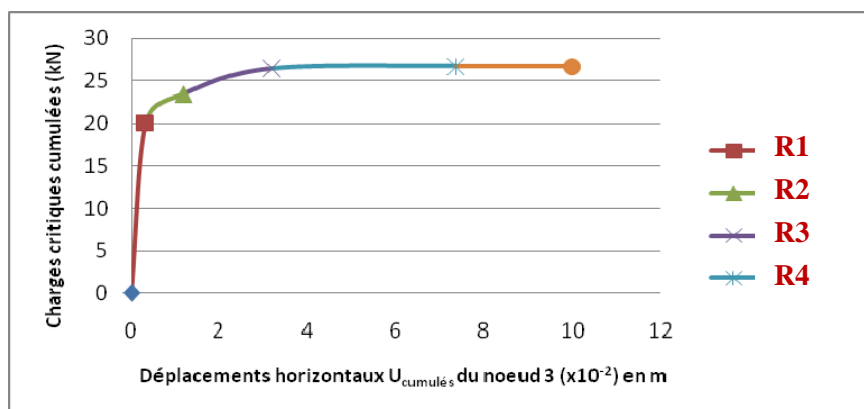


Figure 6.22. Courbe Charge-Déplacement horizontal cumulé du nœud 3

Commentaires

Les deux variantes du maillage respectif à 3 puis à 6 éléments de la structure portique avec un membre incliné donnent des résultats identiques. La charge de ruine de cette structure est $P_{Cr} = \sum \lambda_{cr} \cdot P = 0.667 \times 40 = 26.68 \text{ kN}$ et survient après formation de 4 rotules plastiques dans les emplacements indiqués sur les figures 6.16 et 6.21.

6.5.2.3. Portique à deux membres inclinés (7 éléments) [GHA03], [BOU06b]

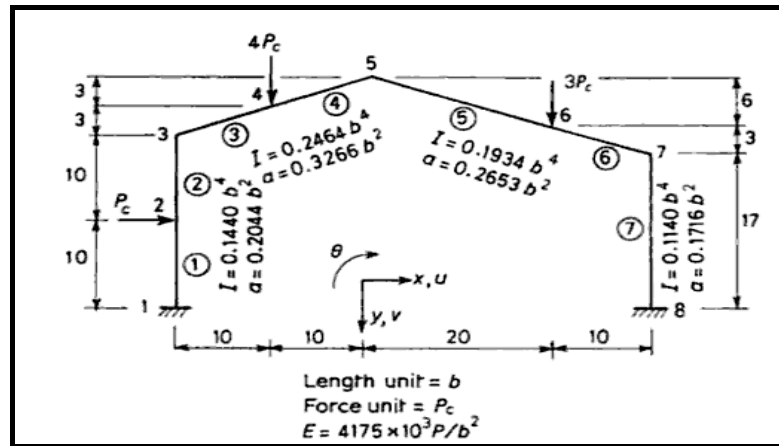


Figure 6.23. Données générales et chargement de la structure (image tirée de [GHA03])

Remarque : Nous avons choisi de garder pour cet exemple les unités anglo-saxonnes utilisées par [GHA 03] et [BOU 06b] afin de pouvoir comparer leurs résultats avec ceux obtenus par le notre programme.

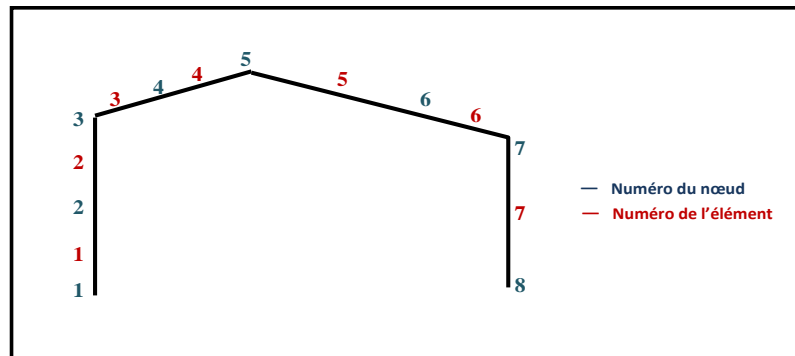


Figure 6.24. Maillage du portique à deux membres inclinés

Localisation de la première rotule plastique

ETAPE 1

$$M_i=0$$

$$\lambda_{cr1} = 34.459$$

ELEMENT	NŒUD	M_0 (kip. in)	M_p (kip. in)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	$M_{PR} = M_p - M_{cr}$ (kip. in)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	Rotules formées
1	1	-.7563E+01	-765	.1012E+03	-.2606E+03	-.5044E+03	-.2606E+03	
	2	.5615E+00	765	.1362E+04	.1935E+02	.7457E+03	.1935E+02	
2	2	.5615E+00	765	.1362E+04	.1935E+02	.7457E+03	.1935E+02	
	3	.1869E+02	765	.4094E+02	.6439E+03	.1211E+03	.6439E+03	
3	3	.1869E+02	1275	.6823E+02	.6439E+03	.6311E+03	.6439E+03	
	4	-.1295E+02	-1275	.9844E+02	-.4463E+03	-.8287E+03	-.4463E+03	
4	4	-.1295E+02	-1275	.9844E+02	-.4463E+03	-.8287E+03	-.4463E+03	
	5	-.4589E+01	-1275	.2779E+03	-.1581E+03	-.1117E+04	-.1581E+03	
5	5	-.4589E+01	-1015	.2212E+03	-.1581E+03	-.8569E+03	-.1581E+03	
	6	-.9612E+01	-1015	.1056E+03	-.3312E+03	-.6838E+03	-.3312E+03	
6	6	-.9612E+01	-1015	.1056E+03	-.3312E+03	-.6838E+03	-.3312E+03	
	7	.1788E+02	1015	.5678E+02	.6160E+03	.3990E+03	.6160E+03	
7	7	.1788E+02	616	.34459E+02	.6160E+03	.0000E+00	.6160E+03	1
	8	-.1293E+02	-616	.4762E+02	-.4457E+03	-.1703E+03	-.4457E+03	

Tableau 6.16. Localisation de la première rotule plastique dans la structure Portique à deux membres inclinés

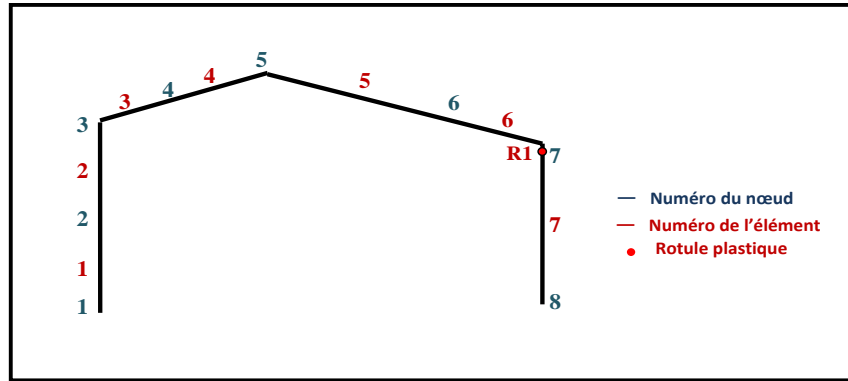


Figure 6.25. Position de la première rotule plastique apparaissant dans la structure

Commentaires :

La première rotule s’est formée au niveau du premier nœud de l’élément 7 soit au nœud 7 dans le repère global de la structure avec un facteur de charge critique égal à 34.459. Cela concorde parfaitement avec les résultats obtenus par [GHA 03] et [BOU 06b].

Localisation des rotules plastiques suivantes jusqu’à la ruine

ETAPE 2

$\lambda_{cr2} = 5.873$

ELEMENT	NŒUD	M_0 (kip. in)	M_p (kip. in)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	$M_{PR} = M_p - M_{cr}$ (kip. in)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	Rotules formées
1	1	.1413E+01	765	.7259E+03	.8298E+01	.7567E+03	-.2523E+03	
	2	.6016E+01	765	.1239E+03	.3534E+02	.7297E+03	.5468E+02	
2	2	.6016E+01	765	.1239E+03	.3534E+02	.7297E+03	.5468E+02	
	3	.2062E+02	765	.5873E+01	.1211E+03	.6439E+03	.7650E+03	2
3	3	.2062E+02	1275	.3061E+02	.1211E+03	.1154E+04	.7650E+03	
	4	-.1625E+02	-1275	-.5101E+02	-.9542E+02	-.1180E+04	-.5417E+03	
4	4	-.1625E+02	-1275	-.5101E+02	-.9542E+02	-.1180E+04	-.5417E+03	
	5	-.1311E+02	-1275	-.8517E+02	-.7702E+02	-.1198E+04	-.2351E+03	
5	5	-.1311E+02	-1015	-.6534E+02	-.7702E+02	-.9380E+03	-.2351E+03	
	6	-.2437E+02	-1015	-.2806E+02	-.1431E+03	-.8719E+03	-.4744E+03	
6	6	-.2437E+02	-1015	-.2806E+02	-.1431E+03	-.8719E+03	-.4744E+03	
	7	-.2842E-13	-1015	-.5739E+17	-.1669E-12	-.1015E+04	.6160E+03	
7	7	.0000E+00	616	-	-	.6160E+03	.6160E+03	1
	8	-.2483E+02	-616	-.6859E+01	-.1458E+03	-.4702E+03	-.5915E+03	

Tableau 6.17. Localisation de la deuxième rotule plastique dans la structure Portique à deux membres inclinés

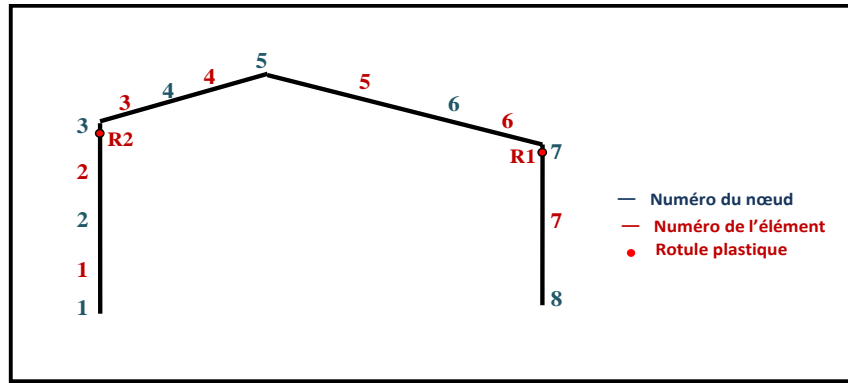


Figure 6.26. Position des deux rotules plastiques apparaissant dans la structure

ETAPE 3

$\lambda_{cr3} = 1.523$

ELEMENT	NCEUD	M_0 (kip. in)	M_p (kip. in)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	$M_{PR} = M_p - M_{cr}$ (kip. in)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	Rotules formées
1	1	-.8902E+01	-765	.5760E+02	-.1355E+02	-.7514E+03	-.2659E+03	
	2	-.9451E+01	-765	.8673E+02	-.1439E+02	-.7506E+03	.4029E+02	
2	2	-.9451E+01	-765	.8673E+02	-.1439E+02	-.7506E+03	.4029E+02	
	3	.0000E+00	765	-	-	.7650E+03	.7650E+03	2
3	3	-.5684E-13	-1275	.3589E+17	-.8656E-13	-.1275E+04	.7650E+03	
	4	-.3460E+02	-1275	.2119E+02	-.5268E+02	-.1222E+04	-.5944E+03	
4	4	-.3460E+02	-1275	.2119E+02	-.5268E+02	-.1222E+04	-.5944E+03	
	5	-.2920E+02	-1275	.3562E+02	-.4446E+02	-.1231E+04	-.2796E+03	
5	5	-.2920E+02	-1015	.2671E+02	-.4446E+02	-.9705E+03	-.2796E+03	
	6	-.2973E+02	-1015	.1818E+02	-.4527E+02	-.9697E+03	-.5196E+03	
6	6	-.2973E+02	-1015	.1818E+02	-.4527E+02	-.9697E+03	-.5196E+03	
	7	-.2842E-13	-1015	.5739E+17	-.4328E-13	-.1015E+04	.6160E+03	
7	7	.0000E+00	616	-	-	.6160E+03	.6160E+03	1
	8	-.1607E+02	-616	.15227E+01	-.2446E+02	-.5915E+03	-.6160E+03	3

Tableau 6.18. Localisation de la troisième rotule plastique dans la structure Portique à deux membres inclinés

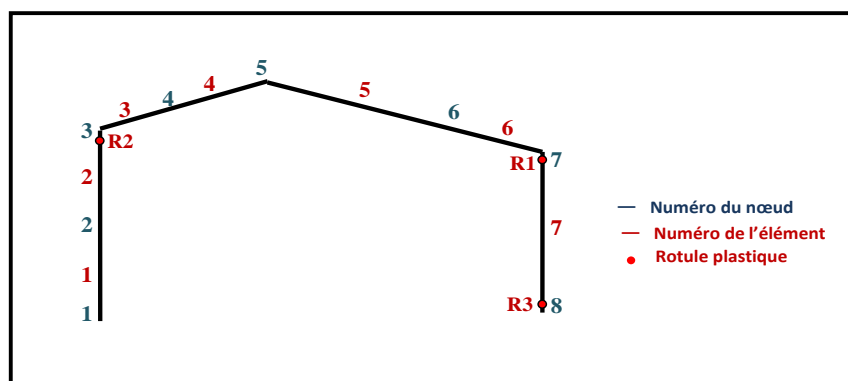


Figure 6.27. Position des trois rotules plastiques apparaissant dans la structure

ETAPE 4

$\lambda_{cr4} = 15.48$

ELEMENT	NŒUD	M ₀ (kip. in)	M _p (kip. in)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	M _{cr} = $\lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	M _{PR} = M _p - M _{cr} (kip. in)	M _{i+1} = M _i + $\lambda_{cr} \cdot M_0$ (kip. in)	Rotules formées
1	1	.1000E+02	765	.1031E+03	.1548E+03	.6102E+03	-.1111E+03	
	2	.1908E-11	765	.3799E+15	.2953E-10	.7650E+03	.4029E+02	
2	2	.1911E-11	765	.3792E+15	.2959E-10	.7650E+03	.4029E+02	
	3	.0000E+00	765	-	-	.7650E+03	.7650E+03	2
3	3	.4263E-13	1275	.1196E+17	.6600E-12	.1275E+04	.7650E+03	
	4	-.3800E+02	-1275	.1791E+02	-.5882E+03	-.6868E+03	-.1183E+04	
4	4	-.3800E+02	-1275	.1791E+02	-.5882E+03	-.6868E+03	-.1183E+04	
	5	-.3600E+02	-1275	.2765E+02	-.5573E+03	-.7177E+03	-.8369E+03	
5	5	-.3600E+02	-1015	.2043E+02	-.5573E+03	-.4577E+03	-.8369E+03	
	6	-.3200E+02	-1015	.15480E+02	-.4954E+03	-.5196E+03	-.1015E+04	5
6	6	-.3200E+02	-1015	.15480E+02	-.4954E+03	-.5196E+03	-.1015E+04	4
	7	.5684E-13	1015	.7019E+16	.8799E-12	.1015E+04	.6160E+03	
7	7	.0000E+00	616	-	-	.6160E+03	.6160E+03	1
	8	.0000E+00	616	-	-	.6160E+03	-.6160E+03	3

Tableau 6.19. Localisation de la quatrième et cinquième rotule plastique dans la structure

Portique à deux membres inclinés

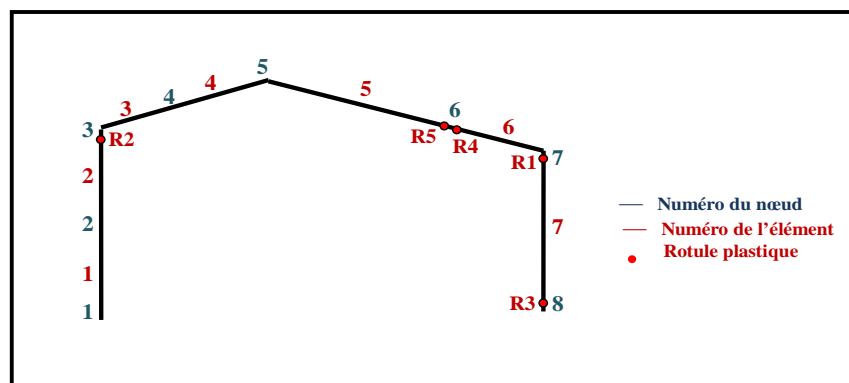


Figure 6.28. Position des cinq rotules plastiques apparaissant dans la structure

Tableau récapitulatif de la formation de 5 rotules successives jusqu'à la ruine

Numéro de la rotule	Numéro de l'élément	Position du nœud dans le repère local	Numéro du nœud dans repère global	λ_{cr}	λ_{cr} cumulés	Charges critiques P _{cr} cumulées (kip)	Déplacements U du nœud 3 (in)	Déplacements U _{cumulés} du nœud 3 (in)
1	7	1	7	34.459	34.459	34.459	-14.85 E03	-14.85 E03
2	2	2	3	5.873	40.332	40.332	-6.74 E03	-21.59 E03
3	7	2	8	1.523	41.855	41.855	-4.52 E03	-26.11 E03
4	6	1	6	15.480	57.335	57.335	-52.53 E03	-78.64 E03
5	5	2	6					
$\Sigma \lambda_{cr}$				57.335				

Tableau 6.20. Formation des rotules successives jusqu'à la ruine

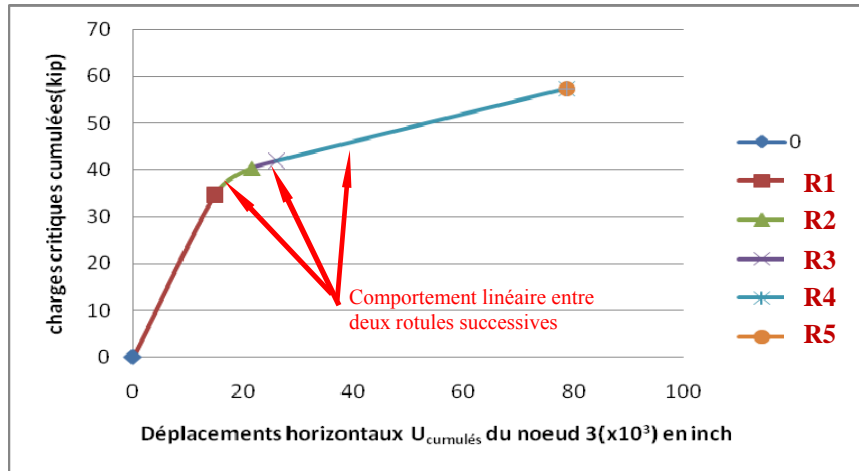


Figure 6.29. Courbe Charge-Déplacement horizontal cumulé du nœud 3

Commentaires :

L'exemple traité est extrait du livre intitulé « Structural analysis : a unified classical and matrix approach » [GHA 03], il a également été repris par [BOU 06b], après analyse de cet exemple par le programme « rotule plastique » sous une charge $P_c=1$ kip appliquée selon la figure 6.23, la ruine de la structure est survenue après formation de 5 rotules plastiques montrées sur la figure 6.28, dont deux rotules R4 et R5 formées simultanément. Le facteur de charge critique cumulé est égal à 57.335 d'où la charge de ruine équivaut 57.335 kips. Nous pouvons constater que les résultats obtenus par le biais de notre programme EF sont exactement identiques à ceux de [GHA 03] et [BOU 06b] chose qui confirme l'efficacité de ce dernier.

La courbe charge-déplacement du nœud 3 de notre portique montrée sur la figure 6.29 confirme bien le comportement linéaire entre deux rotules successives.

6.5.2.4. Portique simple bi-encastré (4 éléments)

[MAS 61]

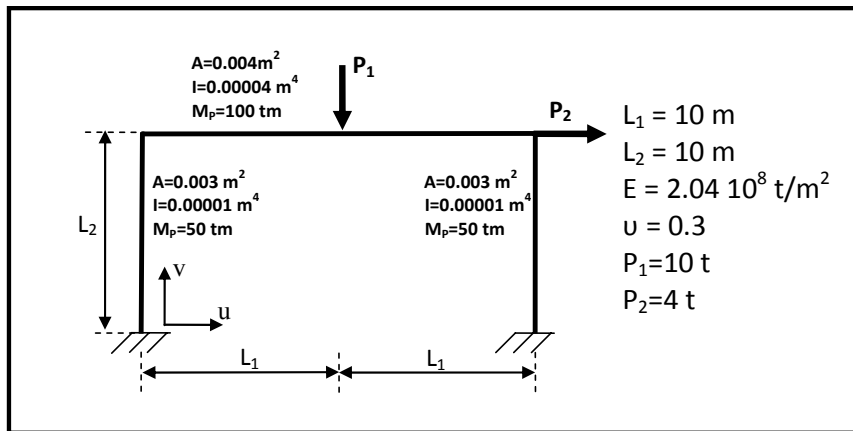


Figure 6.30. Données générales et chargement du portique

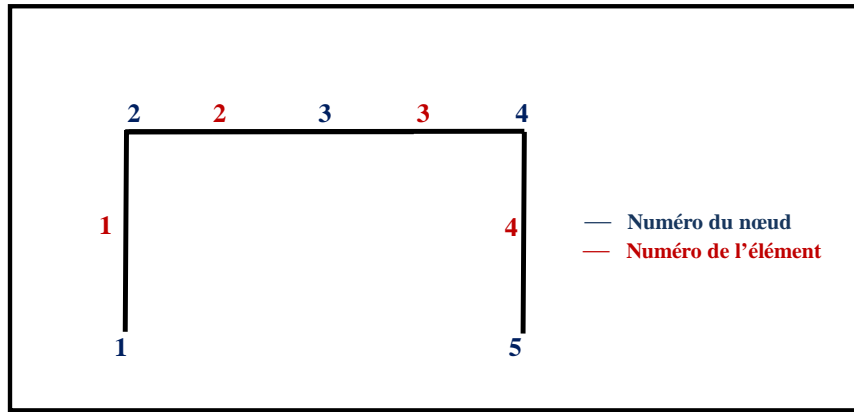


Figure 6.31. Maillage du portique

Localisation de la première rotule plastique

ETAPE 1 $M_i=0$ $\lambda_{cr1} = 2.301$

ELEMENT	NŒUD	M_0 (t.m)	M_P (t.m)	$\lambda = \frac{M_P - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (t.m)	$M_{PR} = M_P - M_{cr}$ (t.m)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (t.m)	Rotules formées
1	1	.4521E+01	50	.1106E+02	.1040E+02	.3960E+02	.1040E+02	
	2	.3273E+01	50	.1528E+02	.7531E+01	.4247E+02	.7531E+01	
2	2	.3273E+01	100	.3055E+02	.7531E+01	.9247E+02	.7531E+01	
	3	-.3750E+02	-100	.2667E+01	-.8629E+02	-.1371E+02	-.8629E+02	
3	3	-.3750E+02	-100	.2667E+01	-.8629E+02	-.1371E+02	-.8629E+02	
	4	.2173E+02	100	.4602E+01	.5000E+02	.5000E+02	.5000E+02	
4	4	.2173E+02	50	.2301E+01	.5000E+02	.0000E+00	.5000E+02	1
	5	-.1702E+02	-50	.2937E+01	-.3917E+02	-.1083E+02	-.3917E+02	

Tableau 6.21. Localisation de la première rotule plastique dans la structure portique simple

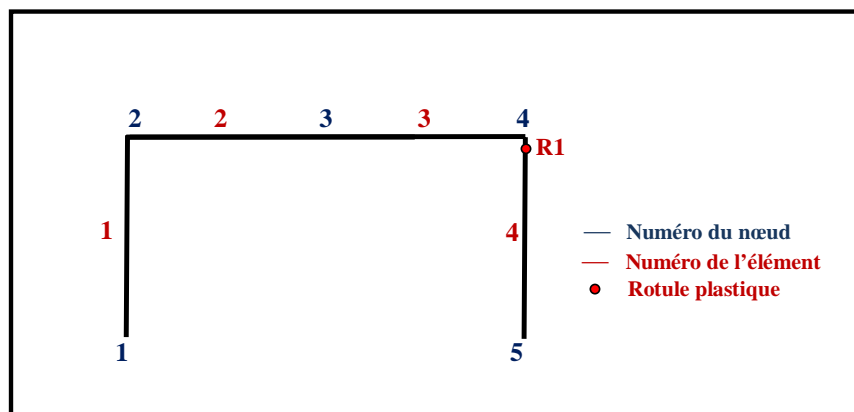


Figure 6.32. Position de la première rotule plastique apparaissant dans la structure

Commentaires

La première rotule qui s'est formée dans cette structure au niveau du premier nœud de l'élément 4 correspond au même cas traité par [MAS 61].

Tableau récapitulatif de la formation de 4 rotules successives jusqu'à la ruine

Numéro de la rotule	Numéro de l'élément	Position du nœud dans le repère local	Numéro du nœud dans repère global	λ_{cr}	λ_{cr} cumulés	Déplacements U du nœud 4 (m)	Déplacements $U_{cumulés}$ du nœud 4 (m)
1	4	1	4	2.301	2.301	.10064E+00	.10064E+00
2	3	1	3	0.262	2.563	.26918E+00	.36982E+00
3	3	4	2	0.069	2.632	.15516E+01	.19214E+01
4	1	1	1	0.226	2.86	.31056E+01	.502702E+00
$\Sigma \lambda_{cr}$				2.86			

Tableau 6.22. Position des rotules plastiques successives jusqu'à la ruine

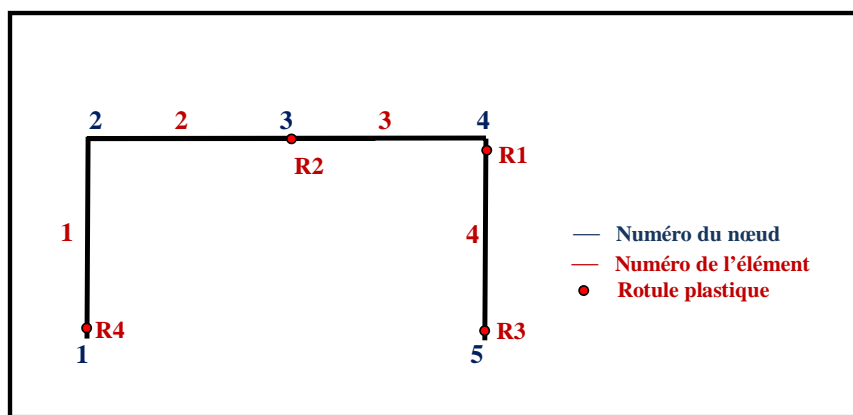


Figure 6.33. Position des rotules plastiques successives jusqu'à la ruine

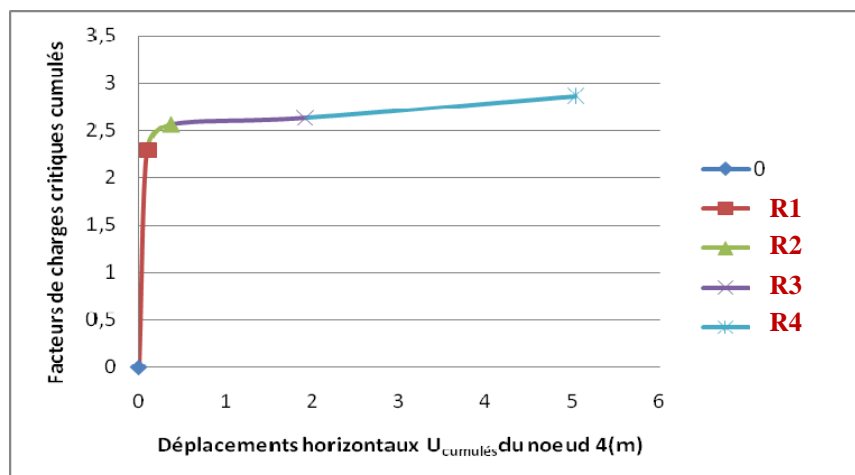


Figure 6.34. Courbe Facteurs de charges critiques -Déplacement horizontal cumulé du nœud 4

Commentaires

La ruine de la structure est survenue après formation de 4 rotules plastiques, 3 au niveau des poteaux et 1 au niveau de la poutre aux mêmes emplacements que ceux de [MAS 61], le facteur de charge λ_{cr} total est égal à 2.86 qui est une valeur très proche de celle obtenue par Massonnet.

6.5.2.5. Portique à deux compartiments (7 éléments)

[WON 09]

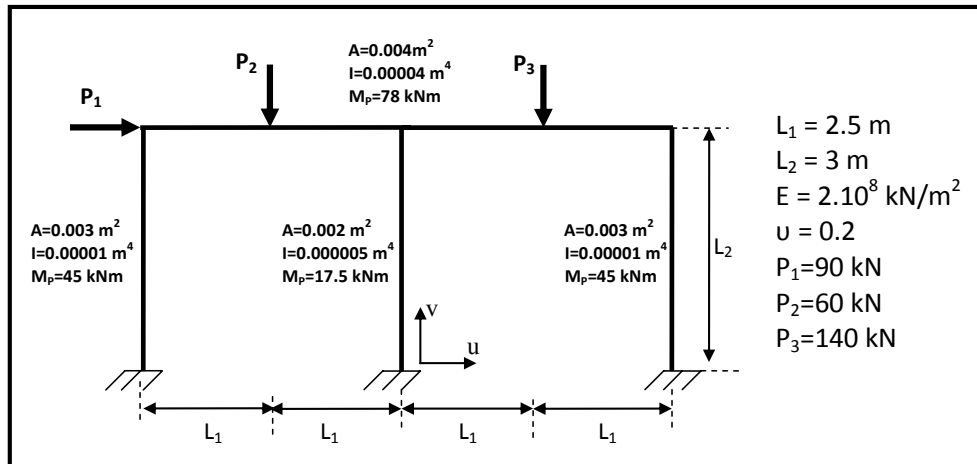


Figure 6.35. Données générales et chargement du portique à deux compartiments

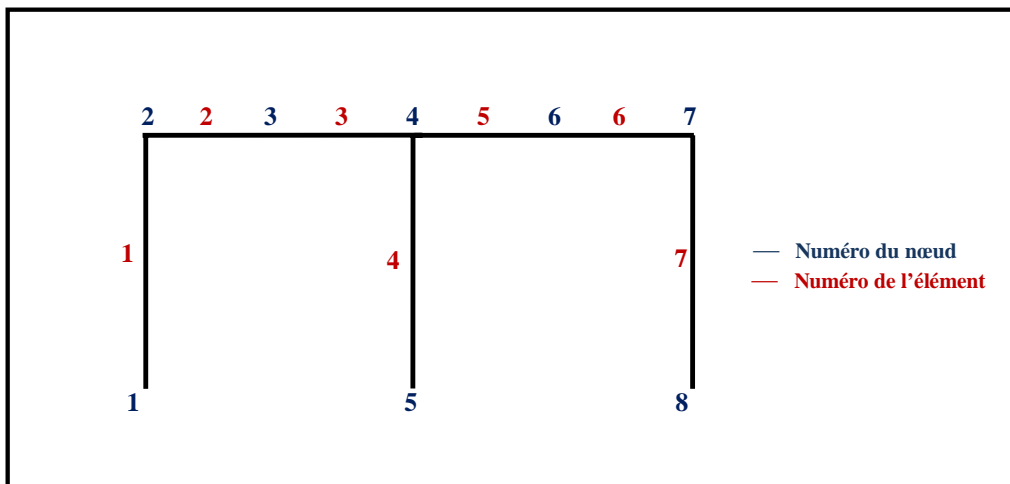


Figure 6.36. Maillage du portique à deux compartiments

Localisation de la première rotule plastique

ETAPE 1

$$M_i=0$$

$$\lambda_{cr1} = 0.624$$

ELEMENT	NŒUD	M_0 (kN.m)	M_p (kN.m)	$\lambda = \frac{M_p - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN.m)	$M_{PR} = M_p - M_{cr}$ (kN.m)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (kN.m)	Rotules formées
1	1	.4745E+02	45	.9484E+00	.2962E+02	.1538E+02	.2962E+02	
	2	-.3509E+02	-45	.1282E+01	-.2191E+02	-.2309E+02	-.2191E+02	
2	2	-.3509E+02	-78	.2223E+01	-.2191E+02	-.5609E+02	-.2191E+02	
	3	-.4481E+02	-78	.1741E+01	-.2798E+02	-.5002E+02	-.2798E+02	
3	3	-.4481E+02	-78	.1741E+01	-.2798E+02	-.5002E+02	-.2798E+02	
	4	.9546E+02	78	.8171E+00	.5960E+02	.1840E+02	.5960E+02	
4	4	.2338E+02	17.5	.7485E+00	.1460E+02	.2904E+01	.1460E+02	
	5	-.2651E+02	-17.5	.6601E+00	-.1655E+02	-.9476E+00	-.1655E+02	
5	4	.7208E+02	78	.1082E+01	.4500E+02	.3300E+02	.4500E+02	
	6	-.1029E+03	-78	.7579E+00	-.6426E+02	-.1374E+02	-.6426E+02	
6	6	-.1029E+03	-78	.7579E+00	-.6426E+02	-.1374E+02	-.6426E+02	
	7	.7208E+02	78	.1082E+01	.4500E+02	.3300E+02	.4500E+02	
7	7	.7208E+02	45	.6243E+00	.4500E+02	.0000E+00	.4500E+02	1
	8	-.6549E+02	-45	.6871E+00	-.4089E+02	-.4111E+01	-.4089E+02	

Tableau 6.23. Localisation de la première rotule plastique dans la structure portique à deux compartiments

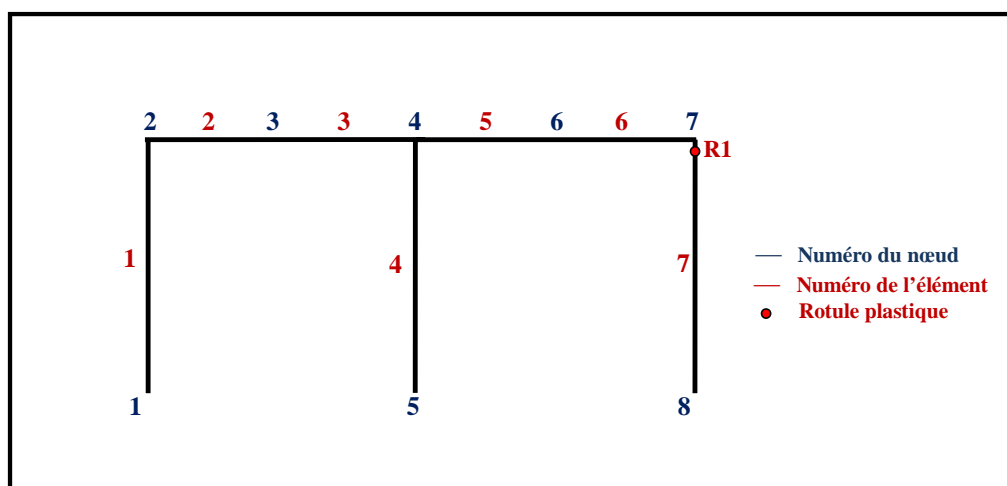


Figure 6.37. Position de la première rotule plastique apparaissant dans la structure

Commentaires

La première rotule qui s'est formée dans cette structure au niveau du premier nœud de l'élément 7 correspond au même cas traité par [WON 09] se qui confirme encore une fois l'efficacité du programme développé dans le cadre de notre étude.

Tableau récapitulatif de la formation de 9 rotules successives jusqu'à la ruine

Numéro de la rotule	Numéro de l'élément	Position du nœud dans le repère local	Numéro du nœud dans repère global	λ_{cr}	λ_{cr} cumulés	Déplacements U du nœud 2 (m)	Déplacements $U_{cumulés}$ du nœud 2 (m)
1	7	1	7	0.624	0.624	0.068	0.068
2	4	2	5	0.0224	0.646	0.088	0.156
3	7	2	8	0.0494	0.696	0.112	0.268
4	4	1	4	0.0257	0.721	0.131	0.399
5	6	1	6	0.0130	0.735	0.101	0.5
6	3	2	4	0.0122	0.747	0.111	0.611
7	1	1	1	0.0027	0.749	0.092	0.703
8	4	2	5	0.0023	0.752	0.093	0.796
9	1	2	2	0.017	0.769	0.100	0.9
$\Sigma \lambda_{cr}$				0.769			

Tableau 6.24. Position des rotules plastique successives jusqu'à la ruine

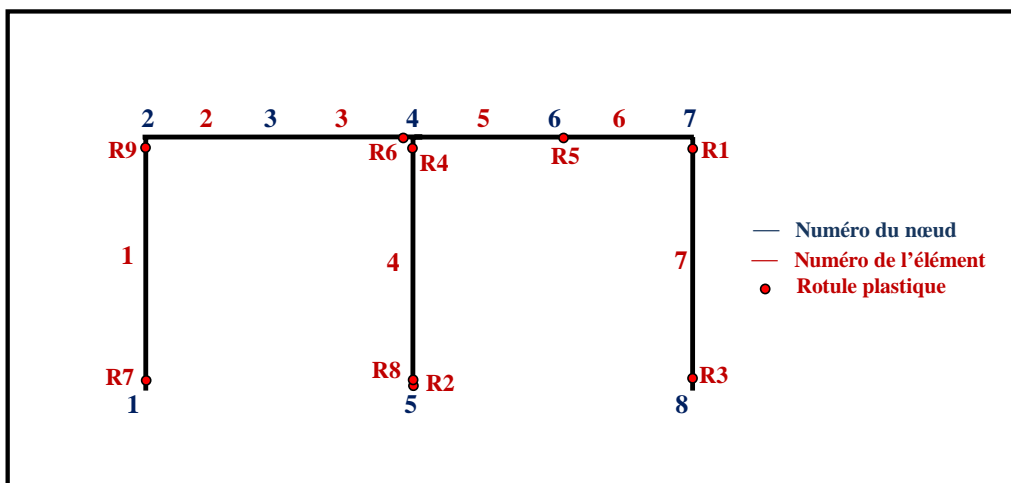


Figure 6.38. Position des rotules plastiques successives jusqu'à la ruine

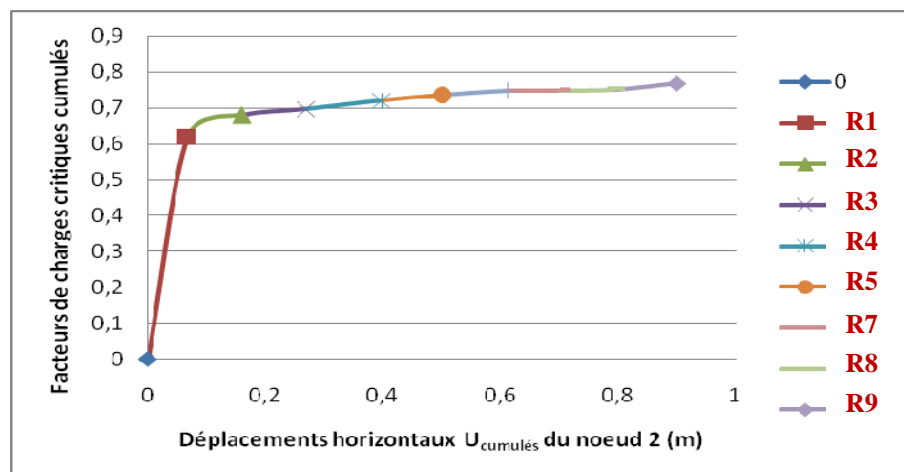


Figure 6.39. Courbe Facteurs de charges critiques -Déplacement horizontal cumulé du nœud 2

Commentaires

La ruine de la structure est survenue après formation de 9 rotules plastiques, 7 au niveau des poteaux et 2 au niveau des poutres. Le facteur de charge λ_{cr} total est égal à 0.769 avec un déplacement horizontal cumulé égal à 0.9 m au niveau du nœud 2. Les Résultats de l'analyse de cette structure sont cohérents avec ceux obtenus par [WON 09].

Nous soulignons également le caractère linéaire du comportement entre la formation de deux rotules plastiques successives.

6.5.2.6. Portique à trois planchers (12 éléments)

[BOU 06b]

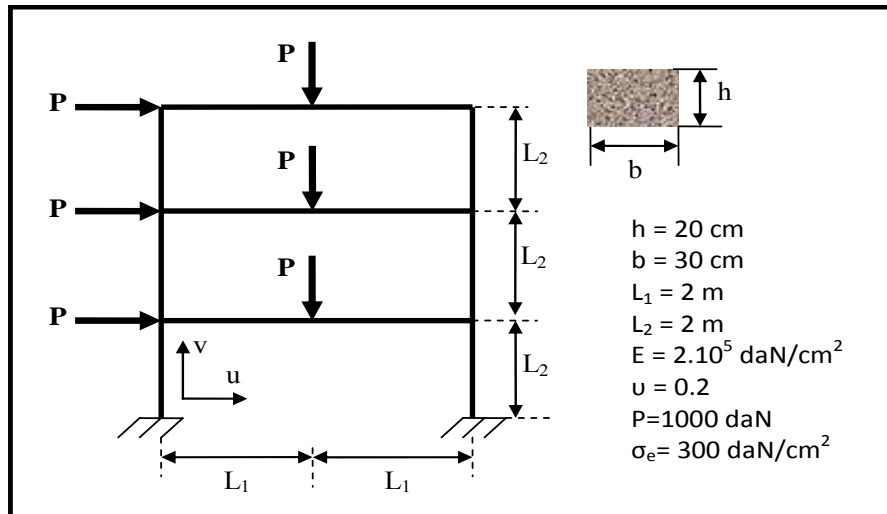


Figure 6.40. Données générales et chargement du portique à trois planchers

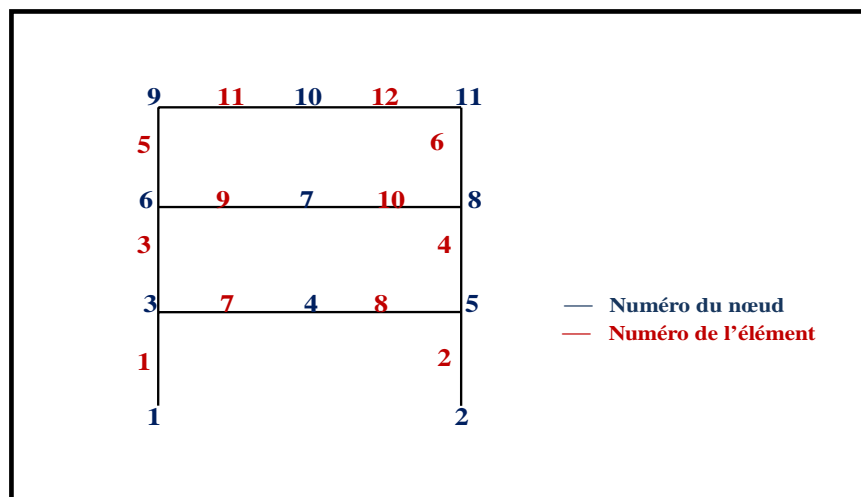


Figure 6.41. Maillage du portique à trois planchers

Localisation de la première rotule plastique

ETAPE 1		$M_i=0$			$\lambda_{cr1} = 4.04$			
ELEMENT	NCEUD	M_0 (daN.cm)	M_P (daN.cm)	$\lambda = \frac{M_P - M_i}{M_0}$	$M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot M_0$ (daN.cm)	$M_{PR} = M_P - M_{cr}$ (daN.cm)	$M_{i+1} = M_i + \lambda_{cr} \cdot M_0$ (daN.cm)	Rotules formées
1	1	.1999E+06	.9000E+06	.4501E+01	.8075E+06	.9253E+05	.8075E+06	
	3	-.7058E+05	-.9000E+06	.1275E+02	-.2850E+06	-.6150E+06	-.2850E+06	
2	2	.2193E+06	.9000E+06	.4104E+01	.8857E+06	.1432E+05	.8857E+06	
	5	-.1102E+06	-.9000E+06	.8170E+01	-.4449E+06	-.4551E+06	-.4449E+06	
3	3	.6238E+05	.9000E+06	.1443E+02	.2519E+06	.6481E+06	.2519E+06	
	6	-.9250E+05	-.9000E+06	.9730E+01	-.3735E+06	-.5265E+06	-.3735E+06	
4	5	.1127E+06	.9000E+06	.7986E+01	.4551E+06	.4449E+06	.4551E+06	
	8	-.1324E+06	-.9000E+06	.6796E+01	-.5348E+06	-.3652E+06	-.5348E+06	
5	6	-.3645E+02	-.9000E+06	.2469E+05	-.1472E+03	-.8999E+06	-.1472E+03	
	9	-.3157E+05	-.9000E+06	.2851E+02	-.1275E+06	-.7725E+06	-.1275E+06	
6	8	.5513E+05	.9000E+06	.1633E+02	.2226E+06	.6774E+06	.2226E+06	
	11	-.1133E+06	-.9000E+06	.7940E+01	-.4577E+06	-.4423E+06	-.4577E+06	
7	3	-.1330E+06	-.9000E+06	.6769E+01	-.5370E+06	-.3630E+06	-.5370E+06	
	4	-.5505E+05	-.9000E+06	.1635E+02	-.2223E+06	-.6777E+06	-.2223E+06	
8	4	-.5505E+05	-.9000E+06	.1635E+02	-.2223E+06	-.6777E+06	-.2223E+06	
	5	.2229E+06	.9000E+06	.4038E+01	.9000E+06	.0000E+00	.9000E+06	1
9	6	-.9246E+05	-.9000E+06	.9734E+01	-.3734E+06	-.5266E+06	-.3734E+06	
	7	-.5246E+05	-.9000E+06	.1716E+02	-.2118E+06	-.6882E+06	-.2118E+06	
10	7	-.5246E+05	-.9000E+06	.1716E+02	-.2118E+06	-.6882E+06	-.2118E+06	
	8	.1875E+06	.9000E+06	.4799E+01	.7574E+06	.1426E+06	.7574E+06	
11	9	-.3157E+05	-.9000E+06	.2851E+02	-.1275E+06	-.7725E+06	-.1275E+06	
	10	-.5911E+05	-.9000E+06	.1523E+02	-.2387E+06	-.6613E+06	-.2387E+06	
12	10	-.5911E+05	-.9000E+06	.1523E+02	-.2387E+06	-.6613E+06	-.2387E+06	
	11	.1133E+06	.9000E+06	.7940E+01	.4577E+06	.4423E+06	.4577E+06	

Tableau 6.25. Localisation de la première rotule plastique dans la structure Portique à trois planchers

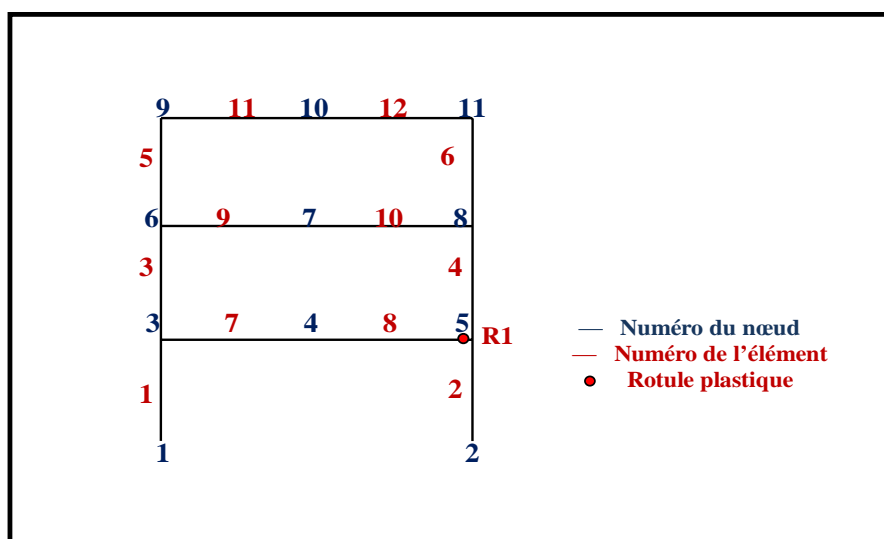


Figure 6.42. Position de la première rotule plastique apparaissant dans la structure

Commentaires

La première rotule qui s'est formée dans cette structure au niveau du deuxième nœud de l'élément 8 correspond au même cas traité dans l'étude menée par [BOU 06b] se qui confirme encore une fois l'efficacité du programme développé dans le cadre de notre étude.

Localisation des rotules plastiques suivantes jusqu'à la ruine

La localisation des rotules plastiques apparaissant dans la structure après formation de la première rotule s'est faite par le biais du programme EF en langage Fortran, les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 6.26 suivant :

Numéro de la rotule	Numéro de l'élément	Position du nœud dans le repère local	Numéro du nœud dans le repère global	λ_{cr}	λ_{cr} cumulés	Charges critiques P_{cr} cumulées (daN)	Déplacements U du nœud 9 (cm)	Déplacements $U_{cumulés}$ du nœud 9 (cm)
1	8	2	5	4.04	4.04	4040	2.55	2.55
2	2	1	2	0.054	4.09	4090	3.12	5.67
3	1	1	1	0.161	4.25	4250	7.29	12.96
4	10	2	8	0.264	4.52	4520	10.15	23.11
5	7	1	3	0.488	5.00	5000	18.38	41.49
6	3	2	6	0.348	5.35	5350	28.11	69.60
7	4	2	8	0.046	5.40	5400	28.11	69.60
$\Sigma \lambda_{cr}$				5.40				

Tableau 6.26. Position des rotules plastique successives jusqu'à la ruine

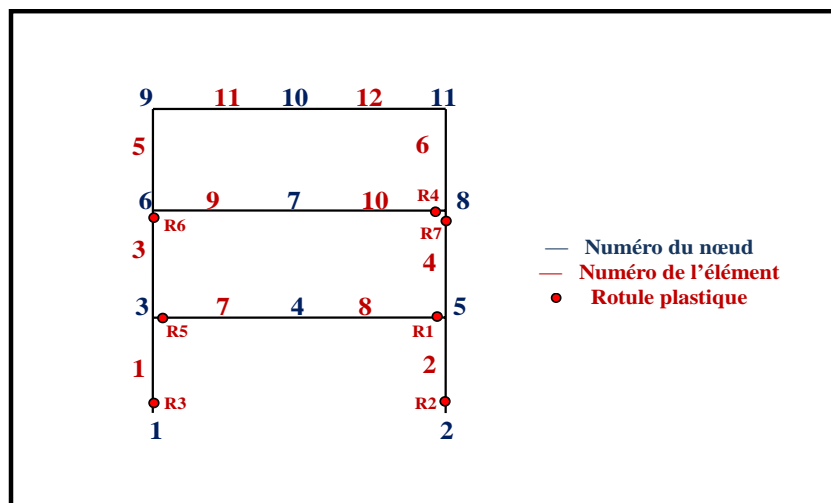


Figure 6.43. Position des rotules plastiques successives jusqu'à la ruine

La charge de ruine du portique à trois planchers est égale à :

$$P_{cr} = \sum \lambda_{cr} \cdot P = 5.40 \times 1000 = 5400 \text{ daN}$$

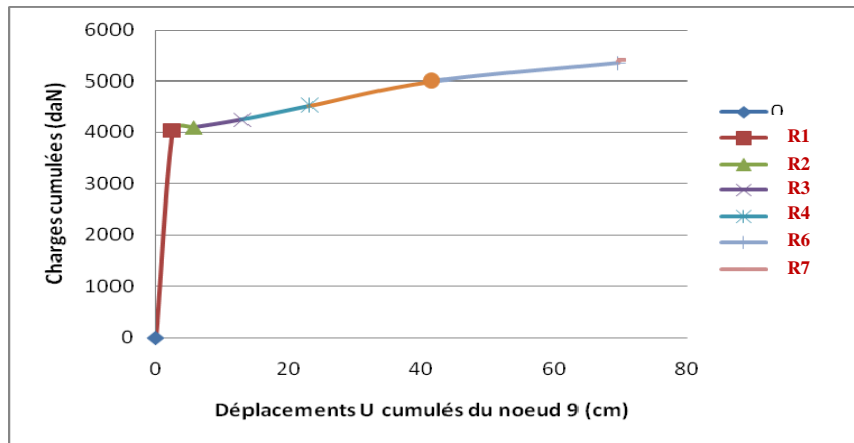


Figure 6.44. Courbe Charge-Déplacement horizontal cumulé du nœud 9

Commentaires

La ruine de la structure est survenue après formation de 7 rotules plastiques, 4 au niveau des poteaux et 3 au niveau des poutres. Le facteur de charge λ_{cr} total est égal à 5.40 ce qui correspond à une charge de ruine de la structure de l'ordre de 5400 daN avec un déplacement horizontal cumulé égal à 69.6 cm au niveau du nœud 9. Les Résultats de l'analyse de cette structure sont cohérents avec ceux obtenus par [BOU 06b].

Nous soulignons également le caractère linéaire du comportement entre la formation de deux rotules plastiques successives.

6.5.3. Conclusion concernant la validation des exemples traités en analyse élastoplastique

Pour cette partie du traitement des résultats dans le domaine élastoplastique nous pouvons constater que :

- Le programme informatique en langage Fortran développé dans le cadre de cette étude donne des résultats semblables à ceux existants dans la littérature en comparant avec les résultats obtenus par [MAS 61], [GHA 03], [BOU 06b] et [WON 09], chose qui confirme l'efficacité de notre programme d'analyse élastoplastique des structures formées de poutres par la méthode des rotules plastiques.
- Par le biais de ce programme nous avons pu, pour les structures étudiées, suivre la formation successive des rotules plastiques une par une jusqu'à la ruine totale survenant lorsque la matrice de rigidité globale de la structure finale déformée tend vers zéro, cet état correspond également à l'apparition de grands déplacements au niveau de la structure, nous avons pu déterminer la charge de ruine de la structure et également localiser les zones les plus critiques des structures en vue de prévoir leur renforcement par les méthodes appropriées et existantes dans les règlements.
- Pour la structure portique à élément incliné analysé par la méthode des rotules plastiques, nous avons effectué deux variantes différentes et ce en affinant le maillage, cette augmentation du nombre d'éléments n'a eu aucun impact sur les résultats obtenus, les deux maillages donnent des résultats identiques que ce soit concernant l'emplacement des rotules plastiques, l'ordre de leur apparition ou les valeurs du facteur de charge critique λ_{cr} pour chaque étape de calcul.
- Le danger d'effondrement est imminent si des rotules plastiques se forment en premier lieu dans les éléments porteurs qui sont les poteaux car la perte de rigidité y est plus importante, aussi il est nécessaire que la plastification des éléments horizontaux (poutres) se manifeste avant que les éléments porteurs verticaux (poteaux) ne sortent du domaine élastique. L'article 7.6.2 du Règlement Parasismique Algérien RPA 99 Version 2003 (annexe 2) nous indique la manière avec laquelle on peut favoriser l'apparition des rotules plastiques dans les éléments horizontaux avant celle des éléments verticaux.



Conclusion et Perspectives

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a pour objectif essentiel d'étudier le comportement élastoplastique des structures planes formées de poutres et de suivre la propagation de la plastification dans celles-ci sous des charges concentrées jusqu'à la ruine, sans avoir recours aux méthodes itératives trop longues, est dont la convergence peut poser problème, car il faut parfois ajuster des paramètres algorithmiques pour obtenir une solution. D'autre part, la solution d'un système non linéaire par les méthodes itératives n'est pas toujours unique et il n'est pas évident de savoir vers laquelle des solutions l'algorithme a convergé.

Nous avons choisi d'utiliser, dans notre analyse élastoplastique, la méthode des rotules plastiques qui se base sur le concept rotule-par-rotule, supposant un comportement linéaire élastique entre la formation de deux rotules successives, cette méthode est efficace car elle permet non seulement la détermination de la charge de ruine de la structure, mais nous donne également l'évolution de la plastification étape par étape, nous permettant ainsi de localiser les zones critiques des structures, celles où apparaissent les premières rotules plastiques.

Nous pouvons conclure que le programme élaboré, dans le contexte de notre mémoire, en langage Fortran, qui se base sur le principe de la méthode des éléments finis est un outil performant et efficace quant à son exécution car les résultats obtenus, que ce soit pour le domaine linéaire ou le domaine non-linéaire des structures étudiées, sont en parfait accord avec les résultats existants dans la littérature.

Il serait intéressant d'étendre ce travail vers l'analyse des structures composées d'éléments à matériaux hétérogènes acier-béton ou composites, on peut également aller vers l'étude de structures tridimensionnelles plus complexes, tels que les pylônes, soumises à des combinaisons de charges concentrées et réparties statiques et dynamiques, et également d'aller vers le concept de zone plastique (plasticité distribuée) et ce, pour cerner, encore mieux, la stabilité inélastique des structures.

L'outil peut être également développé en vue d'intégrer l'application de la méthode de la poussée progressive dite « Push-Over », fondée sur le même principe, pour évaluer la performance des structures sous charges sismiques. Et intégrer le concept de constructions parasismiques qui est celui de « poutre faible- poteau fort », où l'apparition des rotules plastiques est désirable au niveau des poutres en premier lieu avant les poteaux, car il ne faut pas oublier, que pour pouvoir rester debout, il faut que le porteur ne « se fatigue » avant le porté. Il en est ainsi pour les éléments structuraux d'une construction notamment en poteaux-poutres, les poteaux ne doivent pas périr avant les poutres.



Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [ADU 00] ADULIS Groupe
« Manuel de programmation en Fortran 90/95 version 1.0.1 »
Manuel réalisé par le groupe ADULIS pour le compte de la SETRA (2000) 69 pages
- [AYV 97] AYVAZ Y., DALOGLU A.
« Earthquake analysis of beams resting on elastic foundations by using a modified Vlasov model »
J. Sound Vib. 200 (3) (1997) pages 315-325, cité dans [MAC 99]
- [BAR 97] BARBAT A.H. et al.
« Viscous damage model for Timoshenko beam structures »
Int. J. Solids Struct. 34 (30) (1997) pages 3953-3976, cité dans [MAC 99]
- [BAR 05] BARHAM W.S., AREF A.J., DARGUSH G.F.
« Flexibility-based large increment method for analysis of elastic–perfectly plastic beam structures »
Computers and Structures 83 (2005) pages 2453–2462
- [BEL 01] BELYTSCHKO T., LIU W. K., MORAN B.
« Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures »
Livre : Editions John Wiley & Sons Ltd, England (2001) 641 pages
- [BEN 97] BENDJAICHE R.
« Element de poutre spatial en analyse non linéaire géométrique -Description Lagrangienne Totale »
Mémoire de Magister : Institut de Génie Civil Université Badji Mokhtar ANNABA (1997)100 pages
- [BLE 09] BLECK W., DAHL W., NONN A., AMLUNG L., FELDMANN M., SCHÄFERAND D., EICHLER B.
« Numerical and experimental analyses of damage behaviour of steel moment connection »
Engineering Fracture Mechanics, Volume 76, Issue 10(2009) pages 1531-1547
- [BOE 93] BOERAEVE Ph., LOGNARD B., JANSS J., GERARDY J.C., SCHLEICH J.B.
« Elasto-plastic behaviour of steel frame works »
Journal of Constructional Steel Research , volume27, issue1-3(1993) pages 3-21
- [BON 05] BONNET M.
« Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis »
Cours de l'école Polytechnique, département de Mécanique, majeure 2 SeISM (2005)154 pages
- [BOU 06a] BOUILLARD P.
« II-13 Flexion Plastique »
Cours : Université libre de Bruxelles, Université d'Europe (2006)28 pages
- [BOU 06b] BOUKHLOUF B.
« Analyse élasto-plastique des structures planes par la méthode des rotules plastiques »
Mémoire de Magister : Département de Mécanique Université de Batna (2006)115 pages
- [BOU 07] BOUMEKIK A.
« Analyse Pushover des Structures en Béton Armé-Théorie de l'endommagement »
Rapport final 2007, Département de Génie Civil, Université de Batna (2007) 28 pages
- [BRI 04] BRIKI L.
« Analyse élasto-plastique des plaques minces et épaisses par éléments finis »
Mémoire de Magister : Institut de Génie Civil Université Badji Mokhtar ANNABA(2004)104 pages
- [CHE 00] CHEN X.W., YU T.X.
« Elastic-plastic beam-on-foundation under quasi-static loading »
International Journal of Mechanical Sciences 42 (2000) pages 2261-2281.
- [COC 03] COCCHETTI G., MAIER G.
« Elastic–plastic and limit-state analyses of frames with softening plastic-hinge models by mathematical programming »me 40, issue 25(2003) pages 7219-7244
International Journal of Solids and Structures, Volu 42 (2000) pages 2261-2281.

- [CRI 00]** CRISFIELD M. A.
« Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – volume 1: Essentials »
Livre : Editions John Wiley & Sons Ltd, England (2000) 345 pages
- [DAV 08]** DAVALLE E.
« Mécanique des Structures I »
Cours du 3ème semestre bachelor, Laboratoire de simulation en mécanique des solides – LSMS
EPFL Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (2008) 18 pages
- [DAV 03]** DAVENNE L., RAGUENEAU F., MAZARS J., IBRAHIMBEGOVIC A.
« Efficient approaches to finite element analysis in earthquake engineering »
Computers and structures 81 (2003) pages 1223-1239
- [DEV 89]** De VILLE de GOYET V.
« L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique »
Thèse de Doctorat : Faculté des sciences appliquées, Université de LIEGE (1988-1989).
- [DHA 06]** DHAKAL R. P., MANDER J. B., MASHIKO N.
« Identification of critical ground motions for seismic performance assessment of structures »
Earthquake Engng Struct. Dyn. 35(2006) pages 989–1008.
- [DID 05]** DIDES M. A., de la LLERA J.C.
«A comparative study of concentrated plasticity models in dynamic analysis of building structures »
Earthquake Engng Struct. Dyn. 34 (2005) pages 1005–1026.
- [DJE 90]** DJEGHABA K.
« Contribution à l'analyse non-linéaire géométrique des coques minces en théorie de Marguerre »
Thèse de Doctorat : Institut National des sciences Appliquées de LYON (1990) 328 pages
- [EHR 05]** EHRLICH D., ARMERO F.
« Finite element methods for the analysis of softening plastic hinges in beams and frames »
Computer Mechanics 35 (2005) pages 237-264
- [FIL 96]** FILIATRAULT A.
« Eléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures »
Livre : préface de Shel Cherry. Editions de l'école polytechnique de Montréal (1996)
- [FRE 00]** FREY F.
« Analyse des structures et milieux continus : Mécanique des structures »
Livre : Editions PPUR Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (2000) 452 pages
- [GHA 03]** GHALI A., NEVILLE M. A., BROWN T. G.
« Structural Analysis : a unified classical and matrix approach »
Livre : 5ième édition. Editions SPON (2003) 844 pages
- [GRU 00]** GRUTTMANN F., SAUER R., Wagner W.
« Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour »
Int. J. Numer. Meth. Engng 48(2000) pages 1675-1702.
- [HAC 90]** HACENE-CHAOUCHE BOULMAALI Y.
« Etude du phénomène de verrouillage au cisaillement dans les éléments finis de poutre »
Thèse de Magister : Institut de Génie Civil Université de ANNABA (1990)
- [HJE 03]** HJELMSTAD K. D., TACIROGLU E.
« Mixed variational methods for finite element analysis of geometrically non-linear, inelastic Bernoulli-Euler beams »
Communications in numerical methods in engineering 19 (2003) pages 809-832
- [INE 06]** INE M., OZMEN H.B.
« Effects of plastic hinge properties in nonlinear analysis of reinforced concrete buildings »
Engineering Structures, Volume 28, Issue 11(2006) pages 1494-1502
- [IZZ 00]** IZZUDDIN B.A., LLOYD SMITH D.
« Efficient nonlinear analysis of elasto-plastic 3D R/C frames using adaptive techniques »
Computers and Structures 78 (2000) pages 549-573

- [KAR 97]** KARABALIS D.L., BESKOS D.E.
« Numerical methods in earthquake engineering »
D.E. Beskos, Comput. Anal. Des. Earthq. Resist. Str., CMP, Southampton (1997) pages 1-102, cité dans [MAC 99]
- [KHA 04]** KHALFALLAH S., CHARIF A.
« Modélisation du comportement non-linéaire des structures en béton armé »
Sciences et technologie, revue semestrielle de l'université Mentouri Constantine-Algérie 21 (2004) pages 29-35
- [KEM 05]** KEMPENEERS M.
« Eléments finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale »
Thèse de Doctorat, LTAS – Infographie, Département d'Aérospatiale et Mécanique, Faculté des Sciences Appliquées, Université de LIEGE (Décembre 2005)
- [KRU 95]** KRUGER T. S., VAN RENSBURG B. W. J., DU PLESSIS G. M.
« Non-linear analysis of structural steel frames »
Journal of Constructional Steel Research, Volume 34, Issues 2-3(1995) pages 285-306
- [LEE 06]** LEE P.S., McCLURE G.
« A general three-dimensional L-section beam finite element for elastoplastic large deformation analysis »
Computers and Structures 84 (2006) pages 215-229
- [LEL 05]** LELLEP J., TORN K.
« Shear and bending response of a rigid-plastic beam subjected to impulsive loading »
International Journal of Impact Engineering 31 (2005) pages 1081–1105
- [LI 03]** LI Q.S., CHEN J.M.
« Non-linear elastoplastic dynamic analysis of single layer reticulated shells subjected to earthquake excitation »
Computers and Structures 81 (2003) pages 177-188
- [LIE 00]** LIEW J. Y. R., CHEN H., SHANMUGAM N. E., CHEN W. F.
« Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures »
Engineering Structures, Volume 22, Issue 10 (2000) pages 1324-1338
- [MA 05]** MA G.W., LIU Y.M., ZHAO J., LI Q.M.
« Dynamic asymmetrical instability of elastic-plastic beams »
International Journal of Mechanical Sciences 47 (2005) pages 43–62.
- [MAC 99]** MACKERLE J.
« Earthquake analysis of structures : FEM and BEM approaches a bibliography (1995-1998) »
Finite Elements in Analysis and Design 32 (1999) pages 113-124
- [MAR 04]** MARANTE M., E., PICON R., FLOREZ-LOPEZ J.
« Analysis of localization in frame members with plastic hinges »
International Journal of Solids and Structures, Volume 41, Issue 14(2004) pages 3961-3975
- [MAS 61]** MASSONNET Ch., SAVE M.
« Calcul plastique des constructions - Volume 1 : ossatures planes »
Livre : Edité par le Centre Belgo-Luxembourgeois d'information de l'acier, Bruxelles (1961) 397 pages
- [MAS 67]** MASSONNET Ch., SAVE M.
« Calcul plastique des constructions - Volume 1 : structures dépendant d'un paramètre »
Livre : Edité par le Centre Belgo-Luxembourgeois d'information de l'acier, Bruxelles (1967) 541 pages
- [McG 94]** McGUIRE W.
« Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames: An assessment of the state-of-the-art: Edited by D. F. White and W. F. Chen. Structural Stability Research Council, Bethlehem, PA, March 1993. ISBN 1-87974953-X »
Book Review: Journal of Constructional Steel Research , volume30, issue2(1994) pages 197-198

- [McG 00] McGUIRE W., GALLAGHER R. H., ZIEMIAN R. D.
« Matrix structural analysis - second edition»
Livre: Edition John Wiley & sons, Inc. (2000) 460 pages
- [MER 10] MERGOS P. E., KAPPOS A. J.
« Seismic damage analysis including inelastic shear flexure interaction »
Bull. Earthquake Eng. 8 (2010) pages 27-46
- [MES 00] MESTAT P.
« Questions d'Internet à la recherche des éléments finis »
Document PDF, Inter-pôle : "organisation de la qualité" (2000) 9 pages
- [MIC 06] MICHAUT C.
« Cours de FORTRAN 90/95 »
Cours de l'observatoire de Paris (2005-2006) 86 pages
- [MOH 08] MOHRI F., EDDINARI A., DAMIL N., POTIER FERRY M.
« A beam finite element for non-linear analyses of thin walled elements »
Thin-Walled Structures 46(2008) pages 981-990
- [ORD 08] ORDAZ-HERNANDEZ K., FISCHER X.
« Fast reduced model of non-linear dynamic Euler-Bernoulli beam behaviour»
International Journal of Mechanical sciences 50(2008) pages 1237-1246
- [PAJ 00] PAJUNEN S.
« Large deflection elasto-plastic analysis of beams using Kinematically exact elements »
Communications in numerical methods in engineering 16 (2000) pages 497-504
- [PAL 04] PALIZZOLO L.
« Optimization of continuous elastic perfectly plastic beams »
Computers and Structures 82 (2004) pages 397-411.
- [PAR 96] PARK M. S., LEE B. C.
« Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of VON-MISES- type hardening material »
International Journal for Numerical Methods in Engineering 39, (1996) pages 383-408.
- [PEN 08] PENG B. H.H., MacRAE G. A., WALPOLE W.R., MOSS P., DHAKAL R.P., CLIFTON C., C.HYLAND
« Location of plastic hinges in axially loaded steel members »
Journal of Constructional Steel Research, Volume 64, Issue 3(2008) pages 344-351
- [PRE 97] PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P.
« Numerical Recipes in Fortran 77- The Art of Scientific Computing – Second edition – volume 1 »
Livre : Published by the Press Syndicate of the University of Cambridge (1997) 1486 pages
- [RAB 04] RABCZUK T., EIBL J.
« Numerical analysis of prestressed concrete beams using a coupled free Galerkin/finite element approach »
International Journal of Solids and Structures 41 (2004) pages 1061-1080
- [RED 97] REDDY G.R. et al.
« Beam model for seismic analysis of complex shear wall structure based on the strain energy equivalence »
JSME Int. J. Ser C 40 (4) (1997) pages 652-664, cité dans [MAC 99]
- [ROB 99] ROBERT F.
« Contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en Génie Civil – Application aux ouvrages d'art»
Thèse de Doctorat : Institut National des sciences Appliquées de LYON (1999) 250 pages
- [RPA 03] « Règles Parasismiques Algériennes RPA99/Version 2003 »
Document technique réglementaire DTR BC 2 48 du Ministère de l'Habitat et de l'Urbanisme (2003), 117 pages

- [SEG 04]** SEGHIR A.
Cours : « Résolution d'équations différentielles par MEF »
Cours : Méthode des Eléments Finis (MEF), Université A. Mira Béjaïa (2004) 19 pages
- [SMI 88]** SMITH I. M., GRIFFITHS D. V.
« Programming the Finite Element Method – 2nd edition »
Livre : Editions John Wiley & Sons Ltd, England (1982-1988) 469 pages
- [SUQ 04]** SUQUET P.
« Cours rupture et plasticité Amphi 4 »
CNRS/ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille (2004)
- [THA 09]** THAI H. T., KIM S. E.
« Practical advanced analysis software for nonlinear inelastic analysis of space steel structures »
Advances in Engineering Software, Volume 40, Issue 9 (2009) pages 786-797
- [TRO 92]** TROMPETTE Ph.
« Mécanique des structures par la méthode des éléments finis- statique et dynamique »
Livre, Edition Masson, Paris (1992) 266 pages
- [VAN 08a]** VAN LONG H.
« Automatic plastic-hinge analysis and design of 3D steel frames »
Thèse de Doctorat: Faculté Des Sciences Appliquée, Université De Liège Belgique (2008) 136 pages
- [VAN 08b]** VAN LONG H., DANG HUNG N.
« Local buckling check according to Eurocode-3 for plastic-hinge analysis of 3-D steel frames »
Engineering Structures 30 (2008) pages 3105–3113
- [WHI 93]** White D. W.
« Plastic-Hinge methods for advanced analysis of steel frames »
Journal of Constructional Steel Research , volume 24, issue 2 (1993) pages 121-152
- [WON 09]** WONG M. B.
« Plastic analysis and design of steel structures »
Livre : Editions Elsevier (2009) 246 pages
- [YEG 97]** YEGUPOV V.K. et al.
« Simulation and automation of calculations of buildings (structures) on seismic effects »
Comput. Struct. 63 (6) (1997) pages 1065-1083, cité dans [MAC 99]
- [ZIE 00]** ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R.L.
« The Finite Element Method – Fifth Edition - volume 2 : Solid Mechanics »
Livre : Fifth Edition published by Butterworth- Heinemann (2000) 459 pages.



Annexes

ANNEXE 1

Quelques définitions et notions élémentaires Sur la sismologie et le génie parasismique

Bref historique du génie parasismique [FIL 96] :

Le génie parasismique est une science toute récente qui s'est largement développée au 20^{ème} siècle, ses fondements ont été élaborés au 18^{ème} et 19^{ème} siècle par des scientifiques principalement tous natifs d'Angleterre, un pays présentant pourtant une faible sismicité. Robert Hooke (1635-1703), reconnu pour sa loi de l'élasticité est l'un des premiers scientifiques s'étant intéressé au phénomène de tremblements de terre, il a même donné des conférences sur les séismes et les volcans à la société royale britannique de Londres (Royal society of London) entre 1667 et 1668.

Au 19^{ème} siècle, aucune distinction n'existait entre la sismologie et le génie parasismique. Le terme sismologie dérivé du mot grec « sismo » ou « vibration », a été utilisé pour la première fois par l'ingénieur britannique Robert Mallet (1810-1881). Ce dernier a introduit également les termes maintenant bien connus que sont « épïcentre » et « point focal ». En 1848, Mallet publie les concepts d'élaboration d'un sismographe électromagnétique, qu'il n'a cependant jamais construit. L'italien Luigi Palmieri (1867-1896) modifie le concept de Mallet et construit le premier sismographe automatique dont il obtient quelques enregistrements.

Parallèlement aux développements en Europe, quelques enseignants au collège impérial de génie à Tokyo (John Milne, Robert Ewig et Thomas Gray) fondent en 1880 la société sismologique du Japon entièrement dédiée à l'étude des phénomènes sismiques, elle est l'ancêtre de l'Association internationale de génie sismique (International Association for Earthquake Engineering).

Trois tremblements de terre très importants ont contribué au développement des connaissances reliées aux phénomènes sismiques :

- Le séisme de Mino-Awari au Japon en 1891
- Le séisme de San Francisco (aux USA) en 1906
- Et plus particulièrement celui de Messina en Italie du 28 décembre 1908 faisant plus de 83 000 morts, ce séisme était l'évènement capital qui a donné naissance aux méthodes de construction parasismique et, par le fait même, à la science du génie parasismique.

Importance de la recherche parasismique expérimentale :

Bien que les ordinateurs puissants permettent actuellement l'analyse dynamique de structures complexes, le laboratoire demeure un instrument indispensable en vue d'assurer un niveau de protection sismique adéquat dans les ouvrages de génie civil. Partout dans le monde, on continue d'employer la recherche expérimentale pour étudier le comportement d'éléments, d'assemblages et de systèmes structuraux complets dans un environnement sismique.

Trois types d'essais différents sont utilisés en recherche parasismique expérimentale, à savoir :

- L'essai quasi-statique
- L'essai pseudo-dynamique
- L'essai sur table vibrante

L'essai quasi-statique :

Durant cet essai, les forces d'inertie générées par un séisme sur une structure sont remplacées par des charges statiques équivalentes appliquées entre un banc d'essai et un échantillon à l'aide de vérins hydrauliques. Cet essai est réalisable sur des éléments structuraux à grande échelle ou à échelle réduite et même dans certains cas, à échelle réelle.

On obtient des informations de base telles que la résistance, la rigidité et la ductilité qui sont utilisées pour la prédiction du comportement complet de l'ouvrage. Les données obtenues servent aussi à valider et à développer des modèles numériques. Contrairement à l'essai dynamique, l'essai quasi-statique peut être interrompu à tout moment pour observer l'état de l'échantillon. La principale faiblesse de l'essai quasi-statique consiste en l'association de la capacité de dissipation d'énergie de l'échantillon avec la capacité réelle nécessaire pour assurer un niveau de protection sismique adéquat. La question qui revient toujours lors d'un essai quasi-statique est de savoir si l'échantillon est sous ou surchargé.

L'essai pseudo-dynamique :

Cet essai combine l'essai quasi-statique à l'analyse numérique, afin de simuler la réponse sismique d'un système structural dans le temps. L'essai se déroule à une vitesse plus lente que dans le cas d'un tremblement de terre réel. Dans un essai pseudo-dynamique, on mesure directement les forces de rappel du système sur un échantillon, à des endroits précis, dans un intervalle de temps donné. On utilise par la suite ces forces de rappel pour résoudre numériquement les équations du mouvement du système et calculer les déplacements résultants. Des vérins hydrauliques imposent alors les déplacements à l'échantillon. Cependant cet essai a des limitations imposées, à noter :

- des matériaux sensibles au taux de chargement peuvent produire des résultats qui ne sont pas valables dans un environnement sismique réel.
- Cet essai ne peut être réalisé sur des systèmes de contrôle à amortisseurs viscoélastiques de part sa vitesse réduite.

- Le coût de l'appareillage limite le nombre de vérins et, par le fait même, le nombre de degrés de liberté à contrôler. La complexité de l'échantillon en est ainsi grandement limitée.

L'essai sur table vibrante :

L'essai sur table vibrante est la seule technique expérimentale qui permet de simuler directement les forces d'inertie sur une structure ayant une masse distribuée on peut contrôler une table vibrante afin de reproduire de façon très précise plusieurs types de mouvement du sol, tels que des enregistrements lors de séismes réels, des accélérogrammes synthétiques ou des mouvements simples de type sinusoïdal. Dans un environnement contrôlé du laboratoire, on peut augmenter l'intensité des simulations des mouvements du sol en vue de causer une réponse inélastique d'un échantillon. Les données obtenues permettent d'évaluer le comportement non linéaire et les modes d'effondrement d'un système structural complet dans un environnement sismique réaliste. Aucun autre type d'essai ne permet d'obtenir ces données. La faiblesse principale de l'essai sur table vibrante est reliée à la capacité portante de la plate-forme. Dans la plupart des cas, on doit utiliser un modèle réduit.

Eléments de sismologie :

Afin de se familiariser avec le langage des sismologues, nous allons présenter brièvement dans ce qui suit quelques éléments de sismologie.

Définition du séisme : mouvement soudain ou vibration soudaine de l'écorce terrestre causé par un relâchement abrupte d'énergie.

Causes des séismes :

- **La tectonique des plaques :** La compréhension du mécanisme responsable de l'activité sismique du globe terrestre est récente, puisque ce n'est qu'en 1968 que J.Morgan, D. McKenzie et X. Le Pichon ont formulé la théorie de la tectonique des plaques qui fournit un modèle cinématique cohérent des déformations de l'écorce terrestre.

Le moteur principal de ces déformations est l'expansion des fonds océaniques qui atteint parfois 170 mm/an pour les dorsales médio océaniques les plus actives, pousse les unes contre les autres les différentes plaques rigides (une douzaine au total) qui constituent l'écorce terrestre. Plusieurs types de mouvements peuvent résulter de ces affrontements entre plaques :

- La subduction, c'est la plongée d'une plaque sous une autre elle permet ainsi l'augmentation de surface résultant de l'expansion des fonds océaniques, comme celle de la plaque Nazca sous l'Amérique du sud, ou de la plaque Philippines sous l'Eurasie au niveau du Japon ;
- Le décrochement, c'est le coulissage horizontal d'une plaque contre une autre (failles transformantes), dont l'exemple le plus connu est la célèbre faille de San Andréa en Californie (contact entre les plaques Pacifiques et Amérique du nord).

- La compression, c'est la collision frontale sans subduction qui se traduit par la formation de chaînes de montagnes, comme l'Himalaya, résultat de la collision des plaques Inde et Eurasie.

Ces mouvements relatifs entre plaques ne se font pas en général de manière progressive, mais par à-coups et chacun de ces à-coups constitue un séisme, plus ou moins intense suivant l'amplitude et la rapidité du mouvement, ainsi que l'étendue de la zone concernée.

Cette théorie de la tectonique des plaques est maintenant bien établie et fournit une explication immédiate des séismes qui se produisent au voisinage des limites des plaques (séismes interplaques). Si ce type de séismes représente effectivement la plus grande partie de l'activité sismique, qui est donc concentrée dans certaines zones bien définies, on observe aussi des séismes, moins nombreux mais pouvant être violents, à l'intérieur de certaines plaques (séismes intraplaques). Cette sismicité plus diffuse et plus difficile à prévoir que la sismicité interplaque, résulte de l'état de contraintes qui règne à l'intérieur des plaques du fait de leur interactions mutuelles ; l'hypothèse des plaques parfaitement rigides ne constitue en effet qu'une première approximation, et celles-ci sont en réalité susceptibles de subir des ruptures locales sous l'effet des champs de contraintes qui agissent sur elles.

Les ruptures brutales qui sont la cause des séismes tectoniques (interplaques ou intraplaques) se produisent le plus souvent dans la partie supérieure de l'écorce terrestre (séismes superficiels, suivant la terminologie des sismologues, c'est-à-dire survenant à moins de 60 Km de profondeur). On connaît aussi, particulièrement dans les zones de subduction, des séismes intermédiaires (profondeur de 60 à 300 Km) et des séismes profonds (profondeur supérieure à 300 Km).

Autres causes de séismes :

La quasi-totalité de l'activité sismique correspond aux séismes tectoniques, il existe cependant d'autres types de séismes, d'origine naturelle ou artificielle :

- **les séismes volcaniques**, associés à la montée du magma ou au dégazage avant et pendant les éruptions ; ces séismes sont généralement faibles et localisés au voisinage des volcans actifs ;
- **les séismes artificiels**, résultants des explosions souterraines (tirs de carrières et de mines, essais nucléaires) ou de l'exploitation des mines (« coups de toit ») ;
- **Les séismes dits induits**, souvent associés à un apport massif d'eau dans les terrains (mise en eau d'un grand barrage ou injection à grande échelle dans le sol) ; ces séismes induits, dont on connaît quelques exemples, paraissent devoir être attribués à la diminution de résistance à la rupture des roches lors de l'infiltration d'eau dans leur réseau de microfractures.

Hypothèse du calcul spectral :

Le calcul spectral est un calcul dynamique sur la base des modes propres de la structure, dans lequel l'excitation sismique est représentée par un spectre de réponse et où l'on ne cherche qu'à obtenir une estimation des valeurs maximales de la réponse, sans s'intéresser aux variations de cette réponse au cours du temps. Il suppose donc que le comportement de la structure reste linéaire (sinon il ne serait pas possible de considérer les modes propres). Dans sa version la plus couramment pratiquée, il s'appuie en outre sur les hypothèses suivantes :

- **Mouvement « en bloc » du sol** : sans déphasage d'excitation entre les différents points, et ne comportant que des composantes de translation (2 horizontales, 1 verticale) ;
- **Encastrement parfait** de la base du bâtiment dans le sol ;
- **Amortissement de type visqueux** (proportionnel aux vitesses relatives) et permettant le découplage des modes propres ;
- **Caractère indépendant des modes entre eux** (au sens utilisé pour les variables aléatoires)

Modélisation :

La modélisation de la structure en vue du calcul dynamique consiste en l'établissement d'un modèle de calcul qui reproduise au mieux le comportement dynamique réel de la structure ; l'expérience et le jugement du calculateur sont ici des facteurs essentiels. Même pour des structures d'apparence simple, une bonne modélisation nécessite en général un ensemble de réflexions et de choix sur les points suivants :

- **nombre de dimensions à considérer** pour le modèle, le recours à un modèle tridimensionnel est souvent inutile pour des structures suffisamment symétriques, dont la réponse à l'excitation est essentiellement plane ;
- **degré de raffinement** du modèle, suivant qu'on en attend une connaissance détaillée des sollicitations dans les différents éléments ou simplement une réponse globale qui fournira des données pour des analyses locales fines (on est généralement, dans ce dernier cas, pour des structures complexes) ;
- **Représentation des éléments non structuraux :**

Les éléments non structuraux (remplissage de maçonnerie des structures contreventées par portiques, cloisons, façades) jouent souvent un rôle important dans la réponse du bâtiment à l'excitation sismique. Dans l'état initial non dégradé, leur raideur peut en effet être comparable à celle des éléments structuraux et donc influencer les caractères dynamiques (périodes et modes propres) de la structure. Pour des excitations de fort niveau, leur dégradation, qui peut être brutale, est une des causes possibles de l'apparition d'une torsion accidentelle. Ils peuvent enfin présenter des risques pour les personnes, même dans le cas où le bâtiment résiste aux secousses (chute de cloisons projections d'éclats de verre suite à la rupture des vitrages, etc...)

Les interactions entre éléments structuraux et non structuraux constituent un des problèmes les plus difficiles du génie parasismique ; le cas typique est celui des ossatures en béton armé

avec remplissage en maçonnerie de pierres ou de parpaings. L'action sismique horizontale tend à déformer le panneau de maçonnerie en parallélogramme, provoquant la formation d'une bielle diagonale de compression qui agit sur le coin du cadre en béton armé, avec notamment une tendance au soulèvement ; on connaît plusieurs exemples de dommages subis par ces cadres du fait de ce phénomène.

D'une façon générale, pour une action dynamique comme l'action sismique, il n'est pas toujours facile de dire à priori quelles sont les simplifications qui vont comme le sens de la sécurité. Si pour un calcul statique l'omission de la résistance des éléments non structuraux est une pratique prudente admise sans discussion, il n'en est pas de même pour les situations sismiques, ou cette omission peut conduire à sous estimer certains efforts agissant sur la structure.

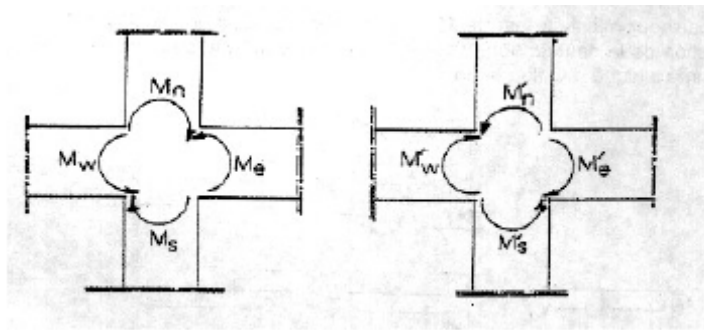
ANNEXE 2

Comment favoriser la plastification des éléments horizontaux avant celle des éléments verticaux ?

RPA99 version 2003

Article 7.6.2 : Dimensionnement du nœud vis-à-vis des moments fléchissants

« Il convient de vérifier pour les portiques participant au système de contreventement et pour chacune des orientations possibles de l'action sismique que la somme des moments résistants ultimes des extrémités de poteaux ou montants aboutissant au nœud est au moins égale en valeur absolue à la somme des valeurs absolues des moments résistants ultimes des extrémités des poutres ou traverses affectés d'un coefficient majorateur de 1.25. Cette disposition tend à faire en sorte que les rotules plastiques se forment dans les poutres plutôt que dans les poteaux. Néanmoins cette vérification est facultative pour les maisons individuelles et le deux derniers niveaux des bâtiments supérieurs à R+2 »



$$|M_n| + |M_s| \geq 1.25 (|M_w| + |M_e|)$$
$$|M'_n| + |M'_s| \geq 1.25 (|M'_w| + |M'_e|)$$

Figure 7.6 : Dimensionnement d'un nœud poutre-poteau

Résumé

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire se situe dans le domaine de l'analyse des structures par la méthode des éléments finis (MEF), et plus précisément, de l'analyse non linéaire élastoplastique des structures. Notre étude a pour objectif essentiel d'analyser le comportement des structures planes formées de poutres et de suivre la propagation de la plastification dans celles-ci sous des charges concentrées jusqu'à la ruine, sans avoir recours aux méthodes itératives, et ce, en utilisant la méthode des rotules plastiques qui se base sur le concept rotule-par-rotule supposant un comportement linéaire élastique entre la formation de deux rotules successives. En plus d'un calcul linéaire des structures formées de poutres par le biais du programme MEF élaboré en Langage Fortran dont les résultats ont été comparés à ceux obtenus par le Logiciel SAP2000 version 9, nous avons testé quelques structures en analyse élastoplastique avec validation et discussions des résultats obtenus par le programme MEF qui détecte la formation successive des rotules plastiques dans la structure jusqu'à la ruine. L'intérêt pratique de cette recherche se situe non seulement dans la détermination de la charge provoquant la ruine de la structure, mais également dans la possibilité de dépister les zones les plus vulnérables, celles où apparaissent les premières rotules plastiques par le biais du programme développé dans le cadre de notre étude, afin de prévoir d'éventuels renforcements.

Mots-clés : Méthode des éléments finis, analyse élastoplastique des structures, méthode des rotules plastiques.

Abstract

The work presented in this thesis can be placed within the field of structural analysis by finite element method (FEM), and more precisely, the nonlinear elastoplastic analysis of structures. Our study has for essential objective to analyse the behavior of plane frames subjected to concentrate loads and to follow the evolution of plastification in these structures up to collapse without using iterative procedures, and so by using the plastic hinge method based on the hinge-by-hinge concept, where a linear elastic behavior is supposed between the formation of two consecutive plastic hinges. Besides a linear elastic analysis of the structures formed by beams using the FEM program elaborated in Fortran Language, which the results were compared with those obtained by the Software SAP2000 version 9, we made an elastoplastic analysis with validation and discussions about the results obtained by the FEM program which detects the successive formation of plastic hinges in the structure up to collapse. The practical interest of this research is not only situated in the determination of the collapse load of the structure but also in the possibility to detect the most vulnerable zones of the structures, those where appear the first plastic hinges using our developed program, to predict eventual intensifications of the structures.

Keywords: Finite elements method, elastoplastic analysis of structures, plastic hinge method.

ملخص

العمل المعروض في هذه الأطروحة يندرج ضمن ميدان تحليل المنشآت و الهياكل باستخدام طريقة العناصر المنتهية، و تحديداً، تحليل المنشآت ذات السلوك الغير خطي الإيلستوبلاستيكي. إن الهدف الرئيسي لدراستنا هذه هو فهم و تحليل السلوك الذي تعتمد عليه المنشآت ثنائية الأبعاد المكونة من عارضات و كذا متابعة إنتشار اللدونة بها تحت تأثير القوى المركزة إلى غاية الإنهيار. لم نعلم في هذه الدراسة على طرق التقريب التدريجية المعروفة في هذا المجال بل وقع خيارنا على طريقة المفاصل اللدنة التي تعتمد على مفهوم مفصل-بعد-مفصل الذي يفترض أن السلوك يبقى خطياً مرناً بين مفصلين لذين متاليين. قبل التعرض للمجال الإيلستوبلاستيكي، قمنا بتحليل بعض الهياكل المكونة من عارضات تحليلياً خطياً باستخدام برنامج العناصر المنتهية المكتوب بلغة فورتران، مع مقارنة و إثبات صحة النتائج المتحصل عليها مع تلك المحسوبة ببرمجية SAP2000V9. تطرقنا بعد ذلك إلى الحساب في المجال الغير خطي مع مناقشة النتائج المتحصل عليها باستخدام برنامجنا الذي يكشف عن مواضع تشكيل المفاصل اللدنة المتعاقبة في المنشآت إلى غاية الإنهيار. لا تكمن الفائدة العملية لهذا البحث في تحديد حمولة الإنهيار فحسب، و لكن أيضاً في إمكانية كشف الأماكن الأكثر تعرضاً للضرر في هيكل ما و المتواجدة بمواقع المفاصل اللدنة الأولى التي تتكون في المنشأة و التي يكشف عنها البرنامج المطور في إطار دراستنا، و هذا بغرض تخطيط تعزيز للهياكل.

كلمات رئيسية: طريقة العناصر المنتهية، التحليل الإيلستوبلاستيكي للهياكل، طريقة المفاصل اللدنة.