ÉTUDE SPECTRALE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS NON HOMOGÈNES

Par

Bounouala Amina

A mes parents,

A mon mari, ma sœur et mes frères

Je dédie ce travail.

Table des matières

Remerciement

A toi mon Dieu tout puissant, pour ton amour, ta grâce et ton assistance sans fin..

Je tient à exprimer ma profonde gratitude et ma grande reconnaissance à ma directrice de thèse Professeur Nawel Benouhiba pour la confiance qu'elle m'a témoignée en acceptant la direction scientifique de mes travaux, pour sa disponibilité, ses précieux conseils tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier :

Monsieur le Professeur Ali DJELLIT pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être le président de jury de ma thèse, les professeurs Abdelhamid BENMEZAÏ, Toufik MOUSSAOUI , Fatma Diaba pour avoir accepté de faire parti du jury de cette thèse.

J'adresse également mes remerciements à tous mes professeurs, particulièrement, ceux qui m'ont enseigné en Licence et en Master.
Mes remerciements vont aussi aux membres du laboratoire de Mathématiques Appliquées que j'ai côtoyé pendant plus de cinq ans et qui m'ont toujours encouragé par leur soutien moral.
Je remercie mes parents pour leur soutien qui m'a été très utile durant ma thèse. Je remercie aussi mes frères Acheref et Abederezak et ma sœur Amira pour leur encouragement.
Je remercie mon époux pour la grande patience et l'encouragement qu'il m'a témoigné. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux

conseils tout le long de mes années de recherche.
Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues jeunes chercheurs du laboratoire avec lesquels j'ai partagé ces années.
Je remercie aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions différentes équations aux dérivées partielles non-linéaires de type elliptique. Nous montrons l'existence des solutions non triviales de certains problèmes faisant intervenir l'opérateur non-homogène $p(x)-$Laplacien.
Cette thèse est répartie en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons une introduction générale et quelques propriétés de base des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable.
Dans le chapitre deux, nous nous intéressons à l'étude des valeurs propres du $p(x)-$Laplacien avec poids. Nous démontrons qu'il existe λ_1 et λ_2 réels tels que $0 < \lambda_2 \leq \lambda_1$ et λ_1 est une valeur propre du problème considéré. La technique utilisée est basée essentiellement sur des méthodes variationnelle.
Dans le chapitre trois, nous traitons le problème du $p(x)-$Laplacien avec une non-linéairité concave-convexe. Nous montrons moyennant le principe variationnel d'Ekeland et le théorème du Col que de tels problèmes admettent des solutions faibles pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dans le chapitre quatre, nous étudions le problème du $p(x)-$Laplacien avec des conditions de Neumann. Nous montrons l'existence d'une solution faible avec une énergie négative en utilisant le principe d'Ekeland et une solution faible avec une énergie positive en utilisant le théorème du Col.
Nous terminons cette thèse avec une conclusion et quelques perspectives.

Mots clés : Espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable, solution faible, point criptique, l'opérateur $p(x)-$Laplacien, valeur propre, la condition de Palais-Smale.

Abstract

In the present thesis, we study elliptic nonlinear partial differential equations involving the $p(x)-$Laplacian operator. Several existing results are established after remaining essential tools.

We prove the existence of weak solutions for the $p(x)$-Laplacian with concave-convex nonlinearities using variational methods. Under appropriate assumptions, we get the problems existing results wihch can be considered as an extension of classical ones about the combined effects of concave and convex nonlinearities.

Key words : Variable exponent Lebesgue-Sobolev space, $p(x)-$Laplacian operator, Weak solution, Eigenvalue, Palais-Smale condition.

Introduction générale

Introduction

Cette thèse traite certains problèmes elliptiques non-linéaires provenant de la théorie des fluides éléctro-rhéologiques qui sont des suspensions colloïdales d'un certain type. Ils sont constitués de particules diélectriques dispersées dans un fluide isolant. De tels fluides, découverts pour la première fois par W.M. Winslow en 1947, présentent des propriétés très intéressantes.
Les propriétés rhéologiques de ces fluides se modifient considérablement en fonction du champ électrique appliqué. Ces fluides peuvent se solidifier presque instantanément en raison de la formation de fibres par les particules parallèles au champ électrique appliqué. La transformation liquide-solide est réversible, une fois que le champ électrique est interrompu, le fluide retrouve son aspect liquide d'origine. Ce phénomène est appelé "l'effet Winslow".

Les fluides électro-rhéologiques sont considérés comme des matériaux intelligents et consomment peu d'énergie. L'effet Winslow fait de ces fluides des condidats théoriquement parfaits à de multiples applications, par exemple en embrayage automobile, amortisseur, contrôle de vibration...

Nous nous référons à [36, 59] pour plus d'information sur les champs d'applications des fluides électro-rhéologiques.

Dans [56], Rajagopal et Růžička ont développé un modèle qui prend en considération l'intéraction complexe entre le champ électromagnétique et le mouvement du fluide. L'équation du movement constitutif d'un fluide électro-rhéologique est donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div} s(u) + (u.\nabla u)u + \nabla \pi = f \tag{0.0.1}$$

où $u : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ est la vitesse du fluide en un point, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ est l'opérateur gradient, π est la pression et f est une force externe.
Le tenseur s est de la forme

$$s(u)(x) = \mu(x)(1 + |Du(x)|^2)^{\frac{p-2}{2}} Du(x),$$

où $p = p(x)$ et $Du = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^{\perp}\right)$ est la partie symétrique du gradient de u.
Les auteurs dans [56] ont établit un résultat d'existence de solutions de l'équation (0.0.1) dans les espaces à exposant variable.

Les espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable ont été étudié dans l'article de Kaváčik, Rákosnik [40] où ils ont montré les propriétés de base comme la complétude, la réflexivité et la séparabilité. Les espaces de Lebesgue-Sobolev ont été utilisés par la suite par Růžička pour étudier le problème (0.0.1). Beaucoup de progrés ont été faits par la suite par L. Diening et P. Harjulehto, P. Hasto [19].

À présent, la théorie des espaces de Lebesgue -Sobolev à exposent variable est bien développée mais il existe tout de même certaines difficultés liées à leur applicabilité aux équations aux dérivées partielles.

Dans cette thèse, nous allons étudier des équations aux dérivées partielles d'un type non standard. Il s'agit des équations ou figure l'opérateur dit $\mathbf{p(x)}-$**Laplacien** soumises à différentes conditions au bord nécessitant l'introduction des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposent variable.
L'opérateur $p(x)-$Laplacien noté $\Delta_{p(x)}$ défini par $\Delta_{p(x)}u := div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$ n'est en aucun cas une généralisation de l'opérateur classique $p-$Laplacien malgré que les deux opérateurs coïncident lorsque p est constant.

Le traitement des problèmes engendrés par l'opérateur $p(x)-$Laplacien par des méthodes variationnelles demande une manipulation laborieuse et ceci est dû à l'aspect non homogène de cet opérateur.

Le problème modèle que nous allons aborder dans cette thèse est de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u) \text{ dans } \Omega \\ \quad + \text{ conditions au bord} \end{cases} \tag{0.0.2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné assez régulier ($N \geq 2$), la fonction source $f(.,.) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va prendre, suivant les chapitres, plusieurs formes et la condition au bord varie entre celle de Dirichlet et de Neumann.
Avant de présenter en détail nos résultats, il est utile de rappeler certain travaux élaboré pour le p-Laplacian qui aident grandement à comprendre la suite des résultats. Nous aborderons les travaux antérieurs concernant le $p(x)-$Laplacien liés au problème étudié dans l'introduction de chaque chapitre.

Le $p-$Laplacien

Nous avons voulu énancer ici certains résultats concernant le p-Laplacien qui représente une généralisation naturelle du Laplacien. Même s'il parait que la forme des résultats leur concernant est analogue, les approches elles, sont tout à fait différentes. Nous présentons des résultats sur le spectre du $p-$Laplacien et ses valeurs propres principales.

Nous commençons par rappeler certains résultats concernant l'existence des valeurs propres pour le problème elliptique non linéaire défini sur un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$ de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda g(x) \left|u\right|^{p-2} u, & \text{pour } \ x \in \Omega, \\ u = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.3}$$

où Δ_p est l'opérateur $p-$Laplacien défini par $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u\right)$ et g est une fonction mesurable positive dans Ω.

La formulation variationnelle du problème (0.0.3) est donnée par

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \left\{0\right\}, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \int\limits_\Omega \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int\limits_\Omega g(x) \left|u\right|^{p-2} uv dx, \ \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{0.0.4}$$

Le problème (0.0.4) est équivalent à trouver des solutions non triviales u de l'équation

$$\langle J'(u), v\rangle = \lambda \langle F'(u), v\rangle \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{0.0.5}$$

où J', F' désignent les dérivées au sens de Gâteaux des fonctionnelles $J, F : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$J(u) = \frac{1}{p} \int\limits_\Omega \left|\nabla u\right|^p dx \tag{0.0.6}$$

et

$$F(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} g\,|u|^p\,dx. \tag{0.0.7}$$

D'après la théorie de Ljusternick-Schnirelmann, la résolution de l'équation (0.0.5) revient exactement à la recherche des points critiques de J sur la variété G,

$$G = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad pF(u) = \int_{\Omega} g\,|u|^p\,dx = 1 \right\}$$

Dans [3], l'auteur prouvé que le problème (0.0.4) admet une suite de solutions (λ_k, u_k) $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq .... \leq \lambda_k)$, tels que

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$$

avec $\int_{\Omega} g(x)\,|u_k|^p\,dx = 1, \forall k \in \mathbb{N}$.
Dans [18], M. Cuesta définit la quantité

$$\lambda_1 = \inf_{u \in G} \int_{\Omega} |\nabla u|^p\,dx \tag{0.0.8}$$

qui est la plus petite valeur propre du problème (0.0.3), elle est principale, unique, simple et isolée.
Voir [4, 5, 7, 67] pour plus de détails.

Apport de la thèse

Avant de faire une présentation détaillée des résultats que nous avons obtenus, nous avons donner un bref résumé de chaque chapitre.

Premier chapitre

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et les propriétés élémentaires des espaces de Musielak-Orlicz. En suite, nous donnons les propriétés de base des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable et nous mentionons certains théorèmes d'injection qui nous sont nécessaires dans l'étude des différents problèmes considérés.

Deuxième chapitre

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème du $p(x)-$Laplacien suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + h(x)\left|u\right|^{s(x)-2}u = \lambda g(x)\left|u\right|^{q(x)-2}u & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.9}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, $p(x), q(x), s(x)$, sont des fonctions continues positives. λ est un nombre réel, g, h sont des fonctions poids qui sont mesurables, positives.

Nous considérons ce problème sous les hypothèses suivantes :

$(A_{p,q})$ $p > 1$, $q > 1$, et $p, q \in C^0(\overline{\Omega})$, $q(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$, et $s(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$ et $p^+ < s^- < s^+ < q^- < q^+$.

$(A_{g,h})$ $0 < g \in L^{r(x)}(\Omega)$, $1 < r(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $r(x) > \frac{p^*(x)}{p^*(x)-q(x)}$ dans $\overline{\Omega}$, $0 < h \in L^{l(x)}(\Omega)$, $1 < l(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ et $l(x) > \frac{p^*(x)}{p^*(x)-s(x)}$ dans $\overline{\Omega}$.

Nous cherchons à démontrer l'existence des solutions faibles de ce problème qui sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'energie I donnée par

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{h(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} dx.$$

Les Lemmes suivants donnent les premiers résultats de ce chapitre.

Lemme 0.0.1. *La fonctionnelle I est de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}, \mathbb{R})$ et*

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} g(x) |u|^{q(x)-2} uv dx + \int_{\Omega} h(x) |u|^{s(x)-2} uv dx$$

pour tout $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Lemme 0.0.2. *Les fonctionnelles ϕ et ψ satisfont :*

$$\begin{aligned} \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\phi(u)}{\psi(u)} &= \infty, \\ \lim_{\|u\|\to \infty} \frac{\phi(u)}{\psi(u)} &= \infty. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{h(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} dx, \\ \psi(u) &= \int_{\Omega} \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx. \end{aligned}$$

Lemme 0.0.3. *ϕ est faiblement semicontinue inférieurement, i.e.*

$$\text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ lorsque } n \to +\infty \qquad \text{alors} \quad \phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n).$$

Lemme 0.0.4. *ψ est une fonctionnelle faiblement-fortement continue, i.e. $u_n \rightharpoonup u$ implique $\psi(u_n) \to \psi(u)$ lorsque $n \to +\infty$.*

En regroupant toutes ces informations nous arrivons à démontrer le résultat principal de ce chapitre résumé dans le Théorème suivant.

Théorème 0.0.5. *Sous les hypothèses* $(A_{p,q})$ *et* $(A_{g,h})$*, il existe* λ_1 *et* $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < \lambda_2 \leq \lambda_1$ *où* λ_1 *est une valeur propre du problème (0.0.9) par contre* λ_2 *ne l'est pas. De plus, tout* $\lambda > \lambda_1$ *est une valeur propre du problème (0.0.9) tandis que tout* $\lambda < \lambda_2$ *n'est pas une.*

Troisième chapitre

Dans ce chapitre, nous traitons le problème du $p(x)-$Laplacien suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + h(x)\left|u\right|^{s_1(x)-2}u = \lambda g(x)\left|u\right|^{q(x)-2}u + k(x)\left|u\right|^{s_2(x)-2}u & \text{pour } x \in \Omega \\ \quad u = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.10}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N(N \geq 2)$, λ est un nombre réel, $p(x), q(x), s_1(x), s_2(x)$ sont des exposants continus dans $\overline{\Omega}$. Les coeffecients $g(x), h(x), k(x)$ sont des fonctions mesurables positives.

Dans ce travail nous supposons que

(H_1) $p > 1, q > 1, p, q \in C^0(\overline{\Omega}), q(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$, $s_1(x) < p^*(x), s_2(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$ et

$$s_2^- < s_2^+ < q^- < q^+ < s_1^- < s_1^+ < p^- < p^+.$$

(H_2) $0 \leq g \in L^{r(x)}(\Omega)$ avec $1 < q(x)r'(x) < p^*(x)$, où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$

$0 \leq h \in L^{m(x)}(\Omega)$ avec $1 < s_1(x)m'(x) < p^*(x)$,

$0 \leq k \in L^{l(x)}(\Omega)$ avec $1 < s_2(x)l'(x) < p^*(x)$.

La fonctionnelle d'énergie correspondante au problème (0.0.10) est définie par

$$J(u)=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p(x)}\left|\nabla u\right|^{p(x)}dx-\lambda\int\limits_{\Omega}\frac{g(x)}{q(x)}\left|u\right|^{q(x)}dx+\int\limits_{\Omega}\frac{h(x)}{s_1(x)}\left|u\right|^{s_1(x)}dx-\int\limits_{\Omega}\frac{k(x)}{s_2(x)}\left|u\right|^{s_2(x)}dx.$$

On démontre que la fonctionnelle J est de classe $C^1(W_0^{1,p(x)},\mathbb{R})$ et que

$$\langle J'(u),v\rangle=\int\limits_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx-\lambda\int\limits_{\Omega}g(x)\left|u\right|^{q(x)-2}uvdx+\int\limits_{\Omega}h(x)\left|u\right|^{s_1(x)-2}uvdx$$

$$-\int\limits_{\Omega}k(x)\left|u\right|^{s_2(x)-2}uvdx.$$

Les principaux résultats de ce chapitre sont donnés dans les théorèmes suivants.

Théorème 0.0.6. *Pour tout* $\lambda\in\left(-\infty,\dfrac{\lambda^*p^-q^-}{p^+q^+}\right)$, *le problème (0.0.10) admet une solution faible dont l'énergie est négative.*

Théorème 0.0.7. *Pour tout* $\lambda\in\left(\dfrac{\lambda^*p^-q^-}{p^+q^+},+\infty\right)$, *le problème (0.0.10) admet une solution faible qui a une énergie positive.*

Pour la démonstration du Théorème 0.0.6, on va vérifier les conditions du Théorème 4.2.11 données par les Lemmes suivants.

Lemme 0.0.8. *La fonctionnelle J est coercive sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Lemme 0.0.9. *La fonctionnelle J est bornée inférieurement, c'est à dire il existe une constante réelle M telle que*

$$J(u)\geq M,\forall u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Lemme 0.0.10. *La fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement.*

Pour prouver le résultat mentionné dans le Théorème 0.0.7, nous utilisons essentiellement le Théorème du Col. Ainsi, il est important de vérifier que la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Lemme 0.0.11. *Supposons que* $\{u_n\} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *est une suite qui satisfait les propriétés suivantes*

$$|J(u_n)| < M \tag{0.0.11}$$

$$J'(u_n) \to 0, \quad n \to \infty, \qquad \textit{dans} \ \ (W_0^{1,p(x)}(\Omega))' \tag{0.0.12}$$

Alors $\{u_n\}$ *possède une sous-suite convergente.*

Dans les lemmes suivants, nous vérifions que la fonctionnelle J satisfait la géométrie du Col.

Lemme 0.0.12. *Pour tout* $\lambda > 0$*, ils existent* $\eta > 0$ *et* $\rho > 0$ *tel que* $J(u) \geq \eta$ *si* $\|u\| = \rho$.

Lemme 0.0.13. *Il existe* $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *telle que* $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$ *et* $J(t\varphi) < 0$ *pour* $t > 0$ *assez grand.*

Quatrième chapitre

Nous étudions dans ce chapitre, le problème donné par

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + h(x)\,|u|^{p(x)-2}\,u = \lambda g(x)\,|u|^{q(x)-2}\,u, & \text{pour } x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\,\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = k(x)\,|u|^{s(x)-2}\,u, & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.13}$$

où p, q et s sont des exposants variables continus. Les fonctions mesurables h et g sont supposées être positives dans Ω, la fonction mesurable k est positive dans $\partial\Omega$, λ est un paramètre réel et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée de la normale extérieure.

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (0.0.13) est donnée par

$$T(u) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int\limits_{\Omega} \frac{h(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} dx - \lambda \int\limits_{\Omega} \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{k(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} d\sigma.$$

Nous étudions le problème (0.0.13) sous les hypothèses suivantes.

Soient $p, q, s \in C(\overline{\Omega})$ telles que

$$(A) \quad 1 < s^- < s^+ < q^- < q^+ < p^- < p^+ < N, \quad \forall x \in \Omega.$$

Nous supposons que les fonctions g, h et k sont positives et que

$$(B) \quad g \in L^{r(x)}(\Omega),\ h \in C(\Omega) \cap L^{m(x)}(\Omega) \text{ et } k \in L^{l(x)}(\partial\Omega).$$

Nous supposons aussi que

$$\begin{aligned} (C) \quad \frac{p^*(x)}{p^*(x) - q(x)} &< r(x), \quad \frac{p^*(x)}{p^*(x) - p(x)} < m(x), \quad \forall x \in \Omega \\ \text{et } \frac{p^\partial(y)}{p^\partial(y) - s(y)} &< l(y), \quad \forall y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Le premier résultat obtenu dans ce chapitre est que la fonctionnelle T est de classe $C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$ et que

$$\langle T'(u), v\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx + \int\limits_{\Omega} h(x) |u|^{p(x)-2} uv dx - \lambda \int\limits_{\Omega} g(x) |u|^{q(x)-2} uv dx -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} k(x) |u|^{s(x)-2} uv d\sigma.$$

Nous allons résumons l'essentiel des résultats de ce chapitre.

Théorème 0.0.14. *Pour toute $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $u_1 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ une solution faible non-triviale du problème (0.0.13) avec $T(u_1) < 0$.*

Théorème 0.0.15. *Pour toute* $\lambda \in \mathbb{R}$, *il existe* $u_2 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *une solution faible non-triviale du problème (0.0.13) avec* $T(u_2) > 0$.

Pour prouver le théorème 0.0.14, nous vérifions les conditions du théorème du Col et pour démontrer le Théorème 0.0.15 nous utilisons le principe variationnel d'Ekeland.

Nous terminons ce travail par une conclusion, quelques perspectives, une annexe et une liste d'ouvrages qui nous ont servis de bibliographie.

Chapitre 1

Introduction aux espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable

L'objectif principal de ce chapitre est de donner un aperçu sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable. Nous présentons dans la première section un rappel sur les espaces de Musielak-Orlicz. Dans la seconde section nous définissons les espaces de Lebesgue à exposant variable et nous discutons leurs propriétés de base. Dans la dernière section, nous introduisons les espaces de Sobolev à exposant variable, énonçons leurs propriétés et rappelons les différentes injections de Sobolev.

1.1 Les espaces de Musielak-Orlicz

Pour l'étude des espaces de Lebesgue à exposant variable, il suffit de rester dans le cadre des espaces de Banach. Toutefois, dans le contexte des espaces de Musielak-Orlicz ce n'est pas la meilleure façon de définir sa topologie. Au lieu de cela, il est préférable de commencer par introduire les espaces modulaires.

Définition 1.1.1. Soit X un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Une fonction $\varrho : X \to [0, \infty]$ est appelée un semimodule sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\varrho(0) = 0$.

(b) $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$ pour tout $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| = 1$.

(c) ϱ est convexe.

(d) ϱ est continue à gauche.

(e) $\varrho(\lambda x) = 0$ pour tout $\lambda > 0$ implique que $x = 0$.

le semimodule ϱ est appelé un module si

(f) $\varrho(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un semimodule ϱ est continu si

(g) l'application $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ est continue sur $[0, \infty)$ pour tout $x \in X$.

On rappelle que la fonction ϱ est dite continue à gauche si l'application $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ est continue à gauche sur $[0, \infty)$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire

$$\lim_{\lambda \to 1^-} \varrho(\lambda x) = \varrho(x).$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $L^0(\Omega)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions mesurables de Lebesgue sur Ω avec $f = g$ si $f(y) = g(y)$ presque pour tout $y \in \Omega$.

Exemple 1.1.2. (a) *Si* $1 \leq p < \infty$, *alors*

$$\varrho_p(f) := \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \tag{1.1.1}$$

définit un module sur $L^0(\Omega)$.

(b) *Soit* $\omega \in L^1_{loc}(\Omega)$ *avec* $\omega > 0$ *presque partout et* $1 \leq p < \infty$. *Alors*

$$\varrho(f) := \int_\Omega |f(x)|^p \, \omega(x) dx$$

définit un module continu sur $L^0(\Omega)$.

Soit ϱ un semimodule sur X. Alors par la convexité de ϱ et le fait que $\varrho(0) = 0$, il s'en suit que $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ est croissante sur $[0, \infty)$ pour tout $x \in X$. En outre, on a

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda|\, x) \leq |\lambda|\, \varrho(x) \qquad \text{pour tout } |\lambda| \leq 1 \\ \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda|\, x) \geq |\lambda|\, \varrho(x) \qquad \text{pour tout } |\lambda| \geq 1 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Dans la définition d'un semimodule ou d'un module, l'espace X est généralement choisi assez grand. L'idée est de choisir le même espace X pour des modules différents comme dans l' Exemple (1.1.2).

Définition 1.1.3. Si ϱ est un semimodule ou un module sur X, alors l'espace

$$X_\varrho := \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \varrho(\lambda x) = 0 \right\}$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire respectivement. La limite $\lambda \to 0$ est dans $\mathbb{R}$.

Comme $\varrho(\lambda x) = \varrho(|\lambda|\, x)$, il suffit d'exiger que $\lim\limits_{\lambda \to 0} \varrho(\lambda x)$ existe pour $\lambda \in (0, \infty)$. De (1.1.2), on peut aussi définir X_ϱ par :

$$X_\varrho := \{ x \in X : \varrho(\lambda x) < \infty \ \text{ pour un certain } \lambda > 0 \}$$

Il est bien connue que, la borne inférieure de l'ensemble vide est par définition infinie.

Théorème 1.1.4. *Soit ϱ un semimodule sur X. Alors, X_ϱ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Sa norme est appelée norme de Luxemburg. Elle est donnée par :*

$$\|x\|_\varrho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho(\frac{1}{\lambda} x) \leq 1 \right\}. \tag{1.1.3}$$

Démonstration. On commence par démontrer que X_ϱ est un espace vectoriel normé. Soit $x, y \in X_\varrho$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D'après la définition de X_ϱ et le fait que $\varrho(\alpha x) = \varrho(|\alpha|\, x)$, il est clair que $\alpha x \in X_\varrho$. Par la convexité de ϱ on a l'estimation suivante

$$0 \leq \varrho(\lambda(x+y)) \leq \frac{1}{2}\varrho(2\lambda x) + \frac{1}{2}\varrho(2\lambda y) \to 0, \lambda \to 0.$$

Donc X_ϱ est un $\mathbb{R}-$espace vecoriel. On a $\|x\|_\varrho < \infty$ pour tout $x \in X_\varrho$ et $\|0\|_\varrho = 0$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\|\alpha x\|_\varrho := \inf\left\{\lambda > 0 : \quad \varrho(\frac{\alpha x}{\lambda}) \leq 1\right\} = |\alpha| \inf\left\{\lambda > 0 : \quad \varrho(\frac{1}{\lambda} x) \leq 1\right\} = |\alpha|\, \|x\|_\varrho .$$

Soit $x, y \in X$ et $\gamma > \|x\|_\varrho$ et $\delta > \|y\|_\varrho$. Alors $\varrho(x/\gamma) \leq 1$ et $\varrho(y/\delta) \leq 1$, et par la convexité de ϱ il suit que

$$\varrho(\frac{x+y}{\gamma+\delta}) = \varrho(\frac{\gamma}{\gamma+\delta}\frac{x}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma+\delta}\frac{y}{v}) \leq \frac{\gamma}{\gamma+\delta}\varrho(\frac{x}{\gamma}) + \frac{\delta}{\gamma+\delta}\varrho(\frac{y}{\delta}) \leq 1$$

ainsi $\|x+y\|_\varrho \leq \gamma + \delta$ d'où l'inégalité triangulaire $\|x+y\|_\varrho \leq \|x\|_\varrho + \|y\|_\varrho$.

Si $\|x\|_\varrho = 0$ alors $\varrho(\alpha x) \leq 1$ pour tout $\alpha > 0$. Par conséquent

$$\varrho(\lambda x) \leq \beta \varrho(\frac{\lambda x}{\beta}) \leq \beta$$

pour tout $\lambda > 0$ et $\beta \in (0, 1]$ où on a utilisé (1.1.2). Ceci implique que $\varrho(\lambda x) = 0$ pour tout $\lambda > 0$, d'où $x = 0$. □

Exemple 1.1.5. *(L'espace de Lebesgue classique)*

Soit $1 \leq p < \infty$, *alors l'espace modulaire correspondant* $(L^0(\Omega))_{\varrho_p}$ *coïncide avec l'espace de Lebesgue classique* $L^p(\Omega)$, *c'est-à-dire*

$$\|f\|_p = \|f\|_{\varrho_p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le Lemme suivant caractérise la topologie standard définie sur X_ϱ en terme du semimodule.

Lemme 1.1.6. *Soit ϱ un semimodule sur X et $x_k \in X_\varrho$. Alors $x_k \to 0$ pour $k \to \infty$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(\lambda x_k) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.*

Démonstration. Supposons que $\|x_k\|_\varrho \to 0$ et $\lambda > 0$. Alors $\|K\lambda x_k\|_\varrho \leq 1$ pour tout $K > 1$ et pour k grand, ainsi $\varrho(K\lambda x_k) \leq 1$ pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand on a

$$\varrho(\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}\varrho(K\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}$$

par (1.1.2). Ceci implique que $\varrho(\lambda x_k) \to 0$.

Supposons maintenant que $\varrho(\lambda x_k) \to 0$ pour tout $\lambda > 0$, alors $\varrho(\lambda x_k) \leq 1$ pour tout $k \geq k_0$. En particulier, $\|x_k\|_\varrho \leq 1/\lambda$ pour tout $k \geq k_0$ pour un certain k_0. Comme $\lambda > 0$ est arbitraire, on obtient $\|x_k\|_\varrho \to 0$. En d'autre terme on obtient $x_k \to 0$. $\square$

En dehors de la topologie sur X_ϱ qui est induite par la norme, il est possible de définir un autre type de convergence.

Définition 1.1.7. Soit ϱ un semimodule sur X et $x_k, x \in X_\varrho$. Alors x_k est convergente en module ($\varrho-$convergente) vers x s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\varrho(\lambda(x_k - x)) \to 0$. Notons ceci par $x_k \to x$ (en ϱ).

Il est clair du Lemme 1.1.6 que la convergence modulaire est plus faible que la convergence en norme. En effet, pour la convergence en norme on a
$\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(\lambda(x_k - y)) = 0$ pour toute $\lambda > 0$, tandis que pour la convergence modulaire c'est pour un certain $\lambda > 0$. Pour certains espaces semimodulaires, la convergence modulaire et la convergence en norme coïncident.

Lemme 1.1.8. *Soit X_ϱ un espace semimodulaire, alors la convergence modulaire et la convergence en norme sont équivalentes si et seulement si*

$$\varrho(x_k) \to 0 \quad \textit{implique que} \quad \varrho(2x_k) \to 0.$$

Démonstration. La convergence modulaire et la convergence en norme sont équivalentes. Soit $\varrho(x_k) \to 0$ avec $x_k \in X_\varrho$. Alors $x_k \to 0$ et par le Lemme 1.1.6, il s'ensuit que $\varrho(2x_k) \to 0$.

Soit $x_k \in X_\varrho$ avec $\varrho(x_k) \to 0$. Nous devons montrer que $\varrho(\lambda x_k) \to 0$ pour tout $\lambda > 0$. Choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m \geq \lambda$. Alors par l'application répétée de la supposition on obtient $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(2^m x_k) = 0$. Alors

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \varrho(\lambda x_k) \leq \lambda 2^{-m} \lim_{k\to\infty} \varrho(2^m x_k) = 0$$

par (1.1.2). Ceci prouve que $x_k \to 0$. □

Remarque 1.1.9. *La condition $\varrho(x_k) \to 0$ implique que $\varrho(2x_k) \to 0$ s'appelle la Δ_2-condition.*

Etudions à présent la boule unité fermée et ouverte de X_ϱ. Le Lemme suivant est d'une importance capitale.

Lemme 1.1.10. *(Propriété de la boule unité entre norme et module)*

Soit ϱ un semimodule sur X. Alors $\|x\|_\varrho \leq 1$ et $\varrho(x) \leq 1$ sont équivalentes. Si ϱ est continu alors $\|x\|_\varrho < 1$ et $\varrho(x) < 1$ sont aussi équivalentes. De même pour $\|x\|_\varrho = 1$ et $\varrho(x) = 1$.

Démonstration. Si $\varrho(x) \leq 1$ alors $\|x\|_\varrho \leq 1$ par la définition de $\|.\|_\varrho$. Si d'autre part on a $\|x\|_\varrho \leq 1$ alors $\varrho(x/\lambda) \leq 1$ pour tout $\lambda > 1$. Comme ϱ est continu à gauche il s'en suit que $\varrho(x) \leq 1$.

Puisque ϱ est continu alors si $\|x\|_\varrho < 1$ alors il existe $\lambda < 1$ pour lequel $\varrho(x/\lambda) \leq 1$. Donc par (1.1.2) il vient que

$$\varrho(x) \leq \lambda\varrho(x/\lambda) \leq \lambda < 1.$$

D'autre part, si $\varrho(x) < 1$ alors par la continuité de ϱ il existe $\gamma > 1$ avec $\varrho(\gamma x) < 1$. Donc $\|\gamma x\|_\varrho \leq 1$ et $\|x\|_\varrho \leq 1/\gamma < 1$. L'équivalence de $\|x\|_\varrho = 1$ et $\varrho(x) = 1$ est une conséquence immédiate des cas " ≤ 1" et " < 1". □

Un exemple simple d'un semimodule qui est continu à gauche mais qui n'est pas continu est le suivant

$$\varrho_\infty(t) = \infty.\chi_{(1,\infty)}(t) \text{ sur } X = \mathbb{R}$$

qui est un semimodule sur $\mathbb{R}$ et $\|x\|_{\varrho_\infty} = |x|$.

Corollaire 1.1.11. *Soit ϱ un semimodule sur X et $x \in X_\varrho$.*

(a) *Si $\|x\|_\varrho \leq 1$ alors $\varrho(x) \leq \|x\|_\varrho$.*

(b) *Si $1 < \|x\|_\varrho$ alors $\|x\|_\varrho \leq \varrho(x)$.*

(c) *$\|x\|_\varrho \leq \varrho(x) + 1$.*

Démonstration. (a) Le résultat est évidente pour $x = 0$. Supposons que $0 < \|x\|_\varrho \leq 1$. Par la propriété de la boule unité (Lemme 1.1.10) et le fait que $\left\| x/\|x\|_\varrho \right\|_\varrho = 1$ on obtient que $\varrho(x/\|x\|_\varrho) \leq 1$. Donc $\|x\|_\varrho \leq 1$ et il résulte de (1.1.2) que $\varrho(x)/\|x\|_\varrho \leq 1$.

(b) Supposons que $\|x\|_\varrho > 1$, alors $\varrho(x/\lambda) > 1$ pour $1 < \lambda < \|x\|_\varrho$ et par (1.1.2) il s'en suit que $1 < \varrho(x)/\lambda$. Comme λ est arbitraire alors $\varrho(x) \geq \|x\|_\varrho$.

(c) Ce point résulte immédiatement de (b). □

A présent, on va étudier des espaces plus concrets au lieu des espaces semimodulaires générales. On considère les espaces où le module est donné par l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles.

Définition 1.1.12. Soit φ une fonction convexe telle que $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ avec $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$. De telles fonctions sont appelées $\varphi-$fonction, positive si $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$Il existe une relation directe entre les $\varphi-$fonctions et le semimodule sur $\mathbb{R}$ résumée dans lemme suivant.

Lemme 1.1.13. *Soient $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ et ϱ son prolongement sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire*

$$\varrho(t) = \varphi(|t|) \quad \textit{pour tout} \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Alors φ est une $\varphi-$fonction si et seulement si ϱ est un semimodule sur $\mathbb{R}$ avec $X_\varrho = \mathbb{R}$. De plus, φ est positive si et seulement si ϱ est un module sur $\mathbb{R}$ avec $X_\varrho = \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit φ une $\varphi-$fonction. Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$, on a $X_\varrho = \mathbb{R}$. Pour prouver que ϱ est un semimodule sur $\mathbb{R}$, il reste à montrer que $\varrho(\lambda t_0) = 0$, pour tout $\lambda > 0$ implique $t_0 = 0$. Supposons que $\varrho(\lambda t_0) = 0$ pour tout $\lambda > 0$. Comme $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ et, il existe $t_1 > 0$ avec $\varphi(t_1) > 0$. Ainsi il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $t_1 = \lambda t_0$. Alors nécessairement on a $t_0 = 0$ et ϱ ainsi est un semimodule. Supposons que φ est positive. Si $\varrho(s) = 0$, alors $\varphi(|s|) = 0$ et donc $s = 0$.

Pour l'autre sens, on prend ϱ un semimodule sur $\mathbb{R}$ avec $X_\varrho = \mathbb{R}$. Comme $X_\varrho = \mathbb{R}$, il existe $t_2 > 0$ tel que $\varrho(t_2) < \infty$. De (1.1.2), il vient

$$0 \leq \varphi(t) \leq \frac{t}{t_2}\varphi(t_2) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, t_2].$$

Ceci implique que $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$ et il existe $\lambda > 0$ tel que $\varrho(\lambda.1) \neq 0$. En particulier, il existe $t_3 > 0$ avec $\varphi(t_3) > 0$ et

$$\varphi(kt_3) \geq k\varphi(t_3) > 0,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ arbitraire, donc nécessairement on a $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Pour prouver que φ est une $\varphi-$fonction, nous supposons que ϱ est un semimodule,

$$\varrho(t) = \varphi(|t|) = 0 \quad \text{implique que } t = 0.$$

Ainsi par la négation, on obtient $t > 0$, qui implique que $\varphi(t) > 0$. φ est donc positive. $\square$

Le Lemme suivant est une conséquence immédiate de la continuité à gauche de φ qu'on énonce sans démonstration.

Lemme 1.1.14. *Toute $\varphi-$fonction est semicontinue inférieurement.*

Exemple 1.1.15. *Soit $1 \leq p < \infty$. On définit*

$$\begin{aligned} \varphi_p(t) &:= \frac{1}{p}t^p, \\ \varphi_\infty(t) &:= \infty.\chi_{(1,\infty)}(t), \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$. Alors φ_p et φ_∞ sont des $\varphi-$fonctions. De plus, φ_p est continue et positive, tendis que φ_∞ est seulement continue à gauche et semicontinue inférieurement mais non positive.

Remarque 1.1.16. *1. Soit φ une $\varphi-$fonction. Alors, comme toute fonction convexe, φ est continue si et seulement si φ est finie sur $[0,\infty)$.*

2. Les propriétés suivantes les φ-fonctions sont très utiles :

$$\begin{aligned} \varphi(rt) &\leq r\varphi(t), \qquad (1.1.4) \\ \varphi(st) &\geq s\varphi(t) \end{aligned}$$

pour $r \in [0,1]$, $s \in [1,\infty)$ et $t \geq 0$. C'est une conséquence simple de la convexité de φ. L'inégalité (1.1.4) implique que

$$\varphi(a) + \varphi(b) \leq \frac{a}{a+b}\varphi(a+b) + \frac{b}{a+b}\varphi(a+b) = \varphi(a+b)$$

pour tous $a, b \geq 0$, tels que $a+b>0$ qui, combiné avec les propriétés de la convexité donne

$$\varphi(a)+\varphi(b) \leq \varphi(a+b) \leq \frac{1}{2}(\varphi(2a)+\varphi(2b)). \tag{1.1.5}$$

Bien qu'il soit possible de définir des espaces de fonctions en utilisant les $\varphi-$fonctions, ça reste toujours insuffisant pour construire des espaces de Lebesgue à exposent variable. Pour ces derniers la fonction φ qui dépende également de l'emplacement dans l'espace. On a donc besoin des $\varphi-$fonctions généralisées puisqu'elles peuvent dépendre de la variable de l'espace.

Définition 1.1.17. Soit $(A, \sum, \mu)$ un $\sigma-$fini espace mesuré complet. Une fonction réelle $\varphi : A \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ est dite une $\varphi-$fonction généralisée sur $(A, \sum, \mu)$ si

(a) $\varphi(y, .)$ est une $\varphi-$fonction pour tout $y \in A$.

(b) $y \to \varphi(y, t)$ est mesurable pour tout $t \geq 0$.

Si φ est une $\varphi-$fonction généralisée sur $(A, \sum, \mu)$, on écrit $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ si Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ est la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle. Nous notons $\varphi \in \Phi(\Omega)$ pour dire que φ est une $\varphi-$fonction généralisée sur Ω.

Toutes les $\varphi-$fonctions sont des $\varphi-$fonctions généralisées, si on met $\varphi(y, t) := \varphi(t)$ pour $y \in A$ et $t \in [0, \infty)$. Aussi, à partir de (1.1.4) et le Lemme 1.1.14 on voit que $\varphi(y, .)$ est croissante et semi-continue inférieurement sur $[0, \infty)$ pour tout $y \in A$.

Définition 1.1.18. Soit $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ et soit ϱ_φ donné par

$$\varrho_\varphi(f) = \int_A \varphi(y, |f(y)|) d\mu(y)$$

pour tout $f \in L^0(A, \mu)$. Alors l'espace semimodulaire

$$\begin{aligned}\left(L^0(A,\mu)\right)_{\varrho_\varphi} &= \left\{f \in L^0(A,\mu) : \lim_{\lambda \to 0} \varrho_\varphi(\lambda f) = 0\right\} \\ &= \left\{f \in L^0(A,\mu) : \varrho_\varphi(\lambda f) < \infty \text{ pour certain } \lambda > 0\right\}\end{aligned}$$

sera appelé l'espace de **Musielak-Orlicz** et est désigné par $L^{\varphi}(A,\mu)$ où L^{φ} muni de la norme $\|.\|_{\varrho_{\varphi}}$ou $\|.\|_{\varphi}$qui est donnée par :

$$\|f\|_{\varphi} = \inf\left\{\lambda > 0 : \ \varrho_{\varphi}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\right\}.$$

L'espace de Musielak-Orlicz est appelé aussi espace d'Orlicz généralisé.

Exemple 1.1.19. *Soit $(A,\sum,\mu)$ un $\sigma-$fini espace mesuré complet.*

(a) Les (semi) modules donnés dans l'exemple 1.1.2 $(a)-(b)$ définissent des espaces de Musielak-Orlicz.

(b) Soit φ une $\varphi-$fonction, alors

$$\varrho_{\varphi}(f) = \int\limits_{A} \varphi(|f(y)|)d\mu(y)$$

est un semimodule sur $L^0(A,\mu)$. Si φ est positive, alors ϱ est un module sur $L^0(A,\mu)$ et l'espace $L^{\varphi}(A,\mu)$ est appelé espace d'Orlicz.

Lemme 1.1.20. *[19]*

Soit $\varphi \in \Phi(A,\mu)$ et $\mu(A) < \infty$. Alors toute suite de Cauchy en norme est aussi une suite de Cauchy par rapport à la convergence en mesure.

Lemme 1.1.21. *[19]*

Soit $\varphi \in \Phi(A,\mu)$, alors toute suite de Cauchy $(f_k) \subset L^{\varphi}$ en norme admet une sous-suite qui converge μ-presque partout vers une fonction mesurable f.

Théorème 1.1.22. *Soit $\varphi \in \Phi(A,\mu)$, alors $L^{\varphi}(A,\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_k) une suite de Cauchy. D'après le Lemme 1.1.21, il existe une sous-suite (f_{k_j}) et une fonction $\mu-$mesurable $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f_{k_j} \to f$ pour $\mu-$presque tout $y \in A$. Ceci implique que

$$\varphi(y, \left|f_{k_j}(y) - f(y)\right|) \to 0 \quad \mu - \text{presque partout.}$$

Soit $\lambda > 0$ et $0 < \varepsilon < 1$, comme (f_k) est une suite de Cauchy, il existe $K = K(\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\lambda(f_m - f_k)\|_\varphi < \varepsilon$$

pour tout $m, k \geq N$, ce qui implique que

$$\varrho_\varphi(\lambda(f_m - f_k)) \leq \varepsilon.$$

D'après le Corollaire 1.1.11 et le Lemme de Fatou on trouve

$$\begin{aligned}
\varrho_\varphi(\lambda(f_m - f)) &= \int_A \lim_{j\to\infty} \varphi(y, \lambda\left|f_m(y) - f_{k_j}(y)\right|)d\mu(y) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_A \varphi(y, \lambda\left|f_m(y) - f_{k_j}(y)\right|)d\mu(y) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \varrho_\varphi(\lambda(f_m - f_{k_j})) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Alors $\varrho_\varphi(\lambda(f_m - f_{k_j})) \to 0$ pour $m \to \infty$ et tout $\lambda > 0$ et $\|f_k - f\|_\varphi \to 0$ d'après le Lemme 1.1.6. Ainsi toute suite de Cauchy converge dans L^φ. □

Lemme 1.1.23. *[19]*

Soit $\varphi \in \varphi(A, \mu)$ et f_k, f , $g \in L^0(A, \mu)$.

(a) Si $f_k \to f$ $\mu-$presque partout, alors $\varrho_\varphi(f) \leq \liminf_{k\to\infty} \varrho_\varphi(f_k)$.

(b) Si $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu-$presque partout, alors $\varrho_\varphi(f) = \liminf_{k\to\infty} \varrho_\varphi(f_k)$.

(c) Si $f_k \to f$ $\mu-$presque partout et $|f_k| \leq |g|$ $\mu-$presque partout, et $\varrho_\varphi(\lambda g) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$, alors $f_k \to f$ dans L^φ.

Ces propriétés sont appelées le Lemme de Fatou (pour le module), la convergence monotone et la convergence dominée respectivement.

Théorème 1.1.24. *[19]*

Soit $\varphi \in \Phi(A, \mu)$. *Alors*

(*a*) $\|f\|_\varphi = \||f|\|_\varphi$ *pour tout* $f \in L^\varphi$.

(*b*) *Si* $f \in L^\varphi$, $g \in L^0(A, \mu)$ *et* $0 \leq |g| \leq |f|$ $\mu-$*presque partout, alors* $g \in L^\varphi$ *et* $\|g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi$.

(*c*) *Si* $f_k \to f$ *presque partout, alors* $\|f\|_\varphi \leq \lim\inf_{k\to\infty} \|f_k\|_\varphi$.

(*d*) *Si* $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu-$*presque partout avec* $f_k \in L^\varphi(A, \mu)$ *et* $\sup_k \|f_k\|_\varphi < \infty$. *Alors* $f \in L^\varphi(A, \mu)$ *et* $\|f_k\|_\varphi \nearrow \|f\|_\varphi$.

Définition 1.1.25. Une $\varphi-$fonction φ est appelée $N-$fonction si elle est continue et positive et satisfait $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ et $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$.

Une fonction $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ est une $N-$fonction generalisée si $\varphi(y, .)$ est une $N-$fonction pour tout $y \in \Omega$. On note par $N(A, \mu)$ l'ensemble des $N-$fonctions generalisées.

Théorème 1.1.26. *[19]*

Si $\varphi \in N(A, \mu)$ *est uniformément convexe, alors* ϱ_φ *est uniformément convexe.*

Théorème 1.1.27. *[19]*

Soit ϱ *un semimodule uniformément convexe sur* X *qui satisfait* Δ_2-*condition. Alors la norme sur* X_ϱ *est uniformément convexe, d'où* X_ϱ *est uniformément convexe.*

1.2 L'espace de Lebesgue à exposant variable

Dans cette section, nous définissons les espaces de Lebesgue à exposant variable $L^{p(\cdot)}$. Ces espaces diffèrent des espaces L^P classiques lorsque l'exposant p n'est pas une constante mais une fonction $p : \Omega \to [1, \infty]$. Les espaces $L^{p(\cdot)}$ s'inscrivent dans le cadre des espaces de Musielak-Orlicz et sont donc aussi des espaces semimodulaires.

Nous allons d'abord définir les φ-fonctions pour les espaces à exposant variable et étudier leurs propriétés. Ensuite, nous serons en mesure d'appliquer les résultats des espaces Musielak-Orlicz dans ce cas particulier puis nous représentons des résultats sur les injections entre les espaces avec différents exposants.

1.2.1 L'espace $\varphi-$fonction de Lebesgue

Pour la définition des espaces de Lebesgue à exposant variable, il est nécessaire d'introduire la classe des exposants qui nous intéressent. De nombreux résultats sur les propriétés de base de ces espaces ont été prouvés d'abord par Kováčik et Ràkosnik dans [40]. Ensuite ces résultats ont été repris par Fan et Zhao dans [27].

Définition 1.2.1. Soit $(A, \sum, \mu)$ un $\sigma-$fini espace de mesure complet. On note par $P(A, \mu)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$mesurables $p : A \to [1, \infty]$.

Les fonctions $p \in P(A, \mu)$ sont appelées exposants variables sur A. On définit

$$p^{-} := p_A^{-} = ess \inf_{y \in A} p(y) \quad \text{et} \quad p^{+} := p_A^{+} = ess \sup_{y \in A} p(y)\ . \tag{1.2.1}$$

Si $p^+ < \infty$, alors on appelle p un exposant variable borné. Pour $p \in P(A, \mu)$, on définit $p' \in P(A, \mu)$ par

$$\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1, \ \text{où} \quad \frac{1}{\infty} = 0. \tag{1.2.2}$$

La fonction p' est appelée le conjugué de l'exposant variable p.

Dans le cas particulier où μ est la mesure n-dimentionnelle de Lebesgue, Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $P(\Omega, \mu) = P(\Omega)$.

Pour la définition de l'espace $L^{p(\cdot)}$, nous avons besoin d'une $\varphi-$fonction généralisée correspondante.

Définition 1.2.2. Pour $t \geq 0$ et $1 \leq p < \infty$ on définit

$$\widetilde{\varphi}_p(t) = \frac{1}{p}t^p, \quad \overline{\varphi}_p(t) = t^p \ .$$

En outre,

$$\overline{\varphi}_\infty(t) = \widetilde{\varphi}_\infty(t) = \infty.\chi_{(1,\infty)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ \infty & \text{si} \quad t \in (1,\infty). \end{cases}$$

Pour l'exposant variable $p \in P(A, \mu)$, on définit pour $y \in A$ et $t \geq 0$

$$\widetilde{\varphi}_{p(.)}(y,t) = \widetilde{\varphi}_{p(y)}(t) \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}_{p(.)}(y,t) = \overline{\varphi}_{p(y)}(t).$$

Remarque 1.2.3. *Il est facile de voir que les deux fonctions $\widetilde{\varphi}_p$ et $\overline{\varphi}_p$ sont des $\varphi-$fonctions si $p \in [1, \infty]$. Donc $\widetilde{\varphi}_{p(.)}$ et $\overline{\varphi}_{p(y)}$ sont des φ-fonctions généralisées si $p \in P(A,\mu)$. De plus, si $q \in (1,\infty)$ et $p \in P(A,\mu)$ avec $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, alors $\widetilde{\varphi}_q$, $\overline{\varphi}_q$ sont des $N-$fonctions et $\widetilde{\varphi}_{p(.)}$ et $\overline{\varphi}_{p(.)}$ sont des $N-$fonctions généralisées. Si $q \in [1, \infty)$, alors $\widetilde{\varphi}_q$, $\overline{\varphi}_q$ sont continues et positives. La fonction $\widetilde{\varphi}_\infty = \overline{\varphi}_\infty$est seulement continue à gauche et n'est pas positive.*

Les avantages de $\widetilde{\varphi}_p$ sont ses propriétés intéressantes en ce qui concerne le conjugué, la continuité et la convexité par rapport à l'exposant p. Tout d'abord, pour tout $t \geq 0$, l'application $p \to \widetilde{\varphi}_p\ (t)$ est continue par rapport à $p \in [1,\infty]$. En particulier,

$$\widetilde{\varphi}_\infty(t) = \lim_{p\to\infty} \widetilde{\varphi}_p(t)$$

pour tout $t \geq 0$. Ceci suggère que l'expression $\frac{1}{p}t^p$ a pour $p = \infty$ une interprétation naturelle, à savoir $\widetilde{\varphi}_\infty(t) = \infty\chi_{(1,\infty)}\ (t)$. Par conséquent, parfois il suffit d'écrire $\widetilde{\varphi}_p(t) = \frac{1}{p}t^p$ qui inclut le cas $p = \infty$.

Maintenant on définit l'inverse continu à gauche d'une $\varphi-$fonction.

Définition 1.2.4. Pour une $\varphi-$fonction, on définit $\varphi^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ par

$$\varphi^{-1}(t) = \inf \{\tau \geq 0 : \ \varphi(\tau) \geq t \quad \text{pour tout } t \geq 0\},$$

on appelle φ^{-1} l'inverse continue à gauche de φ.

Pour une $\varphi-$fonction généralisée, à inverse continu à gauche définie point par point en $y \in A$, soit $\varphi^{-1}(y, .) = (\varphi(y, .))^{-1}$, φ^{-1} est alors croissante et continue à gauche sur $[0, \infty)$, de plus $\varphi^{-1}(0) = 0$ et

$$\varphi(\varphi^{-1}(t)) \leq t \quad \text{pour tout } t \geq 0. \tag{1.2.3}$$

On a aussi

$$t \leq \varphi(\varphi^{-1}(t)) \quad \text{avec } \varphi(t) < \infty, \qquad \text{pour tout } t \geq 0\ . \tag{1.2.4}$$

Définition 1.2.5. Soit $\varphi \in \Phi(A, \mu)$. Alors pour tout $y \in A$, nous notons par $\varphi^*(y, .)$ la fonction conjuguée de $\varphi(y, .)$ qui est définit par

$$\varphi^*(y, u) = \sup_{t \geq 0}(tu - \varphi(y, t)). \tag{1.2.5}$$

pour tout $u \geq 0$ et $y \in \Omega$.

On applique cette définition dans le cas particulier où φ est une $\varphi-$function (n'est pas généralisée), telle que

$$\varphi^*(u) = \sup_{t \geq 0}(tu - \varphi(t)).$$

Théorème 1.2.6. *[19]*

Si $\varphi \in N(A, \mu)$, alors $\varphi^* \in N(A, \mu)$ et $(\varphi^*)' = (\varphi')^{-1}$. En particulier

$$\varphi^*(y, t) = \int_0^t (\varphi')^{-1}(y, s) ds$$

pour tout $y \in A$ et $s \geq 0$.

Lemme 1.2.7. *Si* $1 \leq q \leq \infty$, *alors* $(\widetilde{\varphi}_q)^* = \widetilde{\varphi}_{q'}$ *et on a*

$$(\overline{\varphi}_q)^*(t) \leq \overline{\varphi}_{q'}(t) \leq (\overline{\varphi}_q)^*(2t)$$

pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. On montre d'abord que $(\widetilde{\varphi}_q)^* = \widetilde{\varphi}_{q'}$, pour $q \in (1, \infty)$. Si $q \in (1, \infty)$, alors l'assertion découle immédiatement du Théorème 1.2.6

En outre,

$$(\widetilde{\varphi}_1)^*(u) = \sup_{t \geq 0}(tu - t) = \sup_{t \geq 0}(t(u-1)) = \infty.\chi_{(1,\infty)}(u) = \widetilde{\varphi}_\infty(u)$$

pour tout $u \geq 0$. Ainsi, $\widetilde{\varphi}_1(t) = (\widetilde{\varphi}_1)^{**}(t) = (\widetilde{\varphi}_\infty)^*(t)$ pour tout $t \geq 0$, comme $(\varphi^*)^* = \varphi$. En particulier, on a

$$\varphi(y, t) = \sup_{u \geq 0}(tu - \varphi^*(y, u))$$

pour tout $y \in \Omega$ et $t \geq 0$.

Puisque $\overline{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_\infty = \widetilde{\varphi}_\infty$, et $(\widetilde{\varphi}_q)^* = \widetilde{\varphi}_{q'}$ pour tout $q \in [1, \infty]$ par le cas précédent, il suffit de considérer le cas $1 < q < \infty$. Les estimations

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\varphi}_{q'}(t)}{(\overline{\varphi}_q)^*(t)} &= q' q^{q'-1} \geq 1, \\ \frac{\overline{\varphi}_{q'}(t)}{(\overline{\varphi}_q)^*(2t)} &= q' q^{q'-1} 2^{-q'} \leq 1, \end{aligned}$$

sont valables pour tout $t > 0$, ce qui donne la dernière assertion. □

Les deux $\varphi-$fonctions $\widetilde{\varphi}_p$ et $\overline{\varphi}_p$ sont liées par la relation suivante :

Lemme 1.2.8. *Si* $1 \leq q \leq \infty$, *alors*

$$\widetilde{\varphi}_q(t) \leq \overline{\varphi}_q(t) \leq \widetilde{\varphi}_q(2t) \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Démonstration. Puisque $\widetilde{\varphi}_\infty = \overline{\varphi}_\infty$ il suffit alors de considérer le cas $1 \leq q < \infty$. Pour $t > 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{\varphi}_q(t)}{\overline{\varphi}_q} &= \frac{1}{q} \leq 1, \\ \frac{\widetilde{\varphi}_q(2t)}{\overline{\varphi}_q} &= \frac{2^q}{q} \geq e \log 2 \geq 1, \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 1.2.9. *Il est également possible de montrer que pour tout $\lambda > 1$, il existe $c_\lambda > 1$ tel que $\widetilde{\varphi}_q(t) \leq \overline{\varphi}_q(t) \leq c_\lambda \widetilde{\varphi}_q(\lambda t)$ pour tout $q \in [1, \infty]$ et tout $t \geq 0$.*

Définition 1.2.10. Une fonction $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ est localement intégrable sur A si $\varrho_\varphi(t\chi_E) < \infty$ pour tout $t \geq 0$ et $E \subset A$ tel que $\mu(E) < \infty$.

Si $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ est localement intégrable, alors E^φ contient l'ensemble des fonctions simple $S(A, \mu)$, la proprietée $S(A, \mu) \subset E^\varphi$ est équivalente à la localement intégrabilité de φ.

La $\varphi-$fonction généralisée $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ est propre, si l'ensemble des fonctions simples $S(A, \mu)$ satisfait

$$S(A, \mu) \subset L^\varphi(A, \mu) \cap (L^\varphi(A, \mu))'.$$

1.2.2 Espace de Lebesgue à exposant variable : Définitions et Propriétés de base

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'espace de Lebesgue à exposant variable.

Définition 1.2.11. Soit $p \in P(A, \mu)$ et soit $\varphi_{p(.)} = \widetilde{\varphi}_{p(.)}$ ou $\varphi_{p(.)} = \overline{\varphi}_{p(.)}$. Ainsi, on obtient un semimodule

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(A)}(f) = \int\limits_A \varphi_{p(x)}(|f(x)|)dx. \tag{1.2.6}$$

On définit l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ comme étant l'espace de Musielak-Orlicz $L^{\varphi_{p(\cdot)}}(A, \mu)$ muni de la norme

$$|.|_{L^{p(\cdot)}(A,\mu)} = \|.\|_{L^{\varphi_{p(\cdot)}}(A,\mu)}.$$

En particulier, l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ est

$$L^{p(\cdot)}(A, \mu) = \left\{ f \in L^0(A, \mu) : \lim_{\lambda \to 0} \varrho_{L^{p(\cdot)}(A)}(\lambda f) = 0 \right\}$$

qui est équivalent à l'espace

$$L^{p(\cdot)}(A, \mu) = \left\{ f \in L^0(A, \mu) : \varrho_{L^{p(\cdot)}(A)}(\lambda f) < \infty \quad \text{pour un certain } \lambda > 0 \right\} \tag{1.2.7}$$

muni de la norme

$$|f|_{L^{p(\cdot)}(A,\mu)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{L^{p(\cdot)}(A)}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1 \right\}. \tag{1.2.8}$$

Notons que $\varrho_{L^{p(\cdot)}(A)}$ est un module si p est fini partout. Nous abrègeons $\varrho_{L^{p(\cdot)}(A)}$ à $\varrho_{p(.)}$ et $|.|_{L^{p(\cdot)}(A,\mu)}$ à $|.|_{p(.)}$. En outre, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et μ est la mesure de Lebesgue, on écrit simplement $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Cette définition semble ambigu car $\varphi_{p(.)} = \widetilde{\varphi}_{p(.)}$ ou $\varphi_{p(.)} = \overline{\varphi}_{p(.)}$. Toutefois, en raison du Lemme 1.2.8, il est clair que $L^{\widetilde{\varphi}_{p(\cdot)}} = L^{\overline{\varphi}_{p(\cdot)}}$ et

$$\|f\|_{\widetilde{\varphi}_{p(.)}} \leq \|f\|_{\overline{\varphi}_{p(.)}} \leq 2 \|f\|_{\widetilde{\varphi}_{p(.)}}.$$

Ainsi, les deux définitions se rejoignent à l'équivalence des normes à une constante tout au plus 2.

Rappelons que nous avons deux $\varphi-$fonctions $\widetilde{\varphi}_{p(.)}$ et $\overline{\varphi}_{p(.)}$. Habituellement, la norme exacte de $L^{p(\cdot)}$ n'est pas importante, donc on travaille avec $\varphi_{p(.)}$ sans préciser si $\varphi_{p(.)} = \widetilde{\varphi}_{p(.)}$ ou $\varphi_{p(.)} = \overline{\varphi}_{p(.)}$. S' il y a une différence dans le choix de $\varphi_{p(.)}$, ceci sera précisé.

Lemme 1.2.12. *[19] (Propriété de la boule unité, Norme-module)*

Si $p \in P(\Omega)$, alors $|f|_{p(.)} \leq 1$ et $\varrho_{p(.)}(f) \leq 1$ sont équivalents. Pour $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ on a

(a) Si $|f|_{p(.)} \leq 1$ alors $\varrho_{p(.)}(f) \leq |f|_{p(.)}$.

(b) Si $1 < |f|_{p(.)}$ alors $|f|_{p(.)} \leq \varrho_{p(.)}(f)$.

D'après le Lemme 1.1.23, on en déduit :

Lemme 1.2.13. *Soit $p \in P(A, \mu)$ et $f_k, f, g \in L^0(A, \mu)$.*

$$(a) \text{ Si } f_k \to f, \qquad \mu - \text{presque partout, alors } \varrho_{p(.)}(f) \leq \lim_{k\to\infty} \inf \varrho_{p(.)}(f_k).$$

$$(b) \text{ Si } |f_k| \nearrow |f|\,, \ \mu - \text{presque partout, alors } \varrho_{p(.)}(f) = \lim_{k\to\infty} \varrho_{p(.)}(f_k). \tag{1.2.9}$$

(c) Si $f_k \to f$ μ presque partout, $|f_k| \leq |g|$ μ presque partout et $g \in E^{p(\cdot)}$, alors $f_k \to f$ dans $L^{p(\cdot)}$.

Par analogie avec les propriétés de l'intégrale, les hypotèses du Lemme 1.2.13 seront appelées le Lemme de Fatou (pour le module) de la convergence monotone et de la convergence dominée, respectivement. Ensuite on a un résultat sur la semi-continuité inférieure donnée par le Théorème suivant :

Théorème 1.2.14. *Si $p \in P(A, \mu)$, alors le module est faiblement (séquentiellement) semicontinue inférieurement, c'est-à-dire*

$$\varrho_{p(.)}(f) \leq \lim_{k\to\infty} \inf \varrho_{p(.)}(f_k) \quad \text{si } f_k \rightharpoonup f \quad \text{faiblement dans} \quad L^{p(\cdot)}(A, \mu).$$

Puisque la convergence forte implique la convergence faible, la conclusion du théorème 1.2.14 est également vraie si $f_k \to f$ dans $L^{p(.)}(A,\mu)$, d'après les Lemmes 1.1.20 et 1.1.21 et on en déduit le Lemme suivant :

Lemme 1.2.15. *Soit $p \in P(A,\mu)$ et soit $f_k \in L^{p(.)}(A,\mu)$.*

(a) Si f_k est une suite de Cauchy, alors il existe une sous-suite de (f_k) qui converge $\mu-$presque partout vers une fonction mesurable f.

(b) Si $\mu(A) < \infty$ et $|f_k|_{p(.)} \to 0$, alors $f_k \to 0$ en mesure.

Proposition 1.2.16. *Soit $\varrho_{p(x)}(f) = \int\limits_{\Omega} |f|^{p(x)}\, dx$.*

(i) Pour $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a

$$|f|^{p^-}_{p(x)} \leq \varrho_{p(x)}(f) \leq |f|^{p^+}_{p(x)} \quad si\ |f|_{p(x)} > 1, \tag{1.2.10}$$

$$|f|^{p^+}_{p(x)} \leq \varrho_{p(x)}(f) \leq |f|^{p^-}_{p(x)} \quad si\ |f|_{p(x)} \leq 1. \tag{1.2.11}$$

(ii) Pour $f, f_n \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a

$$f_n \to f \quad dans \quad L^{p(x)}(\Omega) \ si\ et\ seulement\ si\ \varrho_{p(x)}(f_n - f) \to 0. \tag{1.2.12}$$

Démonstration. Premièrement on démontre (1.2.10). Supposons que $|f|_{p(x)} = a > 1$, alors on a $\varrho(\frac{f}{a}) = 1$. Notons que $\frac{1}{a} < 1$.

Si $\lambda > 1$, on a

$$\varrho(f) \leq \lambda\varrho(f) \leq \lambda^{p^-}\varrho(f) \leq \varrho(\lambda f) \leq \lambda^{p^+}\varrho(f).$$

Si maintenant $0 < \lambda < 1$, alors on a

$$\lambda^{p^+}\varrho(f) \leq \varrho(\lambda f) \leq \lambda^{p^-}\varrho(f) \leq \lambda\varrho(f) \leq \varrho(f).$$

De cela, il découle que

$$\frac{1}{a^{p^+}}\varrho(f) \leq \varrho(\frac{f}{a}) = 1 \leq \frac{1}{a^{p^-}}\varrho(f)$$

d'où le résultat, l'inégalité (1.2.11) se démontre d'une manière similaire.

Pour démontrer (1.2.12), il facile de voir que (f_n) converge vers f dans Ω. Ainsi $|f_n|^{p(x)}$ converge vers $|f|^{p(x)}$et en utilisant l'inégalité

$$|f_n|^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}(|f_n - f|^{p(x)} + |f|^{p(x)})$$

et le théorème de la convergence de l'intégrale de Vitali, on en déduit que $\varrho(f_n) \to \varrho(f)$.

Dautre part, si (f_n) converge vers f dans Ω, on peut déduire que $|f_n - f|^{p(x)}$ converge vers 0 dans Ω. D'après l'inégalité

$$|f_n - f|^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}(|f_n|^{p(x)} + |f|^{p(x)})$$

et par le fait que $\varrho(f_n) \to \varrho(f)$ on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(f_n - f) = 0$. $\square$

Proposition 1.2.17. *Soit p et q deux fonctions mesurables avec $1 \leq p(x)q(x) < \infty$ dans Ω. Soit $f \in L^{q(x)}(\Omega)$, alors*

$$|f|^{p^-}_{p(x)q(x)} \leq \left||f|^{p(x)}\right|_{q(x)} \leq |f|^{p^+}_{p(x)q(x)} \quad si \ |f|_{p(x)q(x)} > 1, \qquad (1.2.13)$$

$$|f|^{p^+}_{p(x)q(x)} \leq \left||f|^{p(x)}\right|_{q(x)} \leq |f|^{p^-}_{p(x)q(x)} \quad si \ |f|_{p(x)q(x)} \leq 1. \qquad (1.2.14)$$

En particulier, si $p(x) = q$ est une constante, alors

$$||f|^p|_{q(x)} = |f|^p_{pq}\,.$$

Démonstration. Premièrement on démontre l'inégalité (1.2.13).

On sait que toute fonction $f \in L^{q(x)}(\Omega)$ satisfait

$$\varrho_{q(x)}\left(f \Big/ |f|_{q(x)}\right) \leq 1. \qquad (1.2.15)$$

D'après (1.2.15), on a

$$\varrho_{p(x)q((x)} \left(f \Big/ |f|_{p(x)q(x)} \right) \leq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int\limits_{\{p(x)q(x)<\infty\}} \left(\frac{|f|}{|f|_{p(x)q(x)}} \right)^{p(x)q(x)} dx & (1.2.16) \\ &\geq \int\limits_{\{q(x)<\infty\}} \left(\frac{|f|^{p(x)}}{|f|^{p(x)}_{p(x)q(x)}} \right)^{q(x)} dx & (1.2.17) \end{aligned}$$

et $ess \sup\limits_{p(x)q(x)=\infty} f \Big/ |f|_{p(x)q(x)} \leq 1$. La dernière inégalité implique que

$$ess \sup_{q(x)=\infty} |f|^{p(x)} \leq ess \sup_{x\in\Omega} |f|^{p(x)}_{p(x)q(x)}$$

et d'après (1.2.16) on a

$$\varrho_{q(x)} \left(|f|^{p(x)} \Big/ ess \sup_{x\in\Omega} |f|^{p(x)}_{p(x)q(x)} \right) \leq 1.$$

Ceci prouve la première inégalité dans (1.2.14) et la seconde inégalité dans (1.2.13).

D'une manière similaire on a

$$\varrho_{q(x)} \left(|f|^{p(x)} \Big/ \left| |f|^{p(x)} \right|_{q(x)} \right) \leq 1$$

d'où

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int\limits_{\{q(x)=\infty\}} \left(\frac{|f|^{p(x)}}{\left| |f|^{p(x)} \right|_{q(x)}} \right)^{q(x)} dx \\ &\geq \int\limits_{\{p(x)q(x)<\infty\}} \left(\frac{|f|}{ess \sup \left| |f|^{p(x)} \right|^{\frac{1}{p(x)}}_{q(x)}} \right)^{p(x)q(x)} dx. \end{aligned}$$

On a $ess\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|^{p(x)} \Big/ \left||f|^{p(x)}\right|_{q(x)} \leq 1$, on trouve donc

$$ess \sup_{p(x)q(x)=\infty} |f(x)|^{p(x)} \leq ess\sup_{x\in\Omega} \left||f|^{p(x)}\right|_{q(x)}^{\frac{1}{p(x)}},$$

ainsi on a

$$\begin{aligned} \varrho_{p(x)q(x)}\left(|f| \Big/ ess\sup_{x\in\Omega}\left||f|^{p(x)}\right|_{q(x)}^{\frac{1}{p(x)}}\right) &\leq 1, \qquad \text{et} \\ |f|_{p(x)q(x)} &\leq ess\sup_{x\in\Omega}\left||f|^{p(x)}\right|_{q(x)}^{\frac{1}{p(x)}}. \end{aligned}$$

Si $p^- > 0$, ceci prouve la seconde inégalité dans (1.2.14) et la première inégalité dans (1.2.13).

Si $p^- = 0$ et $\left||f|^{p(x)}\right|_{q(x)} \leq 1$ alors $|f|_{p(x)q(x)} \leq 1$, (≥ 1 aussi), la première et la seconde inégalité dans (1.2.14) sont triviales. $\square$

1.2.3 Inégalité de Hölder

Maintenant on va donner l'inégalité de Hölder.

Proposition 1.2.18. ***(Inégalité de Hölder)***

Soit $p, q \in P(A, \mu)$ telle que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$$

pour tout $x \in A$, $\mu-$presque partout, alors il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $g \in L^{q(x)}(\Omega)$, on a

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq c_p\, |f|_{p(x)}\, |g|_{q(x)}\,. \tag{1.2.18}$$

Démonstration. Evidemment, on peut supposer que $|f|_{p(x)} \neq 0$, $|g|_{q(x)} \neq 0$ et on a $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \ p(x) = 1\}$, $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : \ p(x) = \infty\}$ et $\Omega_0 = \Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_\infty)$, tels que $|\Omega_0| > 0$. Pour tout $x \in \Omega_0$, on a $1 < p(x) < \infty$, $|f(x)| < \infty$ et $|g(x)| < \infty$.

On pose $a = \dfrac{f(x)}{|f|_{p(x)}}$, $b = \dfrac{g(x)}{|g|_{q(x)}}$, en tenant compte de l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^{p(x)}}{p(x)} + \frac{b^{q(x)}}{q(x)}, \tag{1.2.19}$$

et puisque

$$\varrho_{p(x)}(\frac{f}{|f|_{p(x)}}) \leq 1, \ \text{pour tout } f \text{ avec } 0 < |f|_{p(x)} < \infty,$$

on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_0} \frac{|f(x)g(x)|}{|f|_{p(x)} \, |g|_{q(x)}} dx \ &\leq \ ess \sup_{\Omega_0} \frac{1}{p(x)} \varrho_{p(x)}(\frac{f(x)}{|f|_{p(x)}}) + ess \sup_{\Omega_0} \frac{1}{q(x)} \varrho_{p(x)}(\frac{g}{|g|_{q(x)}}) \\ &\leq \ 1 + \frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx \ &\leq \ \left(1 + \frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+}\right) |f|_{p(x)} \, |g|_{q(x)} \, \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|f\chi_{\Omega_1}\|_1 \, \|g\chi_{\Omega_1}\|_\infty \\ &\quad + \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_1 \, \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty \\ &\leq \ c_p \, |f|_{p(x)} \, |g|_{q(x)} \, , \end{aligned}$$

où $\|.\|_1$ (respectivement $\|.\|_\infty$)) est la norme usuelle dans $L^1(\Omega_1)$ (respectivement $L^\infty(\Omega_\infty)$). Ceci achève la preuve. $\square$

1.2.4 Propriétés de l'espace $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$

Dans cette sous section, on va donner quelques propriétés de base de l'espace de Lebesgue à exposant variable.

Théorème 1.2.19. *Soit $p \in P(A,\mu)$. Alors $\varphi_{p(.)}$ est propre et $L^{p(.)}(A,\mu)$ est un espace de Banach, qui satisfait*

$$(L^{p(.)}(A,\mu))' = L^{p'(.)}(A,\mu)$$

et

$$\begin{aligned} |g|_{p'(.)} &\leq |g|_{(L^{p(.)})'} \leq 2\,|g|_{p'(.)} \quad si \quad \varphi_{p(.)} = \widetilde{\varphi}_{p(.)} \\ \frac{1}{2}\,|g|_{p'(.)} &\leq |g|_{(L^{p(.)})'} \leq 2\,|g|_{p'(.)} \quad si \quad \varphi_{p(.)} = \overline{\varphi}_{p(.)} \end{aligned}$$

pour tout $g \in L^0(A,\mu)$.

Démonstration. On commence par énoncer le lemme suivant :

Soit $p \in P(A,\mu)$. Alors $L^{p(.)}(A,\mu)$ contient l'ensemble des fonctions simples $S(A,\mu)$ et

$$\min\{1,\mu(E)\} \leq \|\chi_E\|_{\widetilde{\varphi}_{p(.)}} \leq \max\{1,\mu(E)\}$$

pour tout ensemble mesurable $E \subset A$. [19]

De cela, il résulte que $L^{p(.)}$ et $L^{p'(.)}$ contiennent les fonctions simples. Ainsi $\varphi_{p(.)}$ est propre par le Corollaire 1.7.8 (voir [19]) et donc $L^{p(.)}$ est un espace de Banach. On va appliquer le théorème 1.7.3 (voir [19]) à $\varphi_{p(.)}$ pour aboutir à $(L^{p(.)}(A,\mu))' = L^{p'(.)}(A,\mu)$ et

$$|g|_{(\varphi_{p(.)})^*} \leq |g|_{(L^{p(.)})'} \leq 2\,|g|_{(\varphi_{p(.)})^*}$$

qui est la première estimation si $\varphi_{p(.)} = \widetilde{\varphi}_{p(.)}$, car $(\widetilde{\varphi}_{p(.)})^* = \widetilde{\varphi}_{p'(.)}$. Du Lemme 1.2.7, on en déduit que

$$|g|_{(\varphi_{p(.)})^*} \leq |g|_{\widetilde{\varphi}_{p'(.)}} \leq 2\,|g|_{(\varphi_{p(.)})^*}$$

qui, en combinaison avec l'estimation précédente, prouve la deuxième estimation. □

Lemme 1.2.20. *[19]*

Soit $p \in P(A,\mu)$ un exposant borné et soit μ est séparable. Alors $L^{p(.)}(A,\mu)$ est séparable.

Théorème 1.2.21. *[19]*

Soit $p \in P(A,\mu)$ avec $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Alors $L^{p(.)}(A,\mu)$ est réflexif.

Théorème 1.2.22. *[19]*

Soit $p \in P(\Omega)$ avec $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Alors $\varphi_{p(.)}$ est une $N-$fonction uniformément convexe, $\varrho_{p(.)}$ est un semimodule uniformément convexe et $|.|_{p(.)}$ est une norme uniformément convexe. Ainsi, $L^{p(.)}$ est un espace uniformément convexe.

Théorème 1.2.23. *Si $p \in P(\Omega)$ avec $p^+ < \infty$, alors $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(.)}(\Omega)$.*

Démonstration. Comme $p^+ < \infty$, les fonctions simples sont denses dans $L^{p(.)}(\Omega)$. Puisque une fonction simple appartenant à $L^{p^-}(\Omega) \cap L^{p^+}(\Omega)$, peut être approchée par une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans le même espace. □

1.2.5 Théorèmes d'injections

Il est bien connu dans la théorie des espaces de Lebesgue classiques que $L^{p(.)}(A)$ est un sous-espace de $L^{q(.)}(A)$ où $p,q \in [1,\infty]$ si et seulement si $p \geq q$ et $\mu(A) < \infty$. Alors une condition similaire caractérise l'injection $L^{p(.)}(A) \hookrightarrow L^{q(.)}(A)$ pour $p,q \in P(A)$. Naturellement, cette question est liée à l' inégalité de Hölder généralisée.

Théorème 1.2.24. *Soit $p,q \in P(A,\mu)$. On définit l'exposant $r \in P(A,\mu)$ par*

$$\frac{1}{r(x)} = \max\left\{\frac{1}{q(x)} - \frac{1}{p(x)}, 0\right\} \quad \textit{pour tout} \quad x \in A.$$

Si $q \leq p$ $\mu-$presque partout et $1 \in L^{r(.)}(A,\mu)$, alors $L^{p(.)}(A,\mu) \hookrightarrow L^{q(.)}(A,\mu)$, avec une constante au plus $2\,|1|_{L^{r(.)}(A)}$.

Démonstration. Comme $q \leq p$ presque partout et

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

on applique l'inégalité de Hölder on trouve

$$|f|_{q(.)} \leq 2\, |1|_{L^{r(.)}(A)}\, |f|_{p(.)}\,.$$

et ceci achève la démonstration. □

Corollaire 1.2.25. *Soit* $p, q \in P(A, \mu)$ *avec* $\mu(A) < \infty$. *Alors* $L^{p(.)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{q(.)}(A, \mu)$ *si et seulement si* $q \leq p$ $\mu-$*presque partout dans* A, *la constante au plus* 2.

1.3 Espaces de Sobolev à exposant variable

Une motivation de l'étude de ces espaces est que les solutions des équations aux dérivées partielles appartiennent naturellement à des espaces de Sobolev. On étudie des propriétés des espaces de Sobolev ; en particulier, on montre que l'espace de Sobolev est un espace de Banach de plus, on montre que ces espaces jouissent globalement des même propriétés comme la réflexivité et la convexité uniforme. On étudie les injections de Sobolev du type $W^{1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(.)}(\Omega)$ tel que $1 \leq p^- \leq p^+ < N$ ou $N < p^- \leq p^+ < \infty$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble ouvert. On introduit la définition de la dérivée faible.

Définition 1.3.1. Supposons que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ un multi-indices. S'il existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega u \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_N} \psi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 .... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\alpha_1 + ... + \alpha_N} \int_\Omega \psi g dx$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors g est appelée une dérivée partielle faible de u d'ordre α. La fonction g est noté par $\partial_\alpha u$ ou par $\dfrac{\partial^{\alpha_1+....+\alpha_N} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 .... \partial^{\alpha_N} x_N}$.

Le gradient de u designé par le vecteur ∇u=$(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ et on écrit de manière courte $\partial_j u$ avec $j = 1, ..., N$.

Si une fonction u a des dérivées classiques, elles sont alors les dérivées faibles de u.

Définition 1.3.2. Une fonction $u \in L^{p(.)}(\Omega)$ appartient à l'espace de Sobolev $W^{k,p(.)}(\Omega)$, où $k \in \mathbb{N}$, $p \in P(\Omega)$, si la dérivée faible $\partial_\alpha u$ avec $|\alpha| \leq k$ existe et appartient à $L^{p(.)}(\Omega)$.

On définit un semimodule sur $W^{k,p(.)}(\Omega)$ par

$$\varrho_{W^{k,p(.)}(\Omega)}(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \varrho_{L^{p(.)}(\Omega)}(\partial_\alpha u)$$

qui induit une norme donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p(.)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \ \varrho_{W^{k,p(.)}(\Omega)}(\frac{u}{\lambda}) \leq 1 \right\}.$$

Les éléments de $W^{k,p(.)}(\Omega)$ sont appelés les fonctions de Sobolev.

Remarque 1.3.3. *Il est également possible de définir le module $\varrho_{W^{k,p(.)}(\Omega)}$ sur le plus grand ensemble $W^{k,1}_{loc}(\Omega)$, ou même $L^1_{loc}(\Omega)$, alors $W^{k,p(.)}(\Omega)$ est simplement l'espace semimodulaire correspondant.*

On définit des espaces de Sobolev locaux comme suit.

Définition 1.3.4. Une fonction u appartienne à $W^{k,p(.)}_{loc}(\Omega)$ si $u \in W^{k,p(.)}(U)$ pour tout ouvert $U \subset\subset \Omega$. Nous équipons $W^{k,p(.)}_{loc}(\Omega)$ de la topologie induite par les injections $W^{k,p(.)}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p(.)}(U)$ pour tout ouvert $U \subset\subset \Omega$.

Nous abrégeons $\|u\|_{W^{k,p(.)}(\Omega)}$ à $\|u\|_{k,p}$ et $\varrho_{W^{k,p(.)}(\Omega)}$ à $\varrho_{k,p(.)}$. On note que dans $W^{1,p(.)}(\Omega)$

$$\varrho_{L^{p(.)}(\Omega)}(u) + \varrho_{L^{p(.)}(\Omega)}(|\nabla u|) \text{ et } |u|_{L^{p(.)}(\Omega)} + |\nabla u|_{L^{p(.)}(\Omega)} \tag{1.3.1}$$

définissent un semimodule et une norme équivalente au semimodule de Sobolev et à la norme de Sobolev, respectivement.

Remarque 1.3.5. *Notons que dans* $W^{k,p(.)}(\Omega)$

$$\sum_{m=0}^{k} \varrho_{L^{p(.)}(\Omega)}(|\nabla^m u|) \quad et \quad \sum_{m=0}^{k} |\nabla^m u|_{L^{p(.)}(\Omega)}$$

définissent un semimodule et une norme équivalente au semimodule de Sobolev et à la norme de Sobolev, respectivement.

Proposition 1.3.6. *Soit* $\varrho_{1,p(x)}(f) = \int\limits_{\Omega} \left(|f|^{p(x)} + |\nabla f|^{p(x)} \right) dx$. *Alors pour tout* $f, f_n \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, *on a*

$$\begin{aligned} \|f\|_{1,p(x)}^{p^-} &\leq \varrho_{1,p(x)}(f) \leq \|f\|_{1,p(x)}^{p^+} \quad si \ \|f\|_{1,p(x)} > 1, \\ \|f\|_{1,p(x)}^{p^+} &\leq \varrho_{1,p(x)}(f) \leq \|f\|_{1,p(x)}^{p^-} \quad si \ \|f\|_{1,p(x)} \leq 1. \end{aligned}$$

$$f_n \to f \quad dans \quad W^{1,p(x)}(\Omega) \ si \ et \ seulement \ si \ \varrho_{1,p(x)}(f_n - f) \to 0.$$

Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate de la proposition 1.2.17 et la proposition 1.2.16. □

Théorème 1.3.7. *Soit* $p \in P(\Omega)$, *l'espace* $W^{k,p(.)}(\Omega)$ *est un espace de Banach qui est séparable si p est borné, réflexif et uniformément convexe si* $1 < p^- \leq p^+ < \infty$.

Démonstration. On démontre que le cas $k = 1$. Le cas général est similaire. On montre que l'espace de Sobolev à exposant variable est un espace de Banach. Soit (u_i) une suite de Cauchy dans $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, on va montrer qu'il existe $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ tel que $u_i \to u$ dans $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. L'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace de Banach, alors il existe $u, g_1, ...g_N \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tels que pour tout $\psi \in C_0^\infty$ on a

$$\int\limits_\Omega u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx = -\int\limits_\Omega \psi \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx.$$

la convergence forte dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ implique la convergence faible et par conséquent

$$\int\limits_\Omega u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \to \int\limits_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \quad \text{et} \quad \int\limits_\Omega \psi \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx \to \int\limits_\Omega \psi g_j dx$$

lorsque $i \to \infty$. Le vecteur $(g_1, ...g_N)$ est le gradient faible de u. Il s'ensuit que $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ et $u_i \to u$ dans $W^{1,p(\cdot)}$.

D'après le Lemme 1.2.20, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable si $p^+ < \infty$ et d'après le théorème 1.2.21, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est réflexif si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$.

Par l'application $u \to (u, \nabla u)$, l'espace $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $L^{p(\cdot)}(\Omega) \times (L^{p(\cdot)}(\Omega))^N$. Ainsi $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable si $p^+ < \infty$ et réflexif si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$.

Pour la convexité uniforme, notons que $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ satisfait la Δ_2-condition à condition que $p^+ < \infty$. $L^{p(\cdot)}$ est uniformément convexe pour $p^- > 1$ d'après le théorème 1.1.26 et le théorème 1.2.22. Ainsi $\varrho_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ est uniformément convexe comme une somme de module uniformément convexe. Ainsi $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ est uniformément convexe pour sa propre norme par le théorème 1.1.27. $\square$

Proposition 1.3.8. *[11] Soit $h \in C(\Omega)$ tel que $0 < h_- < h_+ < \infty$. Alors on a*

$$\|f\|_h = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_\Omega \left(\left| \frac{\nabla f}{\lambda} \right|^{p(x)} + h(x) \left| \frac{f}{\lambda} \right|^{p(x)} \right) dx \leq 1 \right\}$$

est une norme équivalente dans $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Maintenant on définit l'espace de Sobolev à exposant variable à trace nulle et on donne ses propriétés de base.

Définition 1.3.9. Soit $p \in P(\Omega)$ et $k \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $W_0^{k,p(.)}(\Omega)$ désigne la fermeture du sous-ensemble des fonctions de $W^{k,p(.)}(\Omega)$ à support compact, c'est-à-dire

$$\left\{u \in W^{k,p(.)}(\Omega) : \ u = u\chi_K \text{ pour un compact } K \subset \Omega\right\}$$

dans $W^{k,p(.)}(\Omega)$.

Dans l'espace de Sobolev a exposant variable $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ on consédère une norme équivalente notée par

$$\|u\| = |\nabla u|_{p(x)}$$

Théorème 1.3.10. *Si $p \in P(\Omega)$, alors $W_0^{k,p(.)}(\Omega)$ est un espace de Banach, qui est séparable, réflexif et uniformément convexe si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$.*

Démonstration. Comme $W_0^{k,p(.)}(\Omega)$ est un sous espace fermé de $W^{k,p(.)}(\Omega)$. D'après les propriétés de la Proposition 4.2.15 et le théorème 1.3.7, on trouve le résultat. $\square$

Remarque 1.3.11. *La ferméture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{k,p(.)}(\Omega)$ est notée par $H_0^{k,p(.)}(\Omega)$. En effet, clairement $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{k,p(.)}(\Omega)$. On a si p est borné, $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p(.)}(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p(.)}(\Omega)$, ainsi $H^{k,p(.)}(\Omega) = W^{k,p(.)}(\Omega)$. En particulier si $p \in P^{\log}(\Omega)$ est borné, alors $W_0^{k,p(.)}(\Omega) = H_0^{k,p(.)}(\Omega)$, où*

$$P^{\log}(\Omega) = \{p \in P(\Omega) : \frac{1}{p} \ \textit{est} \ \log - \textit{Hölder continu}\}$$

Remarque 1.3.12. *Soit u_n, u de $L^{q(x)}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$. Par la relation (1.2.12) et l'inégalité de Hölder on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(x)}\, dx = \int_\Omega |u|^{q(x)}\, dx$$

de (1.2.10) et (1.2.11) on a

$$\int_\Omega |u|^{q(x)}\,dx \leq |u|_{q(x)}^{q-} + |u|_{q(x)}^{q+}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \tag{1.3.2}$$

1.3.1 Théorèmes d'injections de Sobolev

Lemme 1.3.13. *Soit $p \in P(\Omega)$ alors $W^{k,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow W_{loc}^{k,p^-}(\Omega)$. Si $|\Omega| < \infty$, alors*

$$W^{k,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p^-}(\Omega).$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de l'injection de $L^{p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^-}(\Omega)$, voir le Corollaire 2.3.2 de [19]. □

Lemme 1.3.14. *Si $p \in P(\mathbb{R}^N)$ et $u \in W_0^{k,p(.)}(\Omega)$, alors le prolongement de u par zéro à $\mathbb{R}^N/\Omega$ appartient a $W^{k,p(.)}(\mathbb{R}^N)$.*

On définit l'exposant critique de Sobolev de p par

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & \text{si} \quad p(x) < N, \\ +\infty & \text{si} \quad p(x) > N. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

Théorème 1.3.15. *Soit $p, q \in P(\Omega) \cap C(\Omega)$ avec $p^+ < N$. Si $W^{1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega)$, alors $q \leq p^*$.*

Démonstration. Supposons que $q(x) > p^*(x)$ pour certain $x \in \Omega$. Par la continuité de p et q, il existe $s \in (1, N)$, $t \in (1, \infty)$ et $r > 0$ tel que

$$p^*(y) < s^* < t < q(y)$$

pour tout $y \in B(x, r)$. Par le Corollaire 1.2.25, on a $W^{1,s}(B(x, r)) \hookrightarrow W^{1,p(.)}(B(x, r))$ et $L^{q(.)}(B(x, r)) \hookrightarrow L^t(B(x, r))$. Comme $s^* < t$ on a $W^{1,s}(B(x, r)) \nrightarrow L^t(B(x, r))$.

Ainsi $W^{1,p(.)}(B(x,r)) \nrightarrow L^{q(.)}(B(x,r))$, qui est une contradiction et alors $q(x) \leq p^*(x)$. $\square$

Proposition 1.3.16. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $p, q \in C(\overline{\Omega})$ et $1 \leq q(x) < p^*(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Alors on a l'injection compacte $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$.*

Pour la preuve voir [40].

Proposition 1.3.17. *Soit $1 < p(x) < N$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On définit l'exposant critique de Sobolev de p sur la frontière $\partial\Omega$ par :*

$$p^{\partial}(x) = \begin{cases} \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)} & si \quad p(x) < N, \\ +\infty & si \quad p(x) > N. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Alors, l'injection de $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$, où $q(x) \in C_+(\partial\Omega)$ et $q(x) < p^{\partial}(x)$, pour tout $x \in \partial\Omega$ est compacte et continue.

Démonstration. Pour $A \subset \overline{\Omega}$, soit $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Comme $q(x) < p^{\partial}(x)$, pour tout $x \in \partial\Omega$ donné, Ω_x un voisinage relativement ouvert de x dans $\overline{\Omega}$ tel que $q^+(\partial\Omega \cap \Omega_x) < p^{\partial -}(\Omega_x)$.

Maintenant $u\,|_{\Omega_x} \in W^{1,p(x)}(\Omega_x) \subset W^{1,p^-}(\Omega_x)$, d'après le théorème d'injection de sobolev (voir [1]) alors $W^{1,p^-}(\Omega_x) \hookrightarrow L^{q^+}(\partial\Omega \cap \Omega_x)$ alors $u\,|_{\Omega_x} \in L^{q^+}(\partial\Omega \cap \Omega_x) \subset L^{q(x)}(\partial\Omega \cap \Omega_x)$.

En utilisant le Théorèmes de recouvrement fini pour l'ensemble compact $\partial\Omega$, on obtient $u \in L^{q(x)}(\partial\Omega)$. Ceci montre qui est une injection $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$. Comme l'injection $W^{1,p^-}(\Omega_x) \hookrightarrow L^{q^+}(\partial\Omega \cap \Omega_x)$ est compacte, on peut voir que $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ est compacte. $\square$

Chapitre 2

Valeurs propres du $p(x)-$Laplacien avec poids

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de $p(x)-$Laplacien soumis à une condition de Dirichlet au bord de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + h(x)\,|u|^{s(x)-2}\,u = \lambda g(x)\,|u|^{q(x)-2}\,u, & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{pour } \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et λ est un nombre réel. Les fonctions $p(x), q(x), s(x)$, sont continues et les poids g, h sont des fonctions mesurables positives.

Dans [29], X. L. Fan et Q. Zhang ont fait l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u) = \lambda\,|u|^{p(x)-2}\,u, & \text{pour } \quad x \in \Omega \\ \qquad u = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.0.2}$$

Ils ont prouvé moyennant la théorie de Ljusternick-Schnirelmann que le problème (2.0.2) admet une suite de valeurs propres Λ telle que $\sup\Lambda = +\infty$ et $\inf\Lambda = \lambda_* < \infty$. Sous certaines hypothèses précises sur la fonction $p(x)$, ils ont trouvé que soit $\inf\Lambda = 0$, soit $\inf\Lambda > 0$.

Dans [?], M. Mihăilescu et V. Rădulescu ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda |u|^{q(x)-2} u, & \text{pour} \quad x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.0.3}$$

Le résultat principal de leur travail est l'existence d'une famille continue de valeurs propres dans un voisinage de l'origine. Plus précisément, ils ont montré qu'il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda^*)$, λ est une valeur propre du problème (2.0.3).

N. Benouhiba [10] a étudié le problème

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda V(x) |u|^{q(x)-2} u, \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \tag{2.0.4}$$

Elle a démontré par la méthode de la minimisation de la fonctionnelle d'énergie que tout $\lambda > \lambda^*$ est une valeur propre du problème (2.0.4) tandis que tout $\lambda < \lambda_*$ ne l'est pas où

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \inf_{u \in W^{1,p(x)} - \{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega \frac{V(x)}{q(x)} |u|^{q(x)}\, dx} \\ \lambda_* &= \inf_{u \in W^{1,p(x)} - \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega V(x) |u|^{q(x)}\, dx}. \end{aligned}$$

Dans ce chapitre nous allons étendre les résultats de [10] au problème (2.0.1) posé dans un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ce chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, nous donnons la définition de la solution faible du problème (2.0.1), introduisons nos hypothèses et présentons les principaux résultats de ce chapitre. La seconde section sera dédiée à la preuve de ces résultats.

2.1 Solutions faibles du $p(x)-$Laplacien avec poids

Nous commençons cette section par la définition de la solution faible du problème (2.0.1).

Définition 2.1.1. Une fonction $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) - \{0\}$ est dite solution faible du problème (2.0.1) si et seulement si elle vérifie

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega g(x) |u|^{q(x)-2} uv dx + \int_\Omega h(x) |u|^{s(x)-2} uv dx = 0$$

pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Nous étudions le problème (2.0.1) sous les hypothèses suivantes

Hypothèses.

Nous supposons que

$(A_{p,q})$ $p > 1$, $q > 1$, $p, q \in C^0(\overline{\Omega})$, $q(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$, et $s(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$

et

$$p^- < p^+ < s^- < s^+ < q^- < q^+.$$

$(A_{g,h})$ $0 < g \in L^{r(x)}(\Omega)$, $1 < r(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $r(x) > \frac{p^*(x)}{p^*(x)-q(x)}$ dans $\overline{\Omega}$, $0 < h \in L^{l(x)}(\Omega)$, $1 < l(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ et $l(x) > \frac{p^*(x)}{p^*(x)-s(x)}$ dans $\overline{\Omega}$.

La fonctionnelle d' énergie correspondante au problème (2.0.1) $I : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est définie par

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} dx. \tag{2.1.1}$$

Nous définisons les quantités

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)} - \{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} dx}{\int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx}, \tag{2.1.2}$$

$$\lambda_2 = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)} - \{0\}} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx + \int\limits_\Omega h(x) \, |u|^{s(x)} \, dx}{\int\limits_\Omega g(x) \, |u|^{q(x)} \, dx}. \tag{2.1.3}$$

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant

Théorème 2.1.2. *(i) on a* $0 < \lambda_2 \leq \lambda_1$.

(ii) λ_1 *est une valeur propre du problème (2.0.1).*

(iii) Tout $\lambda > \lambda_1$ *est une valeur propre du problème (2.0.1) tandis que tout* $\lambda < \lambda_2$ *n'est pas une valeur propre du problème (2.0.1).*

2.2 Démonstration des résultats du chapitre 2

Avant de démontrer le Théorème 2.1.2, on a besoin de certains résultats auxiliares.

Lemme 2.2.1. *La fonctionnelle* I *est de classe* $C^1(W_0^{1,p(x)}, \mathbb{R})$ *et on a*

$$\langle I'(u), v \rangle = \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int\limits_\Omega g(x) \, |u|^{q(x)-2} \, uvdx + \int\limits_\Omega h(x) \, |u|^{s(x)-2} \, uvdx$$

pour tout $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Soient les fonctionnelles J_1, J_2, ψ définies par

$$\begin{aligned}
J_1(u) &= \int\limits_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx, \\
J_2(u) &= \int\limits_\Omega \frac{h(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} \, dx, \\
\psi(u) &= \int\limits_\Omega \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} \, dx,
\end{aligned}$$

telle que $I(u) = J_1(u) - \lambda\ \psi(u) + J_2(u)$. On démontre que $J_1, J_2,\ \psi$ sont de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}, \mathbb{R})$ et que

$$\begin{aligned}
\langle J_1'(u), v\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u.\nabla v dx,\\
\langle J_2'(u), v\rangle &= \int_\Omega h(x) |u|^{s(x)-2} uv dx,\\
\langle \psi'(u), v\rangle &= \int_\Omega g(x) |u|^{q(x)-2} uv dx.
\end{aligned}$$

Soit $\varphi(u) = \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)}\ ,\quad \forall x \in \Omega$ et $\dfrac{d\varphi}{du} = |u|^{p(x)-2} u.$

On a

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u(x) + tv(x)) - \varphi(u(x))}{t} = |u(x)|^{p(x)-2} u(x)v(x) \tag{2.2.1}$$

presque partout dans Ω, alors on démontre que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\nabla(u(x) + tv(x))) - \varphi(\nabla u(x))}{t} = |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u.\nabla v \qquad \text{presque partout dans } \Omega$$

Soit

$$\frac{\varphi(\nabla(u + tv)) - \varphi(\nabla u)}{t} = \frac{\frac{1}{p(x)}\left[|\nabla u + t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}\right]}{t},$$

d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\tau > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\varphi(\nabla u + t\nabla v)) - \varphi(\nabla u)}{t}\right| &\leq \frac{1}{t}\left|\left[\frac{1}{p(x)} p(x) |\nabla(u + \tau v)|^{p(x)-2} (\nabla(u + \tau v))(t\nabla v)\right]\right|\\
&= |\nabla u + \tau\nabla v)|^{p(x)-2} |(\nabla u + \tau\nabla v)(\nabla v)|\\
&\leq |\nabla u + \tau\nabla v)|^{p(x)-1} |\nabla v|,
\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Hölder (1.2.18), on trouve que

$$\int_\Omega |\nabla u + \tau\nabla v)|^{p(x)-1} |\nabla v| dx \leq \left||\nabla u + \tau\nabla v)|^{p(x)-1}\right|_{p'(x)} |\nabla v|_{p(x)} < \infty, \tag{2.2.2}$$

où $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$.

Il s'ensuit que

$$|\nabla u + \tau\nabla v)|^{p(x)-1} |\nabla v| \in L^1(\Omega). \tag{2.2.3}$$

Par (2.2.1) et (2.2.3) et le Théorème de Lebesgue on trouve que

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{\varphi(\nabla u + t\nabla v)) - \varphi(\nabla u)}{t} = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx, \tag{2.2.4}$$

donc $\langle J_1'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\nabla v dx$.

La continuité de la dérivée de Gâteaux

Soit $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et

$$|\langle J_1'(u_n) - J_1'(u), v\rangle| = \left| \int_\Omega \Big((|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n) - (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \Big) |\nabla v| \, dx \right|.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (1.2.18) on trouve que

$\left| \int_\Omega \Big((|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n) - (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \Big) |\nabla v| \, dx \right| \leq \left| |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right|_{p'(x)} |\nabla v|_{p}$

Comme

$$\sup_{\|v\|=1, v\in W_0^{1,p(x)}} |\langle J_1'(u_n) - J_1'(u), v\rangle| \leq \left| |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right|_{p'(x)} \tag{2.2.5}$$

on a $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$.

D'après le théorème de la réciproque partielle de Lebesgue, il existe une sous-suite (u_n) tel que $|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} \to 0$ presque partout dans Ω et il existe $g \in L^1(\Omega)$ tel que

$$|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} < g(x) \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Par (2.2.5) on a

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\| \leq \left| |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right|_{p'(x)} \to 0, n \to \infty.$$

Maintenant, on démontre que ψ est de class $C^1(W_0^{1,p(x)}, \mathbb{R})$.
Soit $\Phi(u) = \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)}$ et $\dfrac{d\Phi}{du} = g(x) |u|^{q(x)-2} u$. On va démontrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u(x)+tv(x)) - \Phi(u(x))}{t} = |u(x)|^{q(x)-2} u(x)v(x) \quad \text{presque partout dans } \Omega. \tag{2.2.6}$$

On a

$$\frac{\Phi(u(x)+tv(x)) - \Phi(u(x))}{t} = \frac{\frac{g(x)}{q(x)} \left[|u+tv|^{q(x)} - |u|^{q(x)} \right]}{t}$$

et d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\tau > 0$, tel que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(u(x)+tv(x)) - \Phi(u(x))}{t} \right| &\leq \frac{1}{t} \left| \left[\frac{g(x)}{q(x)} q(x) |u+\tau v|^{q(x)-2} .(u+\tau v)(tv) \right] \right| \\ &= g(x) |u+\tau v|^{q(x)-2} |(u+\tau v)(v)| \\ &\leq g(x) |u+\tau v|^{q(x)-1} |v| . \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (1.2.18) on trouve l'inégalité suivante,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega g(x) |u+\tau v|^{q(x)-1} |v| \, dx \right| &\leq \int_\Omega \left| g(x) |u+\tau v|^{q(x)-1} |v| \, dx \right| \\ &\leq |g(x)|_{r(x)} \, \varrho_{r'(x)}^{\frac{1}{(r')^i}} (|u+\tau v|^{q(x)-1} |v|) \\ &= |g(x)|_{r(x)} \left(\int_\Omega \left(|u+\tau v|^{q(x)-1} |v| \right)^{r'(x)} dx \right)^{\frac{1}{(r')^i}} \\ &= |g(x)|_{r(x)} \left(\int_\Omega \left(|u+\tau v|^{(q(x)-1)r'(x)} |v|^{r'(x)} \right) dx \right)^{\frac{1}{(r')^i}} \\ &\leq |g(x)|_{r(x)} \left(\left| |u+\tau v|^{(q(x)-1)r'(x)} \right|_{q'(x)} |v|_{q(x)}^{r'(x)} \right)^{\frac{1}{(r')^i}} \\ &\leq |g(x)|_{r(x)} |u+\tau v|_{q(x)r'(x)}^{\frac{1}{(r')^i}} |v|_{q(x)r'(x)}^{\frac{1}{(r')^i}} < \infty. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$g(x)\left|u+\tau v\right|^{q(x)-1}\left|v\right|\in L^{1}(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} g(x)\left|u+\tau v\right|^{q(x)-1}\left|v\right|dx \leq \left|g(x)\right|_{q(x)}\left|\left|u+\tau v\right|^{q(x)-1}\right|_{q'(x)}\left|v\right|_{q(x)}\in L^{1}(\Omega) \qquad (2.2.7)$$

où $q'(x)=\frac{q(x)}{q(x)-1}$. L'inégalité (2.2.6) et (2.2.7) et le théorème de Lebesgue ensemble donnent

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t}dx=\int_{\Omega} g(x)\left|u\right|^{q(x)-2}uvdx \qquad (2.2.8)$$

donc $\langle\psi'(u),v\rangle=\int_{\Omega} g(x)\left|u\right|^{q(x)-2}uvdx.$

Soit $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et

$$\left|\langle\psi'(u_n)-\psi'(u),v\rangle\right|=\left|\int_{\Omega}\left(g(x)(\left|u_n\right|^{q(x)-2}u_n)-(\left|u\right|^{p(x)-2}u)\right)vdx\right|.$$

On applique l'inégalité (1.2.18) pour aboutir à

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}\left(g(x)(\left|u_n\right|^{q(x)-2}u_n)-(\left|u\right|^{p(x)-2}u)\right)vdx\right| &\leq \left|\int_{\Omega} g(x)(\left|u_n\right|^{q(x)-2}u_n)-(\left|u\right|^{q(x)-2}u)\right|\left|v\right|dx\\ &\leq c_p\left|g(x)\right|_{q(x)}\left|\left|u_n\right|^{q(x)-2}u_n-\left|u\right|^{q(x)-2}u\right|_{q'(x)}\left|v\right|_{q(x)}\end{aligned}$$

Comme

$$\sup_{v\in W_0^{1,p(x)},\|v\|=1}\left|\langle\psi'(u_n)-\psi'(u),v\rangle\right|\leq\left|\left|u_n\right|^{q(x)-2}u_n-\left|u\right|^{q(x)-2}u\right|_{q'(x)} \qquad (2.2.9)$$

on a $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. D'après le Théorème de la réciproque partielle de Lebesgue il existe une sous-suite (u_n) telle que $\left|u_n(x)-u(x)\right|^{q(x)}\to 0$ presque partout dans Ω et il existe $f\in L^1(\Omega)$ tel que

$$\left|u_n(x)-u(x)\right|^{q(x)}<f(x)\quad\text{presque partout dans }\ \Omega$$

alors

$$\|\psi'(u_n)-\psi'(u)\| \le \left| |u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u \right|_{q'(x)} \to 0, n\to\infty.$$

De la même manière on trouve que $J_2(u)$ est de classe $C^1(W_0^{1,p(x)},\mathbb{R})$. Ainsi la fonctionnelle I est de classe $C^1(W_0^{1,p(x)},\mathbb{R})$. □

Définissons la fonctionnelle $I(u)=\phi(u)-\lambda\psi(u)$ où

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{s(x)}|u|^{s(x)}\,dx,\\
\psi(u) &= \int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

Lemme 2.2.2. *Les fonctionnelles ϕ et ψ satisfont*

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\phi(u)}{\psi(u)}=\infty \tag{2.2.10}$$

et

$$\lim_{\|u\|\to \infty}\frac{\phi(u)}{\psi(u)}=\infty. \tag{2.2.11}$$

Démonstration. Soit $u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. On a

$$\psi(u)=\int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx \le \frac{1}{q^-}\int_\Omega g(x)|u|^{q(x)}\,dx.$$

En appliquant l'inégalité (1.2.18) on trouve

$$\psi(u)\le \frac{c_r}{q^-}|g|_{r(x)}\left||u|^{q(x)}\right|_{r'(x)}$$

où $r'(x)=\frac{r(x)}{r(x)-1}$. Par L'inégalité (1.2.13) on a

$$\psi(u)\le \frac{c_r}{q^-}|g|_{r(x)}|u|^{q^i}_{q(x)r'(x)} \tag{2.2.12}$$

où $i = +$ si $|u|_{q(x)r'(x)} > 1$, $i = -$ si $|u|_{q(x)r'(x)} \leq 1$ et $1 < q(x)r'(x) \leq p^*(x)$.

D'après le théorème 1.3.15 et la relation (2.2.12) il existe une constante $c_r > 0$ telle que

$$\psi(u) \leq \frac{c_r}{q^-} |g|_{r(x)} \|u\|^{q^i} .$$

On a

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \int_\Omega \tfrac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_\Omega \tfrac{h(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} dx \\
&\geq \frac{1}{p^+} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx + \frac{1}{s^+} \int_\Omega h(x) |u|^{s(x)} dx \\
&\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} + \frac{1}{s^+} \int_\Omega h(x) |u|^{s(x)} dx \\
&\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} + \frac{1}{s^+} |h|_{l(x)} |u|^{s^i}_{l'(x)s(x)} ,
\end{aligned}$$

et d'après le théorème 1.3.15 on a

$$\phi(u) \geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} + \frac{1}{s^+} |h|_{l(x)} \|u\|^{s^i}$$

alors

$$\frac{\phi(u)}{\psi(u)} \geq \frac{\frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} + \frac{1}{s^+} |h|_{l(x)} \|u\|^{s^i}}{\frac{c_r}{q^-} |g|_{r(x)} \|u\|^{q^i}}. \tag{2.2.13}$$

Comme $p^+ < s^i < q^i$, on conclut par l'inégalité (2.2.13) que $\dfrac{\phi(u)}{\psi(u)} \to \infty$ lorsque $\|u\| \to 0$.

Maintenant on va démontrer la relation (2.2.11). D'après la condition $q^+ - \frac{1}{2}p^- < q^-$ il suit qui'il existe $\delta > 0$ tel que $q^+ - \frac{1}{2}p^- < \delta < q^-$. Ainsi on a $p^- > 2(q^+ - \delta) > 2(q^- - \delta)$.

Soit $\alpha(x)$ une fonction mesurable qui satisfait

$$\max\Big(\frac{p(x)r(x)}{p(x)+r(x)},\frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta-q(x)}\Big) \leq \alpha(x)\leq \min\Big(\frac{p^*(x)r(x)}{p^*(x)+r(x)},\frac{p(x)}{p(x)+\delta-q(x)}\Big) \tag{2.2.14}$$
$$\text{dans } \Omega \text{ avec } \delta\Big(\frac{\alpha^+}{\alpha^-}+1\Big) < q^-.$$

Il est évident que $\alpha\in L^\infty(\Omega)$ et que $1<\alpha(x)<r(x)$ pour tout $u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. On a par l'inégalité de Hölder (1.2.18)

$$\begin{aligned} |\psi(u)| &\leq \left|\int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx\right| &(2.2.15)\\ &\leq \int_\Omega \left|\frac{g(x)}{q(x)}\right| |u|^{\delta}|u|^{q(x)-\delta}\,dx \\ &\leq \left|\frac{g(x)}{q(x)}|u|^{\delta}\right|_{\alpha(x)} \left||u|^{q(x)-\delta}\right|_{\alpha'(x)}. &(2.2.16)\end{aligned}$$

On suppose que $\left|\frac{g(x)}{q(x)}|u|^{\delta}\right|_{\alpha(x)}>1$. Alors par la relation (1.2.10) et l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x)}{q(x)}|u|^{\delta}\right|_{\alpha(x)} &\leq \left[\varrho_{\alpha(x)}\Big(\frac{g(x)}{q(x)}|u|^{\delta}\Big)\right]^{\frac{1}{\alpha^-}} = \left(\int_\Omega \left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|^{\alpha(x)}|u|^{\delta\alpha(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha^-}}\\ &\leq 2\left|\left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|^{\alpha(x)}\right|^{\frac{1}{\alpha^-}}_{\frac{r(x)}{\alpha(x)}} \left||u|^{\delta\alpha(x)}\right|^{\frac{1}{\alpha^-}}_{(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'}\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.2.17, on vient que

$$\left|\frac{g(x)}{q(x)}|u|^{\delta}\right|_{\alpha(x)} \leq 2\left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|^{\beta(x)}_{r(x)}\left(|u|^{\delta\frac{\alpha^+}{\alpha^-}}_{\delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'}+|u|^{\delta}_{\delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'}\right), \tag{2.2.17}$$

où $\beta=\begin{cases}\frac{\alpha^+}{\alpha^-} & \text{si } \left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|_{r(x)}>1,\\ 1 & \text{si } \left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|_{r(x)}\leq 1.\end{cases}$

En substituant (2.2.17) dans (2.2.16) on trouve

$$|\psi(u)| \leq \frac{4}{q^-}\left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|_{r(x)}^{\beta(x)}\left(|u|^{2\delta\frac{\alpha^+}{\alpha^-}}_{\delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'} + |u|^{\delta}_{\delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'}\right)\left(|u|^{q^+-\delta}_{(q(x)-\delta)\alpha'(x)} + |u|^{q^--\delta}_{(q(x)-\delta)\alpha'(x)}\right).$$

L'application de l'inégalité de Young (1.2.19) à l'inégalité précédente aboutit à

$$|\psi(u)| \leq \frac{4}{q^-}\left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|_{r(x)}^{\beta(x)}\left(|u|^{2\delta\frac{\alpha^+}{\alpha^-}}_{\delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'} + |u|^{2\delta}_{\delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'} + |u|^{2(q^+-\delta)}_{(q(x)-\delta)\alpha'(x)} + |u|^{2(q^--\delta)}_{(q(x)-\delta)\alpha'(x)}\right)$$

Comme $\alpha(x)$ est choisie de telle sorte que (2.2.14) soit vérifié, alors

$$p(x) \leq \delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})' \text{ et } \quad (q(x)-\delta)\alpha'(x) \leq p^*(x) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

D'après le Théorème 1.3.15, les injections de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{\delta\alpha(x)(\frac{r(x)}{\alpha(x)})'}(\Omega)$ et $L^{(q(x)-\delta)\alpha'(x)}(\Omega)$ sont continues.

Par conséquent, il existe des constantes positives $c, c' > 0$ telles que

$$|\psi(u)| \leq \frac{4}{q^-}\left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|_{r(x)}^{\beta(x)}\left(c\,\|u\|^{2(q^+-\delta)} + c\,\|u\|^{2(q^--\delta)} + c'\,\|u\|^{2\delta\frac{\alpha^+}{\alpha^-}} + c'\,\|u\|^{2\delta}\right).$$

On a donc

$$\left|\frac{\phi(u)}{\psi(u)}\right| \geq \frac{\frac{(c)^{p^-}}{p^+}\,\|u\|^{p^-}}{\frac{4}{q^-}\left|\frac{g(x)}{q(x)}\right|_{r(x)}^{\beta(x)}\left(c\,\|u\|^{2(q^+-\delta)} + c\,\|u\|^{2(q^--\delta)} + c'\,\|u\|^{2\delta\frac{\alpha^+}{\alpha^-}} + c'\,\|u\|^{2\delta}\right)}. \quad (2.2.18)$$

Comme $p^- > 2(q^+-\delta) > 2(q^--\delta) > 2\delta\frac{\alpha^+}{\alpha^-} > 2\delta$, passant à la limite dans (2.2.18) avec $\|u\| \to \infty$. On conclut ainsi la relation (2.2.11). □

Lemme 2.2.3. *ϕ est faiblement sequentiellement semi-continue inférieurement c.à.d*

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \textit{alors} \quad \phi(u) \leq \lim_{n\to\infty}\inf \phi(u_n).$$

Démonstration. Soit (u_n) une suite faiblement convergente vers u dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Comme $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est convexe et ϕ est convexe. Alors, on a pour tout n

$$\phi(u) \leq \phi(u_n) + \langle \phi'(u), u - u_n\rangle$$

et lorsque $n \to \infty$ d'où le résultat. □

Lemme 2.2.4. *La fonctionnelle ψ est faiblement-fortement continue, c'est-à-dire $u_n \rightharpoonup u$ implique $\psi(u_n) \to \psi(u)$.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite faiblement convergente vers u dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. La suite (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, alors on a

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leq Q_1 \tag{2.2.19}$$

où

$$Q_1 = \int_\Omega \left| \frac{g(x)}{p(x)} \left(|u_n|^{p(x)} - |u|^{p(x)} \right) \right| dx. \tag{2.2.20}$$

Comme (u_n) est une suite bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, et d'après l'injection compacte dans $L^{q(x)r'(x)}(\Omega)$ et le théorème 1.3.15, il existe une sous-suite notée encore (u_n) qui converge vers u dans $L^{q(x)r'(x)}(\Omega)$ par conséquent $\psi(u_n) \to \psi(u)$. □

Preuve du Théorème 2.1.2. (i) Par (2.1.2) et (2.1.3) on a

$$\frac{q^-}{s^+}\lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \frac{q^+}{p^-}\lambda_2.$$

Comme $s^+ < q^-$, on peut conclure que $\lambda_2 \leq \lambda_1$. Ainsi on a $\lambda_2 \geq 0$.

Par contradiction, supposons que $\lambda_2 = 0$, par conséquent on a $\lambda_1 = 0$. Soit $(u_n) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi(u_n)}{\psi(u_n)} = 0$, et

$$\frac{\phi(u_n)}{\psi(u_n)} \geq M \|u_n\|^{p^j - q^i} \quad \text{où} \quad i, j = +, -$$

avec $M = \frac{q^-}{2cp^+|g(x)|_{r(x)}} \min((c')^{p^+}, (c')^{p^-}) > 0$, puisque $p^j - q^i < 0, \forall i, j$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty$ alors par le Lemme 2.2.2 on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi(u_n)}{\psi(u_n)} = \infty$ et par conséquent on a nécessairement $\lambda_2 > 0$.

(ii) Soit $(u_n) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ une suite minimisante telle que

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(u_n)}{\psi(u_n)}. \tag{2.2.21}$$

On peut conclure d'après le Lemme 2.2.2 que (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Ainsi, il existe $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et d'après les Lemmes 2.2.3 et 2.2.4 on obtient

$$\phi(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \phi(u_n) \quad \text{et} \quad \psi(u_n) \to \psi(u). \tag{2.2.22}$$

La caractérisation de λ_1 nous permet de conclure que si $u \neq 0$ alors $\lambda_1 = \dfrac{\phi(u)}{\psi(u)}$.

Nous allons maintenant démontrer que λ_1 est une valeur propre. Par contradiction supposons que $u \equiv 0$. Alors on a obligatoirement $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(u_n) = 0$. D'après (2.2.21) il vient que

$$\lim_{n\to\infty} \phi(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(u_n)}{\psi(u_n)}\psi(u_n) = 0.$$

Par la relation (2.2.22) on a nécessairement $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$ et en utilisant le Lemme 2.2.2 on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(u_n)}{\psi(u_n)} = \infty.$$

Mais ceci est impossible. Ainsi u est une fonction propre et par suite (ii) est prouvé.

(iii) Il est bien connu que u est une solution faible du problème (2.0.1) si et seulement si u est un point critique de la fonctionnelle I.

Soit $\lambda > \lambda_1$ fixé. On déduit de la relation (2.2.11) que $I(u) \to \infty$ lorsque $\|u\| \to \infty$ et comme ϕ est faiblement semicontinue inférieurement et ψ est faiblement-fortement continue il suit que I est faiblement semi-continue inférieurement. D'après la Proposition 4.2.14, nous déduisons qu'il existe un minimum global $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de I. Donc u est une solution. Il reste à démontrer qu'elle n'est pas triviale.

Comme $\lambda > \lambda_1$, il existe par la définition de (2.1.2) un élément $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tel que

$$\frac{\phi(w)}{\psi(w)} < \lambda.$$

Alors $I(w) < 0$ et ainsi on a $\inf\limits_{v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) - \{0\}} I(v) < 0$. Donc nécessairement on a $u \neq 0$.

Soit maintenant $\lambda < \lambda_2$, alors λ n'est pas une valeur propre. En effet, si λ est une valeur propre du problème (2.0.1), alors il existe $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) - \{0\}$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p(x)}\, dx - \lambda \int_\Omega g(x)\, |v|^{q(x)}\, dx + \int_\Omega h(x)\, |v|^{s(x)}\, dx = 0.$$

Par la définition de (2.1.3) on a

$$\begin{aligned}
\lambda_2 \int_\Omega g(x)\, |v|^{q(x)}\, dx &\leq \int_\Omega |\nabla v|^{p(x)}\, dx + \int_\Omega h(x)\, |v|^{s(x)}\, dx \\
&= \lambda \int_\Omega g(x)\, |v|^{q(x)}\, dx \\
&< \lambda_2 \int_\Omega g(x)\, |v|^{q(x)}\, dx,
\end{aligned}$$

et ceci est une contradiction. Ainsi toute λ telle que $\lambda < \lambda_2$ n'est pas une valeur propre du problème (2.0.1). $\square$

Chapitre 3

Problème du $p(x)$-Laplacien avec une nonlinéarité concave-convexe

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème faisant intervenir le $p(x)-$Laplacien dans l'espace de Sobolev à exposant variable avec des conditions aux limites du type de Dirichelet et une non-linéarité concave-convexe. Le problème modèle que nous allons traiter est le suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + h(x)\,|u|^{s_1(x)-2}\,u = \lambda g(x)\,|u|^{q(x)-2}\,u + k(x)\,|u|^{s_2(x)-2}\,u & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.0.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, λ est un nombre réel, $p(x), q(x), s_1(x)$ et $s_2(x)$ sont des exposants continus dans $\overline{\Omega}$. Les coeffecients $g(x), h(x)$ et $k(x)$ sont des fonctions mesurables positives.

Dans [45], M. Miháilescu et V. Rádulescu ont prouvé par le principe variationnel d'Ekeland que le problème

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u + |u|^{q(x)-2}u = \lambda g(x)\,|u|^{r(x)-2}u & \text{pour } x \in \Omega, \\ u = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

admet des valeurs propres dans l'intervalle $[\lambda_1, \infty)$ et qu'il n'y a pas de valeurs propres dans l'intervalle $(0, \lambda_0)$ où

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)} - \{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)}\, dx}{\int_\Omega \frac{g(x)}{r(x)} |u|^{r(x)}\, dx}$$

et

$$\lambda_0 = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)} - \{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx + \int_\Omega |u|^{q(x)}\, dx}{\int_\Omega g(x)\, |u|^{r(x)}\, dx}.$$

T. L. Dinu dans [64], a étudié le problème aux valeurs propres suivant

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2} \right) \nabla u \right) = f(x,u) & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$f_\pm(x,u) = \pm \left(-\lambda\, |u|^{m(x)}\, u + |u|^{q(x)}\, u \right).$$

Dans le cas où $-\text{div}\left(\left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2} \right) \nabla u \right) = f_+(x,u)$, l'auteur a trouvé que pour tout $\lambda > 0$, le problème admet une infinité de solutions par l'application du théorème du Col et dans le cas où $-\text{div}\left(\left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2} \right) \nabla u \right) = f_-(x,u)$ le problème admet une solution faible s'il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\lambda > \lambda^*$.

Ce chapitre est organisé comme suit.

Dans la section une, nous introduisons la définition de la solution faible, établissons les hypothèses nécessaires et discutons les propriétés de la fonctionnelle d'énergie associée au problème considéré. Dans la section deux, nous assurons l'existence d'une première solution comme étant un minimum global en utilisant le théorème 4.2.11 dans le cas où $\lambda < \dfrac{\lambda^* p^- q^-}{p^+ q^+}$ et une deuxième solution qui est obtenue dans le cas où $\lambda > \dfrac{\lambda^* p^- q^-}{p^+ q^+}$ en utilisant le théorème du Col.

3.1 Solution faible et fonctionnelle d'énergie

Définition 3.1.1. On dit que $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) - \{0\}$ est une solution faible du problème (3.0.1) si et seulement si elle vérifie :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u . \nabla v dx - \lambda \int_\Omega g(x) |u|^{q(x)-2} uv dx + \int_\Omega h(x) |u|^{s_1(x)-2} uv dx$$
$$- \int_\Omega k(x) |u|^{s_2(x)-2} uv dx = 0$$

pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Il est bien connu que la fonctionnelle d'énergie correspondante au problème (3.0.1) $J : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est décrite par

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{s_1(x)} |u|^{s_1(x)} dx - \int_\Omega \frac{k(x)}{s_2(x)} |u|^{s_2(x)} dx. \tag{3.1.1}$$

Nous étudions le problème (3.0.1) sous les hypothèses suivantes.

Hypothèses

(H_1) $p > 1$, $q > 1, p, q \in C^0(\overline{\Omega}), q(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$, $s_1(x) < p^*(x), s_2(x) < p^*(x)$ dans $\overline{\Omega}$ et

$$s_2^- < s_2^+ < q^- < q^+ < s_1^- < s_1^+ < p^- < p^+.$$

(H_2) $0 \leq g \in L^{r(x)}(\Omega)$ avec $1 < q(x) r'(x) < p^*(x)$.

$$0 \leq h \in L^{m(x)}(\Omega) \text{ avec } 1 < s_1(x)m'(x) < p^*(x).$$

$$0 \leq k \in L^{l(x)}(\Omega) \text{ avec } 1 < s_2(x)l'(x) < p^*(x).$$

Lemme 3.1.2. *La fonctionnelle J est de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}, \mathbb{R})$ et*

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega g(x) |u|^{q(x)-2} uv dx + \int_\Omega h(x) |u|^{s_1(x)-2} uv dx \\ &\quad - \int_\Omega k(x) |u|^{s_2(x)-2} uv dx \end{aligned}$$

Pour tout $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. la preuve est identique à celle du Lemme 2.2.1. □

3.2 Solution avec énergie négative

Le résultat principal de cette section est le Théorème suivant

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), pour tout $\lambda \in \left(-\infty, \frac{\lambda^* p^- q^-}{p^+ q^+}\right)$ le problème (3.0.1) admet une solution faible dont l'énergie est négative.*

où

$$\lambda^* = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)} - \{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx}{\int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx} \tag{3.2.1}$$

Certains résultats auxiliaires sont nécessaires à la démonstration du théorème ci-dessus. Nous les avons résumé en trois lemmes.

Lemme 3.2.2. *La fonctionnelle J est coercive sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Démonstration. Pour toute $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ avec $\|u\| > 1$ on a

$$J(u) \geq \frac{1}{p^+} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx - \frac{\lambda}{q^-} \int_\Omega g(x)\, |u|^{q(x)}\, dx + \frac{1}{s_1^+} \int_\Omega h(x)\, |u|^{s_1(x)}\, dx - \frac{1}{s_2^-} \int_\Omega k(x)\, |u|^{s_2(x)}\, dx$$

Par l'inégalité de Hölder (1.2.18) on a

$$\int_\Omega g(x)\, |u|^{q(x)}\, dx \leq c_r\, |g|_{r(x)}\, |u|^{q^i}_{q(x)r'(x)}\,, \tag{3.2.2}$$

où $r'(x) = \frac{r(x)}{r(x)-1}$ et $1 < q(x)r'(x) < p^*(x)$. De même, on a

$$\int_\Omega k(x)\, |u|^{s_2(x)}\, dx \leq c_l\, |k|_{l(x)}\, |u|^{s_2^i}_{s_2(x)l'(x)}\,, \tag{3.2.3}$$

avec $1 < s_2(x)l'(x) < p^*(x)$.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} |g(x)|_{r(x)}\, |u|^{q^i}_{q(x)r'(x)} - \frac{1}{s_2^-} |k(x)|_{l(x)}\, |u|^{s_2^j}_{s_2(x)l'(x)} \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda c_r}{q^-} |g(x)|_{r(x)}\, \|u\|^{q^i} - \frac{c_l}{s_2^-} |k(x)|_{l(x)}\, \|u\|^{s_2^j} \\ &\geq \|u\|^{q^i} \left(\frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+ - q^i} - C_1 - C_2 \|u\|^{s_2^j - q^i} \right). \end{aligned}$$

Comme on a $s_2^- < s_2^+ < q^- < q^+ < p^- < p^+$, on trouve que

$$\lim_{\|u\| \to \infty} J(u) = \infty,$$

et ceci exprime que $J(u)$ est coercive sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. □

Lemme 3.2.3. *La fonctionnelle J est bornée inférieurement sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, c.à.d. il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que*

$$J(u) \geq M, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Démonstration. On a pour tout $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$J(u) \geq \frac{1}{p^+} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx - \frac{\lambda}{q^-} \int_\Omega g(x)\, |u|^{q(x)}\, dx - \frac{1}{s_2^-} \int_\Omega k(x)\, |u|^{s_2(x)}\, dx$$

D'après la caractérisation de λ^*, on trouve que

$$\lambda^* \leq \frac{\int\limits_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx}{\int\limits_\Omega \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} \, dx} \leq \frac{\frac{1}{p^-} \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx}{\frac{1}{q^+} \int\limits_\Omega g(x) |u|^{q(x)} \, dx}.$$

Ainsi, on a obligatoirement

$$\int\limits_\Omega g(x) |u|^{q(x)} \, dx \leq \frac{q^+}{\lambda^* p^-} \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx$$

avec $i = +$ si $\|u\| > 1$ et $i = -$ si $\|u\| \leq 1$. D'où J satisfait l'inégalité

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p^+} \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \frac{\lambda}{\lambda^*} \frac{1}{p^-} \frac{q^+}{q^-} \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \frac{1}{s_2^-} \int\limits_\Omega k(x) |u|^{s_2(x)} \, dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda^*} \frac{1}{p^-} \frac{q^+}{q^-} \right) \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \frac{1}{s_2^-} \int\limits_\Omega k(x) |u|^{s_2(x)} \, dx \\ &\geq - \left[\frac{1}{s_2^-} \int\limits_\Omega k(x) |u|^{s_2(x)} \, dx - \left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda^*} \frac{1}{p^-} \frac{q^+}{q^-} \right) \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx \right]. \end{aligned}$$

Par (3.2.3) il vient que,

$$J(u) \geq - \left[\frac{1}{s_2^-} |k|_{l(x)} \|u\|^{s_2^j} - \left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda^*} \frac{1}{p^-} \frac{q^+}{q^-} \right) \|u\|^{p^i} \right]$$

L'application de l'inégalité (4.2.9)

$$a.t^k - b.t^l \leq a. \left(\frac{a}{b} \right)^{k/(l-k)} \qquad \forall t \geq 0$$

combinée avec l'inégalité $\lambda < \dfrac{\lambda^* p^- q^-}{p^+ q^+}$, donne le résultat suivant

$$J(u) \geq - \left(\frac{|k|_{l(x)}}{s_2^-} \right) \left[\frac{\frac{|k|_{l(x)}}{s_2^-}}{\left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda^*} \frac{1}{p^-} \frac{q^+}{q^-} \right)} \right]^{s_2^j / p^i - s_2^j}.$$

D'après la relation (1.3.2) on a

$$J(u) \geq -\left(\frac{|k|_{l(x)}}{s_2^-}\right)\left\{\left[\frac{\frac{|k|_{l(x)}}{s_2^-}}{\left(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{\lambda^*}\frac{1}{p^-}\frac{q^+}{q^-}\right)}\right]^{s_2^+/p^- - s_2^+} + \left[\frac{\frac{|k|_{l(x)}}{s_2^-}}{\left(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{\lambda^*}\frac{1}{p^-}\frac{q^+}{q^-}\right)}\right]^{s_2^-/p^+ - s_2^-}\right\} = M.$$

Ici M est une constante réelle indépendente de u et de x. La preuve du Lemme 3.2.3 est ainsi complète. □

Lemme 3.2.4. *La fonctionnelle $J(u)$ est faiblement semi-continue inférieurement sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Démonstration. On définit sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ les fonctionnelles G_1 et G_2 par

$$G_1(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{s_1(x)} |u|^{s_1(x)}\, dx$$

et

$$G_2(u) = J(u) - G_1(u).$$

Il est bien connu que G_1 est une fonctionnelle convexe et continue de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent G_1 est faiblement semi-continue inférieurement.

Il reste à démontrer que $G_2(u)$ est faiblement-fortemet continue. Soit (u_n) une suite qui converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. La suite (u_n) est alors bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

On a

$$|G_2(u_n) - G_2(u)| \leq Q_n,$$

où

$$\begin{aligned} Q_n &= \left| \int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)} \left(|u_n|^{q(x)} - |u|^{q(x)}\right) dx - \int_\Omega \frac{k(x)}{s_2(x)} \left(|u_n|^{s_2(x)} - |u|^{s_2(x)}\right) dx \right| \\ &\leq \int_\Omega \left| \frac{g(x)}{q(x)} \left(|u_n|^{q(x)} - |u|^{q(x)}\right)\right| dx + \int_\Omega \left| \frac{k(x)}{s_2(x)} \left(|u_n|^{s_2(x)} - |u|^{s_2(x)}\right)\right| dx \\ &\leq Q_{1n} + Q_{2n}, \end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
Q_{1n} &= \int_{\Omega} \left| \frac{g(x)}{q(x)} \left(|u_n|^{q(x)} - |u|^{q(x)} \right) \right| dx \\
Q_{2n} &= \int_{\Omega} \left| \frac{k(x)}{s_2(x)} \left(|u_n|^{s_2(x)} - |u|^{s_2(x)} \right) \right| dx
\end{aligned}
$$

On applique l'inégalité de Hölder (1.2.18) pour trouver que

$$
Q_{1n} \leq \frac{1}{q^-} |g(x)|_{r(x)} \left| |u_n|^{q(x)} - |u|^{q(x)} \right|_{r'(x)}
$$

et d'après l'injection compacte de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)r'(x)}(\Omega)$ (voir théorème 1.3.15) il existe une sous-suite $(u_{n'})$ qui converge dans $L^{q(x)r'(x)}(\Omega)$ et par l'unicité de la limite on a $(u_{n'}) \to u$ dans $L^{q(x)r'(x)}(\Omega)$. On a alors $Q_{1n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Le même enchainement d'idées nous emmène à l'inégalité $Q_{2n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, il s'ensuit que

$$
|G_2(u_n) - G_2(u)| \leq \varepsilon
$$

et donc $G_2(u)$ est faiblement-fortement continue. Par conséquent, J est faiblement semi-continue inférieurement. $\square$

Preuve du Théorème 3.2.1. D'après les Lemmes 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4 on en déduit que J est coercive, bornée inférieurement et faiblement semi-continue inférieurement. Alors d'après le théorème 4.2.12 il existe un minimum globale $u_\lambda \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de J et ainsi une solution faible du problème (3.0.1). Il reste à démontrer que u_λ n'est pas triviale.

Soit $t_0 < \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{s_1^j - s_2^i}}$ un nombre réel fixé et Ω_1 est un sous ensemble ouvert de Ω avec $|\Omega_1| > 0$. Il existe toujours $u_0 \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tel que $u_0(x) = t_0 =$

constante pour tout $x \in \Omega_1$ et $0 \leq u_0(x) \leq t_0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \Omega_1$. On a

$$\begin{aligned}
J(u_0) &= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_0|^{p(x)} \, dx - \lambda \int\limits_{\Omega} \frac{g(x)}{q(x)} |u_0|^{q(x)} \, dx + \int\limits_{\Omega} \frac{h(x)}{s_1(x)} |u_0|^{s_1(x)} \, dx - \int\limits_{\Omega} \frac{k(x)}{s_2(x)} |u_0|^{s_2(x)} \, d \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_0|^{p(x)} \, dx + \int\limits_{\Omega} \frac{h(x)}{s_1(x)} |u_0|^{s_1(x)} \, dx - \int\limits_{\Omega} \frac{k(x)}{s_2(x)} |u_0|^{s_2(x)} \, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_0|^{p(x)} \, dx + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} \frac{h(x)}{s_1(x)} |u_0|^{s_1(x)} \, dx + \frac{1}{s_1^-} \int\limits_{\Omega_1} h(x) \, |t_0|^{s_1(x)} \, dx - \frac{1}{s_2^+} \int\limits_{\Omega_1} k(x) \, |t_0 \\
&\leq L + \frac{|t_0|^{s_1^j}}{s_1^-} \int\limits_{\Omega_1} h(x) dx - \frac{|t_0|^{s_2^i}}{s_2^+} \int\limits_{\Omega_1} k(x) dx \\
&\leq L + D_1 \, |t_0|^{s_1^j} - D_2 \, |t_0|^{s_2^i}
\end{aligned}$$

où

$$D_1 = \frac{1}{s_1^-} \int\limits_{\Omega_1} h(x) dx, \qquad D_2 = \frac{1}{s_2^+} \int\limits_{\Omega_1} k(x) dx$$

et

$$L = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_0|^{p(x)} \, dx + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} \frac{h(x)}{s_1(x)} |u_0|^{s_1(x)} \, dx.$$

D'où $J_\lambda(u_0) < 0$ et par conséquent on a $J_\lambda(u_\lambda) < 0$. Ceci prouve que u_λ est non triviale. Ceci cloture la preuve du Théorème 3.2.1. $\square$

3.3 Solution avec énergie positive : Théorème du Col

Théorème 3.3.1. *Pour tout* $\lambda \in \left(\frac{\lambda^* p^- q^-}{p^+ q^+}, +\infty \right)$, *le problème (3.0.1) admet une solution faible dont l'énergie est positive.*

Afin de pouvoir appliquer le théorème du Col, il est tout d'abord important de démontrer que la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale sujet du Lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Supposons que* $\{u_n\} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *est une suite qui satisfait*

$$|J(u_n)| < M \tag{3.3.1}$$

$$J'(u_n) \to 0, \quad n \to \infty, \qquad \textit{dans} \quad \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^* \tag{3.3.2}$$

où M *est une constante positive. Alors* $\{u_n\}$ *possède une sous-suite fortement convergente dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Premièrement, Montrons que (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Supposons par contradiction qu'elle possède une sous-suite notée encore (u_n) telle que $\|u_n\| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, on a $\|u_n\| > 1$ pour tout entier n. D'après (3.3.2) on en déduit qu'il existe $N_1 > 0$ tel que pour tout $n > N_1$ on a

$$\|J'(u_n)\| \leq 1.$$

D'autre part, pour tout $n > N_1$ fixé, on a

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega) \ni v \mapsto \langle J'(u_n), v\rangle\,,$$

alors

$$|\langle J'(u_n), v\rangle| \leq \|J'(u_n)\| \,.\, \|v\| \leq \|v\|\,, \quad \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), n > N_1.$$

Posons $v = u_n$. Alors on a

$$-\|u_n\| \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\,dx - \lambda \int_\Omega g(x)\,|u_n|^{q(x)}\,dx$$

$$+ \int_\Omega h(x)\,|u_n|^{s_1(x)}\,dx - \int_\Omega k(x)\,|u_n|^{s_2(x)}\,dx \leq \|u_n\|$$

pour tout $n > N_1$.

Comme $\|u_n\| > 1$, on a d'après (1.2.10), (3.3.1), (3.3.2), l'inégalité de Hölder et le Théorème 1.3.15

$$\begin{aligned}
M &> J(u_n) - \frac{1}{s_2^-}\left\langle J'(u_n), u_n\right\rangle \\
M &> \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} dx - \lambda \int_\Omega \frac{g(x)}{q(x)}\left|u_n\right|^{q(x)} dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{s_1(x)}\left|u_n\right|^{s_1(x)} dx - \\
&\quad \int_\Omega \frac{k(x)}{s_2(x)}\left|u_n\right|^{s_2(x)} dx - \frac{1}{s_2^-}\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^{p(x)} dx + \frac{\lambda}{s_2^-}\int_\Omega g(x)\left|u_n\right|^{q(x)} dx - \\
&\quad \frac{1}{s_2^-}\int_\Omega h(x)\left|u_n\right|^{s_1(x)} dx + \frac{1}{s_2^-}\int_\Omega k(x)\left|u_n\right|^{s_2(x)} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &> \frac{1}{p^+}\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega g(x)\left|u_n\right|^{q(x)} dx + \frac{1}{s_1^+}\int_\Omega h(x)\left|u_n\right|^{s_1(x)} dx - \\
&\quad \frac{1}{s_2^-}\int_\Omega k(x)\left|u_n\right|^{s_2(x)} dx - \frac{1}{s_2^-}\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^{p(x)} dx + \frac{\lambda}{s_2^-}\int_\Omega g(x)\left|u_n\right|^{q(x)} dx - \\
&\quad \frac{1}{s_2^-}\int_\Omega h(x)\left|u_n\right|^{s_1(x)} dx + \frac{1}{s_2^-}\int_\Omega k(x)\left|u_n\right|^{s_2(x)} dx, \\
M &> \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{s_2^-}\right)\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^{p(x)} dx - \lambda\left(\frac{1}{q^-} + \frac{1}{s_2^-}\right)\int_\Omega g(x)\left|u_n\right|^{q(x)} dx + \\
&\quad + \left(\frac{1}{s_1^+} - \frac{1}{s_2^-}\right)\int_\Omega h(x)\left|u_n\right|^{s_1(x)} dx \\
&> \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{s_2^-}\right)\|u_n\|^{p^-} - \lambda\left(\frac{1}{q^-} + \frac{1}{s_2^-}\right)|g|_{r(x)}\|u_n\|^{q^+} + \left(\frac{1}{s_1^+} - \frac{1}{s_2^-}\right)|h|_{l(x)}\|u_n\|^{s_1^+}.
\end{aligned}$$

Comme $s_2^- < s_2^+ < q^- < q^+ < p^- < p^+$ et $s_1^i < p^j$ on aboutit à une contradiction d'après la dernière inégalité. Alors $\{u_n\}$ est nécessairement bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Étudions maintenant la convergence forte de $\{u_n\}$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Comme $\{u_n\}$ est bornée alors, par passage à une sous-suite extraite, elle converge faiblement vers

$u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, c.à.d

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega), n \to \infty.$$

D'après la proposition 1.3.16 on a

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^{q(x)}(\Omega). \tag{3.3.3}$$

Ainsi et par la relation (3.3.2) on trouve

$$\langle J'(u_n) - J'(u), u_n - u \rangle \to 0, \quad n \to \infty.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) (\nabla u_n - \nabla u)\, dx \\
= \; & \langle J'(u_n) - J'(u), u_n - u \rangle - \lambda \int_\Omega g(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) (u_n - u)\, dx \\
& + \int_\Omega h(x) \left(|u_n|^{s_1(x)-2} u_n - |u|^{s_1(x)-2} u \right) (u_n - u)\, dx - \\
& - \int_\Omega k(x) \left(|u_n|^{s_2(x)-2} u_n - |u|^{s_2(x)-2} u \right) (u_n - u)\, dx.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder (1.2.18) et la proposition 1.2.16 (ii) on aboutit à

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda \int_\Omega g(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) (u_n - u)\, dx \right| \\
\leq \; & \lambda \left| \int_\Omega g(x) |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u)\, dx \right| + \lambda \left| \int_\Omega g(x) |u|^{q(x)-2} u (u_n - u)\, dx \right| \\
\leq \; & C |g|_{r(x)} \left| |u_n|^{q(x)-1} \right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} |u_n - u|_{q(x)} + C' |g|_{r(x)} \left| |u|^{q(x)-1} \right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} |u_n - u|_{q(x)} \\
\leq \; & C |g|_{r(x)} |u_n|_{q(x)}^{q^+-1} |u_n - u|_{q(x)} + C' |g|_{r(x)} |u|_{q(x)}^{q^+-1} |u_n - u|_{q(x)}
\end{aligned}$$

où C et C' sont des constantes positives et $\frac{1}{r(x)} + \frac{q(x)-1}{q(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$. De la même manière on trouve que

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega h(x)\left(|u_n|^{s_1(x)-2}u_n - |u|^{s_1(x)-2}u\right)(u_n-u)\,dx\right| \\ \leq\ & \alpha\,|h|_{l(x)}\,|u_n|_{q(x)}^{s_1^+-1}\,|u_n-u|_{q(x)} + \beta\,|h|_{l(x)}\,|u|_{q(x)}^{s_1^+-1}\,|u_n-u|_{q(x)},\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{l(x)} + \frac{s_1(x)-1}{q(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ et

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega k(x)\left(|u_n|^{s_2(x)-2}u_n - |u|^{s_2(x)-2}u\right)(u_n-u)\,dx\right| \\ \leq\ & \gamma\,|k|_{n(x)}\,|u_n|_{q(x)}^{s_2^+-1}\,|u_n-u|_{q(x)} + \delta\,|k|_{n(x)}\,|u|_{q(x)}^{s_2^+-1}\,|u_n-u|_{q(x)}.\end{aligned}$$

Par la relation (3.3.3) on déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega k(x)\left(|u_n|^{s_2(x)-2}u_n - |u|^{s_2(x)-2}u\right)(u_n-u)\,dx = 0, \tag{3.3.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h(x)\left(|u_n|^{s_1(x)-2}u_n - |u|^{s_1(x)-2}u\right)(u_n-u)\,dx = 0 \tag{3.3.5}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x)\left(|u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u\right)(u_n-u)\,dx = 0. \tag{3.3.6}$$

D'après (3.3.4), (3.3.5) et (3.3.6) on aboutit à

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)\,dx = 0.$$

L'application de l'inégalité élémentaire (4.2.10) [24]

$$\left(|\xi|^{r-2}\xi - |\psi|^{r-2}\psi\right)(\xi-\psi) \geq 2^{-r}\,|\xi-\psi|^r, \qquad \forall r>2, \xi,\psi\in\mathbb{R}^N$$

nous emmène au résultat suivant

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|\nabla u_n-\nabla u|^{p(x)}\,dx=0. \tag{3.3.7}$$

On en conclut que $\|\nabla u_n-\nabla u\|\to 0$ quand $n\to\infty$. Ainsi et comme (u_n) est faiblement convergente vers u dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ alors elle converge fortement dnas $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. □

Dans le lemme suivant nous nous assurons que la fonctionnelle J satisfait la géomètrie du col.

Lemme 3.3.3. *Pour tout $\lambda>0$, il existe $\eta>0$ et $\rho>0$ tel que $J(u)\geq\eta$ si $\|u\|=\rho$ pour tout $u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Démonstration. Il est évident que $J(0)=0$ pour tout $\lambda>0$ et pour tout $u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}
J(u) &= \int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx-\lambda\int_{\Omega}\frac{g(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx+\int_{\Omega}\frac{h(x)}{s_1(x)}|u|^{s_1(x)}\,dx-\int_{\Omega}\frac{k(x)}{s_2(x)}|u|^{s_2(x)}\,dx\\
J(u) &\geq \frac{1}{p^+}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,dx-\frac{\lambda}{q^-}\int_{\Omega}g(x)|u|^{q(x)}\,dx-\frac{1}{s_2^-}\int_{\Omega}k(x)|u|^{s_2(x)}\,dx
\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Hölder (1.2.18) on trouve

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+}-\frac{\lambda c_r}{q^-}|g|_{r(x)}\|u\|^{q^i}-\frac{c_l}{s_2^-}|k|_{l(x)}\|u\|^{s_2^j}\\
&= \left(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda c_r}{q^-}|g|_{r(x)}\|u\|^{q^i-p^+}-\frac{c_l}{s_2^-}|k|_{l(x)}\|u\|^{s_2^j-p^+}\right)\|u\|^{p^+}\\
&= \left(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda c_r}{q^-}|g|_{r(x)}\rho^{q^i-p^+}-\frac{c_l}{s_2^-}|k|_{l(x)}\rho^{s_2^j-p^+}\right)\rho^{p^+}
\end{aligned}$$

alors J est de la forme

$$\alpha-\beta t^{q^i-p^+}-\gamma t^{s_2^j-p^+}$$

où α, β et γ sont des constantes positives. On remarque que la fonction définie par

$$t \to g(t) = \alpha - \beta t^{q^i - p^+} - \gamma t^{s_2^j - p^+}$$

est positive à l'infinie car $s_2^- < s_2^+ < q^- < q^+ < p^- < p^+$ (pour t assez grand), donc le Lemme 3.3.3 est vrai. □

Lemme 3.3.4. *Il existe $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$ et $J(t\varphi) < 0$, pour $t > 0$ assez grand.*

Démonstration. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$ et $t \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} J(t\varphi) &\leq \frac{t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p(x)}\,dx - \lambda\frac{t^{q^+}}{q^+}\int_\Omega g(x)\,|\varphi|^{q(x)}\,dx + \frac{t^{s_1^+}}{s_1^+}\int_\Omega h(x)\,|\varphi|^{s_1(x)}\,dx - \frac{t^{s_2^+}}{s_2^+}\int_\Omega k(x)\,|\varphi|^{s_2(x)}\,dx \\ &\leq \frac{t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p(x)}\,dx - \lambda\frac{t^{q^+}}{q^+}\int_\Omega g(x)\,|\varphi|^{q(x)}\,dx + \frac{t^{s_1^+}}{s_1^+}\int_\Omega h(x)\,|\varphi|^{s_1(x)}\,dx \end{aligned}$$

On a par l'hypothèse $q^+ < s_1^- < s_1^+ < p^-$, donc

$$\lambda\frac{t^{q^+}}{q^+}\int_\Omega g(x)\,|\varphi|^{q(x)}\,dx - \frac{t^{s_1^+}}{s_1^+}\int_\Omega h(x)\,|\varphi|^{s_1(x)}\,dx < \frac{t^{q^+}}{q^+}\left(\lambda\int_\Omega g(x)\,|\varphi|^{q(x)}\,dx - \int_\Omega h(x)\,|\varphi|^{s_1(x)}\,dx\right)$$

Ainsi, on a

$$J(t\varphi) \leq \frac{t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p(x)}\,dx - \frac{t^{q^+}}{q^+}\left(\lambda\int_\Omega g(x)\,|\varphi|^{q(x)}\,dx - \int_\Omega h(x)\,|\varphi|^{s_1(x)}\,dx\right)$$

donc $J(t\varphi) < 0$ pour $t < \delta^{\frac{1}{p^- - q^+}}$ avec

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{p^-\left(\lambda\int_\Omega g(x)\,|\varphi|^{q(x)}\,dx - \int_\Omega h(x)\,|\varphi|^{s_1(x)}\,dx\right)}{q^+\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p(x)}\,dx}\right\}.$$

Le lemme est ainsi démontré. □

Preuve du Théorème 3.3.1. Définissons la valeur

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} J(g(t))$$

où

$$\Gamma = \left\{ g \in C([0,1], W_0^{1,p(x)}(\Omega)), g(0) = 0, g(1) = v \right\}.$$

Comme on a $J(0) = 0$ et d'après les Lemmes 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.4, la fonctionnelle J vérifie les conditions du Théorème du Col. Alors le problème (3.0.1) admet un niveau critique c.

D'après le théorème 4.2.16 on a

$$\alpha \leq \inf_{\|u\|=\rho} J(u) \leq c$$

et comme $\alpha > 0$, alors $c > 0$, d'où $c \geq \alpha$. Ainsi u est une solution faible du problème (3.0.1), telle que $J(u) > 0$. $\square$

Chapitre 4

Problème du $p(x)-$Laplacien avec des conditions aux limites du type Neumann

L' objectif principal de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions faibles du problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + h(x)\,|u|^{p(x)-2}\,u = \lambda g(x)\,|u|^{q(x)-2}\,u, & \text{pour } x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\,\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = k(x)\,|u|^{s(x)-2}\,u, & \text{pour } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.0.1}$$

où $\Omega \in \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ est un domaine borné avec frontière assez régulière $\partial\Omega$, p, q et s sont des exposants variables continus. Les fonctions mesurables h et g sont positives dans Ω, la fonction mesurable k est positive dans $\partial\Omega$, λ est un paramètre réel et $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée normale extérieure.

Certains auteurs ont étudié les problèmes du $p(x)$-Laplacien soumis à une condition au bord du type Neumann. Le problème

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f(x,u), & \text{pour } x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,u), & \text{pour } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.0.2}$$

a été considéré dans [21] où il a été établi la non-existence, l'existence des solutions multiples positives en utilisant la technique de sous-sursolution.
L'auteur dans [68] a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x,u), & \text{pour } x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu g(x,u), & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.0.3}$$

En utilisant le théorème de la fontaine, l'auteur prouve l'existence d'une infinité de solutions faibles.
Dans les deux travaux cités si-dessus, les auteurs ont eu besoin d'un état de croissance sous-critique des non-linéarités pour assurer l'existence des solutions. Spécifiquement, ils ont supposé que

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &\leq c_1 + c_2\,|t|^{q(x)-1} \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R} \\ |g(x,t)| &\leq \overline{c_1} + \overline{c_2}\,|t|^{r(x)-1} \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

avec $q(x) < p^*(x)$ dans Ω et $r(x) < p^\partial(x)$ dans $\partial\Omega$.
Ainsi, notre étude ne peut être un cas particulier des études citées puisque nous n'imposons aucune condition sous-critique sur les non-linéairités que ce soit dans le domaine où sur la frontière (voir les hypothèses).

4.1 Espace des solutions

Il est bien connu que la condition au bord entre en grande partie dans le choix de l'espace dans lequel nous cherchons les solutions des problèmes considérés. Dans les chapitres précédents, la condition aux limites de Dirichlet nous a ammené à chercher nos solutions dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Cet espace devient inapproprié lors de l'étude des problèmes soumis à une condition du type Neumann. Ceci nous oblige à élargir l'espace des solutions à l'espace de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Définition 4.1.1. Une fonction $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ est dite solution faible de problème (4.0.1) si elle vérifie

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega h(x)\,|u|^{p(x)-2} uv dx - \lambda \int_\Omega g(x)\,|u|^{q(x)-2} uv dx - \int_{\partial\Omega} k(x)\,|u|^{s(x)-2} uv d\sigma = 0$$

pour toute $v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ où $d\sigma$ est la mesure de surface sur $\partial\Omega$.

Nous étudions le problème (4.0.1) sous les Hypothèses suivantes.

Hypothèses

Supposons que $p, q, s \in C(\overline{\Omega})$ et que

$$(A) \quad 1 < s^- < s^+ < q^- < q^+ < p^- < p^+ < N.$$

Nous supposons que les fonctions g, h et k sont positives et que

$$(B) \quad g \in L^{r(x)}(\Omega),\ h \in C(\Omega) \cap L^{m(x)}(\Omega) \text{ et } k \in L^{l(x)}(\partial\Omega)$$

avec

$$\begin{aligned} (C) \quad & \frac{p^*(x)}{p^*(x) - q(x)} < r(x), \quad \frac{p^*(x)}{p^*(x) - p(x)} < m(x), \quad \forall x \in \Omega \\ \text{et } & \frac{p^\partial(y)}{p^\partial(y) - s(y)} < l(y), \quad \forall y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

On cherche les solutions faibles du problème (4.0.1) qui sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie $T : W^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{h(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{k(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} d\sigma.$$

La fonctionnelle T est de classe $C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$ et on a

$$\langle T'(u), v\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} h(x) |u|^{p(x)-2} uv dx - \lambda \int_{\Omega} g(x) |u|^{q(x)-2} uv dx -$$

$$\int_{\partial\Omega} k(x) |u|^{s(x)-2} uv d\sigma,$$

pour tout $u, v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Les solutions faibles du problème (4.0.1) correspondent aux points critiques de la fonctionnelle T sur $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

4.2 Résultats d'existence de solutions multiples

En premier lieu, nous allons rechercher un minimum global de la fonctionnelle T qui sera une solution faible avec une énergie négative.

Théorème 4.2.1. *Sous les hypothèses (A), (B) et (C), pour toute $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $u_1 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ solution faible non triviale du problème (4.0.1) telle que $T(u_1) < 0$.*

Preuve du Théorème 4.2.1

Nous commençons par établir deux inégalités essentielles pour la construction de la démonstration. L'application de l'inégalité de Hölder (1.2.18) aux termes $\int_{\Omega} g(x) |u|^{q(x)} dx$ et $\int_{\partial\Omega} k(x) |u|^{s(x)} d\sigma$ est

$$\int_{\Omega} g(x) |u|^{q(x)} dx \leq 2 |g|_{r(x)} |u|^{q^i}_{q(x)r'(x)} ; i = +, -$$

et

$$\int\limits_{\partial\Omega} k(x)\,|u|^{s(x)}\,d\sigma \leq 2\,|k|_{l(x)}\,|u|^{s^j}_{s(x)l'(x)}\,; j=+,-.$$

L'hypothèse (C) assure que $q(x)r'(x) < p^*(x)$ dans Ω et que $s(x)l'(x) < p^\partial(x)$ dans $(\partial\Omega)$. Alors d'après la Proposition 1.3.17 et le théorème 1.3.15 il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ tels que

$$\int\limits_{\Omega} g(x)\,|u|^{q(x)}\,dx \leq 2\,|g|_{r(x)}\left(\|u\|^{q^+}_{1,p(x)} + \|u\|^{q^-}_{1,p(x)}\right) \tag{4.2.1}$$

et

$$\int\limits_{\partial\Omega} k(x)\,|u|^{s(x)}\,d\sigma \leq 2\,|k|_{l(x)}\left(\|u\|^{s^+}_{1,p(x)} + \|u\|^{s^-}_{1,p(x)}\right). \tag{4.2.2}$$

Nous allons démontrer maintenant que la fonctionnelle T est bornée inférieurement dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Soit $\lambda > 0$. Par (4.2.1) et (4.2.2) et l'inégalité élémentaire (4.2.9) on a

$$\begin{aligned} T(u) \;\geq\; & \frac{1}{p^+}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}\,dx + \int\limits_{\Omega} h(x)\,|u|^{p(x)}\,dx\right) - \frac{\lambda c_1}{q^-}\,|g|_{r(x)}\left(\|u\|^{q^+}_{1,p(x)} + \|u\|^{q^-}_{1,p(x)}\right) \\ & -\frac{c_2}{s^+}\,|k|_{l(x)}\left(\|u\|^{s^+}_{1,p(x)} + \|u\|^{s^-}_{1,p(x)}\right). \end{aligned}$$

Cependant, d'après la proposition 1.3.8 il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} T(u) \;\geq\; & \frac{c}{p^+}\,\|u\|^{p^i}_{1,p(x)} - \frac{\lambda c_1}{q^-}\,|g|_{r(x)}\left(\|u\|^{q^+}_{1,p(x)} + \|u\|^{q^-}_{1,p(x)}\right) \\ & -\frac{c_2}{s^+}\,|k|_{l(x)}\left(\|u\|^{s^+}_{1,p(x)} + \|u\|^{s^-}_{1,p(x)}\right) \end{aligned}$$

avec $i = +$ ou $-$.

Nous pouvons décomposer le côté droit de la dernière inégalité comme suit

$$\begin{aligned} T(u) \;\geq\; & -\left(\frac{\lambda c_1}{q^-}\,|g|_{r(x)}\,\|u\|^{q^+}_{1,p(x)} - \frac{c}{4p^+}\,\|u\|^{p^i}_{1,p(x)}\right) - \left(\frac{\lambda c_1}{q^-}\,|g|_{r(x)}\,\|u\|^{q^-}_{1,p(x)} - \frac{c}{4p^+}\,\|u\|^{p^i}_{1,p(x)}\right) \\ & -\left(\frac{c_2}{s^+}\,|k|_{l(x)}\,\|u\|^{s^-}_{1,p(x)} - \frac{c}{4p^+}\,\|u\|^{p^i}_{1,p(x)}\right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (4.2.9) quatre fois, il vient que

$$T(u) \geq M$$

avec $M = -\frac{\lambda c_1}{q^-} |g|_{r(x)} \left((4\frac{\lambda c_1}{cq^-} |g|_{r(x)} p^+)^{q^+/(p^i - q^+)} + (4\frac{\lambda c_1}{cq^-} |g|_{r(x)} p^+)^{q^-/(p^i - q^-)} \right)$
$-\frac{c_2}{s^+} |k|_{l(x)} \left((4p^+ \frac{c_2}{cs-} |k|_{l(x)})^{s^+/(p^i - s^+)} + (4p^+ \frac{c_2}{cs-} |k|_{l(x)})^{s^-/(p^i - s^-)} \right) < 0.$

Soit maintenant $\lambda \leq 0$, on a alors

$$T(u) \geq -\left(\frac{c_2}{s^-} |k|_{l(x)} \|u\|_{1,p(x)}^{s^+} - \frac{c}{2p^+} \|u\|_{1,p(x)}^{p^i} \right) - \left(\frac{c_2}{s^-} |k|_{l(x)} \|u\|_{1,p(x)}^{s^-} - \frac{c}{2p^+} \|u\|_{1,p(x)}^{p^i} \right).$$

En utilisant l'inégalité (4.2.9) on trouve que $T(u) \geq M'$ où

$$M' = \frac{c_2}{cs^-} |k|_{l(x)} \left((2p^+ \frac{c_2}{cs^-} |k|_{l(x)})^{s^+/(p^i - s^+)} + (2p^+ \frac{c_2}{s^-} |k|_{l(x)})^{s^-/(p^i - s^-)} \right) < 0.$$

L'étape suivante consiste à vérifier la condition de Palais-Smale.

Lemme 4.2.2. *La fonctionnelle T satisfait la condition de Palais-Smale $W^{1,p(x)}(\Omega)$ en tout niveau $c \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ une suite de Palais-Smale à un niveau $c \in \mathbb{R}$ fixé. Ceci est équivalent à écrire

$$\begin{aligned} T(u_n) &\to c \text{ et} \\ T'(u_n) &\to 0 \text{ dans } \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)' \text{ lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Nous montrons que (u_n) est bornée dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Supposons, au contraire, que $\|u_n\|_{1,p(x)} \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Comme $(T'(u_n))$ est une suite convergente dans $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)'$ alors il existe $c_3 > 0$ tel que $\|T'(u_n)\|_* \leq c_3$ où $\|.\|_*$ est la norme dans $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)'$. Il s'ensuit que

$$|\langle T'(u_n), u_n \rangle| \leq \|T'(u_n)\|_* \|u_n\|_{1,p(x)} \leq c_3 \|u_n\|_{1,p(x)}.$$

Il existe aussi $c_4 > 0$ tel que $T(u_n) \leq c_4$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \theta < \frac{1}{p^+}$ on a

$$\begin{aligned} c_3 \|u_n\|_{1,p(x)} + c_4 &\geq T(u_n) - \theta \langle T'(u_n), u_n \rangle \geq \left(\frac{1}{p^+} - \theta\right) \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} \, dx + \int_\Omega h(x) |u_n|^{p(x)} \, dx \right) \\ & -\lambda \left(\frac{1}{q^-} - \theta\right) \int_\Omega g(x) |u_n|^{q(x)} \, dx - \left(\frac{1}{s^-} - \theta\right) \int_{\partial\Omega} k(x) |u_n|^{s(x)} \, d\sigma. \end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$ on a, d'après les relations (4.2.1) et (4.2.2) l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} c_3 \|u_n\|_{1,p(x)} + c_4 &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \theta\right) \|u_n\|_{1,p(x)}^{p^-} - c_1 \lambda \left(\frac{1}{q^-} - \theta\right) |g|_{r(x)} \left(\|u_n\|_{1,p(x)}^{q^+} + \|u_n\|_{1,p(x)}^{q^-} \right) \\ & -c_2 \left(\frac{1}{s^-} - \theta\right) |k|_{l(x)} \left(\|u_n\|_{1,p(x)}^{s^+} + \|u_n\|_{1,p(x)}^{s^-} \right). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (A) on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p(x)} < +\infty$ est ceci est une contradiction. Nous obtenons la même conclusion quand $\lambda \leq 0$.

Alors (u_n) est bornée dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$, d'après la proposition 1.3.16 il existe une sous-suite notée (u_n) qui converge fortement vers u dans $L^{\gamma(x)}(\Omega)$ pour toute $\gamma \in C(\overline{\Omega})$ qui satisfait $p(x) \leq \gamma(x) < p^*(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et d'après la proposition 1.3.17 $(u_n /_{\partial\Omega})$ converge fortement vers $u /_{\partial\Omega}$ dans $L^{\delta(x)}(\partial\Omega)$ pour tout $\delta \in C(\partial\Omega)$ qui satisfait $1 \leq \delta(x) < p^\partial(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

Prouvons que $\int_\Omega g(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) (u_n - u) \, dx \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Soit $\alpha, \beta \in C(\overline{\Omega})$ tels que $\frac{p(x)}{q(x)-1} \leq \alpha(x) < \frac{p^*(x)}{q(x)-1}, p(x) \leq \beta(x) < p^*(x)$ et $\dfrac{1}{r(x)} + \dfrac{1}{\alpha(x)} + \dfrac{1}{\beta(x)} = 1$ pour tout $x \in \Omega$.

D'après la proposition 1.2.17, on trouve que

$$\left| \int_\Omega g(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) (u_n - u) \, dx \right| \leq$$

$$\leq |g|_{r(x)} \left(\left| |u_n|^{q(x)-1} \right|_{\alpha(x)} + \left| |u|^{q(x)-1} \right|_{\alpha(x)} \right) |u_n - u|_{\beta(x)} .$$

Ainsi, il existe $c > 0$ tel que

$$\left| \int_\Omega g(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) (u_n - u)\, dx \right| \leq c\, |g|_{r(x)} \left(\|u_n\|_{1,p(x)}^{q^i-1} + \|u_n\|_{1,p(x)}^{q^i-1} \right) |u_n - u|_{\beta(x)}.$$

Comme (u_n) est bornée dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ et $u_n \to u$ dans $L^{\beta(x)}(\Omega)$, alors on a

$$\int_\Omega g(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) (u_n - u)\, dx \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{4.2.3}$$

De la même manière on trouve aussi que

$$\int_\Omega h(x) \left(|u_n|^{p(x)-2} u_n - |u|^{p(x)-2} u \right) (u_n - u)\, dx \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \tag{4.2.4}$$

et

$$\int_{\partial\Omega} k(x) \left(|u_n|^{s(x)-2} u_n - |u|^{s(x)-2} u \right) (u_n - u)\, d\sigma \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{4.2.5}$$

Il est facile de voir que

$$\langle T'(u_n) - T'(u), u_n - u \rangle \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

D'après les relations (4.2.3), (4.2.4) et (4.2.5) on obtient

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) . (\nabla u_n - \nabla u)\, dx \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

En utilisant l'inégalité (4.2.10) à savoir

$$\left(|x_1|^{p-2} x_1 - |x_2|^{p-2} x_2 \right) .(x_1 - x_2) \geq \frac{2}{p(2^{p-1} - 1)} |x_1 - x_2|^p$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ et tout $p \geq 2$, on trouve que

$$\frac{2}{p^+(2^{p^+-1} - 1)} \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx \leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) . (\nabla u_n - \nabla u)\, dx. \tag{4.2.6}$$

De la même façon on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{2h^-}{p^+(2^{p^+-1}-1)}\int\limits_{\Omega}|u_n-u|^{p(x)}\,dx \leq \int\limits_{\Omega}h(x)\left(|u_n|^{p(x)-2}\,u_n-|u|^{p(x)-2}\,u\right)(u_n-u)\,dx. \tag{4.2.7}$$

En combinant (4.2.3), (4.2.5), (4.2.6) et (4.2.7) on arrive à montrer que $\rho_{1,p(x)}(u_n-u)\to$ lorsque $n\to\infty$. Par conséquent $u_n\to u$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ lorsque $n\to\infty$. Cela signifie que T satisfait la condition de Palais-Smale et la preuve du Lemme 4.2.2 est ainsi terminée. $\square$

Afin d'atteindre l'affirmation du théorème 4.2.1, on pose

$$c=\inf_{u\in W^{1,p(x)}(\Omega)}T(u).$$

Soit $(u_n)\subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ une suite minimisante. D'après le principe variationnel d'Ekeland, il existe une suite $(v_n)\subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que

$$T(v_n)\to c,\ T'(v_n)\to 0 \text{ et } \|v_n-u_n\|_{1,p(x)}\to 0.$$

Comme T satisfait la condition de Palais-Smale, il existe une sous-suite notée encore (v_n), qui converge fortement vers un certain $u_1\in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Il est facile de voir que (u_n) converge aussi vers u_1 dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Ce minimiseur est un point critique de la fonctionnelle T alors est une solution faible du problème (4.0.1).

Afin de finaliser la preuve du théorème 4.2.1, nous allons mettre en évidence la non trivialité du point critique u_1. Soit $t>1$ et $u\in W^{1,p(x)}(\Omega)$ avec $u\neq 0$ fixé. on a

$$T(tu)\leq t^{p^+}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla(u)|^{p(x)}\,dx+t^{p^+}\int\limits_{\Omega}\frac{h(x)}{p(x)}|u|^{p(x)}\,dx-\lambda t^{q^-}\int\limits_{\Omega}\frac{g(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx-$$

$$-t^{s^-}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{k(x)}{s(x)}|u|^{s(x)}\,d\sigma.$$

Posons $f(t) = at^{p^+} - bt^{q^-} - ct^{s^-}$ où les constantes a, b et c sont données par

$$\begin{aligned}
0 &< a = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla(u)|^{p(x)} \, dx + \int\limits_{\Omega} \frac{h(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} \, dx, \\
b &= \lambda \int_{\Omega} \frac{g(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} \, dx \\
0 &< c = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{k(x)}{s(x)} |u|^{s(x)} \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Un simple calcul montre que $f'(t) = t^{s^-} f_0(t)$ où $f_0(t) = ap^+ t^{p^+ - s^-} - bq^- t^{q^- - s^-} - cs^-$. Il est clair que $f_0(t) \to +\infty$ si $t \to +\infty$. Ainsi, il existe $t_0 > 0$ telle que $f_0(t_0) > 0$. De plus, $f_0(0) < 0$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe $0 < t_1 < t_0$ tels que $f_0(t_1) = 0$. Si $f'(t) < 0$ dans $(0, t_1)$ tel que $f_0(t) > 0$. On applique de nouveau le théorème de la valeur intermédiare à la fonction f_0 dans l'intervalle $(0, t_2)$ pour assurer l'existence d'un zéro que nous notons t_3 de la fonction f_0. Si $f'(t) < 0$ dans $(0, t_3)$ et $f'(t) > 0$ dans (t_3, t_2) alors on pose $\bar{t} = t_3$.
Répétons ce processus pour obtenir $t_{2n+1} > 0$ tel que $f'(t) < 0$ dans $(0, t_{2n+1})$ et $f'(t) > 0$ dans (t_{2n+1}, t_{2n}) pour un certain nombre entier n. On pose $\bar{t} = t_{2n+1}$.
Cela signifie que $\bar{t}$ est un minimum local de f. Alors $f(\bar{t}) \leq f(0) = 0$ et ceci implique que

$$T(\bar{t}u) < 0. \tag{4.2.8}$$

Par conséquent $T(u_1) < 0$. La preuve du théorème 4.2.1 est complète.

Nous passons maintenant à l'établissement de l'existence d'une deuxième solution non-triviale du Problème (4.0.1).

Théorème 4.2.3. *Sous les hypothèses* (A), (B) *et* (C) *pour toute* $\lambda \in \mathbb{R}$ *il existe* $u_2 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *une deuxième solution faible non triviale du problème (4.0.1) avec* $T(u_2) > 0$.

Preuve du Théorème 4.2.3

Pour prouver ce résultat, nous allons appliquer le théorème du Col. Nous avons déjà montré que T satisfait la condition de Palais-Smale. D'après la relation (4.2.8), il existe $u_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ tel que $T(u_0) < 0$. Ainsi, il reste à prouver qu'il existe $\rho > 0$ et $\delta > 0$ telle que $T(u) \geq \delta$ pour $\|u\|_{1,p(x)} = \rho$.

Soit $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ avec $\|u\|_{1,p(x)} > 1$. Si $\lambda > 0$ on a d'après les relations (4.2.1) et (4.2.2) l'inégalité suivante

$$T(u) \geq \frac{1}{p^+}\|u\|_{1,p(x)}^{p^+} - \frac{\lambda c_1}{q^-}|g|_{r(x)}\left(\|u\|_{1,p(x)}^{q^+} + \|u\|_{1,p(x)}^{q^-}\right) - \frac{c_2}{s^-}|k|_{l(x)}\left(\|u\|_{1,p(x)}^{s^+} + \|u\|_{1,p(x)}^{s^-}\right)$$

Posons $\|u\|_{1,p(x)} = \rho$. On trouve alors

$$T(u) \geq \rho^{q^+}\left(\frac{1}{p^+}\rho_0^{p^+-q^+} - \frac{\lambda c_1}{q^-}|g|_{r(x)}\left(1 + \rho_0^{q^--q^+}\right) - \frac{c_2}{s^-}|k|_{l(x)}\left(\rho_0^{s^+-q^+} + \rho_0^{s^--q^+}\right)\right).$$

Il est clair que sous l'hypothèse (A) le côté droit de la dernière inégalité tend vers $+\infty$ lorsque ρ tend vers $+\infty$. Par conséquent, il existe $\rho_0 > 0$ tel que

$$T(u) \geq \delta(\rho_0) > 0 \text{ pour } \|u\|_{1,p(x)} = \rho_0,$$

où $\delta(\rho_0) = \dfrac{1}{p^+}\rho_0^{p^+} - \frac{\lambda c_1}{q^-}|g|_{r(x)}\left(\rho_0^{q^+} + \rho_0^{q^-}\right) - \frac{c_2}{s^-}|k|_{l(x)}\left(\rho_0^{s^+} + \rho_0^{s^-}\right)$.

Nous obtenons la même conclusion dans le cas $\lambda \leq 0$ avec $\delta(\rho_0) = \dfrac{1}{p^+}\rho_0^{p^+} - \frac{c_2}{s^-}|k|_{l(x)}\left(\rho_0^{s^+} + \rho_0^{s^-}\right) > 0$.

Ainsi, d'après le théorème du Col, la quantité

$$c = \inf_{\phi\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} T(\phi(t))$$

est une valeur critique de T où $\Gamma = \{\phi \in C\left([0,1], W^{1,p(x)}(\Omega)\right) : \phi(0) = 0, \phi(1) = t_1u_1\}$. Le point critique u_2 associé à c est une solution faible du problème (4.0.1). Cette solution est non triviale puisque $c = T(u_2) \geq \delta(\rho_0) > 0$ et le théorème 4.2.3 est prouvé.

Annexe

Nous présentons dans cette annexe quelques définitions et théorèmes pour faciliter la compréhension du lecteur.

Définitions

Définition 4.2.4. Soient V une partie d'un espace de Banach X et $F : V \to \mathbb{R}$. Si $u \in V$, on dit que F est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-Différentiable en u), s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction z où $F(u + tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} = < l, z > .$$

On posera $F'(u) = l$. L'espace de toutes les fonctionnelles dérivables au sens de Gâteaux sur un espace de Banach X est noté $C^1(X, \mathbb{R})$ où $C^1(X)$ tout simplement.

Définition 4.2.5. (Point critique)

Soit X un espace de Banach, $V \subset X$ un ouvert et $F \in C^1(V, \mathbb{R})$. On dit que $u \in V$ est un point critique de F si $F'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de F. Soit $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de F s'il existe $u \in V$ tel que $F(u) = c$ et $F'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de F.

Définition 4.2.6. (Fonction de Carathéodory)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Une fonction f de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite de Carathéodory, si elle vérifie :

1. L'application : $t \to f(x,t)$ est continue p.p.$x \in \Omega$.
2. L'application : $x \to f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 4.2.7. (Fonction faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i))

Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Elle est dite faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) en x si pour toute suite $\{x_n\}$ telle que (x_n) converge faiblement vers x, on a :

$$J(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(x_n).$$

Définition 4.2.8. (Condition de Palais-Smale)

Soit X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(X)$. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau $c \in \mathbb{R}$) si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X',$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque 4.2.9. *La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façons utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.*

Définition 4.2.10. (Mesure séparable)

μ est une mesure séparable si elle existe une suite $(E_k) \subset \sum$ qui satisfait :

a) $\mu(E_k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Pour tout $E \in \sum$ avec $\mu(E) < \infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice k tel que $\mu(E \Delta E_k) < \varepsilon$ où $E \Delta E_k = (E \setminus E_k) \cup (E_k \setminus E)$.

Principaux Théorèmes

Théorème 4.2.11. *[24]*

Soit E un espace de Banach reflexif, $M \subset E$ un sous-espace faiblement fermé de E et I :$M \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle telle que

i) I est coercive sur M par rapport à E , i.e.

$$I(u) \to \infty \textit{ lorsque } \|u\| \to \infty.$$

ii) I est faiblement semi-continue inférieurement sur M.

Alors I est bornée inférieurement et atteint son infinimum sur M.

Théorème 4.2.12. *[39] (Principe variationnel d'Ekeland)*

Soit (M, d) un espace métrique complet. Supposons que $\Phi : M \to (-\infty, \infty)$, $\Phi \neq \infty$ est une fonctionnelle semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $v \in M$, qui vérifie $\Phi(v) \leq \inf\limits_{M} \Phi + \varepsilon$, il existe $u \in M$ tel que

i) $\Phi(u) \leq \Phi(v)$,

ii) $\Phi(u) \leq \Phi(u) + \varepsilon d(x, u)$ pour tout $x \in M$.

Corollaire 4.2.13. *[39]*

Soient M un espace de Banach et $I \in C^1(M,\mathbb{R})$. On suppose que I est bornée inférieurement et vérifie la condition de Palais Smale au niveau $c = \inf_{x\in M} I(x)$. Alors I atteint son minimum c.

Proposition 4.2.14. *[39]*

Soient X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \to \mathbb{R}$ une fonction faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement. De plus, si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que $\|x_n\| \to \infty$, on a $J(x_n) \to +\infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum c'est-à-dire

$$\exists u \in K,\ \ J(u) = \inf_{V\in K} J(v) = \min_{v\in K} J(v).$$

Proposition 4.2.15. *[19] Soit X un espace de Banach et soit Y une partie fermée de X ou un produit cartésien X^N. Alors*

$(a)$$Y$ est un espace de Banach.

(b) Si X est réflexif, alors Y est réflexif.

(c) Si X est séparable, alors Y est séparable.

(d) Si X est uniformément convexe, alors X est réflexif.

(e) Si X est uniformément convexe, alors Y est uniformément convexe.

Théorème 4.2.16. *[39](Théorème du Col)*

Soit V un espace de Banach et $J \in C^1(V,\mathbb{R})$ une fonctionnelle vérifiant la condition de Palais-Smale et est telle que

(i) $J(0) = 0$,

(ii) il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\|_V = R$ alors $J(u) \geq a$,

(iii) il existe $v \in V, \|v\|_V > R$ tel que $J(v) < a$.

Alors, J admet une valeur critique $c \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$\Gamma = \{\varphi([0,1]); \varphi \in C([0,1]; V), \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = v\},$$

et

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \max_{v \in A} J(v)$$

alors c est une valeur critique de J.

Inégalités élémentaires

Nous rappelons dans cette section quelques inégalités élémentaires qui nous ont servi à surmonter certaines difficultés de calcul.

Proposition 4.2.17. *pour tout $a, b > 0$ et $0 < k < l$, on a l'inégalité*

$$a.t^k - b.t^l \leq a.\left(\frac{a}{b}\right)^{k/(l-k)}, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.2.9}$$

Démonstration. En effet, la fonction

$$t \in [0, \infty) \to t^\theta$$

est décroissante pour tout $\theta > 0$, il s'ensuit que

$$a - b.t^{l-k} < 0, \quad \forall t > \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(l-k)},$$

et

$$t^k.(a - b.t^{l-k}) \leq a.t^k < a.\left(\frac{a}{b}\right)^{k/(l-k)}, \quad \forall t \in [0, \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(l-k)}].$$

les deux dérnières inégalités montrent que (4.2.9) est vraie. □

Proposition 4.2.18. *Soit $p \geq 2$, alors pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ on a*

$$\left(|x_1|^{p-2}\, x_1 - |x_2|^{p-2}\, x_2\right).(x_1 - x_2) \geq \frac{2}{p(2^{p-1}-1)}\, |x_1 - x_2|^p\,. \tag{4.2.10}$$

Démonstration. La convexité stricte de $x \to |x|^p$ implique que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ on a

$$|x_2|^p > |x_1|^p + p\,|x_1|^{p-2}\, x_1(x_2 - x_1). \tag{4.2.11}$$

Puis on remplace x_2 par $\frac{x_1+x_2}{2}$ dans (4.2.11) on trouve

$$\left|\frac{x_1+x_2}{2}\right|^p \geq |x_1|^p + \frac{1}{2}p\,|x_1|^{p-2}\, x_1(x_2 - x_1).$$

En utilisant l'inégalité de Clarkson pour $p \geq 2$ telle que

$$|x_1|^p + |x_2|^p \geq 2\left|\frac{x_1+x_2}{2}\right|^p + 2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|^p, \tag{4.2.12}$$

On arrive à

$$|x_2|^p \geq |x_1|^p + p\,|x_1|^{p-2}\, x_1(x_2 - x_1) + 2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|^p. \tag{4.2.13}$$

Ceci est l'inégalité (4.2.10) mais avec la constante 2^{1-p} au lieu de $\frac{1}{2^{p-1}-1}$. Répétons cette procédure, d'après (4.2.12) et maintenant utilisons (4.2.13) à la place de (4.2.11), on obtient la constante $2^{1-p} + 4^{1-p}$. Par itération, on trouve finalement la constante

$$2^{1-p} + 4^{1-p} + 8^{1-p} + ... = \frac{1}{2^{p-1}-1}$$

dans (4.2.10). □

Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudie quelque aspects des problèmes du type $p(x)-$Laplacien avec des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Les méthodes et les résultats présentés dans cette thèse sont diffèrent de ceux concernant le $p-$Laplacien. Nous avons vue que l'étude spectrale de ces problèmes faisait appel à la théorie des points critiques. Les méthodes variationnelles utilisées ont garantissent soit l'existence de minimum global , soit l'existence de minimum local, soit les deux à la fois. Nous avons essentiellement appliqué le théorème du Col et le principe variationnel d'Ekland pour établir ces résultats.
A l'avenir nous allons étudier le problème de $p(x)-$Laplacien avec des conditions aux limites non-locales.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] R.P. Agarwal, K. Perera and D. O'Regan, Multiple positive solutions of singular discrete p(x)-Laplacian problems via variational methods, Advances in Difference Equations 2005 :2 (2005) 93-99.

[3] W. Allegretto, Principal eigenvalues for indefinite weight elliptic problems $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 701-706.

[4] W. Allegretto and Y. X. Huang, Eigenvalues of indefinite weight $p-$laplacian in weighted space, Funkc, Ekvac. 38 (1995), 233-242.

[5] W. Allegretto and Y. X. Huang, A Picone's Identity fot the p-Laplacian and Application, Nonlinear Analysis, 32 (1998), 819-830.

[6] A. Ambrosetti and P.H.Rabinouitz, Dual Variation Methods in Critical Point Theory and Applications, Journal of functional Analysis 14, 349-381 (1973).

[7] A. Anane, Simplicité et isolation de la première valeur propre du $p-$Laplacian avec poids, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série1, p, 725-728, 1987.

[8] M. S. Ashbaugh and E. M. Harrell, Maximal and minimal eigenvalues and their associated nonlinear equations, J. Math. Phys. 28 (1987), 1770-1786.

[9] M. Avci and R. Ayazoglu, Solutions of nonlocal $(p_1(x), p_2(x))-$Laplacian Equations, International Journal of Prtial Diffrential Equations vol 2013, 1-7.

[10] N. Benouhiba, On the eigenvalues of weighted $p(x)$-Laplacian on $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Analysis, 74 (2011), 235-243.

[11] N. Benouhiba and A. Bounouala, Multiple solutions to a Neumann problem with $p(x)-$Laplacian, Adv. Studies Contemp. Math, 24 (2014), no 2, 205-215.

[12] N. Benouhiba and A. Bounouala, Le chapitre deux à fait l'objet d'une communication au 18^{me} Colloque de la Société Mathématique de Tunisie, 19-22 mars 2012 Mahdia-Tunisie.

[13] N. Benouhiba and A. Bounouala, Le chapitre trois on fait l'objet d'un Proceeding dans Springer International Publishing Switzerland 2015 : Applied Analysis in Tunisia, pp. 319-327.

[14] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson 1987.

[15] H. Brézis and F. E. Browder, Strongly nonlinear elliptic boundary value problems, Annali della scuola normale superior, tom5, no3, (1978).

[16] A. Cabada, A. Iannizzotto and S. Tersian, Multiple solutions for discrete boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 356 (2009), 418-428.

[17] K. C. Chang, Critical point theory and Applications, Shanghai Scienti c and Technology Press, Shanghai, 1986.

[18] Mabel Cuesta, Eigenvalue problem for the p-Laplacian with indefinit weights, Electronic Journal of differential equation, vol 2001, no 33, pp. 1-9.

[19] L. Diening, P. Harjulehto, P Hasto, M Ruzicka, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Springer's 2010.

[20] S.G. Deng, Eigenvalues of the p(x)-Laplacian Steklov problem, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), 925-937.

[21] S.G. Deng and Q. Wang, Nonexistence, existence and multiplicity of positive solutions to the p(x)-laplacian nonlinear Neumann boundary value problem, Nonlinear Analysis, 73 (2010), 2170-2183.

[22] Shao-Gao Deng, Eigenvalues of the $p(x)-$Laplacian Steklov problem, J. Math. Anal. Appl.339 (2008) 925-937.

[23] Shao-Gao Deng, Q. Wang, S. Cheng, On the $p(x)$-Laplacian Robin eigenvalue problem, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), 5643-5649.

[24] P. Drabek and J. Milota, Methods of nonlinear analysis, applications to differential equations, Birkhauser Verlag AG, 2007.

[25] D. E. Edmunds and J. Rakosnik, Sobolev embedding with variable exponent, Studia Math. 143 (2000), 267-293.

[26] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[27] X.L. Fan, D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001) 424–446.

[28] Xian-ling Fan, Qi-hu Zhang, Dun Zhao, Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem, J. Math. Anal. Appl. 302 (2005), 306-317.

[29] Xian-ling Fan, Qi-hu Zhang, Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem, Nonlinear Analysis 52 (2003), 1843-1852.

[30] Xian-ling Fan, Remarks on eigenvalue problems involving the $p(x)-$Laplacian, J. Math. Appl. 325 (2009), 85-98.

[31] Xian-ling Fan, Eigenvalues of the $p(x)$-Laplacian Neumann problems. Nonlinear Analysis 67 (2007) 2982–2992

[32] L. Gasiánski and N. S. Papageorgiou, Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems, A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C. 2005.

[33] Bin. Ge, Q. Zhou, Existence and multiplicity of solutions for a Neumann-type $p(x)-$Laplacian equation with nonsmooth potential, EJQTDE.2011 ; No. 17 p 1-10

[34] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin, 1998.

[35] E. Guo and Peihao Zhao, Existence and multiplicity of solutions for nonlocal $p(x)-$Laplacian equations with nonlinear Neumann boundary conditions, springer open journal (2012), 2-11.

[36] T. C. Halsey, Electrorheological Fluids, Sciences 258 (1992), no. 5083, 761-766.

[37] P. Harjulehto, P. Häastö, U. V. Le and M. Nuortio, Overview of differential equations with non-standard growth, Nonlinear Analysis, 72(12), 2010, 4551-4574.

[38] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2006. Unabridged republication of the 1993 original.

[39] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Sringer-verlag. 1983.

[40] O. Kaváčik, Rákosnik, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, czechoslovak Mathematical Journal, vol.41 (1991), no.4, 592-618.

[41] S. Liu, S. Li, An elliptic equation with concave and convex nonlinearities, Nonlinear Analysis, 53 (2003), 723-731.

[42] R. A. Mashiyev, B. Cekic and O. M. Buhril, Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian equations, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2012, No. 65, 1-13.

[43] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent, Proc. Amer. Math. Soc, Amer.135 (2007) 2929–2937.

[44] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, A continous spectrum for nonhomogenous differential operators in Orlicz-Sobolev spaces, Math. Scand. 104 (2009), 132-146.

[45] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, Spectrum consisting in an unbounded interval for a class of nonhomogenous differential operators, Bulletin of the London Math Society, 40(2008),972-985.

[46] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, A multiplicity result for a nonlinear degenrate problem arising in the theory of electrorheological fluids, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 462 (2006), 2625-2641.

[47] M. Mihăilescu, Eigenvalue Problems for some elliptic partial differential operators, Doctorate thesis. Department of mathematics and its Applications, Central european University (2010).

[48] M. Mihăilescu, Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving the $p(x)-$Laplace operator, Nonlinear Analysis, 67 (2007), 1419-1425.

[49] M. Mihăilescu and V. Radulescu, Continuous spectrum for a class of nonhomogeneous differential operators, Manuscripta Mathematica, 125 (2008), 157-167.

[50] M. Mihăilescu and D. Stancu-Dumitru, On an eigenvalue problem involving the $p(x)-$Laplace operator plus a non-local term, Differential Equations & Applications 1 (2009), 367-378.

[51] M. Mihăilescu, P. Pucci and V. Rąadulescu, Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent, Journal of Mathematical Analuysis and Applications, (2008), 687-698.

[52] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Mathmatics, vol.1034, springer-Verlag, Berlin, 1983.

[53] M. Morse and S. Cairns, Critical point theory in global analysis and differential topology, Academic press, Newyork and London 1969.

[54] H. Nakano, Modulared Semi-ordered Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[55] L. Nirenberg, Variational and topological methods in nonlinear problems, Bull. Amer. Math. Soc, 4, no. 3, (1981), 267-302.

[56] K. R. Rajagopal and M. Růžička, Mathematical Modeling of Electrorheological Fluids, Continuum Mech. Thermdyn. 13 (2001), 59{78}.

[57] M. M. Rao and Z. D. Ren. Theory of Orlicz spaces, vol 146 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[58] Paul. H Rabinowitz, Minmax methods in critical point theory with Application to differential Equations, American Mathematical Society, (1984).

[59] M. Růžička, Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[60] S. Samko, Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in generalized Sobolev spaces $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, in : Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics, Newark, DE,1997, in : Int. Soc. Anal. Comput., vol. 5. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 333–342.

[61] S. Samko a, and, B. Vakulov, Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators, J. Math. Anal. Appl, 310 (2005) 229-246.

[62] M. Schechter, Critical point methods, Nonlinear Analysis, 69 (2008), 987-999.

[63] M. Struwe, Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer, Heidelberg, 1996.

[64] T-L. Dinu, Nonlinear eigenvalue problems in Sobolev spaces with variable exponent arXiv :math 0511193v1, (2005), 1-14.

[65] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhauser. Basel. 1996.

[66] L. Wei and Ravi P. Agarwal, Existence of solutions to nonlinear Neumann boundary value problems with generalized $p-$Laplacian operator, Computers and mathematics with applications 56, (2008), 530-541.

[67] Benjin Xuan, Existence results for a superlinear $p-$Laplacian equation with indefinite weights, Nonlinear Analysis 54, (2003), 949 - 958.

[68] J. Yao, Solutions for Neumann boundary value problems involving $p(x)-$Laplacian operators, Nonlinear Analysis, 68 (2008), 1271-1283.

[69] E. Zeidler, Nonlinear Functional analysis and its applications, II-B, Springer-Verlag, New York (1980).

[70] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications III-Variational Methods and Optimization, Springer-Verlag, New York, 1985.