

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOUKHTAR- ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR- ANNABA



جامعة باجي مختار- عنابة

Faculté des sciences de l'ingénierat

Année : 2019

Département d'Electronique

## THESE

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

---

---

**ANALYSE, REGLAGE ET CONCEPTION DES CORRECTEURS  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  D'ORDRE  
FRACTIONNAIRE POUR LA COMMANDE DES SYSTEMES**

---

---

### Option

Automatique

### Par

Kaddour GHERFI

**DIRECTEUR DE THESE :** Pr. CHAREF Abdelfatah Université des Frère Mentouri -Constantine

**CO-DIRECTEUR DE THESE :** Pr. ABBASSI Hadj Ahmed Université Badji Mokhtar Annaba

### DEVANT LE JURY

#### **PRESIDENT :**

DEBBACHE Nasreddine Professeur Université Badji Mokhtar Annaba

#### **EXAMINATEURS :**

BENNIA Abdelhak Professeur Université des Frère Mentouri -Constantine

LADACI Samir Professeur ENP de Constantine

SAIDI Mohamed Larbi MCA Université Badji Mokhtar Annaba

الحمد لله رب العالمين

# *DÉDICACES*

*Je dédie ce travail*

*A mes chers parents*

*A mes chers frères et sœurs*

*A tous mes amis*

*A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal*

# REMERCIEMENTS

Avant tout, Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **Abdelfatah CHAREF** de l'université des frères Mentouri -Constantine, que je tiens à remercier vivement pour sa patience envers mon travail, son soutien scientifique et humain, et sa disponibilité durant mes années d'étude de doctorat. Je le remercie aussi, pour la confiance qu'il m'a accordé, ses encouragements et ses conseils.

Je remercie également et très profondément Monsieur le professeur **Abbassi Hadj Ahmed**, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba pour sa patience, son encouragement et la confiance qu'il m'a accordé, ainsi que pour tous ses conseils.

Mes remerciements vont à Monsieur **Nasreddine DEBBACHE**, Professeur, de l'université Badji Mokhtar Annaba, d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse, ainsi que Messieurs **Abdelhak BENNIA** Professeur à l'université des frères Mentouri -Constantine, **Samir LADACI**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique de Constantine et **Mohamed Larbi SAIDI**, Maître de conférence A à l'université Badji Mokhtar Annaba d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de traitement du signal de l'Université des frères mentouri Constantine<sup>1</sup>, Ainsi que toute l'équipe du laboratoire d'Automatique et Signaux de Annaba de l'université Badji Mokhtar Annaba pour leurs aides, et encouragements.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble de mes enseignants de toutes les phases scolaires qui sont à l'origine de toutes les connaissances que j'ai acquises.

Un grand merci à mes parents, et à toute ma famille pour leur aide et encouragement.

# *Table des Matières*

<b>Dédicaces</b>	ii
<b>Remerciements</b>	iii
<b>Table des matières</b>	iv
<b>Liste des figures</b>	x
<b>Liste des tableaux</b>	xiv
<b>Introduction Générale</b>	1

## **Chapitre I: Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire**

I.1 Introduction	4
I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire	4
I.2.1 Définitions	4
I.2.1.1 Définition de Riemann-Liouville	5
I.2.1.1.1 Définition 1	5
I.2.1.1.2 Définition 2	5
I.2.1.2 Définition de Caputo	5
I.2.1.3 Définition de Grunwald-Leitnikov	5
I.2.2 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	6
I.2.2.1 Transformée de Laplace de l'intégration d'ordre fractionnaire	6
I.2.2.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.	6
I.3 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	6
I.3.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire	7

I.3.1.1	Technique d'approximation	7
I.3.1.2	Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	9
I.3.2	Approximation du différentiateur d'ordre fractionnaire	10
I.3.2.1	Technique d'approximation	10
I.3.2.2	Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	12
I.4	Quelques propriétés de la dérivée et l'intégration non entier	14
I.5	Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	14
I.5.1	Représentation par équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire	14
I.5.1.1	Fonction de transfert	15
I.5.1.2	Méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires	15
I.5.1.3	Exemples illustratifs	16
Exemple 1		16
Exemple 2		17
I.5.2	Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	18
I.5.2.1	Définition	18
I.5.2.2	Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert	18
I.6	Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire	19
I.6.1	Stabilité	19
I.6.1.1	Stabilité des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable	19
Théorème		19
I.6.1.2	Stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire généralisés	20
Théorème		21

I.6.1.3 Exemple	21
I.6.2 Observabilité et contrôlabilité	22
I.6.2.1 Contrôlabilité	22
I.6.2.2 Observabilité	22
I.7 Conclusion	23
<b>Chapitre II: La Commande d'Ordre Fractionnaire</b>	
II.1 Introduction	24
II.2 Correcteur CRONE	24
II.2.1 Correcteur CRONE de la première génération	24
II.2.2 Correcteur CRONE de la deuxième génération	26
II.2.3 Correcteur CRONE de la troisième génération	27
II.3 Correcteur $PI^\lambda D^\mu$	28
II.4 Correcteur TID	29
II.5 Correcteur avance ou retard de phase d'ordre fractionnaire	30
II.6 Commande Adaptative d'ordre fractionnaire	30
II.6.1 Commande adaptative à modèle de référence fractionnaire	31
II.6.2 Commande adaptative $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire	31
II.6.3 Commande adaptative à grand gain fractionnaire	32
II.7 Méthode de stabilisation adaptative universelle fractionnaire	33
II.8 Commande $H_\infty$ fractionnaire	33
II.9 Conclusion	34

---

## Chapitre III: Réglage du Correcteur $PI^\lambda$ d'Ordre Fractionnaire pour la Commande d'un Processus du Premier Ordre Avec Retard

III.1 Introduction	35
III.2 Préliminaires	35
III.2.1 Approximation par fonction rationnelle du correcteur $PI^\lambda$	35
III.2.2 Approximation de Padé d'un retard	36
III.3 Réglage du correcteur $PI^\lambda$	36
III.3.1 Formulation du problème	36
III.3.2 Présentation de la méthode	37
III.4 Résultats de simulation	38
III.4.1 Exemple 1	38
III.4.1.1 Stabilité	40
III.4.1.2 Réponses fréquentielles et temporelles	41
III.4.1.3 Signal de commande	43
III.4.1.4 Perturbation	44
III.4.1.5 Sensibilité	46
III.4.2 exemple 2	47
III.4.2.1 Stabilité	49
III.4.2.2 Réponses fréquentielles et temporelles	51
III.4.2.3 Signal de commande	53
III.4.2.4 Perturbation	53
III.4.2.5 Sensibilité	54
II.5 Conclusion	55

## **Chapitre IV: Analyse des Performances Caractéristiques du Système**

### **Fractionnaire de Bagley-Torvik**

IV.1 Introduction	56
IV.2 Solution de l'équation générale de Bagley Torvik	57
IV.3 Performances caractéristiques du système de Bagley Torvik	59
IV.3.1 Spécifications fréquentielles	59
IV.3.1.1 Facteur de qualité Q	61
IV.3.1.2 Facteur de résonance	62
IV.3.2 Spécifications temporelles	64
IV.3.2.1 Le dépassement D(%)	64
IV.3.2.2 Le temps de réponse Ts	65
IV.4 Conclusion	67

## **Chapitre V: Conception d'un Correcteur Proportionnel Integral Avec un**

### **Filtre d'Ordre Fractionnaire (PI-FF) pour le Systeme du**

### **Premier Ordre Avec Retard**

V.1 Introduction	68
V.2 Système générale de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire	68
V.2.1 Réglage des paramètres ( $m, \zeta$ ) du système général de Bagley-Torvik fractionnaire	68
V.3 Présentation de l'approche de conception du correcteur PI-FF	71
V.3.1 Formulation du problème	71
V.3.2 Méthode de conception du correcteur	72

V.4 Résultats de simulation	76
V.4.1 Exemple 1	76
V.4.1.1 Analyse de la stabilité	77
V.4.1.2 Réponses fréquentielles et temporelles	79
V.4.1.3 Signal de commande	81
V.4.1.4 Perturbation	82
V.4.1.5 Sensibilité	83
V.4.1.6 Robustesse	85
V.4.2 Exemple 2	87
V.4.2.1 Analyse de la stabilité	88
V.4.2.2 Réponses fréquentielles et temporelles	89
V.4.2.3 Signal de commande	92
V.4.2.4 Perturbation	93
V.4.2.5 Sensibilité	94
V.4.2.6 Robustesse	95
V.5 Conclusion	97
<b>Conclusion Générale</b>	98
<b>Références</b>	100
<b>Résumé</b>	
<b>Abstract</b>	

# Liste des figures

<i>Figure</i>		<i>page</i>
<b>I.1</b>	Amplitude de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.7}$ et de sa fonction rationnelle d'approximation.	<b>9</b>
<b>I.2</b>	Phase de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.7}$ et de sa fonction rationnelle de son d'approximation.	<b>10</b>
<b>I.3</b>	Amplitude du différentiateur d'ordre fractionnaire $s^{0.4}$ et de sa fonction rationnelle d'approximation.	<b>13</b>
<b>I.4</b>	Phase du différentiateur d'ordre fractionnaire $s^{0.4}$ et de sa fonction rationnelle de son d'approximation.	<b>13</b>
<b>I.5</b>	Réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire de l'équation. (I.39) pour différentes valeurs de m.	<b>16</b>
<b>I.6</b>	Réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (I.41).	<b>17</b>
<b>I.7</b>	Zone de stabilité d'un système fractionnaire d'ordre commensurable.	<b>19</b>
<b>I.8</b>	Système asservi à retour unitaire.	<b>21</b>
<b>I.9</b>	Tracé de Mikhailov généralisé modifié de $\psi(j\omega)$ pour $-\infty < \omega < +\infty$ .	<b>22</b>
<b>II.1</b>	Diagramme de commande à retour unitaire.	<b>24</b>
<b>II.2</b>	Diagrammes de Bode du correcteur CRONE idéal.	<b>25</b>
<b>II.3</b>	Représentation du gabarit vertical de T(s) dans le plan de Black.	<b>27</b>
<b>II.4</b>	Régulateur PID et $PI^\lambda D^\mu$ dans le plan $(\mu, \lambda)$ .	<b>29</b>
<b>II.5</b>	Réponse fréquentielle du correcteur avance de phase fractionnaire.	<b>30</b>
<b>III.1</b>	Système de commande à retour unitaire classique.	<b>37</b>
<b>III.2</b>	Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur classique PI (noir) et le correcteur $PI^\lambda$ fractionnaire pour les valeurs de $\lambda$ : $\lambda = 0,19$ (vert), $\lambda = 0,54$ (bleu) et $\lambda = 0,89$ (rouge).	<b>39</b>
<b>III.3</b>	Tracés des fonctions $\psi_1(j\omega)$ (ligne continue) et $\psi_2(j\omega)$ (ligne en pointillée) pour $-\infty < \omega < +\infty$ .	<b>41</b>
<b>III.4</b>	Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $C^F(s)G(s)$ (bleu) et $C(s)G(s)$ (rouge).	<b>42</b>
<b>III.5</b>	Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur	<b>43</b>

	PI <sup>0.88</sup> (rouge) et avec le correcteur PI classique (noir).	
<b>III.6</b>	Signal de commande du système de commande avec les correcteurs PI <sup>0.88</sup> (rouge) et PI classique (bleu).	<b>44</b>
<b>III.7</b>	Système de commande avec le signal de perturbation.	<b>45</b>
<b>III.8</b>	Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec les correcteurs PI <sup>0.88</sup> (rouge) et PI classique (bleu).	<b>45</b>
<b>III.9</b>	Système de commande avec la perturbation externe.	<b>46</b>
<b>III.10</b>	Tracé de Bode de la sensibilité $S(j\omega)$ du système de commande avec les correcteurs PI <sup>0.88</sup> (rouge) et PI classique (bleu).	<b>47</b>
<b>III.11</b>	Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur classique PI (noir) et le correcteur PI <sup><math>\lambda</math></sup> fractionnaire pour les valeurs de $\lambda$ : $\lambda = 0,19$ (vert), $\lambda = 0,47$ (bleu) et $\lambda = 0,93$ (rouge).	<b>48</b>
<b>III.12</b>	Tracés des fonctions $\psi_1(j\omega)$ (rouge) et $\psi_2(j\omega)$ (bleu) pour $-\infty < \omega < +\infty$ .	<b>50</b>
<b>III.13</b>	Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $C_F(s)G(s)$ (bleu) et $C(s)G(s)$ (rouge).	<b>51</b>
<b>III.14</b>	Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur PI <sup>0.16</sup> (rouge) et avec le correcteur PI classique (noir).	<b>52</b>
<b>III.15</b>	Signal de commande du système de commande avec les correcteurs PI <sup>0.16</sup> (rouge) et PI classique (bleu).	<b>53</b>
<b>III.16</b>	Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec les correcteurs PI <sup>0.16</sup> (rouge) et PI classique (bleu).	<b>54</b>
<b>III.17</b>	Tracé de Bode de la sensibilité $S(j\omega)$ du système de commande avec les correcteurs PI <sup>0.16</sup> (rouge) et PI classique (bleu).	<b>55</b>
<b>IV.1</b>	Réponses indicielles pour $m = 0.87$ et $\zeta = 0.15$ (noir), $\zeta = 0.5$ (rouge), $\zeta = 0.85$ (bleu).	<b>58</b>
<b>IV.2</b>	Réponses indicielles pour $\zeta = 0.72$ et $m = 1.56$ (noir), $m = 1.12$ (rouge), $m = 0.78$ (bleu).	<b>59</b>
<b>IV.3</b>	Tracé de Bode pour $m = 1.20$ et $\zeta = 0.05$ (noir), $\zeta = 0.41$ (rouge), $\zeta = 0.92$ (bleu).	<b>60</b>
<b>IV.4</b>	Tracé de Bode pour $\zeta = 0.17$ et $m = 0.23$ (noir), $m = 0.86$ (rouge), $m = 1.92$ (bleu).	<b>61</b>
<b>IV.5</b>	Tracé du facteur de qualité $Q$ en fonction de $\zeta$ .	<b>62</b>
<b>IV.6</b>	Tracé du facteur de résonance $M_r$ en fonction de $m$ pour $\zeta = 0.1$ (noir), $\zeta = 0.27$ (rouge), $\zeta = 0.9$ (bleu).	<b>63</b>
<b>IV.7</b>	Tracé du facteur de résonance $M_r$ en fonction de $\zeta$ pour $m = 0.1$ (noir), $m = 0.4$	

	(rouge), $m = 1.9$ (bleu) et $m = 1$ (vert).	<b>63</b>
<b>IV.8</b>	Tracé du dépassement $D(\%)$ en fonction de $m$ pour $\zeta = 0.1$ (noir), $\zeta = 0.2$ (rouge), $\zeta = 0.45$ (bleu).	<b>64</b>
<b>IV.9</b>	Tracé du dépassement $D(\%)$ en fonction de $\zeta$ pour $m = 0.3$ (noir), $m = 0.8$ (rouge), $m = 1.4$ (bleu) et $m = 1$ (vert).	<b>65</b>
<b>IV.10</b>	Tracé du temps de réponse $T_s$ en fonction de $m$ pour $\zeta = 0.5$ (noir), $\zeta = 0.7$ (rouge), $\zeta = 0.9$ (bleu).	<b>66</b>
<b>IV.11</b>	Tracé du temps de réponse $T_s$ en fonction de $\zeta$ pour $m = 0.2$ (noir), $m = 0.4$ (rouge), $m = 1.4$ (bleu) et $m = 1$ (vert).	<b>66</b>
<b>V.1</b>	Réponses indicielles pour $\omega_n = 1$ et différents couples de paramètres $(m, \zeta)$ (1, 0.452) (noir), (0.35, 0.30835) (rouge), (0.85, 0.37525) (bleu).	<b>69</b>
<b>V.2</b>	Réponses indicielles pour $\omega_n = 1$ et différents couples de paramètres $(m, \zeta)$ (0.948, 0.95) (noir), (0.925, 0.75) (rouge), (0.88345, 0.55) (bleu).	<b>70</b>
<b>V.3</b>	Système de commande avec retour unitaire.	<b>71</b>
<b>V.4</b>	Tracés des fonctions $\psi_1(j\omega)$ (rouge) et $\psi_2(j\omega)$ (bleu).	<b>78</b>
<b>V.5</b>	Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$ (rouge) et $C^F(s)G(s)$ (bleu).	<b>79</b>
<b>V.6</b>	Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ (bleu).	<b>80</b>
<b>V.7</b>	Signal de commande du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ (bleu).	<b>82</b>
<b>V.8</b>	Système de commande avec le signal de perturbation.	<b>82</b>
<b>V.9</b>	Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ (bleu).	<b>83</b>
<b>V.10</b>	Système de commande avec une perturbation externe.	<b>83</b>
<b>V.11</b>	Tracés de Bode de la sensibilité $S(j\omega)$ du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire (bleu).	<b>85</b>
<b>V.12</b>	Tracé des variations de $D$ en fonction de $T$ et $K$ du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ (bleu).	<b>86</b>
<b>V.13</b>	Tracé des variations de $T_s$ en fonction de $T$ et $K$ du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ (bleu).	<b>86</b>

<b>V.14</b>	Tracés des fonctions $\psi_1(j\omega)$ (rouge) et $\psi_2(j\omega)$ (bleu).	<b>89</b>
<b>V.15</b>	Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$ (rouge) et $C_F(s)G(s)$ (bleu).	<b>90</b>
<b>V.16</b>	Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur $PID^{\mu}$ (bleu).	<b>91</b>
<b>V.17</b>	Signal de commande du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur $PID^{\mu}$ (bleu).	<b>93</b>
<b>V.18</b>	Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur $PID^{\mu}$ (bleu).	<b>94</b>
<b>V.19</b>	Tracés de Bode de la sensibilité $S(j\omega)$ du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur $PID^{\mu}$ fractionnaire (bleu).	<b>95</b>
<b>V.20</b>	Tracé des variations de D en fonction de T et K du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur $PID^{\mu}$ (bleu).	<b>96</b>
<b>V.21</b>	Tracé des variations de $T_s$ en fonction de T et K du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur $PID^{\mu}$ (bleu).	<b>96</b>

# *Liste des Tableaux*

<i>Tableau</i>		<i>page</i>
<b>III.1</b>	Performances du système de commande avec les correcteurs $PI^{0.88}$ et $PI$ .	<b>43</b>
<b>III.2</b>	Performances du système de commande avec les correcteurs $PI^{0.16}$ et $PI$ .	<b>52</b>
<b>V.1</b>	Résultats des spécifications de conception $\omega_c$ et $\varphi_m$ .	<b>80</b>
<b>V.2</b>	Caractéristiques de performance des correcteurs $PI$ - $FF$ et $PI^\lambda D^\mu$ .	<b>81</b>
<b>V.3</b>	Résultats des spécifications de conception $\omega_c$ et $\varphi_m$ .	<b>91</b>
<b>V.4</b>	Caractéristiques de performance des correcteurs $PI$ - $FF$ et $PID^\mu$ .	<b>92</b>

# Introduction Générale

---

### Introduction Générale

La fonction de transfert qui représente réellement le procédé industriel est pratiquement impossible à déterminer. Il est alors nécessaire d'utiliser un modèle qui soit le plus représentatif possible de ce procédé. Ainsi, pour simplifier les techniques de conception de commande des systèmes dynamiques, on considérera le modèle du premier ordre avec retard (First Order Plus Time Delay, FOPTD) qui permet la description d'une classe très large de processus industrielles. Le régulateur PID a été, pendant des décennies, le correcteur le plus utilisé dans la commande des processus industriels. De nombreuses règles de réglage des correcteurs PI et PID ont été suggérées dans la littérature pour la commande des systèmes dynamiques dont le modèle est le FOPTD [1]. Malgré toutes les techniques existantes pour le réglage des paramètres du correcteur PID, un travail de recherche continu et intensif est encore en cours pour le rehaussement de la qualité et l'amélioration des performances de la commande des systèmes.

Depuis les premiers travaux sur les dérivées d'ordre fractionnaire, il y a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée généralement par des mathématiciens. Récemment, les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire ont fait l'objet d'une grande attention, du point de vue aussi bien académique qu'industriel, à cause de leur grande flexibilité qui a permis de répondre à des exigences de plus en plus croissantes et défiantes dans les différents domaines de la physique et l'ingénierie [2-7]. Un domaine qui a beaucoup bénéficié des avantages de la théorie du calcul fractionnaire est la théorie de la commande, qui a été l'origine du domaine de recherche dit "commande d'ordre fractionnaire (Fractional Order Control - FOC)" [8-14], signifiant que les systèmes à commander et/ou les correcteurs à utiliser contiennent des opérateurs et/ou des systèmes d'ordre fractionnaire. Cependant, dans la pratique, il est plus raisonnable de considérer le correcteur d'ordre fractionnaire parce que les systèmes à commander ont été en général, déjà obtenus comme des systèmes classiques d'ordre entier.

C'était au début des années soixante que Manabe a introduit pour la première fois, l'intégrateur d'ordre fractionnaire dans les systèmes de commande à retour [15]. Depuis les années 90, on trouve des techniques bien établies dans la littérature entrant dans la synthèse et le réglage de correcteurs et d'algorithmes de la commande d'ordre fractionnaire. La Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE) a été introduite dans [8] dont la fonction de transfert en boucle ouverte autour de la fréquence du gain unité est définie comme étant la fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre fractionnaire. Le correcteur PID d'ordre fractionnaire noté  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , impliquant des actions d'intégration et de différenciation à des ordres non entiers a été introduit dans [16]. L'extension du correcteur PID au  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire donne plus de flexibilité dans la conception, l'amélioration des performances et de la robustesse des systèmes de commande,

parce que les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires. Depuis l'introduction du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'utilisation et le réglage de ce type de correcteur. Dans [17], on trouve un état de l'art du réglage et de l'utilisation du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire dans différents problèmes d'asservissement. D'autres structures de correcteurs d'ordre fractionnaire ont été aussi introduites dans la littérature; tels que le correcteur TID (tilt-integral-derivative), qui est un correcteur PID classique où l'action proportionnelle P est remplacée par un intégrateur d'ordre fractionnaire [18] et le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire, qui est une généralisation du correcteur classique avance-retard de phase avec des puissances réelles [19]. Récemment, le calcul d'ordre fractionnaire a investi tous les domaines de la commande classique tels que la commande optimale, la commande adaptative, la commande prédictive, la commande par retour d'état, la commande IMC ainsi que la commande  $H_\infty$  [20-26]. Malgré toutes les méthodes introduites, utilisant les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire dans le domaine de la commande des systèmes, un travail de recherche continu et intensif pour le développement de nouvelles techniques de commande d'ordre fractionnaire est toujours en cours pour le rehaussement et l'amélioration de la qualité des performances et de la robustesse des systèmes de commande.

### Objectif de la thèse

L'objectif principal de ce travail est la conception de correcteurs d'ordre fractionnaire dont la structure proportionnelle-intégrale-dérivée pour la commande des processus dont la fonction de transfert est un modèle du premier ordre avec retard, en utilisant les opérateurs et les systèmes fractionnaires afin d'améliorer les performances caractéristiques de ces systèmes de commande.

### Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée de la manière suivante:

**Le premier chapitre** présente les définitions et les principales propriétés des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent.

**Le second chapitre** est consacré à l'introduction de la commande d'ordre fractionnaire. Des méthodes de commande d'ordre fractionnaire bien établies dans la littérature, tels que le correcteur CRONE, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, le correcteur TID fractionnaire, le correcteur avance retard de phase fractionnaire, la commande adaptative fractionnaire, la méthode de stabilisation adaptative universelle fractionnaire ainsi que la Commande  $H_\infty$  fractionnaire, ont été présentées. Les techniques de conception de ces méthodes de commande fractionnaire ont aussi été exposées.

**Le troisième chapitre** présente une méthode de conception d'un correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire d'un système de commande à retour unitaire dont le processus est un système du premier ordre avec retard. La méthode de réglage proposée est basée uniquement sur le réglage de l'ordre d'intégration  $\lambda$  du correcteur fractionnaire  $PI^\lambda$ , en utilisant les paramètres du correcteur PI de ce même système de commande. L'ajustement de  $\lambda$  est réalisé par amélioration de l'erreur quadratique intégrale, le dépassement et le temps de réponse de la réponse indicielle du système de commande, par rapport à ces mêmes performances du système de commande avec le correcteur PI correspondant. L'efficacité de la conception proposée, par rapport à la conception classique correspondante, est présentée à travers les résultats de simulation d'exemples illustratifs.

**Le quatrième chapitre** est consacré à l'analyse des performances caractéristiques temporelle et fréquentielle du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire, en fonction des valeurs de l'ordre de différentiation  $m$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$ . Les performances caractéristiques obtenues ont été comparées avec celles du système de second ordre classique afin de trouver leur similitude et leur différence pour établir des limites lors de l'utilisation de ce type de systèmes comme modèle de référence dans la théorie de la commande des systèmes.

**Le cinquième et dernier chapitre** présente une méthode de conception d'un nouveau correcteur fractionnaire développé dans le cadre des travaux de cette thèse pour un système de commande à retour unitaire et dont le processus est un système du premier ordre avec retard. En effet sa structure, composée d'un correcteur PI classique en cascade avec un filtre fractionnaire (FF), est établie de telle sorte que la fonction de transfert en boucle fermée du système de commande à retour unitaire projetée, soit le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire. Les paramètres de ce correcteur PI-FF sont calculés analytiquement à partir des paramètres du modèle du premier ordre avec retard et de la fonction de transfert du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire. Des exemples illustratifs ont été présentés pour valider l'efficacité et la flexibilité du correcteur PI-FF proposé pour la commande des systèmes à retour unitaire dont le processus est un système du premier ordre avec retard. Pour montrer l'amélioration des performances caractéristiques apportées par le correcteur PI-FF proposé, les résultats de simulation obtenus ont été comparés à ceux obtenus en utilisant des correcteurs d'ordre fractionnaires  $PI^\lambda D^\mu$  et  $PID^\mu$  pour les mêmes systèmes de commande.

**Enfin une conclusion** est faite pour présenter les contributions et les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse ainsi que quelques perspectives de travaux futures.

Chapitre /

Opérateurs et Systèmes d'Ordre

Fractionnaire

---

## I.1 Introduction

La théorie qui est considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui actuellement connaît une grande popularité parmi les chercheurs dans les domaines des sciences et de l'ingénierie est le calcul d'ordre fractionnaire qui est une extension de la dérivée et de l'intégration aux ordres non entiers. Depuis sa naissance à la fin du 17<sup>ième</sup> siècle, le calcul fractionnaire a attiré l'attention de quelques célèbres mathématiciens tels que P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A. K. Grünwald (1867-1872) et A.V. Letnikov (1868-1872) [27]. Mais, il est resté un domaine inconnu jusqu'à la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle suite à son application dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie et au développement des outils informatiques qui ont donné la possibilité d'envisager des applications du calcul fractionnaire dans le domaine industriel. Le premier ouvrage dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974 par K.B. Oldham et J. Spanier [28]. Sur le plan mathématique, il faut citer l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichev [29] paru en 1993 et qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. De nos jours plusieurs chercheurs essaient d'appliquer le calcul d'ordre fractionnaire dans différents domaines d'ingénierie. Ainsi, l'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent tout en rappelant leurs définitions et leurs principales propriétés.

## I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire est une généralisation de l'opérateur intégral-différentielle à des ordres non entiers. Cet opérateur est défini comme suit [27]:

$${}_a D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & \Re(m) > 0, \\ 1 & \Re(m) = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-m} & \Re(m) < 0, \end{cases} \quad (I.1)$$

avec  $m$  est l'ordre de l'opération, généralement  $m \in \mathbb{C}$ ,  $a$  et  $t$  sont les limites de l'opération intégral-différentielle.

### I.2.1 Définitions

Il existe plusieurs définitions de la dérivée et de l'intégration d'ordre fractionnaire, et parmi elles on peut citer celle de Riemann-Liouville, de Caputo et de Grünwald-Leitnikov, qui sont les trois définitions les plus citées dans la littérature [27-29].

### I.2.1.1 Définition de Riemann-Liouville

#### I.2.1.1.1 Définition 1

Soit  $m \in \mathfrak{R}$  avec  $m > 0$ ,  $t_0 \in \mathfrak{R}$  et  $f(\cdot)$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty)$ .

L'intégrale d'ordre  $m$  de  $f(\cdot)$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par:

$${}^{\text{RL}}I_{t_0}^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.2})$$

avec  $t \geq t_0$  et  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy, x > 0 \quad (\text{I.3})$$

#### I.2.1.1.2 Définition 2

Soit  $m \in \mathfrak{R}$  avec  $m > 0$ ,  $n$  un entier positif tel que  $(n-1) < m < n$ ,  $t \in \mathfrak{R}$  et  $f(\cdot)$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty)$ . La dérivée d'ordre  $m$  de  $f(\cdot)$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par:

$${}^{\text{RL}}D_{t_0}^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.4})$$

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut être définie à partir de l'équation (I.2) comme suit:

$${}^{\text{RL}}D_{t_0}^m f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_{t_0}^{(n-m)} f(t) \right\} \quad (\text{I.5})$$

#### I.2.1.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par :

$${}_C D^m f(t) = I^{n-m} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{n-m-1}} d\tau \quad (\text{I.6})$$

où  $n$  est un nombre entier positif tel que  $(n-1) < m < n$  et  $f^{(n)}(\cdot)$  est la dérivée d'ordre  $n$  de la fonction  $f(\cdot)$ .

#### I.2.1.3 Définition de Grünwald-Leitnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $m \in \mathfrak{R}$  avec  $m > 0$  de Grünwald-Leitnikov (G-L) est donnée par :

$${}^{\text{GL}}D_{t_0}^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\left[ \frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{m}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I.7})$$

où  $[\cdot]$  dénote la partie entière d'un nombre réel,  $h$  est la période d'échantillonnage et les

coefficients  $\binom{m}{k}$  sont donnés par:

$$\binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1).\Gamma(m-k+1)} \quad (\text{I.8})$$

La définition de G-L de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}_{t_0}^{GL} I_t^m f(t) = {}_{t_0}^{GL} D_t^{-m} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{k=0}^{\left[ \frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{m}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I.9})$$

## I.2.2 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

### I.2.2.1 Transformée de Laplace de l'intégration d'ordre fractionnaire

La définition de Riemann-Liouville de l'intégration d'ordre fractionnaire d'ordre réel  $m$  positive de l'équation (I.2) peut être écrite comme une convolution des fonctions  $g(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1}$  et la fonction  $f(t)$  comme suit [28],[30] :

$$I^m f(t) = D^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} * f(t) \quad (\text{I.10})$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{m-1}$  est donnée par [31] :

$$G(s) = L\{t^{m-1}\} = \frac{\Gamma(m)}{s^{-m}} \quad (\text{I.11})$$

Alors, la transformé de Laplace de l'intégration d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville est :

$$L\{I^m[f(t)]\} = \left( \frac{1}{s^m} \right) F(s) \quad (\text{I.12})$$

La transformée de Laplace de l'intégration d'ordre fractionnaire définie par Gründwald-Leitnikov et Caputo est aussi donnée par l'équation (I.12) [28], [30].

### I.2.2.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire  $m > 0$  de Gründwald-Leitnikov est donné par [28], [30] :

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) \quad (\text{I.13})$$

## I.3 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

En général, l'intégration d'ordre fractionnaire représentée par la fonction de transfert  $H(s) = s^{-m}$ ,  $0 < m < 1$ , est approximée par une fonction rationnelle en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions  $G_h(s)$  est  $G_1(s)$  suivantes [32] :

$$\frac{1}{s^m} = \begin{cases} G_h(s) = \frac{1}{(1+Ts)^m}; \\ G_1(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^m; \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

où  $G_h(s)$  est l'approximation pour les hautes fréquences ( $\omega T \gg 1$ ) et  $G_l(s)$  est l'approximation pour les basses fréquences ( $\omega T \ll 1$ ) de l'intégration d'ordre fractionnaire.

Il existe différentes techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire. Parmi ces techniques on peut citer [32] :

- La méthode de Carlson
- La méthode de Matsuda
- La méthode d'Oustaloup
- La méthode de Charef (Fonction de singularité)

Dans le reste de cette section, on va présenter la méthode d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire de Charef, dite la méthode de la fonction singulière [33].

### I.3.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

#### I.3.1.1 Technique d'approximation

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (\text{I.15})$$

avec  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  est un nombre positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit [34]:

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (\text{I.16})$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_I(s) \quad (\text{I.17})$$

où  $K_I = (1/\omega_c^m)$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure du PPF, qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  par la relation  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{(y/10m)} - 1}$  avec  $y$  est l'erreur maximale permise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur de l'équation (I.15) et le PPF de l'équation (I.16).

Dans le but de représenter le PPF de l'équation (I.16), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer par une fonction rationnelle, sa fonction de transfert irrationnelle [33-34]. La méthode

d'approximation consiste à approximer la pente de  $-20m$  dB/dec sur le tracé de Bode par une alternance de pente  $-20$  dB/dec et  $0$  dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan  $s$  telle que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ . D'où l'approximation suivante :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.18)$$

Utilisant une méthode graphique, les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max} = 100\omega_h$ . Le nombre de pôles de l'approximation  $N$  est donné par [33] :

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{P_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (I.19)$$

L'arrangement des singularités ( pôles-zéros ) est établi selon les deux progressions géométriques  $p_i = (ab)^i p_0$  et  $z_i = (ab)^i a p_0$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N$ . Les paramètres  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, dont les expressions en fonction de  $y$  et  $m$  sont données par  $a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}$  et  $b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$ . Le premier pôle  $p_0$  et le premier zéro  $z_0$  sont donnés par  $p_0 = \omega_c \sqrt{b}$  et  $z_0 = a p_0$ . Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fonctions élémentaires comme suit :

$$G(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (I.20)$$

où les coefficients  $h_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N$  sont les résidus, déterminés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j p_0}\right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)}\right)} \quad (I.21)$$

### I.3.1.2 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Soit l'intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

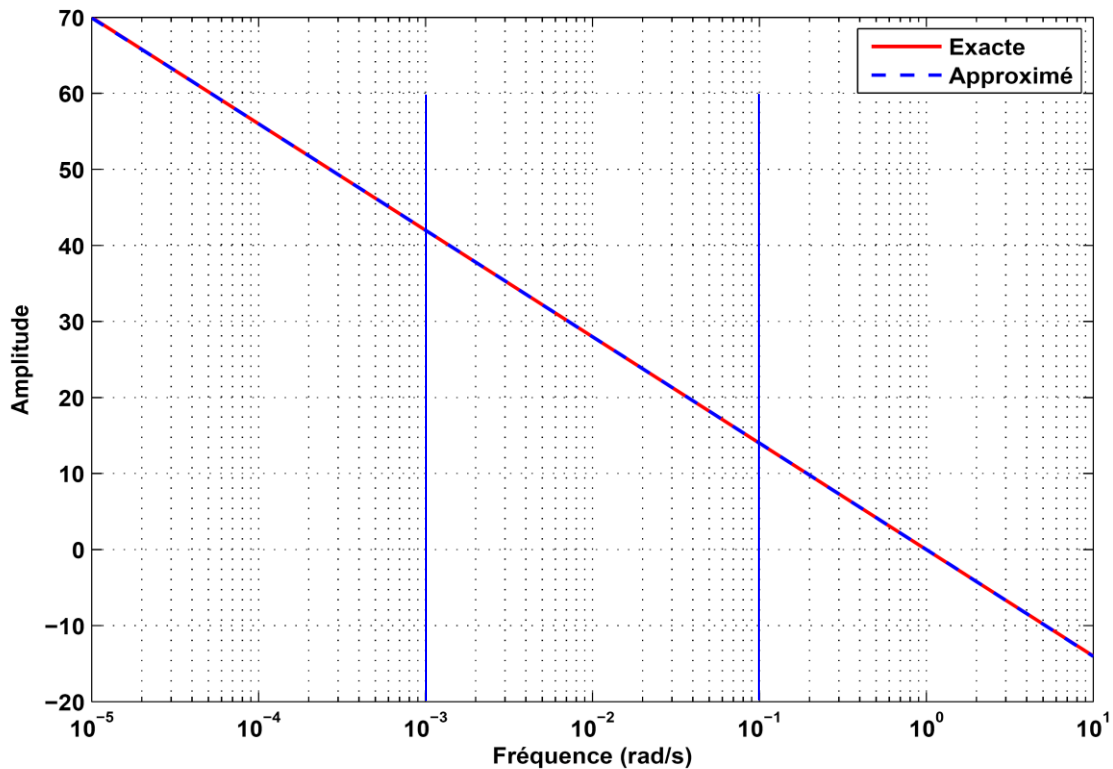
$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.7}} \quad (\text{I.22})$$

On veut approximer cet opérateur par une fonction rationnelle dans la bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h] = [0.001 \text{ rad/s}, 0.1 \text{ rad/s}]$  avec une erreur d'approximation  $y=1 \text{ dB}$ . Alors, le modèle PPF correspondant à cet intégrateur d'ordre fractionnaire est donné par :

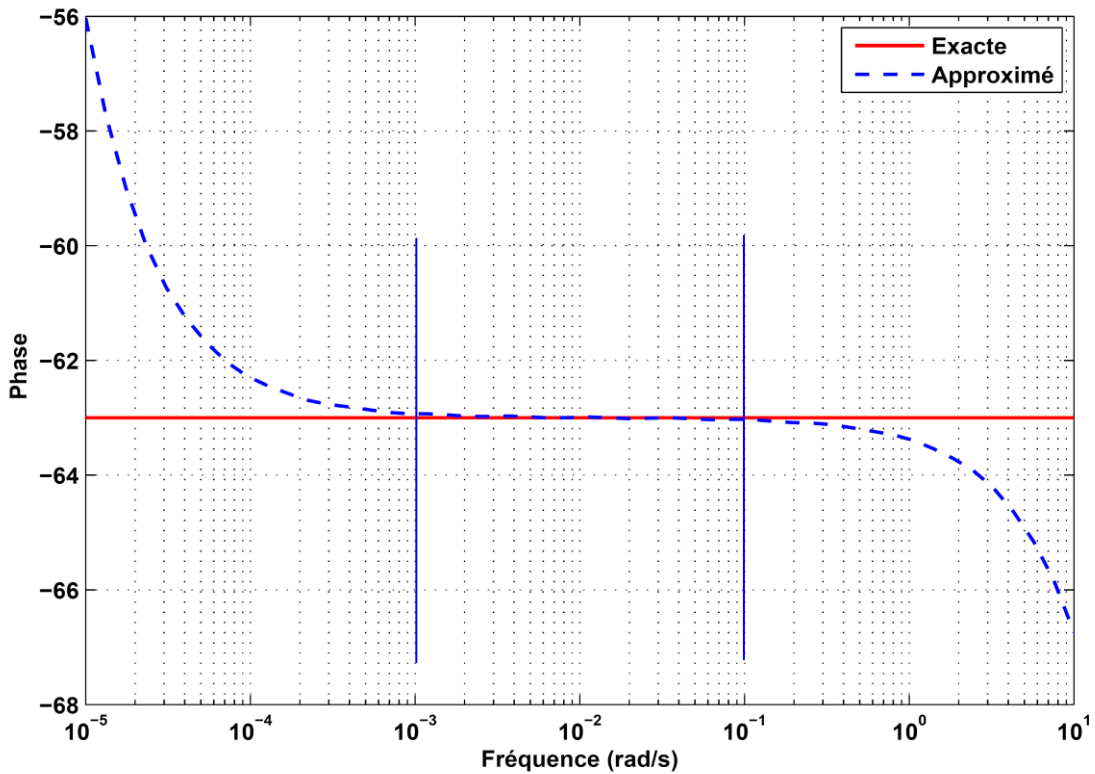
$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^{0.7}} \quad (\text{I.23})$$

où la fréquence  $\omega_c = 0.0018\omega_b = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$  et  $K_I = 1.0503 \cdot 10^4$ .

Les paramètres d'approximation  $\omega_{\max}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  du PPF par une fonction rationnelle sont  $\omega_{\max} = 10 \text{ rad/s}$ ,  $a = 2.1544$ ,  $b = 1.3895$ ,  $p_0 = 2.1218 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$ ,  $z_0 = 4.5712 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$  et  $N = 15$ . Alors, les pôles et les zéros de l'approximation sont  $p_i = 2.1218 \cdot 10^{-6} \cdot (2.9936)^i$  ( $i = 0, 1, \dots, 15$ ) et  $z_i = 4.5712 \cdot 10^{-6} \cdot (2.9936)^i$  ( $i = 0, 1, \dots, 14$ ). Les tracés de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire et de sa fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans les figures (I.1) et (I.2).



**Figure (I.1) :** Amplitude de l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.7}$  et de sa fonction rationnelle d'approximation



**Figure (I.2) :** Phase de l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.7}$  et de sa fonction rationnelle de son d'approximation

On note que dans la bande de fréquence  $[0.001 \text{ rad/s}, 0.1 \text{ rad/s}]$  les tracés de Bode de la fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.7}$  et de son approximation sont bien superposés.

### I.3.2 Approximation du différentiateur d'ordre fractionnaire

#### I.3.2.1 Technique d'approximation

La fonction de transfert du différentiateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (\text{I.24})$$

avec  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  : est un nombre positive tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [34]:

$$G(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (\text{I.25})$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$G(s) = K_D \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m = G_D(s) \quad (I.26)$$

où  $K_D = \omega_c^m$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure du ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  par la relation  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{(y/10m)} - 1}$  avec  $y$  est l'erreur maximale permise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur de l'équation (I.24) et le ZPF de l'équation (I.25).

Dans le but de représenter aussi le ZPF de l'équation (I.25), et par conséquent le différentiateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer par une fonction rationnelle, sa fonction de transfert irrationnelle [34]. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20m dB/dec sur le tracé de Bode par une alternance de pente 20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de zéros et de pôles sur l'axe réel négative du plan  $s$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 \dots z_{N-1} < p_N$ . D'où l'approximation suivante :

$$G(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (I.27)$$

Utilisant une méthode graphique semblable à celle de la section I.3.1.1, les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  de l'approximation s'avèrent aussi sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max} = 100\omega_h$ . Le nombre de pôles de l'approximation  $N$  est donné par [34] :

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{z_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (I.28)$$

L'arrangement des singularités ( pôles-zéros ) est établi selon les deux progressions géométriques  $z_i = (ab)^i z_0$  et  $p_i = (ab)^i a z_0$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N$ . Les paramètres  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports

de position, dont les expressions en fonction de  $y$  et  $m$  sont données par  $a = 10^{\left( \frac{y}{10(1-m)} \right)}$

et  $b = 10^{\left( \frac{y}{10m} \right)}$ . Le premier zéro  $z_0$  et le premier pôle  $p_0$  sont donnés par  $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$  et  $p_0 = a z_0$ .

Pour des raisons concernant la réalisation de  $G(s)$ , on va décomposer  $\frac{G(s)}{s}$  en somme de fonctions élémentaires comme suit :

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} = \frac{G_0}{s} + \sum_{i=0}^N \frac{g_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.29})$$

où  $G_0 = K_D$  et les coefficients  $g_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N$ , sont les résidus qui sont déterminés par :

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{\left(- (ab)^i az_0\right) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (\text{I.30})$$

Alors, on a :

$$G(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.31})$$

### I.3.2.2 Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Soit le différentiateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$G_D(s) = s^{0.4} \quad (\text{I.32})$$

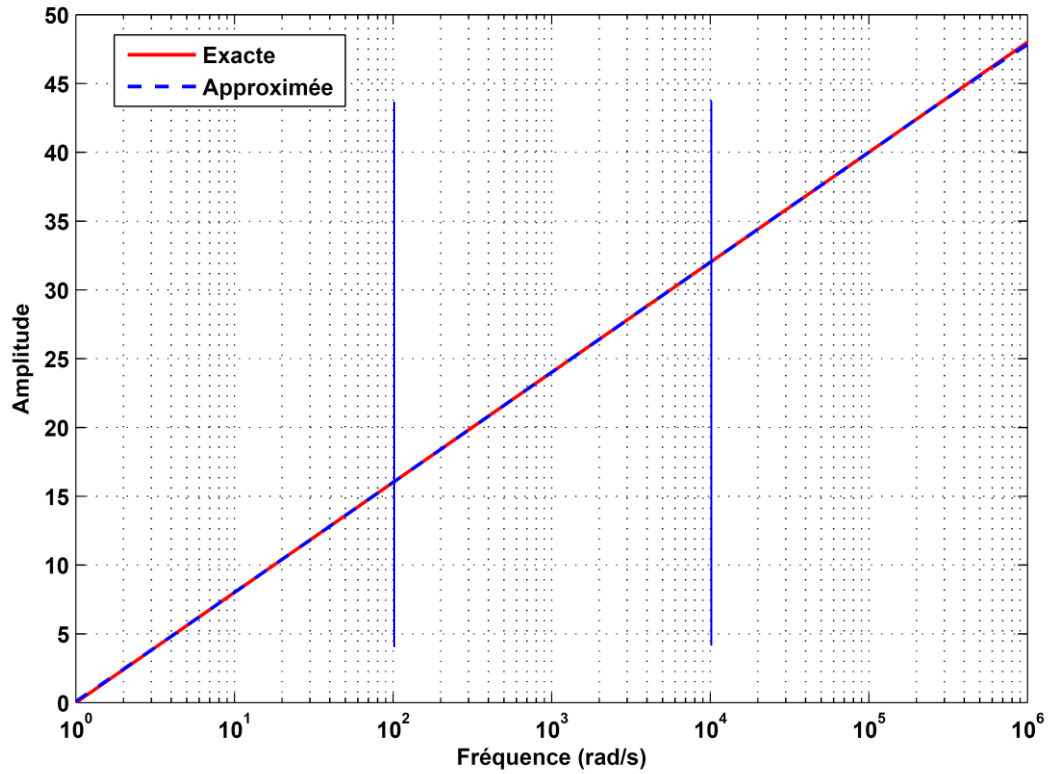
On veut approximer cet opérateur par une fonction rationnelle dans la bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h] = [100 \text{ rad/s}, 10000 \text{ rad/s}]$  avec une erreur d'approximation  $y=1 \text{ dB}$ . Alors, le modèle ZPF correspondant à ce différentiateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^{0.4} \quad (\text{I.33})$$

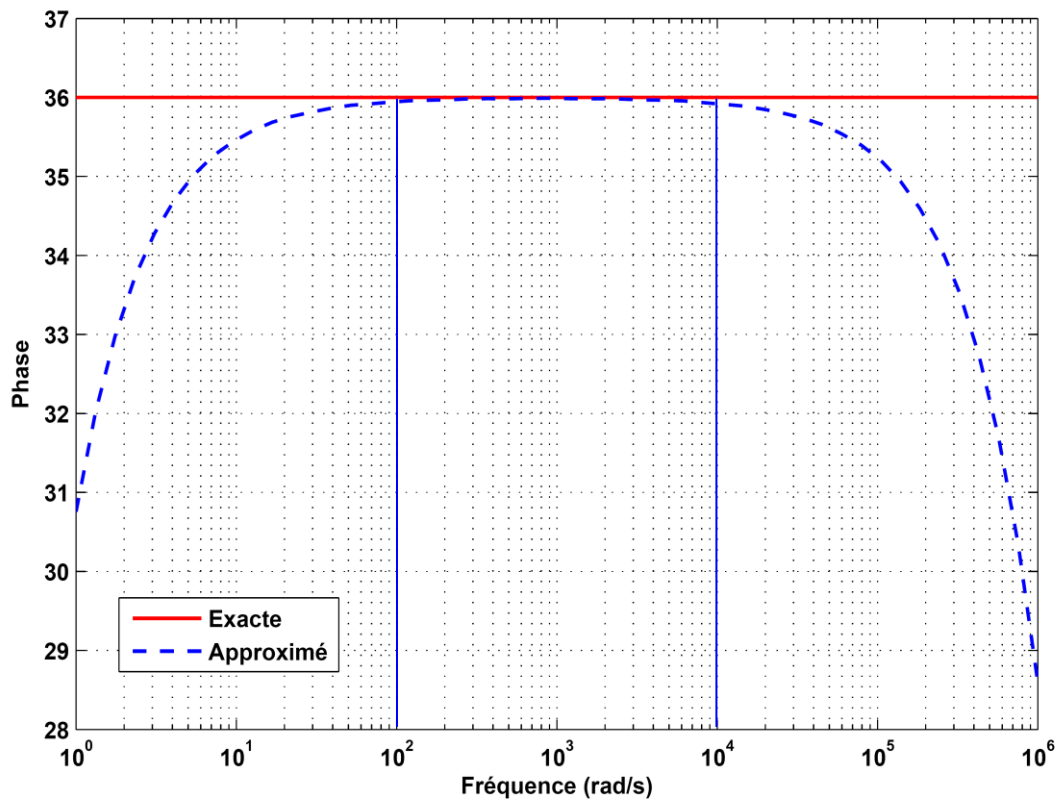
où la fréquence  $\omega_c = 0.0024\omega_b = 0.24 \text{ rad/s}$  et  $K_D = 1$ .

Les paramètres d'approximation  $\omega_{\max}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  du ZPF par une fonction rationnelle sont  $\omega_{\max} = 10^6 \text{ rad/s}$ ,  $a = 1.4678$ ,  $b = 1.7783$ ,  $p_0 = 0.4696 \text{ rad/s}$ ,  $z_0 = 40.3199 \text{ rad/s}$  et  $N = 16$ .

Alors, les pôles et les zéros de l'approximation sont  $p_i = 0.4696 * (2.6102)^i$  et  $z_i = 0.3199 * (2.6102)^i$  pour  $i = 0, 1, \dots, 16$ . Les tracés de Bode du différentiateur d'ordre fractionnaire et de sa fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans les figures (I.3) et (I.4).



**Figure (I.3) :** Amplitude du différentiateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  et de sa fonction rationnelle d'approximation



**Figure (I.4) :** Phase du différentiateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  et de sa fonction rationnelle de son d'approximation

Dans ce cas aussi, on note que dans la bande de fréquence [100 rad/s, 10000 rad/s], les tracés de Bode de la fonction de transfert du différentiateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  et de son approximation sont bien superposés.

#### I.4 Quelques propriétés de la dérivée et l'intégration d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [28]

- Si  $f(t)$  est une fonction analytique en  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^m f(t)$  est une fonction analytique en  $t$  et en  $m$ .
- Pour  $m = n$ , ou  $n$  est un entier, l'opération  $D^m f(t)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
- Pour  $m = 0$ , l'opération  $D^m f(t)$  est l'opérateur identité  $D^0 f(t) = f(t)$ .
- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires.

#### I.5 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Les tracés de Bode de beaucoup de processus physiques, tels que les lignes de transmission électrique, mécanique des fluides, modélisation des signaux de la parole, modélisation de l'interface électrode-tissu cardiaque, propagation des ondes sonores dans des matériaux rigides et poreux et la théorie de la viscoélasticité, ont été caractérisés par des pentes d'ordre fractionnaire. Pour représenter ce type de comportement de ces processus des modèles temporels régis par des équations différentielles d'ordre fractionnaire, ont été développés en se basant sur le concept de la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire [35].

##### I.5.1 Représentation par équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est un système décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [3]:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} e(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} e(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} e(t) \quad (I.34)$$

où  $e(t)$  et  $y(t)$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système linéaire d'ordre fractionnaire, les ordres des dérivées  $\alpha_i (0 \leq i \leq n)$  et  $\beta_j (0 \leq j \leq m)$  sont des nombres réels tels que  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ ,  $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$  et  $\alpha_n > \beta_m$  et les coefficients  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$  et  $b_j (j = 0, 1, \dots, m)$  sont des nombres réels. Quand les ordres des dérivées  $\alpha_i (0 \leq i \leq n)$  et  $\beta_j (0 \leq j \leq m)$  sont tous multiples du même nombre réel  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ , donc on a  $\alpha_i = i \cdot \alpha (0 \leq i \leq n)$  et  $\beta_j = j \cdot \alpha (0 \leq j \leq m)$  et  $m \leq n$ ; le système linéaire d'ordre fractionnaire est dit système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable. Alors, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.34) devient :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\alpha} e(t) \quad (\text{I.35})$$

### I.5.1.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.34) est donnée par la fonction suivante [3]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{\alpha_n s^{\alpha_n} + \alpha_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + \alpha_0 s^{\alpha_0}} \quad (\text{I.36})$$

Dans le cas d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable, la fonction de transfert de l'équation (I.36) sera :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (\text{I.37})$$

### I.5.1.2 Méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires

En utilisant la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire de Gröndwald-Leitnikov, la solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.34) est donnée sous la forme suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \left[ \sum_{l=0}^m \left( \frac{b_l}{h^{\beta_l}} \right) \sum_{j=0}^N w_j^{\beta_l} e(t - jh) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \right) \sum_{j=1}^N w_j^{\alpha_i} y(t - jh) \right] \quad (\text{I.38})$$

avec  $w_0^m = 1$  et  $w_j^m = \left(1 - \frac{m+1}{j}\right) w_{j-1}^m$ ,  $h$  est la période d'échantillonnage (le pas de calcul)

supposée très petite et  $N = \text{partie entière} \left( \frac{t_0}{h} \right)$  où  $t_0$  est l'horizon de calcul. En se basant sur la

relation de l'équation (I.38), la solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire sous MATLAB est donnée par la fonction `fode_sol` comme suit [3] :

```
function y=fode_sol(a,n_a,b,n_b,e,t)
h=t(2)-t(1); D=sum(a./[h.^na]); nT=length(t);
vec=[na nb]; W=[]; D1=b(:)/h.^nb(:); nA=length(a);
y1=zeros(nT,1); W=ones(nT,length(vec));
for j=2:nT, W(j,:)=W(j-1,:).*(1-(vec+1)/(j-1)); end
for i=2:nT, A=[y1(i-1:-1:1)]*W(2:i,1:nA); y1(i)=(e(i)-sum(A.*a./[h.^na]))/D; end
for i=2:nT, y(i)=(W(1:i,nA+1:end)*D1)'*[y1(i:-1:1)]; end
```

### I.5.1.3 Exemples illustratifs

#### Exemple 1

Soit un système d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$\frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad (\text{I.39})$$

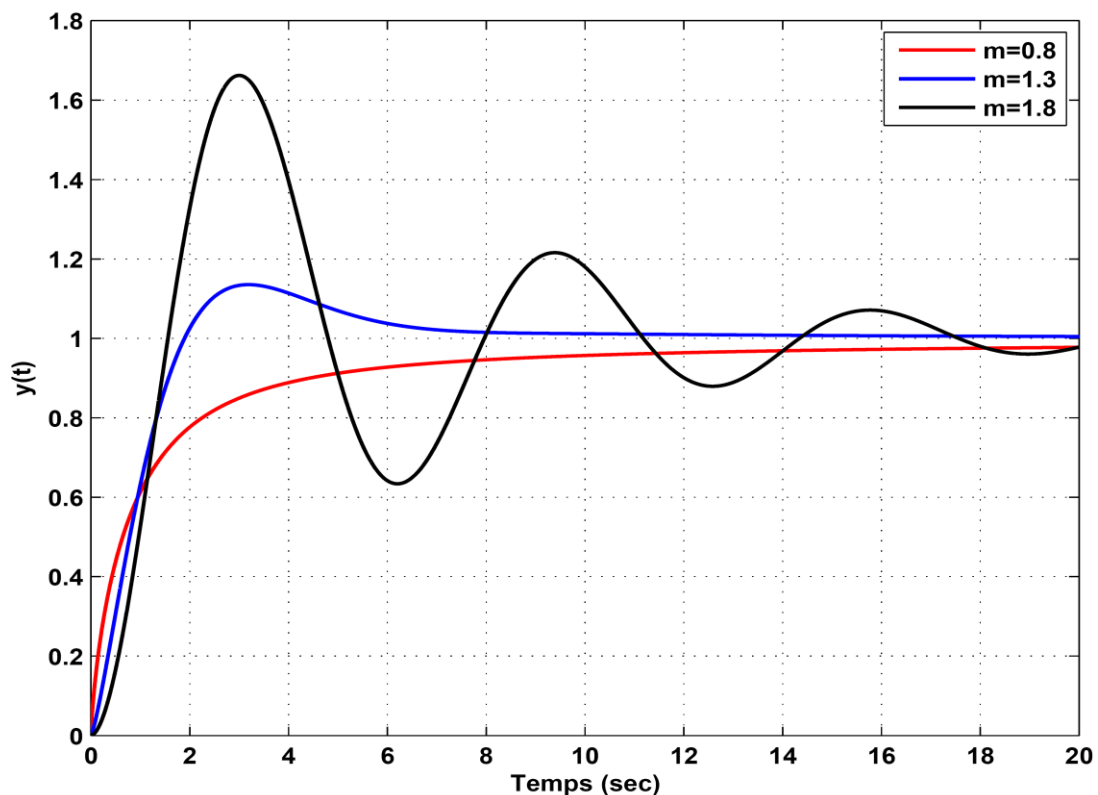
Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^m + 1} \quad (\text{I.40})$$

En utilisant la fonction `fode_sol` et pour une entrée  $e(t)$  l'échelon unité, la solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.39) sous MATLAB est donnée par le programme suivant :

```
h = 0.001; t=0:h:20; e=ones(size(t));  
b=[1]; n_b=[0]; a=[1, 1]; n_a=[alpha, 0];  
y=fode_sol(a,n_a,b,n_b,e,t);  
plot(t,y)
```

La réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.39) pour différentes valeurs du paramètre  $m$  est donnée dans la figure (I.5).



**Figure (I.5) :** Réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire de l'équation. (I.39) pour différentes valeurs de  $m$

**Exemple 2**

Soit un système d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$\frac{d^{2.53}y(t)}{dt^{2.53}} + 3\frac{d^{1.47}y(t)}{dt^{1.47}} + 4\frac{d^{0.29}y(t)}{dt^{0.29}} + 2y(t) = \frac{d^{1.72}e(t)}{dt^{1.72}} + 2\frac{d^{0.54}e(t)}{dt^{0.54}} + e(t) \quad (\text{I.41})$$

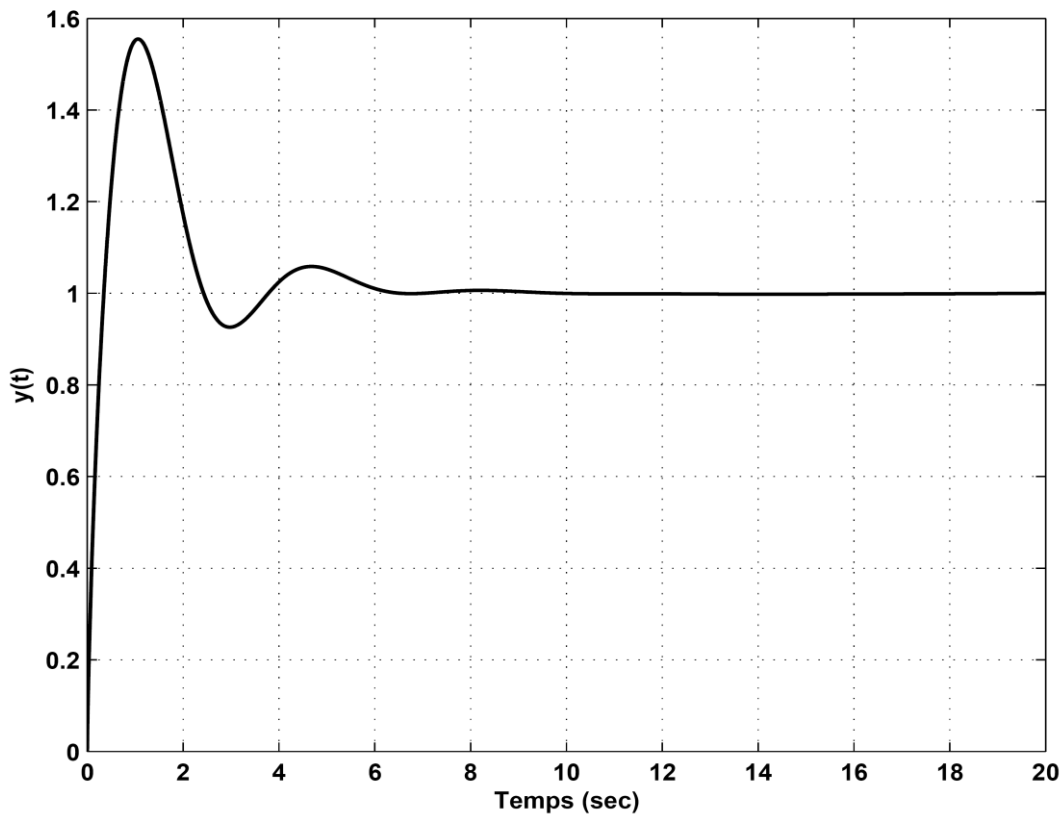
Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{s^{1.72} + 2s^{0.54} + 1}{s^{2.53} + 3s^{1.47} + 4s^{0.29} + 2} \quad (\text{I.42})$$

En utilisant la fonction `fode_sol` et pour une entrée  $e(t)$  l'échelon unité, la solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.41) sous MATLAB est donnée par le programme suivant :

```
h = 0.001; t=0:h:20; e=ones(size(t));  
b=[1,2,1]; n_b=[1.72,0.54,0]; a=[1,3,4,2]; n_a=[2.53,1.47,0.29,0];  
y=fode_sol(a,n_a,b,n_b,e,t);  
plot(t,y)
```

La réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.41) est donnée dans la figure (I.6).



**Figure (I.6) :** Réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire de l'équation. (I.41)

## I.5.2 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

### I.5.2.1 Définition

La représentation d'état d'un système linéaire d'ordre fractionnaire est donnée comme suit [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \frac{d^{\alpha_1} x_1(t)}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2(t)}{dt^{\alpha_2}} \\ \vdots \\ \frac{d^{\alpha_n} x_n(t)}{dt^{\alpha_n}} \end{array} \right] = Ax(t) + Be(t) \\ y(t) = Cx(t) + De(t) \end{array} \right. \quad (I.43)$$

où  $e(t)$  et  $y(t)$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système linéaire d'ordre fractionnaire,  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$  est le pseudo vecteur d'état, les ordres des dérivées  $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$  sont des nombres réels tel que  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1$ ,  $A$  est la matrice d'état,  $B$  est la matrice d'entrée,  $C$  est la matrice de la sortie et  $D$  est la matrice de transmission directe. Ces matrices sont de dimensions appropriées. Quand le système linéaire d'ordre fractionnaire est un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable la représentation d'état de l'équation (I.43) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \{x(t)\} = \left[ \begin{array}{c} \frac{d^\alpha x_1(t)}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha x_2(t)}{dt^\alpha} \\ \vdots \\ \frac{d^\alpha x_n(t)}{dt^\alpha} \end{array} \right] = Ax(t) + Be(t) \\ y(t) = Cx(t) + De(t) \end{array} \right. \quad (I.44)$$

### I.5.2.2 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert

La fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire représenté par l'équation (I.43) est donnée par la fonction suivante [3]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = C(s^{[\alpha]}I - A)^{-1}B + D \quad (I.45)$$

où  $s^{[\alpha]}I = \text{diag}[s^{\alpha_1} \ s^{\alpha_2} \ \dots \ s^{\alpha_n}]$ . Dans le cas d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable, la fonction de transfert de l'équation (I.44) sera :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D \quad (I.46)$$

## I.6 Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire

### I.6.1 Stabilité

La théorie conventionnelle pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires classiques ne peut pas être utilisée directement pour l'analyse des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire dû aux puissances réelles des dérivées. Alors, des théorèmes d'analyse de la stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ont été établis dans les deux dernières décades [36-37].

#### I.6.1.1 Stabilité des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable

##### Théorème :

Le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.35) ou décrit par l'équation d'état de l'équation (I.44) est stable si et seulement si [36]:

$$\text{Arg}(\lambda_i) > \frac{\pi}{2} \alpha \quad (\text{I.47})$$

où  $0 < \alpha < 1$  et, pour  $1 \leq i \leq n$ , les  $\lambda_i$  sont les racines du polynôme  $\sum_{i=0}^n a_i q^i$  lorsque  $q = s^\alpha$  dans

le dénominateur de l'équation (I.37) ou les valeurs propres de la matrice A de la représentation d'état de l'équation (I.44).

Figure (I.7) montre la zone de stabilité d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable. De cette figure, on note que pour des  $\lambda_i$  avec des parties réelles positives, le système fractionnaire est stable.

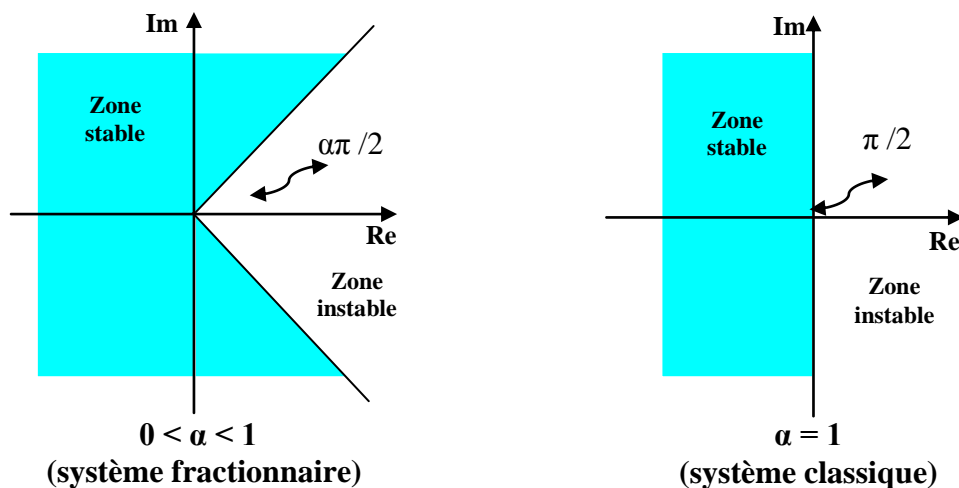


Figure (I.7) : Zone de stabilité d'un système fractionnaire d'ordre commensurable

### I.6.1.2 Stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire généralisés

Soit un système linéaire d'ordre fractionnaire avec des retards et décrit par la fonction de transfert suivante [37]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{q_0(s) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j(s) \exp(-s^r \tau_j)}{p_0(s) + \sum_{i=1}^{n_1} p_i(s) \exp(-s^r h_i)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{I.48})$$

où  $0 < r < 1$ , les retards  $h_i$  et  $\tau_i$  sont des nombres réels positifs tel que  $h_{n_1} > h_{n_1-1} > \dots > h_1$ ;  $\tau_{n_2} > \tau_{n_2-1} > \dots > \tau_1$  et les polynômes de degré fractionnaires  $p_i(s)$  et  $q_j(s)$  avec des coefficients réels sont de la forme suivante :

$$p_i(s) = \sum_{k=0}^n a_{ik} s^{\alpha_k} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n_1 \quad (\text{I.49})$$

$$q_j(s) = \sum_{k=0}^m b_{jk} s^{\beta_k} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n_2 \quad (\text{I.50})$$

où les ordres  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont des nombres réels positifs tels que  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0 = 0$  ;

$\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$  et  $a_{0n} \neq 0$  et  $b_{0m} \neq 0$ .

Le quasi-polynôme caractéristique du système fractionnaire de l'équation (I.48) est donné par :

$$D(s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{n_1} p_i(s) \exp(-s^r h_i) \quad (\text{I.51})$$

Le tracé de Nyquist du quasi-polynôme caractéristique  $D(s = j\omega)$ , pour  $0 \leq \omega < +\infty$ , est appelé le tracé de Mikhailov généralisé [37].

On introduit la fonction  $\psi(s)$  comme suit [37] :

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{\omega_r(s)} \quad (\text{I.52})$$

où la fonction  $\omega_r(s)$  est un polynôme de la forme suivante :

$$\omega_r(s) = a_{0n} (s + c)^{\alpha_n} \quad (\text{I.53})$$

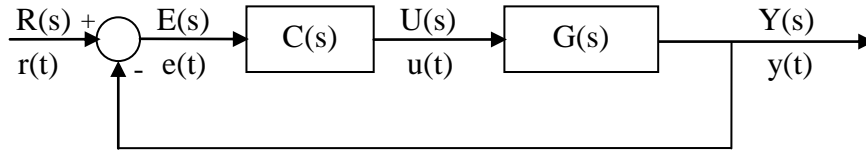
avec  $c$  est un nombre réel positif pour garantir la stabilité du polynôme  $\omega_r(s)$  et  $a_{0n}$  est le coefficient de  $s^{\alpha_n}$  du polynôme  $p_0(s)$  de l'équation (I.49). Le tracé de Nyquist de la fonction  $\psi(s = j\omega)$ , pour  $-\infty < \omega < +\infty$ , est appelé le tracé de Mikhailov généralisé modifié [37].

**Théorème :**

Le système linéaire d'ordre fractionnaire dont le quasi-polynôme caractéristique est donné par l'équation (I.51) est stable si et seulement si le tracé de Mikhailov généralisé modifié de  $\psi(j\omega)$  n'encercle pas l'origine du plan complexe de Nyquist pour  $-\infty < \omega < +\infty$ .

**I.6.1.3 Exemple**

La figure (I.8) montre un système asservi à retour unitaire, où  $G(s)$  est la fonction de transfert du processus et  $C(s)$  est la fonction de transfert du correcteur.



**Figure (I.8):** Système asservi à retour unitaire

Le processus est un modèle du premier ordre avec retard et dont la fonction de transfert  $G(s)$  est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + Ts} = \frac{e^{-0.01s}}{1 + 0.4s} \quad (\text{I.54})$$

Le correcteur est un correcteur fractionnaire  $PI^\alpha$  dont la fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\alpha} = 2.1204 + \frac{23.4516}{s^{0.8731}} \quad (\text{I.55})$$

La fonction de transfert en boucle fermée de ce système asservi est donnée par :

$$G_{BF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(2.1204s^{0.8731} + 23.4516)e^{-0.01s}}{0.4s^{1.8731} + s^{0.7831} + (2.1204s^{0.8731} + 23.4516)e^{-0.01s}} \quad (\text{I.56})$$

Le quasi-polynôme caractéristique de ce système asservi est donné par le dénominateur de la fonction de transfert de l'équation (I.56) comme suit :

$$D(s) = 0.4s^{1.8731} + s^{0.7831} + (2.1204s^{0.8731} + 23.4516)e^{-0.01s} \quad (\text{I.57})$$

Pour étudier la stabilité de ce système asservi on utilise le théorème de stabilité de la section (I.6.1.3) précédente. Alors, la fonction  $\psi(s)$  est donnée comme suit :

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{\omega_r(s)} = \frac{0.4s^{1.8731} + s^{0.7831} + (2.1204s^{0.8731} + 23.4516)e^{-0.01s}}{0.4(s+1)^{1.8731}} \quad (\text{I.58})$$

La figure (I.9) présente le tracé de Mikhailov généralisé modifié de la fonction  $\psi(j\omega)$ ,  $-\infty < \omega < +\infty$ . De cette figure, on note que le tracé de Mikhailov généralisé modifié de la fonction  $\psi(j\omega)$  n'encercle pas l'origine du plan de Nyquist. Alors, le système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert du processus est  $G(s)$ , est un modèle du premier ordre avec retard, et le correcteur  $C(s)$  est un correcteur fractionnaire  $PI^\alpha$ .

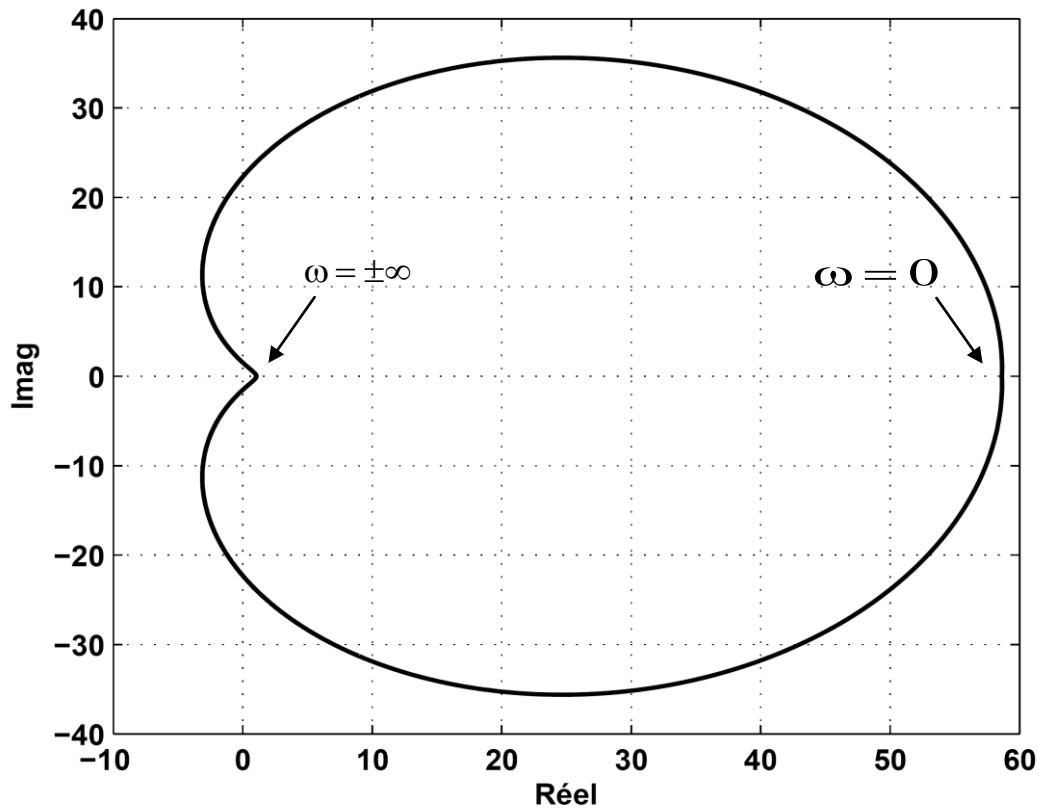


Figure (I.9) : Tracé de Mikhailov généralisé modifié de  $\psi(j\omega)$  pour  $-\infty < \omega < +\infty$

## I.6.2 Observabilité et contrôlabilité

### I.6.2.1 Contrôlabilité

Le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation d'état de l'équation (I.44) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité définie par [38]:

$$M_C = \left[ B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B \right] \quad (\text{I.59})$$

est une matrice de rang  $n$  ( $n$  est la dimension de la matrice d'état  $A$ ).

### I.6.2.2 Observabilité

Le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation d'état de l'équation (I.44) est observable si est seulement si la matrice d'observabilité définie par [38]:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.60})$$

est une matrice de rang  $n$  ( $n$  est la dimension de la matrice d'état  $A$ ).

**I.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a introduit les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire ainsi que leurs principales propriétés. Premièrement, on a présenté les définitions et quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire ainsi que leurs transformées de Laplace. Puis, on a abordé les méthodes de leur d'approximation, par des systèmes linéaires invariant dans le temps. Des exemples d'approximation dans une bande fréquentielle donnée des opérateurs d'ordre fractionnaires ont été aussi donnés. Enfin, on a introduit les différentes représentations des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ainsi que quelques unes de leurs propriétés structurelles telles que la stabilité, la contrôlabilité et l'observabilité.

Chapitre //

## La Commande d'Ordre Fractionnaire

## II.1 Introduction

Durant les dernières décennies, des chercheurs ont introduit dans les boucles de commande des correcteurs d'ordre fractionnaire pour satisfaire plus de performances temporelles et fréquentielles dans la commande des systèmes. L'apport supplémentaire qu'ajouteraient de tels correcteurs réside dans l'aspect fractionnaire de leurs ordres de dérivation ou d'intégration constituant ainsi des degrés de liberté supplémentaires qui peuvent améliorer considérablement les techniques de commande utilisant des correcteurs classiques.

Parmi les techniques de commande d'ordre fractionnaire introduites depuis les années 90, on trouve la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, le correcteur TID (tild-integral-derivative) et le correcteur avance-retard de phase fractionnaire [18]. Plus récemment, l'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande a conduit aussi à l'introduction de la commande adaptative d'ordre fractionnaire [10], de la commande par stabilisation adaptative universelle d'ordre fractionnaire [39] et de la commande robuste  $H_\infty$  d'ordre fractionnaire [40].

Ce chapitre est alors consacré à la présentation de quelques techniques de commande d'ordre fractionnaire établies dans la littérature. Un aperçu des techniques de synthèse de ces méthodes de commande d'ordre fractionnaire est exposé.

## II.2 Correcteur CRONE

La configuration de base de ce correcteur est la commande avec retour unitaire de la figure (II.1). Cette stratégie de commande utilise l'opérateur de dérivation ou d'intégration d'ordre fractionnaire et dont l'objectif est d'assurer une robustesse de la commande quelque soit les ambiguïtés du procédé à commander [8]. Trois générations de commande CRONE ont été développées [8].

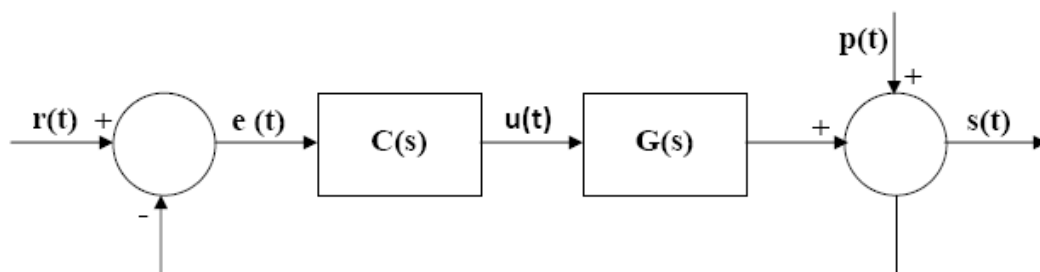


Figure (II.1) : Diagramme de commande à retour unitaire

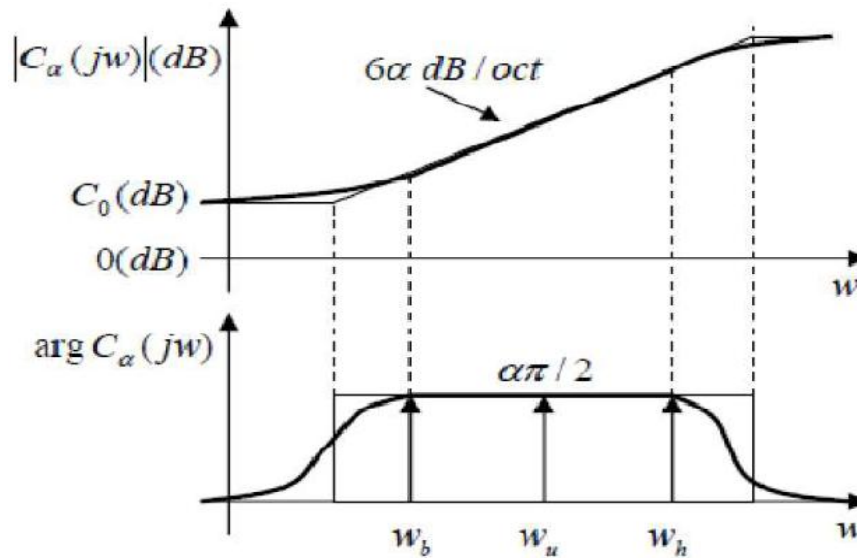
### II.2.1 Correcteur CRONE de la première génération

L'idée principale de cette première génération est basée sur une phase constante du correcteur  $C(s)$  autour de la fréquence au gain unité de la fonction de transfert en boucle ouverte  $\omega_u$  comme

montré sur la figure (II.2). Le système asservi en boucle fermée est robuste seulement dans le cas où la bande de fréquence du correcteur est située dans une bande où le procédé possède une phase constante. La fonction de transfert idéale de ce correcteur CRONE à phase constante est définie par une transmittance d'ordre réel  $\alpha$  comme suit [8]:

$$C_{\alpha}(s) = c_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{\alpha} \quad (\text{II.1})$$

où  $\omega_b$  et  $\omega_h$  sont des nombres réels positifs (avec  $\omega_b < \omega_h$ ) et  $\alpha$  est un nombre réel. Le diagramme de Bode de la réponse fréquentielle du correcteur  $C_{\alpha}(s)$  est donné dans la figure (II.2) pour  $\alpha > 0$ .



**Figure (II.2) :** Diagrammes de Bode du correcteur CRONE idéal

Nous remarquons, à partir de cette figure, que la fréquence au gain unité de la fonction de transfert en boucle ouverte  $\omega_u$  est dans la bande de fréquence où la phase de la réponse fréquentielle du correcteur CRONE est constante.

La version approximative de ce correcteur est définie par sa transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de zéros et de pôles de la manière suivante:

$$C_N(s) = C_0 \prod_{i=0}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right) \quad (\text{II.2})$$

où les zéros  $z_i$  et les pôles  $p_i$  sont des nombres réels et  $N$  est un nombre entier qui sont donnés par les expressions suivantes [8] :

$$\text{si } \alpha > 0 \begin{cases} z_1 = \omega_b \sqrt{b} \\ p_i = z_i a, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i b, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \omega_h = p_N \sqrt{b} \end{cases}, \quad \text{si } \alpha < 0 \begin{cases} p_1 = \omega_b \sqrt{b} \\ z_i = p_i a, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i b, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \omega_h = z_N \sqrt{b} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$$\omega_h = \omega_b (ab)^N \Rightarrow N = \text{Integer} \left\{ \frac{\log\left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)}{\log(ab)} \right\} \quad (\text{II.4})$$

$$a = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{|\alpha|/N}, \quad b = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(1-|\alpha|)/N} \quad (\text{II.5})$$

Dans le cas où on ne peut pas utiliser la bande de fréquence à phase constante, le choix de la commande CRONE de la deuxième génération est alors à favoriser.

### II.2.2 Correcteur CRONE de la deuxième génération

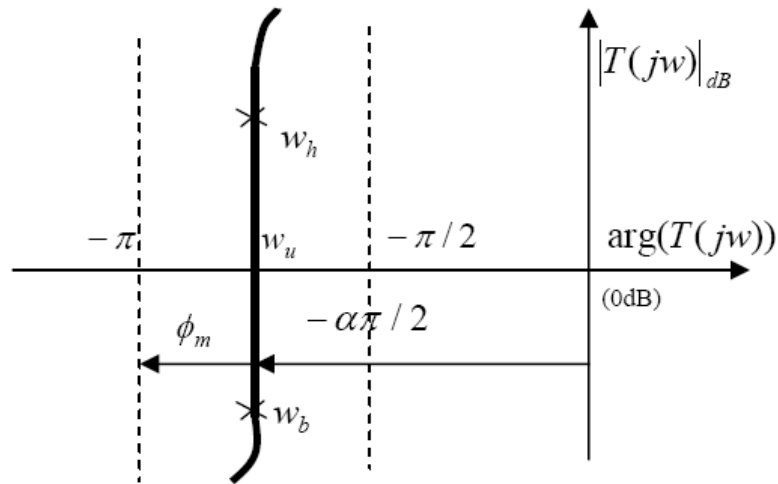
La deuxième génération consiste à rendre la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(s)$  pour l'état paramétrique nominal du procédé autour de la fréquence du gain unité  $\omega_u$ , équivalente à un intégrateur d'ordre fractionnaire de la forme suivante:

$$T(s) = \left( \frac{\omega_u}{s} \right)^\alpha, \quad (\text{avec } 1 < \alpha < 2) \quad (\text{II.6})$$

Le tracé de Black de la fonction de transfert de l'équation (II.6) est donné dans la figure (II.3). Ce tracé présente un gabarit vertical entre  $-\pi/2$  et  $-\pi$  autour de la fréquence du gain unité  $\omega_u$ . Lors d'une reparamétrisation du procédé par une variation de son gain, le gabarit vertical glisse alors sur lui-même. La forme et le glissement vertical du gabarit assure, non seulement une marge de phase constante mais également :

- La constance du premier dépassement de la réponse libre ou indicielle en asservissement ou en régulation, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'iso-dépassement.
- La constance du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'iso-amortissement

Si on ne peut pas vérifier la propriété de robustesse à l'aide du correcteur CRONE de la deuxième génération, un intégrateur fractionnaire d'ordre complexe est considéré dans la troisième génération.



**Figure (II.3)** : Représentation du gabarit vertical de  $T(s)$  dans le plan de Black

### II.2.3 Correcteur CRONE de la troisième génération

Lorsque la réponse fréquentielle du procédé possède des incertitudes de nature différentes à celles du gain, la troisième génération de la commande CRONE doit être utilisée [8]. Dans ce cas, un gabarit généralisé remplace le gabarit vertical de la seconde génération. Ce gabarit généralisé est décrit par un segment de droite dans le plan de Nichols, mais de direction quelconque ou encore par un multi-gabarit (ou gabarit curviligne) défini par un ensemble de gabarits généralisés. Le gabarit ainsi défini, est décrit par une transmittance dont la fonction de transfert est un intégrateur d'ordre complexe  $\alpha = (a+jb)$ , donnée comme suit [8]:

$$T(s) = \left( \coth \left( b \frac{\pi}{2} \right) \right)^{\text{sign}(b)} \left( \frac{\omega_u}{s} \right)^a \left( \left[ \frac{\omega_u}{s} \right]_{Cq}^{ib} \right)^{\text{sign}(b)} \quad (\text{II.7})$$

Nous remarquons que la fonction de transfert de cette génération est définie sur deux plans complexes  $C_i$  (pour l'ordre complexe) et  $C_q$  (pour la variable  $s$ ). La partie réelle  $a$ , de l'ordre complexe  $\alpha$ , détermine le placement en phase du gabarit, puis la partie imaginaire  $b$  détermine ensuite son inclinaison par rapport à la verticale [8].

Pour la généralisation de cette génération, la recherche d'un gabarit optimal dans le but de la minimisation d'un critère quadratique (sous contraintes) portant sur les variations du facteur de résonance en asservissement ou du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, définit la stratégie optimale qu'utilise la version initiale de la commande CRONE de troisième génération. Le deuxième niveau consiste à substituer au gabarit généralisé un ensemble de gabarits du même type, appelé multi-gabarit. Sa description par un produit de transmittances d'ordre complexes bornées en fréquence, définit un gabarit curviligne qui étend le gabarit rectiligne que forme le gabarit vertical ou généralisé. La recherche d'un gabarit curviligne

optimal, au sens de la minimisation, du critère précédent, définit la stratégie optimale la plus évoluée qu'utilise la commande CRONE de troisième génération [8].

### II.3 Correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Actuellement, le correcteur PID (proportionnel intégral dérivé) est le correcteur le plus utilisé dans la commande des processus industriels. Sa fonction de transfert est donnée par l'équation suivante:

$$C(s) = K_P + \frac{T_I}{s} + T_D s \quad (\text{II.8})$$

Les paramètres de ce correcteur sont le gain proportionnel  $K_P$ , la constante d'intégration  $T_I$  et la constante de dérivation  $T_D$ . La réponse du système est reliée directement à ces trois paramètres de la manière suivante :

- Si  $K_P$  augmente, le temps de montée diminue, le dépassement devient important, le temps de réponse est presque inchangé et l'erreur statique est améliorée.
- Lorsque  $1/T_I$  augmente, le temps de montée diminue, le dépassement augmente à une valeur importante et le temps de réponse devient assez lent. Dans ce cas l'erreur statique est nulle. Donc, plus ce paramètre augmente, plus la réponse du système est ralentie. Par conséquent, l'action intégrale rend le système moins stable.
- L'augmentation du terme  $T_D$ , a pour conséquence de réduire le dépassement avec un meilleur temps de réponse. L'action dérivée permet donc d'atténuer les oscillations et rendre le système plus stable.

Malgré la large utilisation du correcteur PID dans l'industrie, il est resté insuffisant pour plusieurs types de systèmes asservis complexes. Pour surmonter les problèmes de commande de ces systèmes asservis complexes, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ , appelé PID fractionnaire, où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels positifs, a été proposé par Podlubny en 1999 [16]. Ce type de correcteur est une généralisation du correcteur PID classique dont la fonction de transfert est donnée par l'expression suivante [16] :

$$C(s) = K_P + \frac{T_I}{s^\lambda} + T_D s^\mu \quad (\text{II.9})$$

où  $K_P$  représente l'action proportionnelle,  $T_I/s^\lambda$  représente l'action intégrale fractionnaire et  $T_D s^\mu$  représente l'action dérivée fractionnaire. Dans le plan  $(\mu, \lambda)$ , le correcteur PID est représenté par quatre points correspondant à  $\lambda=1$  ou  $0$  et  $\mu=1$  ou  $0$ ; par contre le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire est représenté par une infinité de points du premier quadrant du plan  $(\lambda, \mu)$ , comme montré sur la figure (II.4).

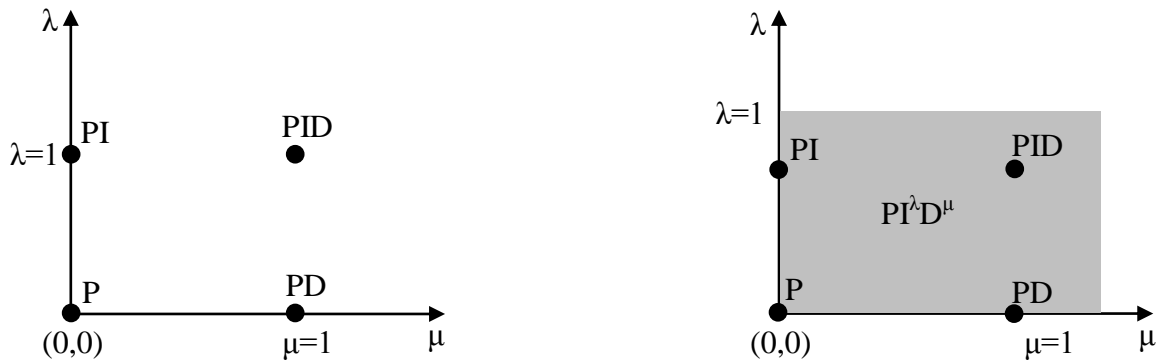


Figure (II.4) : Régulateur PID et  $PI^\lambda D^\mu$  dans le plan  $(\mu, \lambda)$

Alors, l'extension du correcteur PID au correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire donne plus de flexibilité dans la conception des commandes des systèmes asservis. Parmi les avantages du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, on note la possibilité de bien commander la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. On a aussi l'amélioration de la robustesse d'un système commandé par un correcteur d'ordre fractionnaire. Puisque les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire a cinq degrés de liberté au lieu de trois degrés pour le PID ; il est donc plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des processus [16]. Depuis 1999, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'utilisation et le réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire. Dans la référence [17], on trouve un état de l'art des développements du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, y compris sa conception et son réglage dans différents problèmes d'asservissement.

#### II.4 Correcteur TID

Le correcteur TID (tilt-integral-derivative) est un correcteur PID classique où l'action proportionnelle P est remplacée par un intégrateur d'ordre fractionnaire. Sa fonction de transfert est donnée par [18]:

$$C(s) = \frac{T}{s^{1/n}} + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (\text{II.10})$$

avec  $\frac{1}{s^{1/n}}$  est un intégrateur d'ordre fractionnaire et  $n$  un nombre réel tel que  $2 < n < 3$ .

Ce correcteur, avec quatre degrés de liberté, possède plus de flexibilité par rapport à un correcteur PID classique. Il s'approche plus étroitement de la fonction idéale de Bode, qui a comme paramètre le meilleur rejet des perturbations. Parmi les avantages de ce type de

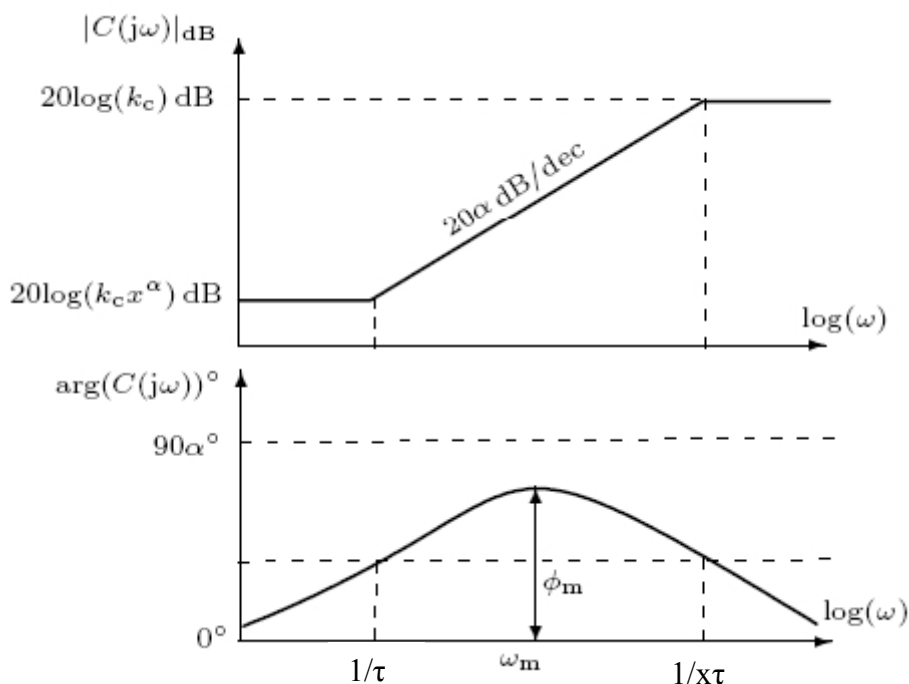
correcteur, l'amélioration des performances et la minimisation de l'effet des variations des paramètres du processus sur la réponse en boucle fermée comparé au correcteur PID [18].

### II.5 Correcteur avance ou retard de phase d'ordre fractionnaire

Le correcteur avance ou retard de phase d'ordre fractionnaire est une généralisation du correcteur avance ou retard de phase classique. La fonction de transfert de ce type de correcteur est donnée par l'expression suivante [19]:

$$C(s) = k_c x^\alpha \left( \frac{\tau s + 1}{x\tau s + 1} \right)^\alpha \quad (\text{II.11})$$

où  $k_c$ ,  $x$  et  $\tau$  sont des nombres réels positifs tels que  $0 < x < 1$  et  $\alpha$  un nombre réel. Si  $\alpha$  est positif, ce correcteur est un correcteur à avance de phase fractionnaire et si  $\alpha$  est négatif, ce correcteur est un correcteur à retard de phase fractionnaire [19]. Le comportement fréquentiel de ce type de correcteur pour  $\alpha > 0$  est montré dans la figure (II.6).



**Figure (II.5) :** Réponse fréquentielle du correcteur avance de phase fractionnaire

Notons aussi que la phase  $\phi_m$  à la fréquence  $\omega_m$  dépende du paramètre  $\alpha$ , c'est à dire que l'ordre  $\alpha$  donne plus de flexibilité pour les spécifications de commande [19].

### II.6 Commande Adaptative d'ordre fractionnaire

La commande adaptative est parmi les techniques de commande les plus utilisées et les plus populaires. Elle s'est avérée être très efficace pour la commande des processus mal connus ou incertains. Depuis les années 50, un très grand nombre de contrôleurs et d'algorithmes adaptatifs basés sur différentes idées et techniques s'est développé lentement mais avec fiabilité.

Cependant, ce n'est que dans la dernière vingtaine d'années que les opérateurs et les systèmes fractionnaires ont été introduits dans les différentes techniques et schémas de la théorie de la commande adaptative [41-46]. Une revue des travaux développés sur la commande adaptative fractionnaire, où les opérateurs et les systèmes fractionnaires ont été utilisés dans les différents algorithmes de la commande adaptative, est donnée dans [10].

### II.6.1 Commande adaptative à modèle de référence fractionnaire

La commande adaptative à modèle de référence fractionnaire a été introduite pour la première fois en 2002. Dans [41], Vinagre et al. ont utilisé une règle d'ajustement des paramètres d'ordre fractionnaire et introduit un modèle de référence d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative à modèle de référence (CAMR) conventionnel. Dans [42], Ladaci et al. ont aussi utilisé une règle d'ajustement des paramètres d'ordre fractionnaire et un modèle de référence d'ordre fractionnaire différent de celui de [41] dans le CAMR conventionnelle. Ils ont également introduit un dérivateur fractionnaire à la sortie du système, avec un ordre fractionnaire approprié lié au modèle de référence d'ordre fractionnaire proposé dans la CAMR fractionnaire.

### II.6.2 Commande adaptative $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire

En se basant sur les travaux de Ilchmann et al. [47] et Fan et al. [48], à partir de [43] Ladaci et al. ont également introduit un contrôleur adaptatif  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire qui utilise l'intégration et la différentiation fractionnaires pour régler les paramètres du contrôleur. Cette stratégie du contrôleur adaptatif  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, offre en plus deux degrés de liberté, qui sont les nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  représentant les ordres des actions intégrales et dérivées donnant plus de flexibilité dans la conception des commandes des systèmes asservis. Mais, la faiblesse de ces travaux réside dans le manque d'arguments théoriques pouvant garantir la stabilité de ces schémas de commande. La stratégie de réglage de ce contrôleur adaptatif  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, est donnée par les expressions suivantes [43]:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -k_c [k_1(t)e(t) + I^\lambda (k_2(t)e(t)) + D^\mu (k_3(t)e(t))] \\
 k_1(t) &= k_p(t) + \alpha_1 k_i(t) + \alpha_3 k_d(t) \\
 k_2(t) &= \alpha_2 k_i(t) \\
 k_3(t) &= \alpha_4 k_d(t) \\
 k_p(t) &= e^2(t) \\
 k_i(t) &= I^\lambda (e^2(t)) \\
 k_d(t) &= D^\mu (e^2(t)) \\
 e(t) &= y(t) - r(t)
 \end{aligned} \tag{II.12}$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $k_c$  sont des réels positives,  $I^\lambda(\cdot)$  et  $D^\mu(\cdot)$  sont, respectivement les opérateurs d'intégration et de différentiation d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville et  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels positives.

### II.6.3 Commande adaptative à grand gain fractionnaire

La commande adaptative à grand gain fractionnaire est une technique de commande basée sur la stratégie du grand gain à retour de sortie adaptatif en utilisant les opérateurs fractionnaires pour stabiliser un système incertain linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, monovariante et de degré relatif un. Deux versions de cette stratégie de commande fractionnaire ont été présentées [44-45].

Pour un système monovariante incertain décrit par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

où  $t$  est la variable du temps,  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur état,  $u(t)$  est la commande scalaire d'entrée et  $y(t)$  est la sortie scalaire et  $A, B$  et  $C$  sont des matrices réelles inconnues. Dans la stratégie de la commande à grand gain à retour de sortie adaptatif, la commande  $u(t)$  est donnée par l'expression suivante :

$$u(t) = -k(t)y(t) \quad (\text{II.14})$$

Alors, le système en boucle fermée est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) - k(t)BCx(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Dans la première version de la commande adaptative à grand gain fractionnaire introduite dans [44], l'adaptation du gain  $k(t)$  est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{d^\alpha k(t)}{dt^\alpha} = \gamma [y(t)]^2 \quad (\text{II.16})$$

où  $\alpha$  et  $\gamma$  sont des nombres réels positifs tel que  $0 < \alpha < 2$ .

Dans la seconde version de la commande adaptative à grand gain fractionnaire introduite dans [45], l'adaptation du gain  $k(t)$  est donnée comme suit:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \gamma_1 [y(t)]^2 + \gamma_2 \frac{d^\alpha [y(t)]^2}{dt^\alpha} \quad (\text{II.17})$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des nombres réels positifs et  $\alpha$  est un nombre réel tel que  $-1 < \alpha < 1$ .

### II.7 Méthode de stabilisation adaptative universelle fractionnaire

Dans [39], les auteurs ont développé la méthode de stabilisation adaptative universelle fractionnaire basée sur la stratégie du grand gain et la technique de stabilisation adaptative universelle en utilisant les operateurs fractionnaires. Ils ont étudié la stabilité asymptotique d'un système monovariante incertain décrit par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

où  $t$  est la variable du temps,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur état,  $u(t)$  est la commande scalaire d'entrée et  $y(t)$  est la sortie scalaire,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices réelles inconnues et  $\alpha$  est un nombre réel positif tel que  $0 < \alpha < 1$ . Dans la stratégie de la stabilisation adaptative universelle la commande  $u(t)$  est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} u(t) = -N\{k(t)\}x(t) \\ \frac{dk(t)}{dt} = [x(t)]^2 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

où  $N\{.\}$  est une fonction Nussbaum arbitraire. Alors, le système en boucle fermée est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) - BN\{k(t)\}x(t) \\ \frac{dk(t)}{dt} = [x(t)]^2 \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

### II.8 Commande $H_\infty$ fractionnaire

La commande  $H_\infty$  fractionnaire a été récemment introduite en incorporant des opérateurs et des systèmes fractionnaires dans la boucle de commande où la technique de la commande  $H_\infty$  classique a été utilisée dans la conception du correcteur. [49-50]. Deux approches ont été élaborées. La première consiste à utiliser la technique de la commande  $H_\infty$  classique pour le réglage des paramètres du correcteur PID fractionnaire [49] où un de ces dérivées tel que le PD fractionnaire [40] avec un processus d'ordre entier. La seconde approche consiste à calculer un correcteur d'ordre fractionnaire avec un processus aussi d'ordre fractionnaire en utilisant la technique de la commande  $H_\infty$  classique avec quelques adaptations aux systèmes d'ordre fractionnaire [50].

**II.9 Conclusion**

Le concept de la commande d'ordre fractionnaire consiste à utiliser dans les techniques de commande classiques, les opérateurs et les systèmes fractionnaires dans le but d'améliorer les performances et la robustesse des systèmes asservis, et cela par l'apport supplémentaire qu'ajouteraient ces derniers par leurs ordres de dérivation ou d'intégration. Ce chapitre a été alors consacré à la présentation des techniques établies dans la littérature et entrant dans le réglage et la synthèse de correcteurs et d'algorithmes de la commande d'ordre fractionnaire.

# Chapitre **///**

Réglage du Correcteur  $PI^\lambda$  d'Ordre Fractionnaire pour la Commande d'un Processus du Premier Ordre Avec Retard

---

### III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons la conception d'un système de commande à retour unitaire classique dont le processus est un système du premier ordre avec retard utilisant un correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire. Dans ce contexte, le correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est obtenue à partir du correcteur PI classique utilisé dans le même système de commande avec retour. L'idée principale de la conception proposée est l'ajustement du paramètre  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda$  fractionnaire pour améliorer l'erreur quadratique intégrale (ISE), le dépassement et le temps de réponse de la réponse indicielle du système de commande par rapport à ces mêmes performances du système de commande avec le correcteur PI classique correspondant. L'efficacité de la conception proposée par rapport à la conception classique correspondante est présentée à travers les résultats de simulation d'exemples illustratifs [51].

### III.2 Préliminaires

#### III.2.1 Approximation par fonction rationnelle du correcteur $PI^\lambda$

L'utilisation d'un correcteur d'ordre fractionnaire nécessite le remplacement de sa fonction de transfert d'ordre fractionnaire par une fonction de transfert d'ordre entier avec un comportement assez similaire à celui désiré, mais beaucoup plus facile à manipuler. Dans la littérature, ils existent plusieurs méthodes d'approximation de ces fonctions irrationnelles. Dans notre cas, on a utilisé la méthode de la fonction de singularité, développée par Charef [34].

La fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante:

$$H(s) = \frac{1}{s^\lambda} \quad , \quad \text{pour } \lambda > 0 \quad (\text{III.1})$$

Dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , un nombre entier  $N$  donné, une erreur d'approximation  $\gamma$  en dB choisie et une fréquence  $\omega_c$  choisie aussi, telle que  $\omega_c \ll \omega_L$ , la fonction rationnelle de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $H(s)$  est donnée comme suit [52] :

$$H(s) = \frac{1}{s^\lambda} \cong \frac{1}{\left[ \prod_{i=-N_1}^{-1} (p_i) \right] \left[ (\omega_c)^{(\lambda-N_1)} \right] \prod_{i=-N_1}^N (1 + s/p_i)} \prod_{i=0}^N (1 + s/z_i) \quad (\text{III.2})$$

avec  $N_1$  est la partie entière de  $\lambda$  et les zéros et les pôles sont  $z_i = ap_0(ab)^i$  ( pour  $i = 0,1,\dots, N$ ) et  $p_i = p_0(ab)^i$  (pour  $i = -N_1 \dots, -1, 0, 1, \dots, N$ ); où les paramètres d'approximation  $a$ ,  $b$  et  $p_0$  sont

donnés comme dans [34] :  $a = 10^{\left\lfloor \frac{y}{10(1-\lambda+N_1)} \right\rfloor}$ ,  $b = 10^{\left\lfloor \frac{y}{10(\lambda-N_1)} \right\rfloor}$ ,  $p_0 = \omega_c 10^{\left\lfloor \frac{y}{20(\lambda-N_1)} \right\rfloor}$ .

Alors, la fonction rationnelle de l'approximation du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est donnée par l'expression suivante:

$$C(s) = Kp \left( 1 + \frac{1}{Tis^\lambda} \right) \cong Kp \left( 1 + \frac{1}{Ti} \frac{1}{\left[ \prod_{i=-N_1}^{-1} (p_i) \right] \left[ (\omega_c)^{(\lambda-N_1)} \right] \frac{\prod_{i=0}^N (1+s/z_i)}{\prod_{i=-N_1}^N (1+s/p_i)} \right) \quad (III.3)$$

### III.2.2 Approximation de Padé d'un retard

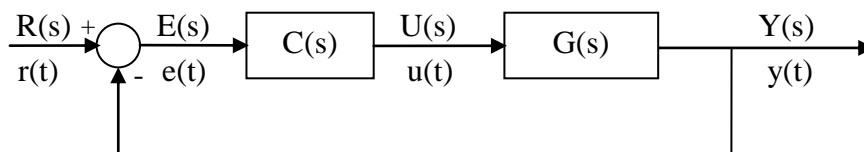
Dans notre étude, on a choisi des exemples où le processus est un système du premier ordre avec retard  $T$ , et représenté dans le domaine fréquentielle par le terme  $e^{-Ts}$  qui est une fonction irrationnelle. Dans ce contexte ce retard est remplacé par une fonction rationnelle obtenue par l'approximation de Padé du premier ordre comme suit :

$$e^{-Ts} = \left( \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} \right) \quad (III.4)$$

### III.3 Réglage du correcteur $PI^\lambda$

#### III.3.1 Formulation du problème

Considérons le schéma classique d'un système de commande à retour unitaire suivant :



**Figure (III.1) :** Système de commande à retour unitaire classique

où  $G(s)$  est la fonction de transfert du processus modelé par un système du premier ordre avec retard donné par l'expression suivante :

$$G(s) = \frac{K_m e^{-s\tau_m}}{1 + sT_m} \quad (\text{III.5})$$

et  $C(s)$  est la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire donnée comme suit :

$$C_F(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} \right) \quad (\text{III.6})$$

où  $K_p$ : la constante proportionnelle,  $T_I$ : la constante d'intégration et  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ): l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration sont les paramètres à régler pour ce type de correcteur.

Dans ce travail, on propose la conception du système de commande de la figure (III.1), dont la fonction de transfert du processus est un modèle du premier ordre avec retard de l'équation (III.5) et le correcteur est un correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.6). En effet, la détermination des trois paramètres de ce correcteur est basé sur le réglage, en premier lieu, des deux paramètres  $K_p$  et  $T_I$  du correcteur PI classique utilisé pour le même processus, puis le réglage de l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\lambda$  pour l'amélioration des performances caractéristiques du système de commande avec le correcteur  $PI^\lambda$  par rapport à celles du même système de commande avec le correcteur PI.

### III.3.2 Présentation de la méthode

La méthode proposée pour le réglage des paramètres du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire du système de commande à retour unitaire de la figure (III.1) est basée, en premier lieu, sur les techniques de réglage classiques pour déterminé les paramètres  $K_p$  et  $T_I$  du correcteur PI classique qui est le correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire pour  $\lambda = 1$ . Ensuite, en utilisant les paramètres  $K_p$  et  $T_I$  obtenus dans la première étape, l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\lambda$  est réglé afin d'améliorer l'intégrale du carrée de l'erreur, le dépassement et le temps de réponse de la réponse indicielle du système de commande de la figure (III.1) comparés à ceux du système de commande avec le correcteur PI classique correspondant. La fonction de transfert en boucle fermée du système de commande de la figure (III.1), est donnée par l'expression suivante:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} \quad (\text{III.7})$$

Notons que la fonction de transfert  $C_F(s)$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est une fonction irrationnelle et la fonction de transfert  $G(s)$  du système est aussi irrationnelle à cause du retard. Pour remédier à ce problème, le retard est approximé par une fonction rationnelle utilisant la méthode d'approximation de Padé donnée dans l'équation (III.4) et la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est aussi approximée par une fonction rationnelle donnée dans l'équation (III.3).

### III.4 Résultats de simulation

Dans cette section, deux exemples illustratifs seront présentés pour montrer l'efficacité de la méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda$  proposée pour démontrer l'efficacité de ce type de correcteur pour l'amélioration des performances du système de commande.

#### III.4.1 Exemple 1

Le premier exemple concerne la conception d'un correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire  $C_F(s)$  de l'équation (III.6) du système de commande à retour unitaire de la figure (III.1), dont la fonction de transfert  $G(s)$  du processus est un système du premier ordre avec retard donnée par [53]:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0.5s} e^{-0.2s} \quad (III.8)$$

Dans [53], la conception du correcteur PI classique pour des processus de type premier ordre avec retard a été faite en utilisant une technique de placement de pôles. Les valeurs numériques des paramètres  $K_P$  et  $T_I$  du correcteur PI classique obtenues pour le processus de l'équation (III.8) sont  $K_P = 0,6013$  et  $T_I = 0,2346$ . Donc, sa fonction de transfert est donnée par [53] :

$$C(s) = 0.6013 \left( 1 + \frac{1}{0.2346s} \right) \quad (III.9)$$

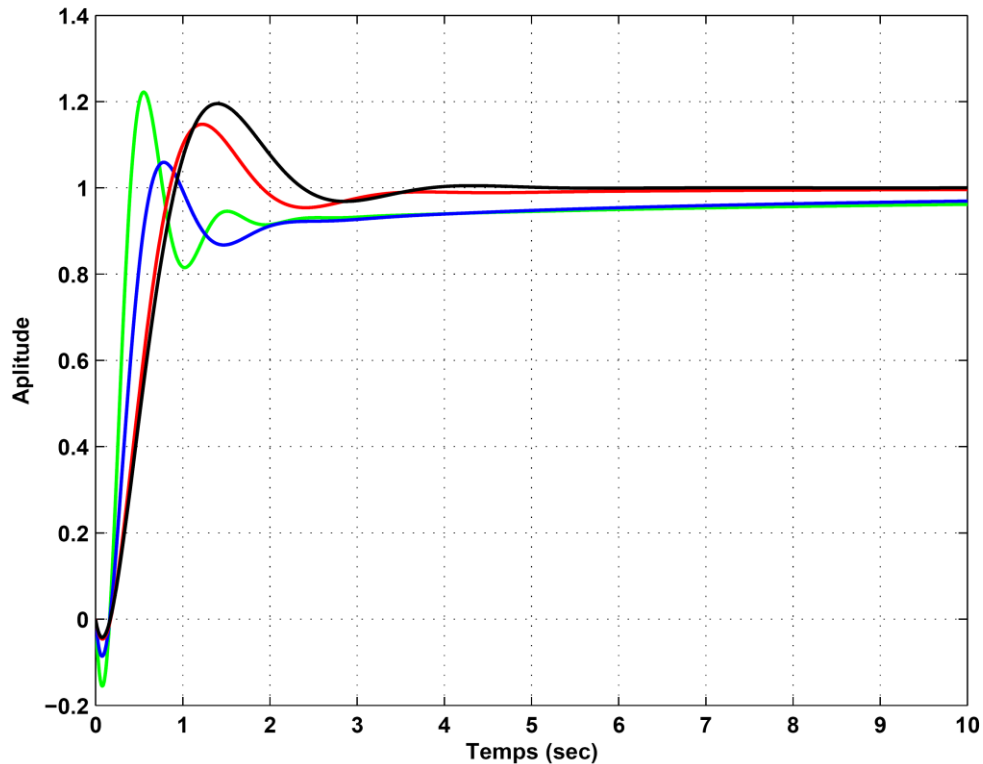
Alors, dans ce contexte, la conception du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire pour le système du premier ordre avec retard de l'équation (III.8) donnée dans [53] est basée sur le correcteur PI classique déjà conçu pour le système du premier ordre avec retard dans [53] et donné par l'équation (III.9). Donc, la fonction de transfert  $C_F(s)$  de ce correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$C_F(s) = 0.6013 \left( 1 + \frac{1}{0.2346s^\lambda} \right) \quad (III.10)$$

où l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\lambda$  est tel que  $0 < \lambda < 1$ .

Figure (III.2) montre les réponses indicielles du système de commande en boucle fermée de la figure (III.1) pour le modèle du premier ordre avec retard de l'équation (III.8) avec le correcteur

PI classique de l'équation (III.9) et le correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.10) pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ).



**Figure (III.2):** Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur classique PI (noir) et le correcteur  $PI^\lambda$  fractionnaire pour les valeurs de  $\lambda$  :  $\lambda = 0,19$  (vert),  $\lambda = 0,54$  (bleu) et  $\lambda = 0,89$  (rouge)

A partir de la figure (III.2), on peut facilement voir que l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.10) a une influence sur le comportement temporelle du système de commande de ce premier exemple. Donc, ce paramètre  $\lambda$  peut jouer un grand rôle dans l'amélioration de ses performances caractéristiques. Alors, certains critères peuvent être utilisés pour obtenir une valeur de l'ordre fractionnaire  $\lambda$  qui conduit à la meilleure amélioration des caractéristiques de performances du système de commande de ce premier exemple. Comme dans ce contexte le réglage du paramètre  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est basé sur l'amélioration de l'intégrale du carrée de l'erreur, du dépassement et du temps de réponse de la réponse indicielle du système de commande avec le correcteur d'ordre fractionnaire comparés à ces mêmes performances caractéristiques du système de commande avec le correcteur PI classique conduisant au correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire ; la meilleure valeur de l'ordre fractionnaire  $\lambda$  qui garantit l'amélioration des trois caractéristiques

de performances en même temps est  $\lambda = 0,88$ . Alors, la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire  $C_F(s)$  est donnée comme suit :

$$C_F(s) = 0.6013 \left( 1 + \frac{1}{0.2346s^{0.88}} \right) \quad (III.11)$$

La fonction rationnelle approximant le correcteur  $PI^{0.88}$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.11) qui va être utilisée dans les simulations est donné par :

$$C_F(s) = 0.6013 \left( 1 + 245.2855 \frac{\prod_{i=0}^5 \left( 1 + \frac{s}{0.0515(5.7223)^i} \right)}{\prod_{i=0}^5 \left( 1 + \frac{s}{0.0111(5.7223)^i} \right)} \right) \quad (III.12)$$

L'approximation de Pade du premier ordre de la fonction retard  $e^{-0.2s}$  de la fonction de transfert  $G(s)$  du processus de l'équation (III.8) est donnée par:

$$e^{-0.2s} = \left( \frac{1 - 0.1s}{1 + 0.1s} \right) \quad (III.13)$$

#### III.4.1.1 Stabilité

La fonction de transfert en boucle fermée du système de commande de ce premier exemple avec le correcteur  $PI^{0.88}$  d'ordre fractionnaire et avec le correcteur PI classique sont données, respectivement, par les expressions suivantes :

$$G_{BFPI^{0.88}}(s) = \frac{C_F(s)G(s)}{1 + C_F(s)G(s)} = \frac{(0.1411s^{0.88} + 0.6013)e^{-0.2s}}{0.1173s^{1.88} + 0.2346s^{0.88} + (0.1411s^{0.88} + 0.6013)e^{-0.2s}} \quad (III.14)$$

$$G_{BFPI}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(0.1411s + 0.6013)e^{-0.2s}}{0.1173s^2 + 0.2346s + (0.1411s + 0.6013)e^{-0.2s}} \quad (III.15)$$

Les dénominateurs des ces deux fonctions de transfert sont donnés comme suit:

$$D_{BFPI^{0.88}}(s) = 0.1173s^{1.88} + 0.2346s^{0.88} + (0.1411s^{0.88} + 0.6013)e^{-0.2s} \quad (III.16)$$

$$D_{BFPI}(s) = 0.1173s^2 + 0.2346s + (0.1411s + 0.6013)e^{-0.2s} \quad (III.17)$$

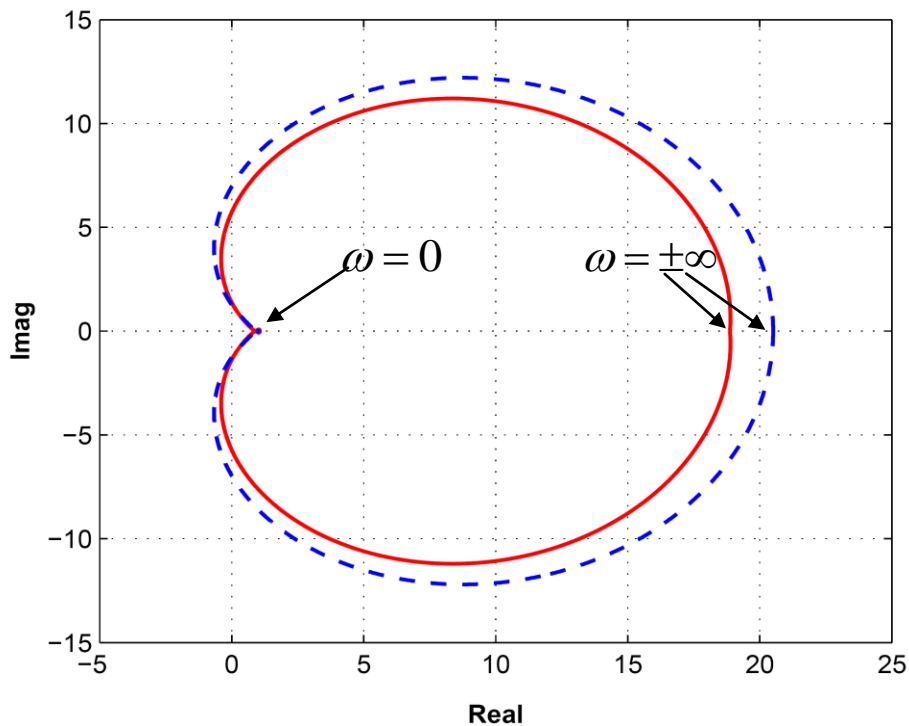
L'analyse de la stabilité de ce type de système est réalisée à l'aide d'une approche dite la méthode de Mikhailov généralisée modifiée, proposée dans [37]. Dans cette méthode une fonction  $\psi(s)$  est introduite pour l'analyse de la stabilité. La méthode de Mikhailov généralisée modifiée stipule que pour qu'un système de commande soit stable, il faut que le tracé de la partie imaginaire contre la partie réelle de sa fonction  $\psi(s)$ , pour  $s = j\omega$ , avec  $-\infty < \omega < +\infty$  n'encercle pas l'origine du plan complexe [37].

Pour les deux systèmes de commande de cet exemple avec le correcteur PI<sup>0.88</sup> d'ordre fractionnaire et avec le correcteur PI classique les deux fonctions  $\psi_1(s)$  et  $\psi_2(s)$  sont données, respectivement, par les expressions suivantes :

$$\psi_1(s) = \frac{D_{\text{BFPI}^{0.88}}(s)}{0.1173(s+0.05)^{1.88}} = \frac{0.1173s^{1.88} + 0.2346s^{0.88} + (0.1411s^{0.88} + 0.6013)e^{-0.2s}}{0.1173(s+0.05)^{1.88}} \quad (\text{III.18})$$

$$\psi_2(s) = \frac{D_{\text{BFPI}}(s)}{0.1173(s+0.02)^2} = \frac{0.1173s^2 + 0.2346s + (0.1411s + 0.6013)e^{-0.2s}}{0.1173(s+0.02)^2} \quad (\text{III.19})$$

Figure (III.3) montre les tracés des parties imaginaires contre les parties réelles des deux fonctions  $\psi_1(j\omega)$  et  $\psi_2(j\omega)$  pour  $s = j\omega$ , avec  $-\infty < \omega < +\infty$ .

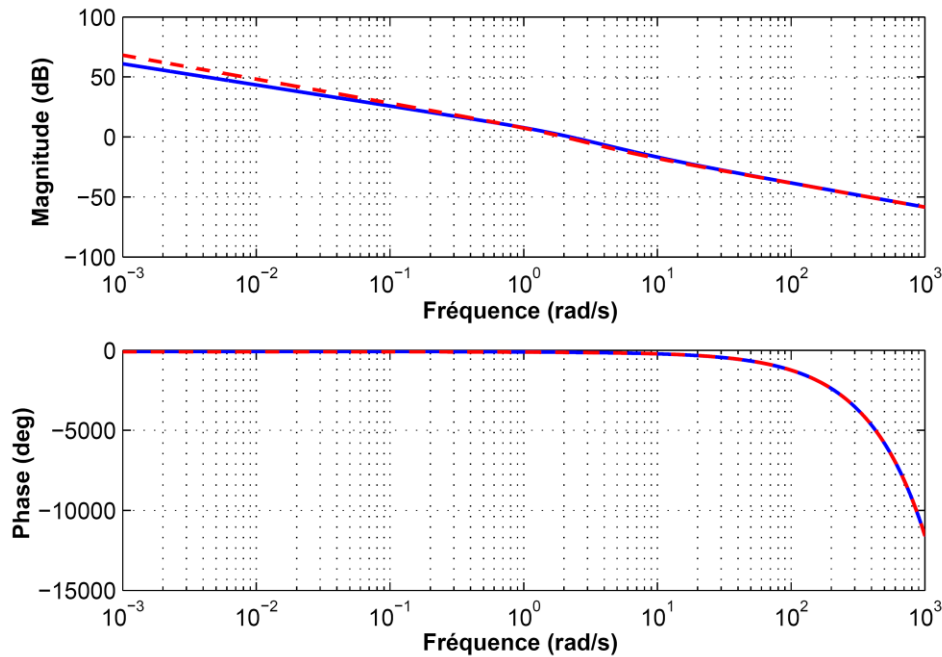


**Figure (III.3)** : Tracés des fonctions  $\psi_1(j\omega)$  (ligne continue) et  $\psi_2(j\omega)$  (ligne en pointillée) pour  $-\infty < \omega < +\infty$

A partir de la figure (III.3), on peut voir que les deux tracés n'encerclent pas l'origine du plan complexe. Alors, on peut dire que le système de commande de cet exemple avec les deux types de correcteur PI<sup>0.88</sup> d'ordre fractionnaire et PI classique est stable.

#### III.4.1.2 Réponses fréquentielles et temporelles

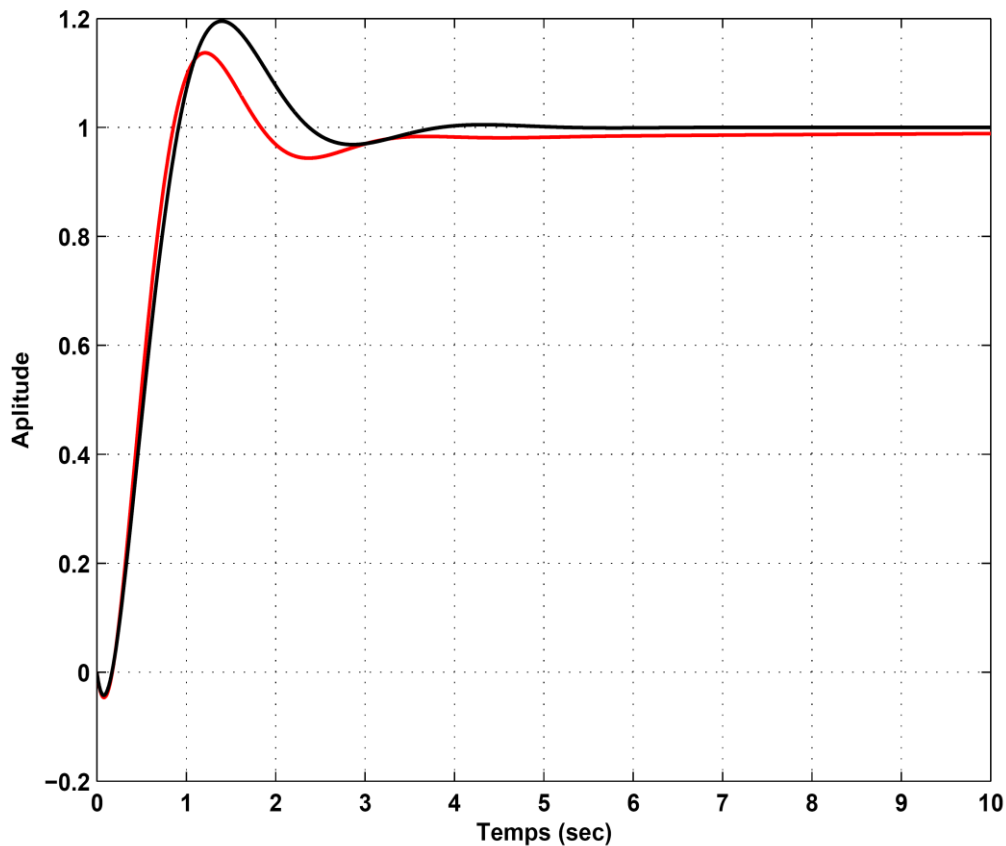
La figure (III.4) montre les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C_F(s)G(s)$  et  $C(s)G(s)$  des deux systèmes de commande de cet exemple avec le correcteur PI<sup>0.88</sup> d'ordre fractionnaire de l'équation (III.11) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.9), respectivement.



**Figure (III.4)** : Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C_F(s)G(s)$  (bleu) et  $C(s)G(s)$  (rouge)

De la figure (III.4), on note que les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C_F(s)G(s)$  et  $C(s)G(s)$  sont presque confondus autour de la fréquence au gain unité.

La figure (III.5) montre les réponses indicielles du système de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.88}$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.11) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.9). Puisqu'on a utilisé l'ISE, le dépassement et le temps de réponse de la réponse indicielle comme performances caractéristiques servant à régler la valeur de l'ordre fractionnaire  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire, le tableau (III.1) contient les valeurs de ces trois performances caractéristiques du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.88}$  de l'équation (III.11) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.9) conduisant au  $PI^{0.88}$ .



**Figure (III.5) :** Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.88}$  (rouge) et avec le correcteur PI classique (noir)

**Tableau (III.1) :** Performances du système de commande avec les correcteurs  $PI^{0.88}$  et PI

Correcteur	ISE	Dépassement (%)	Temps de réponse (s)
PI	0.45	19.52	3.28
$PI^{0.88}$	0.41	14.46	3.08

Les résultats de comparaison des trois performances caractéristiques sont donnés comme suit :

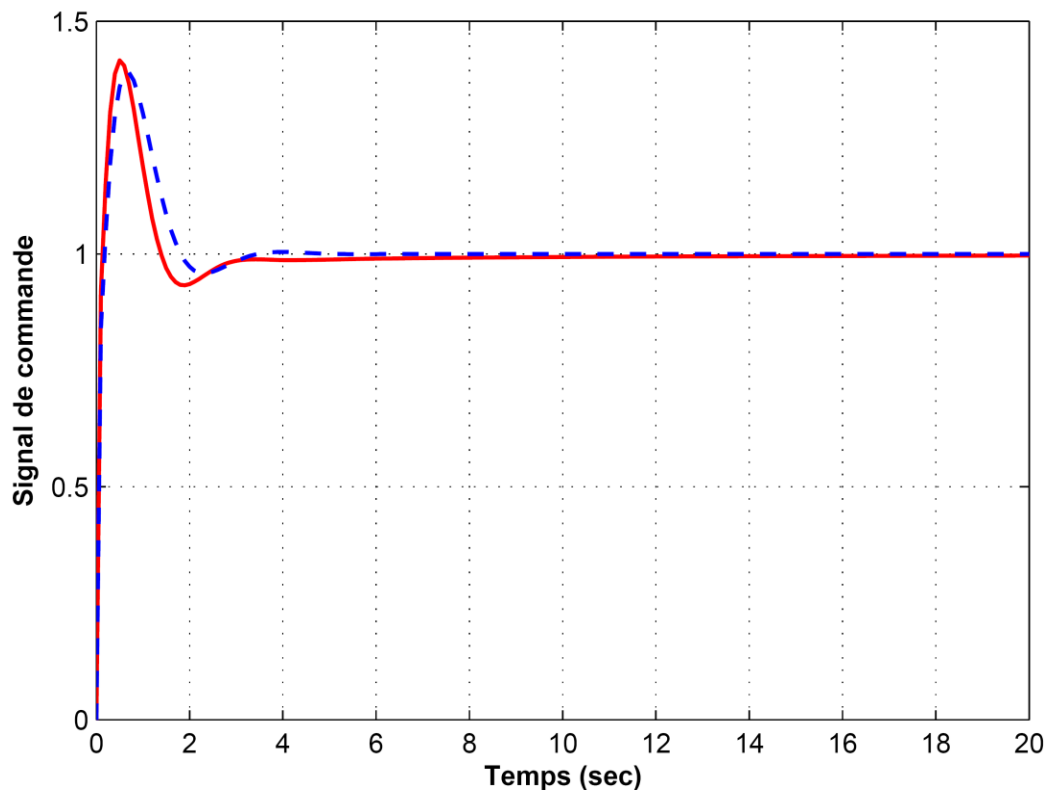
- L'ISE du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire est environ 9% plus petit que celui avec le correcteur PI classique.
- Le dépassement du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire est environ 26% plus petit que celui avec le correcteur PI classique.
- Le temps de réponse du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire est environ 6% plus petit que celui du correcteur PI classique.

#### III.4.1.3 Signal de commande

Le signal de commande  $U_c(s)$  du système de commande de la figure (III.1) est défini par :

$$U_c(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (\text{III.20})$$

Les signaux de commande du système de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire de l'équation (III.11) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.9) sont présentés dans la figure (III.6).

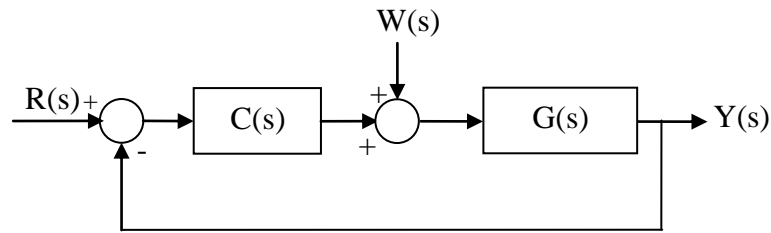


**Figure (III.6) :** Signal de commande du système de commande avec les correcteurs  $PI^{0.88}$  (rouge) et PI classique (bleu)

De la figure (III.6), on peut voir que le signal de commande du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire est presque le même que celui du système avec le correcteur PI classique. Alors, l'amélioration apportée aux trois performances caractéristiques avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire n'a pas altérée le signal de commande.

#### III.4.1.4 Perturbation

En pratique, la plupart des systèmes sont victimes de perturbations qui influencent leur fonctionnement. Pour étudier l'influence de ces entrées secondaires, on reprend le diagramme de la figure (III.1), en introduisant le point d'application d'une perturbation  $W(s)$  comme il est montré dans la figure (III.7) suivante :

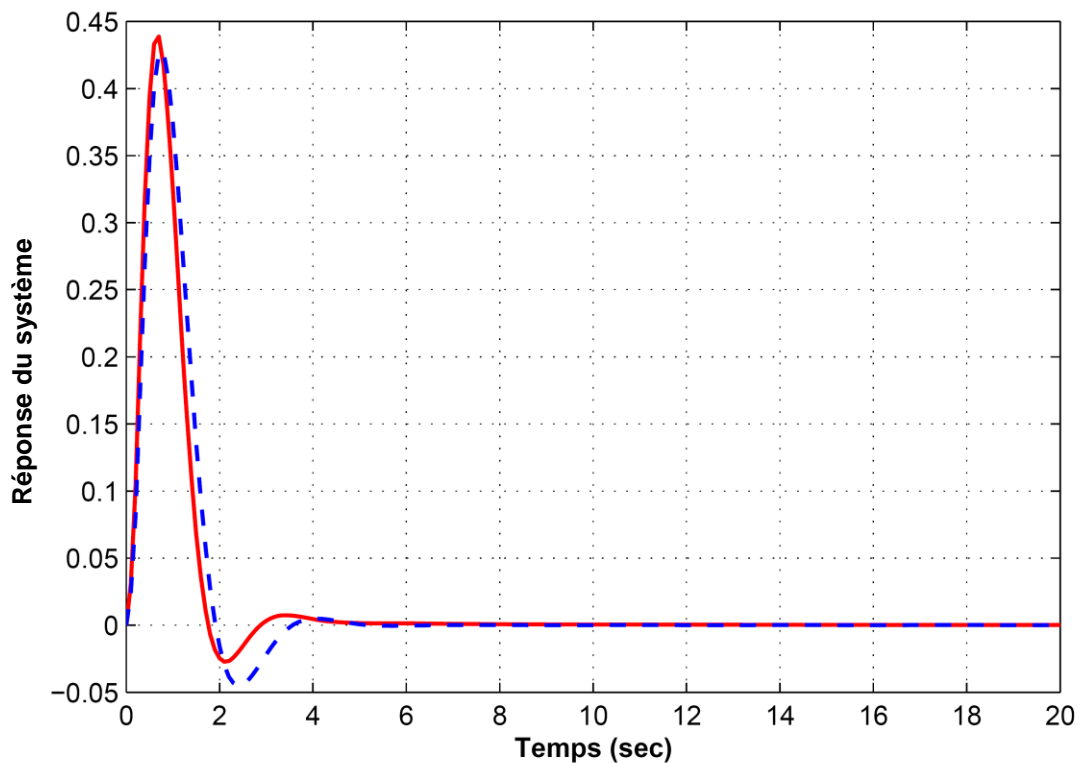


**Figure (III.7) :** Système de commande avec le signal de perturbation

Afin de n'étudier que l'effet de la perturbation  $W(s)$ , on considère que  $R(s) = 0$ . Donc, pour  $R(s) = 0$  la fonction de transfert de la perturbation  $W(s)$  au signal de sortie  $Y(s)$  est donnée par l'expression suivante:

$$D(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (\text{III.21})$$

La figure (III.8) montre les signaux de sortie notés perturbation dus à l'entrée perturbation  $W(s)$  échelon unité du système de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire de l'équation (III.11) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.9).



**Figure (III.8) :** Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec les correcteurs  $PI^{0.88}$  (rouge) et PI classique (bleu)

A partir de la figure (III.8) on note que le système de commande avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire rejette complètement la perturbation exactement comme le système de commande avec le correcteur  $PI$  classique.

#### III.4.1.5 Sensibilité

La fonction de sensibilité ou la sensibilité  $S(s)$  décrit la fonction de transfert d'une perturbation externe  $N(s)$  à la sortie du système de commande comme montré dans la figure (III.9) suivante :

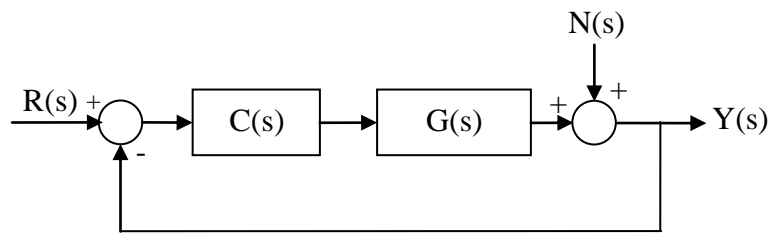


Figure (III.9) : Système de commande avec la perturbation externe

Afin de n'étudier que l'effet de la perturbation externe  $N(s)$ , on considère que  $R(s) = 0$ . Donc, pour  $R(s) = 0$ , la fonction de transfert de la perturbation  $N(s)$  au signal de sortie  $Y(s)$  est donnée par l'expression suivante:

$$S(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \quad (\text{III.22})$$

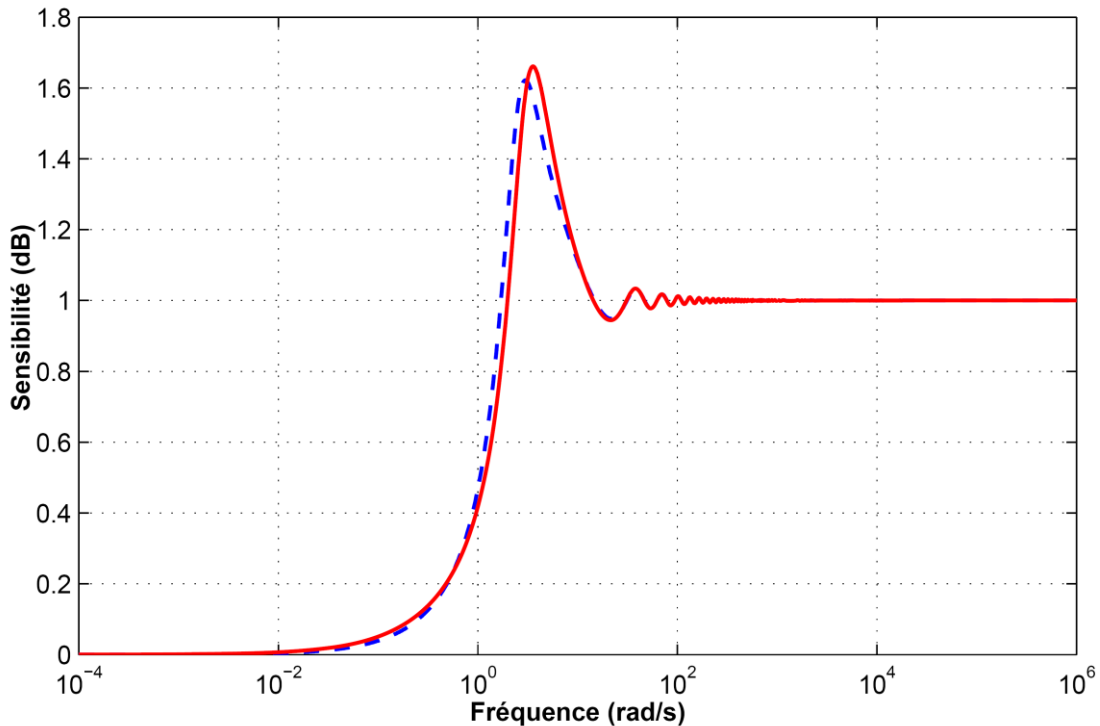
Une façon pour caractériser la sensibilité d'un système de commande est à travers le maximum du module de la fonction de sensibilité  $S(j\omega)$  nominal  $M_s$  qui est donnée comme suit :

$$M_s = \max_{0 \leq \omega < \infty} |S(j\omega)|_{dB} = \max_{0 \leq \omega < \infty} \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \quad (\text{III.23})$$

Pour une bonne mesure de la sensibilité le paramètre  $M_s$  doit être entre 1.3 et 2 dB.

La figure (III.10) montre le tracé de Bode des fonctions de sensibilité  $S(s)$  du système de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.88}$  fractionnaire de l'équation (III.11) et avec le correcteur  $PI$  classique de l'équation (III.9). De la figure (III.10), on note que le paramètre  $M_s$  des deux tracés de Bode de  $S(s)$  est tel que  $1.3 < M_s < 2$  ; donc le système de commande de cet exemple a une bonne mesure de la sensibilité pour les deux correcteurs  $PI^{0.88}$  et  $PI$ .

D'après les résultats obtenus pour la méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda$  fractionnaire proposée on remarque que malgré les améliorations réalisées pour les trois performances caractéristiques considérées, ni le signal de commande ni le rejet de la perturbation ni la mesure de la sensibilité n'ont été altérés.



**Figure (III.10)** : Tracé de Bode de la sensibilité  $S(j\omega)$  du système de commande avec les correcteurs  $PI^{0.88}$  (rouge) et PI classique (bleu)

### III.4.2 Exemple 2

Le deuxième exemple concerne la conception d'un correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire  $C_F(s)$  de l'équation (III.6) du système de commande à retour unitaire de la figure (III.1), dont la fonction de transfert  $G(s)$  du processus est un système du premier ordre avec retard, donnée par [54]:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 10s} e^{-s} \quad (\text{III.24})$$

Dans [54], les valeurs numériques des paramètres  $K_P$  et  $T_I$  du correcteur PI classique obtenues pour le processus de l'équation (III.8) sont  $K_P = 5$  et  $T_I = 8$ . Donc, sa fonction de transfert est donnée par [54] :

$$C(s) = 5 \left( 1 + \frac{1}{8s} \right) \quad (\text{III.25})$$

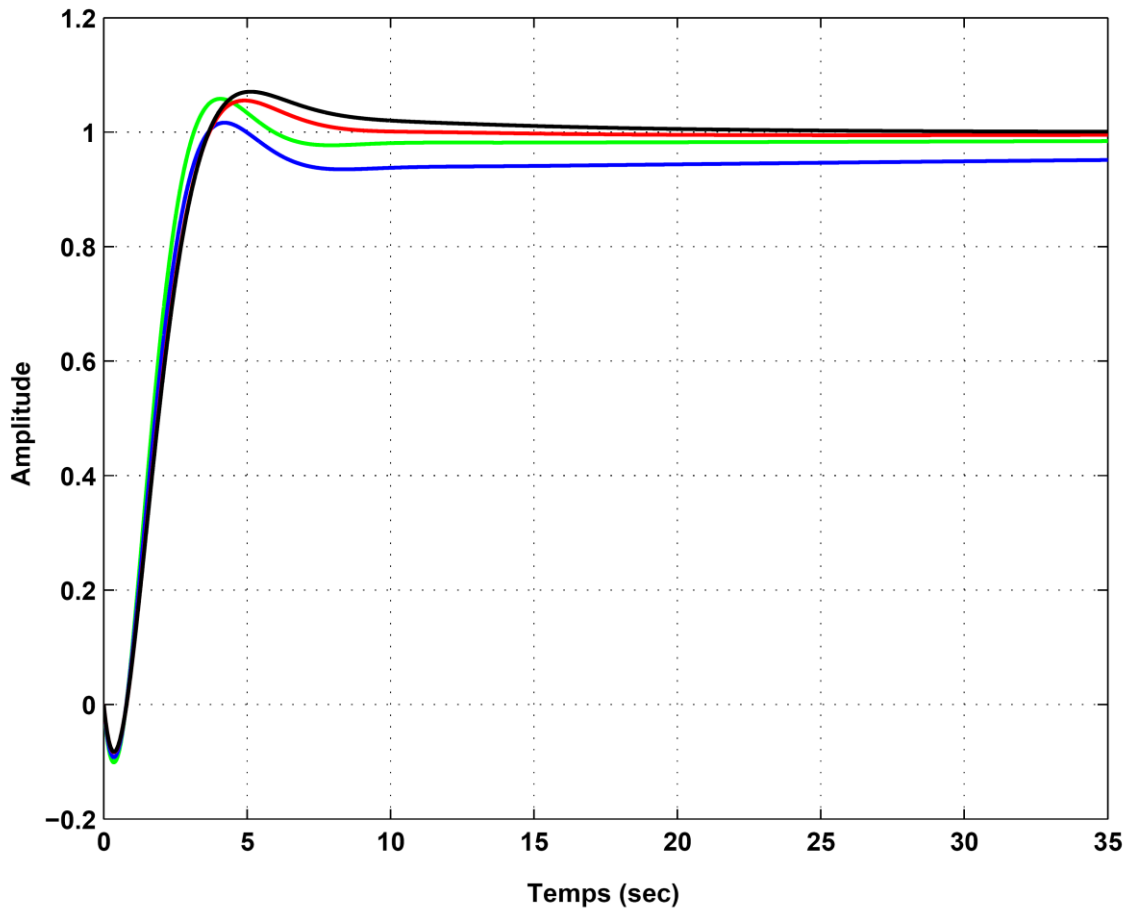
Alors, dans ce contexte, la conception du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire pour le système du premier ordre avec retard de l'équation (III.8), donnée dans [54], est basée sur le correcteur PI classique, déjà conçu pour le système du premier ordre avec retard dans [54] et donné par

l'équation (III.25). Donc, la fonction de transfert  $C_F(s)$  de ce correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$C_F(s) = 5 \left( 1 + \frac{1}{8s^\lambda} \right) \quad (\text{III.26})$$

où l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\lambda$  est tel que  $0 < \lambda < 1$ .

La figure (III.11) montre les réponses indicielles du système de commande en boucle fermée de la figure (III.1) pour le modèle du premier ordre avec retard de l'équation (III.24) avec le correcteur PI classique de l'équation (III.25) et le correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.26) et ce la pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ).



**Figure (III.11):** Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur classique PI (noir) et le correcteur  $PI^\lambda$  fractionnaire pour les valeurs de  $\lambda$  :  $\lambda = 0,19$  (vert),  $\lambda = 0,47$  (bleu) et  $\lambda = 0,93$  (rouge)

A partir de la figure (III.11), on peut facilement voir que l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.26) a une influence sur le comportement temporelle du système de commande de ce deuxième exemple. Donc, ce paramètre  $\lambda$  peut jouer un grand rôle dans l'amélioration de ses performances caractéristiques.

Alors, certains critères peuvent être utilisés pour obtenir une valeur de l'ordre fractionnaire  $\lambda$  qui conduit à la meilleure amélioration des caractéristiques de performances du système de commande de ce deuxième exemple. Comme dans ce contexte le réglage du paramètre  $\lambda$  du correcteur PI<sup>λ</sup> d'ordre fractionnaire est basé sur l'amélioration de l'intégrale du carré de l'erreur, du dépassement et du temps de réponse de la réponse indicielle du système de commande avec le correcteur d'ordre fractionnaire comparés à ces mêmes performances caractéristiques du système de commande avec le correcteur PI classique conduisant au correcteur PI<sup>λ</sup> d'ordre fractionnaire ; la meilleure valeur de l'ordre fractionnaire  $\lambda$  qui garantit l'amélioration des trois caractéristiques de performances en même temps est  $\lambda = 0,16$ . Alors, la fonction de transfert du correcteur PI<sup>λ</sup> d'ordre fractionnaire  $C_F(s)$  est donnée comme suit :

$$C_F(s) = 5 \left( 1 + \frac{1}{8s^{0.16}} \right) \quad (\text{III.27})$$

La fonction rationnelle approximant le correcteur PI<sup>0.16</sup> d'ordre fractionnaire de l'équation (III.27) qui va être utilisée dans les simulations est donné par :

$$C_F(s) = 5 \left( 1 + 0.3774 \frac{\prod_{i=0}^6 \left( 1 + \frac{s}{0.0027(5.5468)^i} \right)}{\prod_{i=0}^6 \left( 1 + \frac{s}{0.0020(5.5468)^i} \right)} \right) \quad (\text{III.28})$$

L'approximation de Pade du premier ordre de la fonction retard  $e^{-s}$  de la fonction de transfert  $G(s)$  du processus de l'équation (III.24) est donnée par:

$$e^{-s} = \left( \frac{1 - 0.5s}{1 + 0.5s} \right) \quad (\text{III.29})$$

### III.4.2.1 Stabilité

La fonction de transfert en boucle fermée du système de commande de ce deuxième exemple avec le correcteur PI<sup>0.16</sup> d'ordre fractionnaire et avec le correcteur PI classique sont données, respectivement, par les expressions suivantes :

$$G_{\text{BFPI}^{0.16}}(s) = \frac{C_F(s)G(s)}{1 + C_F(s)G(s)} = \frac{(40s^{0.16} + 5)e^{-s}}{80s^{1.16} + 8s^{0.16} + (40s^{0.16} + 5)e^{-s}} \quad (\text{III.30})$$

$$G_{\text{BFPI}}(s) = \frac{C(s)G(s)s}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(40s + 5)e^{-s}}{80s^2 + 8s + (40s + 5)e^{-s}} \quad (\text{III.31})$$

Les dénominateurs des ces deux fonctions de transfert sont donnés comme suit:

$$D_{\text{BFPI}^{0.16}}(s) = 80s^{1.16} + 8s^{0.16} + (40s^{0.16} + 5)e^{-s} \quad (\text{III.32})$$

$$D_{\text{BFPI}}(s) = 80s^2 + 8s + (40s + 5)e^{-s} \quad (\text{III.33})$$

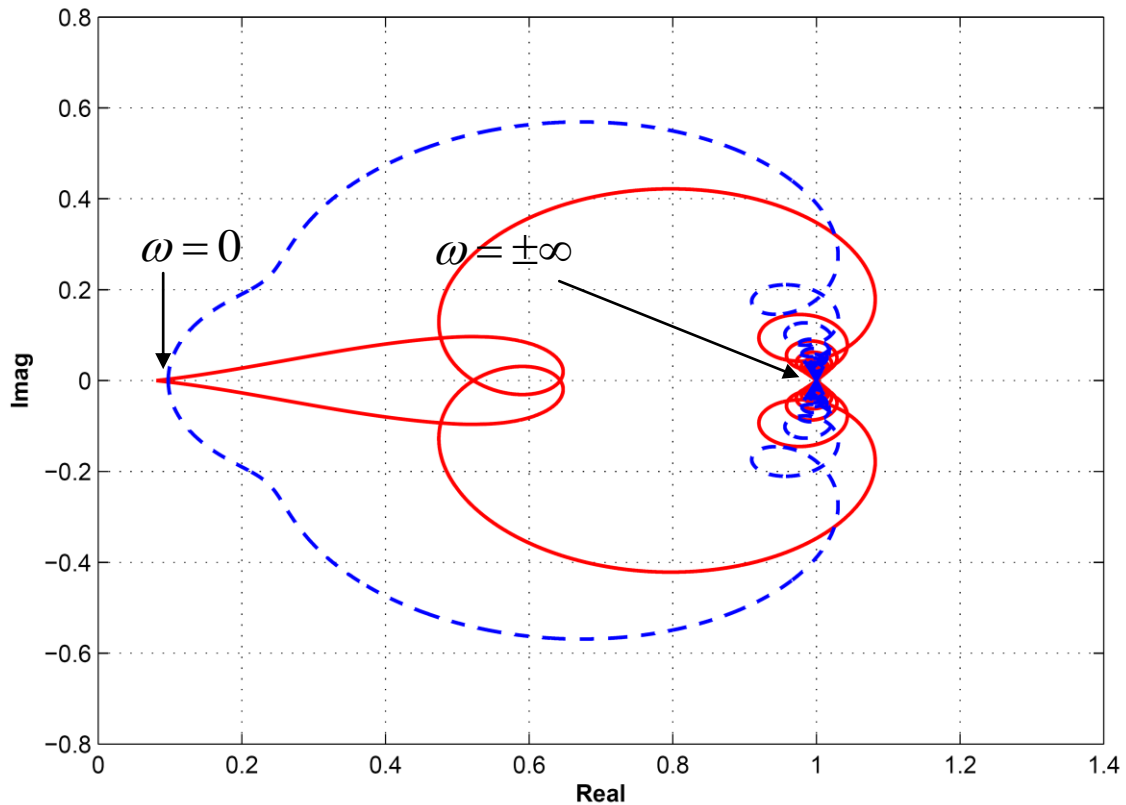
L'analyse de la stabilité pour ce type de système est réalisée de la même façon que le premier exemple à l'aide d'une méthode dite la méthode de Mikhailov généralisée modifiée proposé dans [37].

Pour les deux systèmes de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.16}$  d'ordre fractionnaire et avec le correcteur PI classique les deux fonctions  $\psi_1(s)$  et  $\psi_2(s)$  sont données, respectivement, par les expressions suivantes :

$$\psi_1(s) = \frac{D_{\text{BFPI}^{0.16}}(s)}{80(s+0.05)^{1.16}} = \frac{80s^{1.16} + 8s^{0.16} + (40s^{0.16} + 5)e^{-s}}{80(s+0.05)^{1.16}} \quad (\text{III.34})$$

$$\psi_2(s) = \frac{D_{\text{BFPI}}(s)}{80(s+0.02)^2} = \frac{80s^2 + 8s + (40s + 5)e^{-s}}{80(s+0.02)^2} \quad (\text{III.35})$$

La figure (III.12) montre les tracés des parties imaginaires contre les parties réelles des deux fonctions  $\psi_1(j\omega)$  et  $\psi_2(j\omega)$  pour  $s = j\omega$ , avec  $-\infty < \omega < +\infty$ .

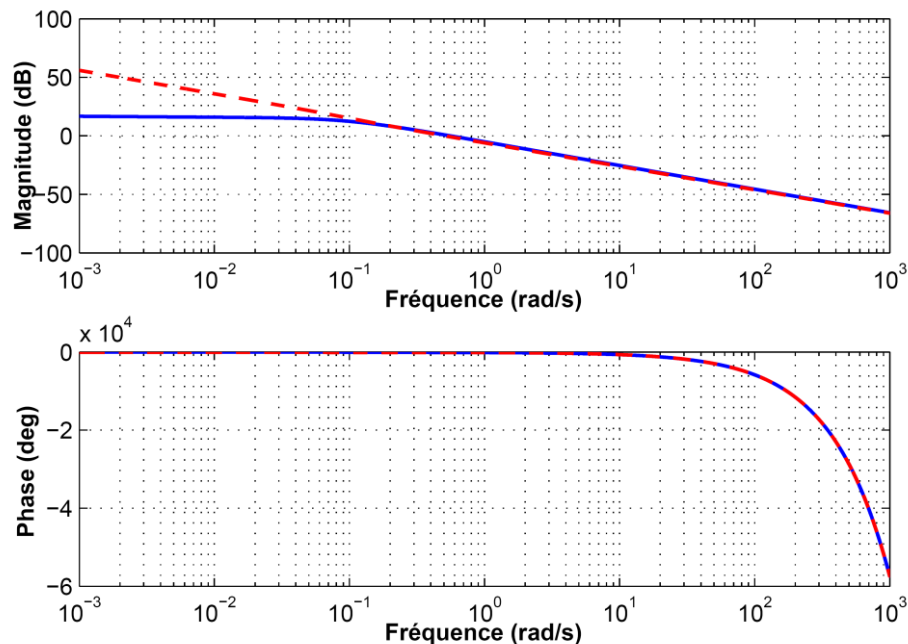


**Figure (III.12) :** Tracés des fonctions  $\psi_1(j\omega)$  (rouge) et  $\psi_2(j\omega)$  (bleu) pour  $-\infty < \omega < +\infty$

A partir de la figure (III.12) on peut voir que les deux tracés n'encerclent pas l'origine du plan complexe. Alors, on peut dire que le système de commande de cet exemple avec les deux types de correcteur  $PI^{0.16}$  d'ordre fractionnaire et PI classique est stable.

#### III.4.2.2 Réponses fréquentielles et temporelles

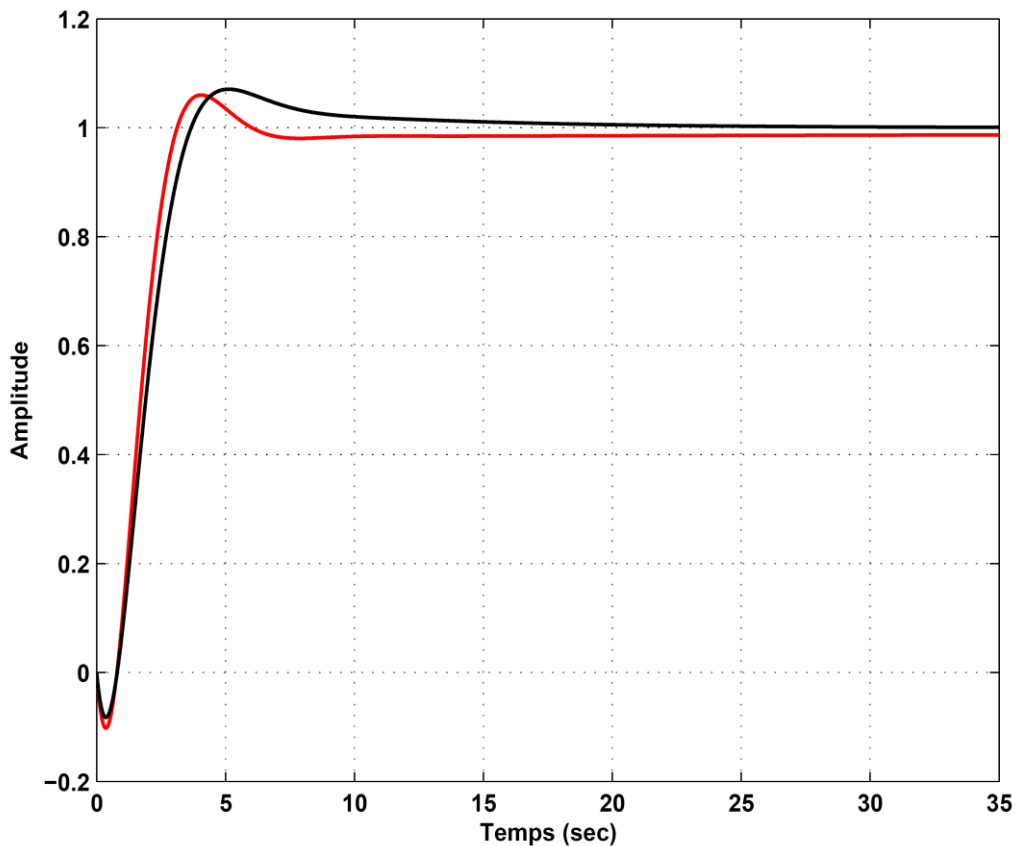
La figure (III.13) montre les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C_F(s)G(s)$  et  $C(s)G(s)$  des deux systèmes de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.16}$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.27) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.25), respectivement.



**Figure (III.13) :** Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C_F(s)G(s)$  (bleu) et  $C(s)G(s)$  (rouge)

De la figure (III.13) on note que les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C_F(s)G(s)$  et  $C(s)G(s)$  sont presque confondus autour de la fréquence au gain unité.

La figure (III.14) montre les réponses indicielles du système de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.16}$  d'ordre fractionnaire de l'équation (III.27) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.25). Puisqu'on a utilisé l'ISE, le dépassement et le temps de réponse de la réponse indicielle comme performances caractéristiques servant à régler la valeur de l'ordre fractionnaire  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire, le tableau (III.2) contient les valeurs de ces trois performances caractéristiques du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.16}$  de l'équation (III.27) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.25) conduisant au  $PI^{0.16}$ .



**Figure (III.14) :** Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.16}$  (rouge) et avec le correcteur PI classique (noir)

**Tableau (III.2) :** Performances du système de commande avec les correcteurs  $PI^{0.16}$  et PI

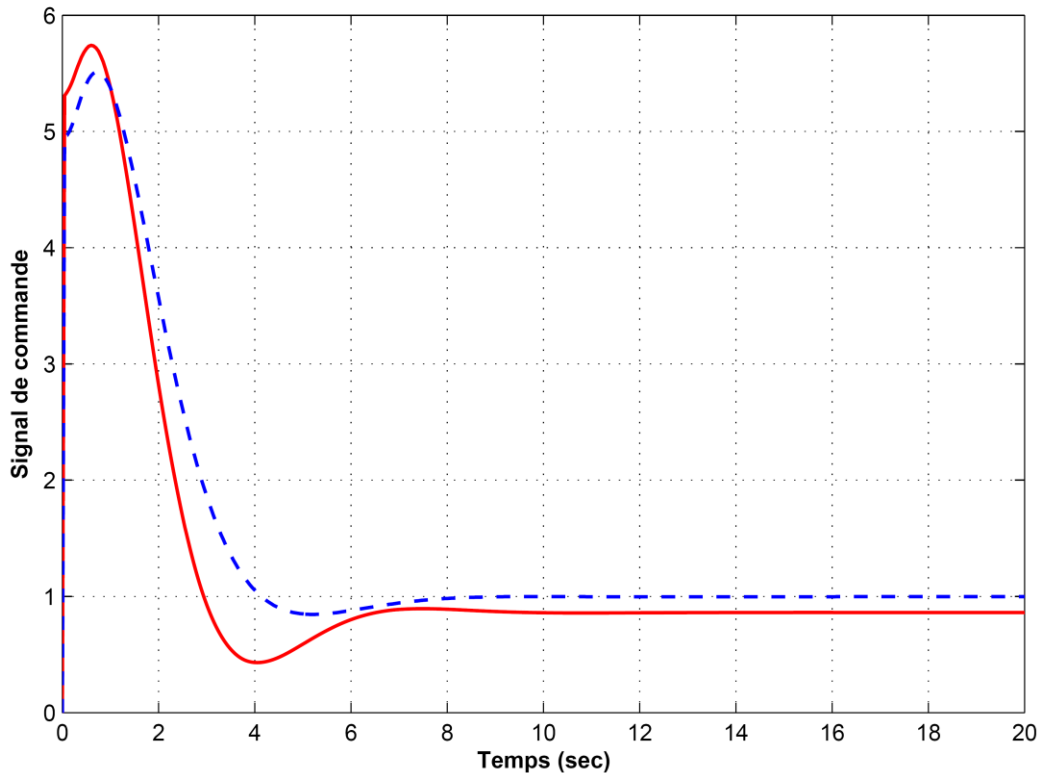
Correcteur	ISE	Dépassement (%)	Temps de réponse (s)
PI	1.66	7.07	10.09
$PI^{0.16}$	1.54	6.00	5.39

Les résultats de comparaison des trois performances caractéristiques sont donnés comme suit :

- L'ISE du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire est environ 7% plus petit que celui avec le correcteur PI classique.
- Le dépassement du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire est environ 15% plus petit que celui avec le correcteur PI classique.
- Le temps de réponse du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire est environ 47% plus petit que celui du correcteur PI classique.

### III.4.2.3 Signal de commande

Les signaux de commande du système de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire de l'équation (III.27) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.25) sont présentés dans la figure (III.15).

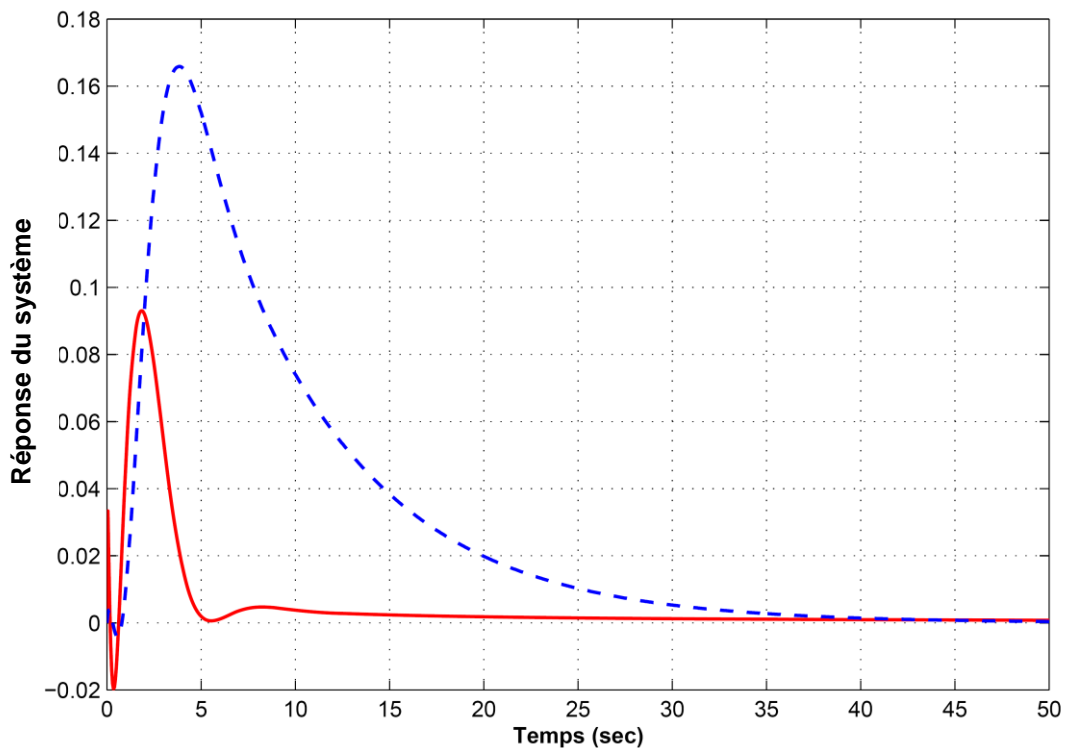


**Figure (III.15)** : Signal de commande du système de commande avec les correcteurs  $PI^{0.16}$  (rouge) et PI classique (bleu)

De la figure (III.15), on peut voir que le signal de commande du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire est presque le même que celui du système avec le correcteur PI classique. Alors, l'amélioration apportée dans les trois performances caractéristiques avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire n'a pas altéré le signal de commande.

### III.4.2.4 Perturbation

De la même façon que pour le premier exemple, nous étudions l'effet de la perturbation sur le système du deuxième exemple. La figure (III.16) montre les signaux de sortie en réponse à l'entrée de perturbation  $W(s)$  échelon unité en utilisant le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire (III.27) et le correcteur PI classique (III.25).



**Figure (III.16) :** Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec les correcteurs  $PI^{0.16}$  (rouge) et PI classique (bleu)

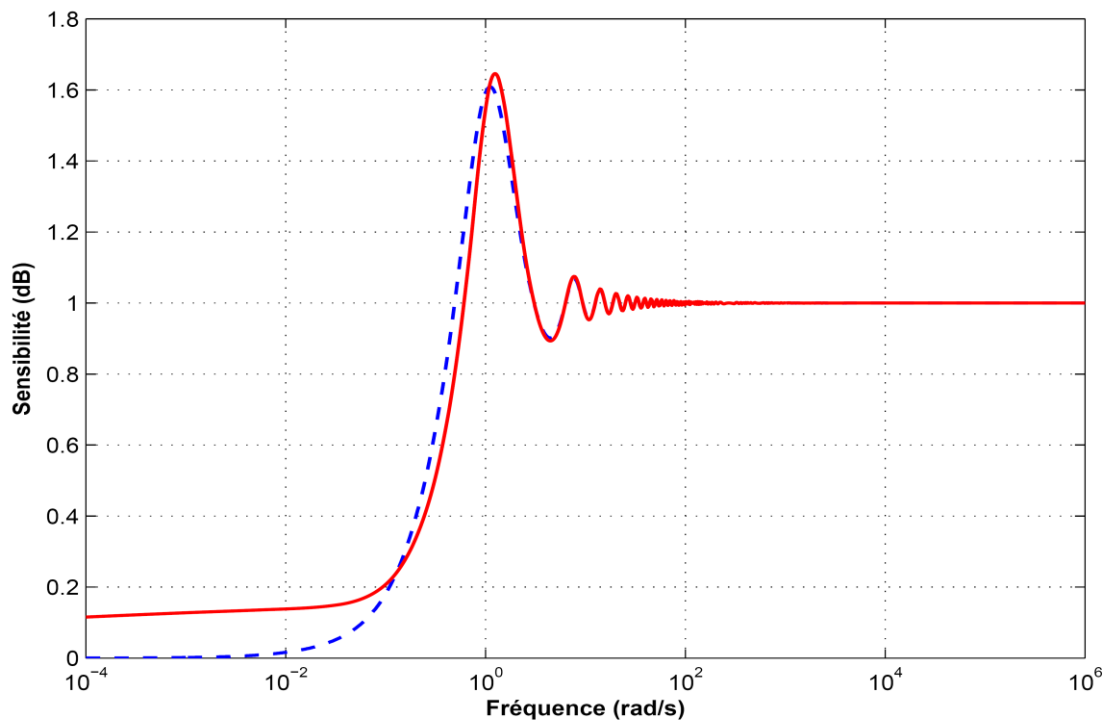
A partir de la figure (III.16) on note que le système de commande avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire rejette complètement la perturbation exactement comme le système de commande avec le correcteur PI classique.

#### III.4.2.5 Sensibilité

Par la même méthode qu'on a utilisé dans le premier exemple, nous étudions la sensibilité du deuxième exemple.

La figure (III.17) montre le tracé de Bode des fonctions de sensibilité  $S(s)$  du système de commande de cet exemple avec le correcteur  $PI^{0.16}$  fractionnaire de l'équation (III.27) et avec le correcteur PI classique de l'équation (III.25). De la figure (III.17) on note que le paramètre  $M_s$  des deux tracés de Bode de  $S(s)$  est tel que  $1.3 < M_s < 2$  ; donc le système de commande de cet exemple a une bonne mesure de la sensibilité pour les deux correcteurs  $PI^{0.16}$  et PI.

D'après les résultats obtenus par la méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda$  fractionnaire proposée, on remarque que malgré les améliorations réalisées pour les trois performances caractéristiques considérées ni le signal de commande ni le rejet de la perturbation ni la mesure de la sensibilité n'ont été altérés.



**Figure (III.17)** : Tracé de Bode de la sensibilité  $S(j\omega)$  du système de commande avec les correcteurs  $PI^{0.16}$  (rouge) et PI classique (bleu)

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté un algorithme de conception du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire simple et efficace pour un système du premier ordre avec retard pour l'amélioration de la qualité de la commande et des performances caractéristiques d'un système de commande classique à retour unitaire.

# Chapitre *IV*

Analyse des Performances  
Caractéristiques du Système  
Fractionnaire de Bagley-Torvik

---

### IV.1 Introduction

Le mouvement d'une plaque mince, rigide, suspendue par un ressort et complètement immergée dans un fluide Newtonien et le mouvement d'un gaz dans un fluide ont été modélisés en utilisant le calcul fractionnaire par des équations différentielles fractionnaires, respectivement, comme suit [55-56] :

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{d^{1/2} y(t)}{dt^{1/2}} + cy(t) = e(t) \quad (\text{IV.1})$$

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{d^{3/2} y(t)}{dt^{3/2}} + cy(t) = e(t) \quad (\text{IV.2})$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres réels constants.

Ce type d'équation différentielle fractionnaire est dit l'équation de Bagley-Torvik [55-56]. Le système général de Bagley-Torvik est représenté par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n^m} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad (\text{IV.3})$$

où  $0 < m < 2$ ,  $0 < \zeta < 1$  et  $\omega_n > 0$ . Sa fonction de transfert est donnée par une fonction irrationnelle comme suit:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^m + \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2} \quad (\text{IV.4})$$

On remarque que pour  $m = 1$ , ce système général de Bagley-Torvik est exactement le système du second ordre classique. Ce type de système d'ordre fractionnaire a montré des comportements allant de la relaxation à l'oscillation, pour différentes valeurs de l'ordre de différentiation  $m$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$ . Pour cette raison, il est intéressant de prendre ce type de système comme modèle de référence dans la théorie de la commande. Alors, l'objectif de ce chapitre est de présenter une analyse de quelques performances caractéristiques temporelle et fréquentielle du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire, en fonction des deux paramètres  $m$  et  $\zeta$ . Les performances caractéristiques obtenues pour le système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire vont être comparés avec celles du système de second ordre classique afin de trouver leur similitude et leur différence pour établir des limites lors de l'utilisation de ce type de système comme modèle de référence dans la théorie de la commande des systèmes.

## IV.2 Solution de l'équation générale de Bagley Torvik

La solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire est généralement plus complexe que celle des équations d'ordre entier. Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire [30], [3]. Dans ce travail on a utilisé la méthode de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire qui se base sur la définition de la différentiation d'ordre fractionnaire de Grunwald–Letnikov [3].

Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire donnée par [3] :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} e(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} e(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} e(t) \quad (IV.5)$$

où  $e(t)$  et  $y(t)$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système linéaire d'ordre fractionnaire. Les ordres des dérivées  $\alpha_i (0 \leq i \leq n)$  et  $\beta_j (0 \leq j \leq m)$  sont des nombres réels tels que  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ ,  $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$  et  $\alpha_n > \beta_m$ , et les coefficients  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$  et  $b_j (j = 0, 1, \dots, m)$  sont des nombres réels. Alors, la solution de cette équation différentielle d'ordre fractionnaire en se basant sur la définition de la différentiation d'ordre fractionnaire de Grunwald–Letnikov est donnée par l'expression suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \left[ \sum_{l=0}^m \left( \frac{b_l}{h^{\beta_l}} \right) \sum_{j=0}^N w_j^{\beta_l} e(t - jh) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \right) \sum_{j=1}^N w_j^{\alpha_i} y(t - jh) \right] \quad (IV.6)$$

avec  $w_0^m = 1$  et  $w_j^m = \left( 1 - \frac{m+1}{j} \right) w_{j-1}^m$ ,  $h$  est la période d'échantillonnage (le pas de calcul)

supposée très petite et  $N = \text{partie entière} \left( \frac{t_0}{h} \right)$  où  $t_0$  est l'horizon de calcul. Une routine sous

MATLAB pour calculer  $y(t)$  est donnée par la fonction `fode_sol`, comme suit [3] :

```
function y=fode_sol(a,na,b,nb,e,t)
h=t(2)-t(1); D=sum(a./[h.^na]); nT=length(t);
vec=[na nb]; W=[]; D1=b(:)/h.^nb(:); nA=length(a);
y1=zeros(nT,1); W=ones(nT,length(vec));
for j=2:nT, W(j,:)=W(j-1,:).*(1-(vec+1)/(j-1)); end
for i=2:nT, A=[y1(i-1:-1:1)]'*W(2:i,1:nA); y1(i)=(e(i)-sum(A.*a./[h.^na]))/D; end
for i=2:nT, y(i)=(W(1:i,nA+1:end)*D1)'*[y1(i:-1:1)]; end
```

où les arguments  $a$ ,  $n_a$ ,  $b$ ,  $n_b$ ,  $e$ , et  $t$  de cette routine sont :  $a = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]$ ,  $n_a = [\alpha_n \ \alpha_{n-1} \ \dots \ \alpha_1 \ \alpha_0]$ ,  $b = [b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_1 \ b_0]$ ,  $n_b = [\beta_m \ \beta_{m-1} \ \dots \ \beta_1 \ \beta_0]$ ,  $e$  = entrée et  $t$  = temps.

Donc, la solution du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.3) est obtenue en utilisant cette routine MATLAB `fode_sol()`, comme suit:

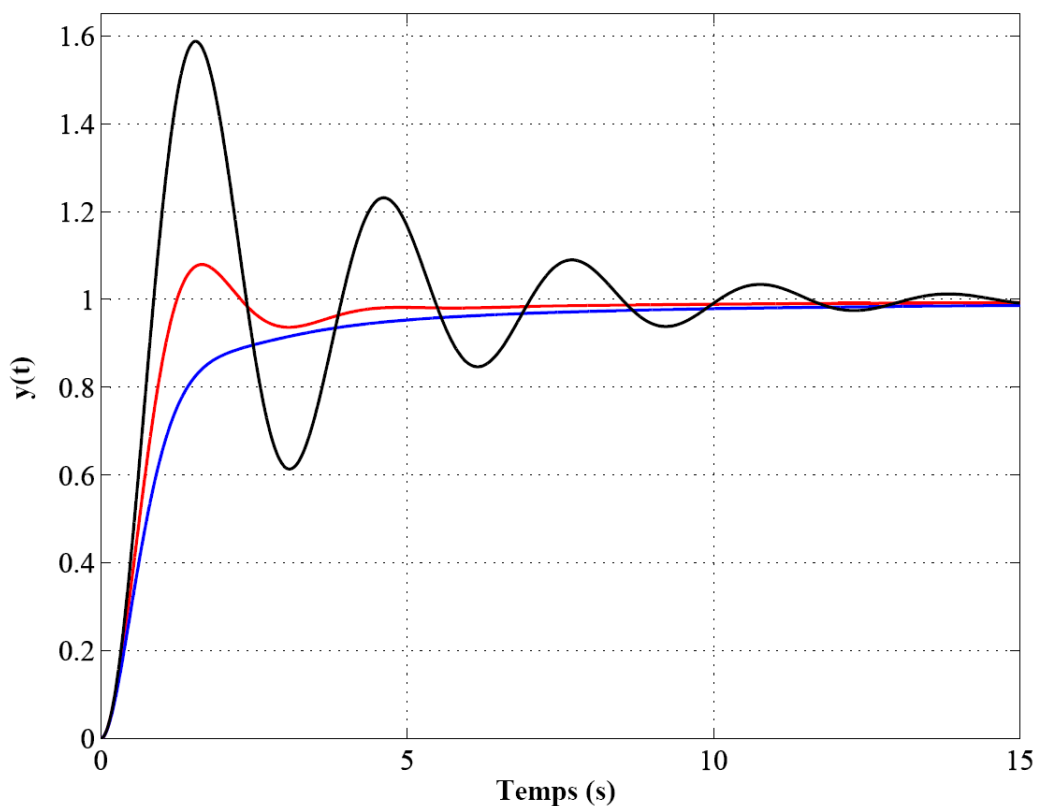
$$y = \text{fode\_sol}(a, n_a, b, n_b, e, t) \quad (\text{IV.7})$$

où  $a = \begin{bmatrix} 1 & 2\zeta \\ \omega_n^2 & \omega_n^m \end{bmatrix}$ ,  $n_a = [2 \ m \ 0]$ ,  $b = [1]$ ,  $n_b = [0]$ ,  $e =$  entrée et  $t =$  temps.

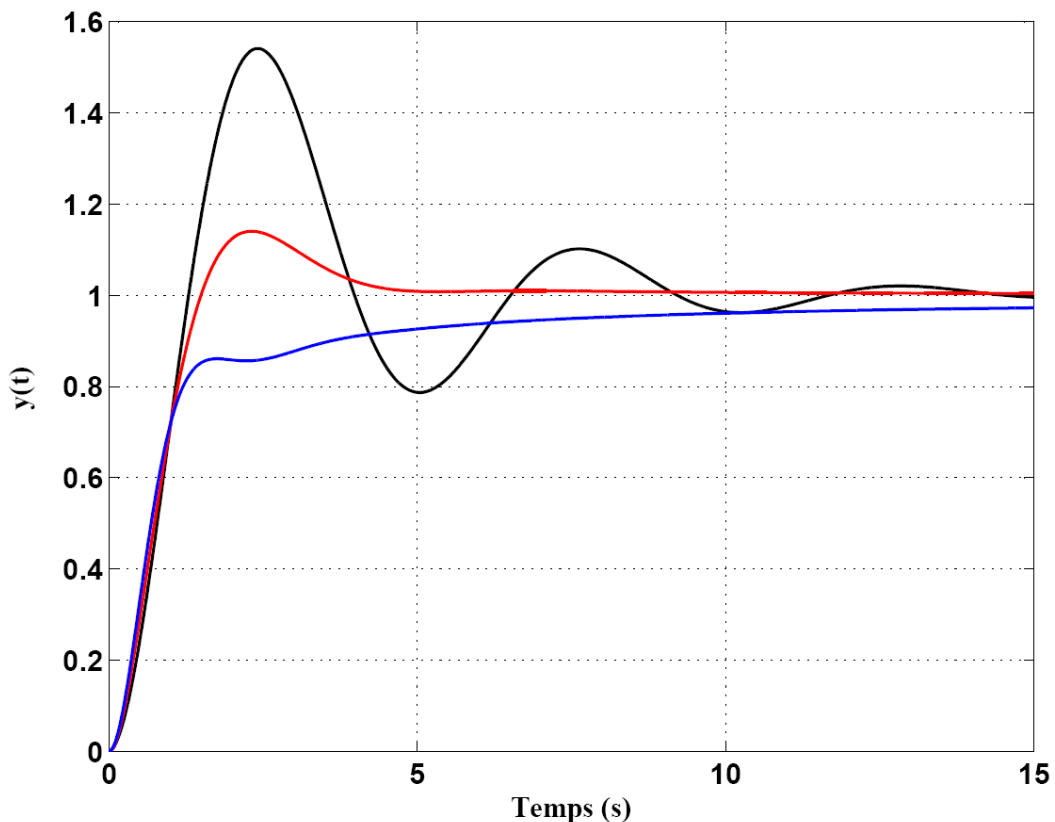
Comme exemple, on prend l'entrée  $e(t) = u(t) =$  l'échelon unité et  $\omega_n = 2$ ; alors l'équation différentielle représentant le système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.3) est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{1}{2^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{2^m} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = u(t) \quad (\text{IV.8})$$

Les réponses indicielles du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.8) pour  $m = 0.87$  et pour différentes valeurs du paramètre  $\zeta$  sont représentées dans la figure (IV.1). Ces réponses indicielles pour  $\zeta = 0.72$  et pour différentes valeurs du paramètre  $m$  sont représentées dans la figure (IV.2).



**Figure (IV.1)** : Réponses indicielles pour  $m = 0.87$  et  $\zeta = 0.15$  (noir),  $\zeta = 0.5$  (rouge),  $\zeta = 0.85$  (bleu)



**Figure (IV.2) :** Réponses indicielles pour  $\zeta = 0.72$  et  $m = 1.56$  (noir),  $m = 1.12$  (rouge),  $m = 0.78$  (bleu)

Les figures (IV.1) et (IV.2) montrent que le comportement du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.8) va de la relaxation à l'oscillation pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $\zeta$ . Alors, il est très intéressant de le considérer comme modèle de référence dans la théorie de la commande.

### IV.3 Performances caractéristiques du système de Bagley Torvik

Avant d'utiliser le système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.3) comme modèle de référence, on doit caractériser ses performances fréquentielles et temporelles. Le but de cette section est de présenter les performances caractéristiques de ce type de système fractionnaire en fonction des deux paramètres  $m$  et  $\zeta$ . Pour établir des limites lors de l'utilisation de ce système de commande d'ordre fractionnaire comme modèle de référence. Ses performances caractéristiques obtenues seront comparées à celles du système de second ordre pour trouver leur similitude et leurs différences.

#### IV.3.1 Spécifications fréquentielles

La fonction de transfert du système général de Bagley-Torvik fractionnaire de l'équation (IV.3) est donnée par la fonction de transfert irrationnelle de l'équation (IV.4). Alors, on a :

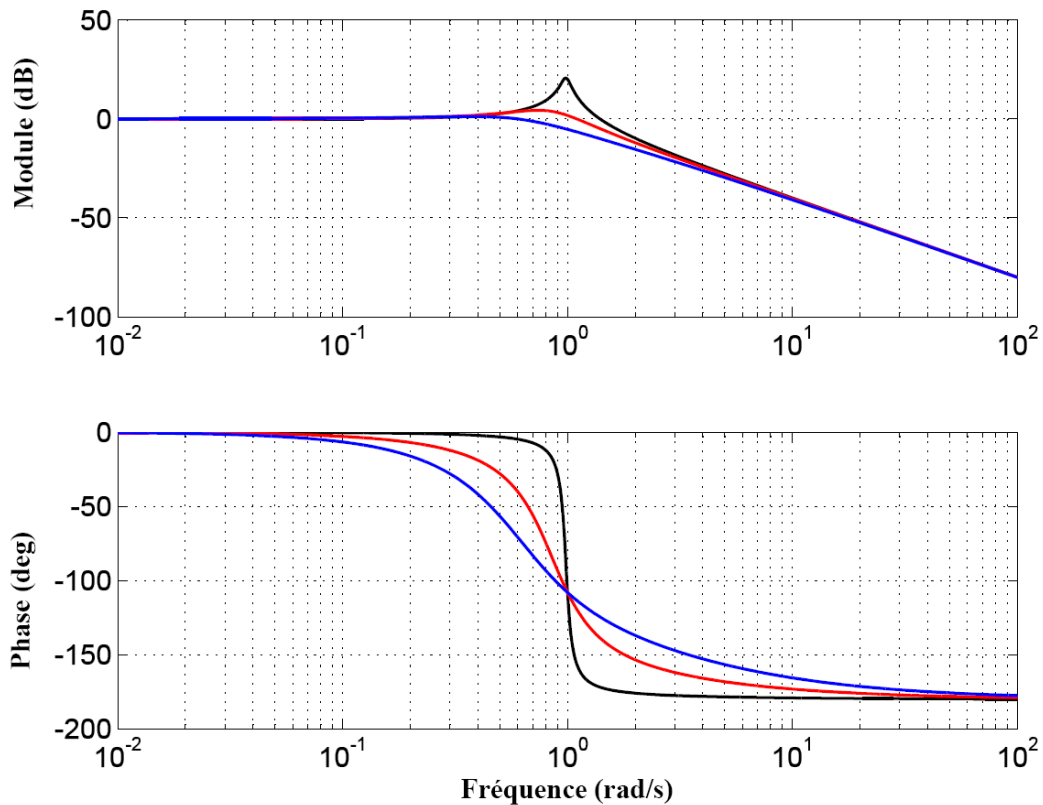
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^m + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (\text{IV.9})$$

où  $0 < m < 2$ ,  $0 < \zeta < 1$  et  $\omega_n > 0$ . L'amplitude et la phase de la fonction de transfert de l'équation (IV.9) sont données par les expressions suivantes:

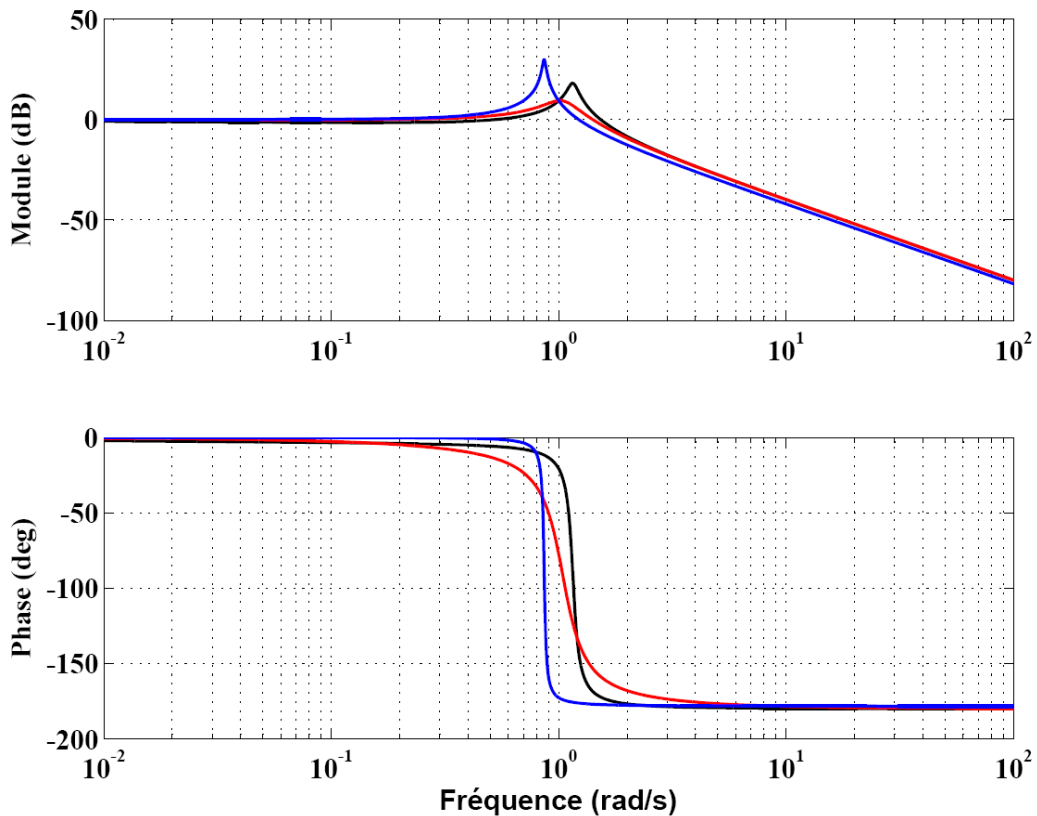
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + 2\zeta \cos\left(\frac{\pi}{2}m\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^m - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \sin\left(\frac{\pi}{2}m\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^m\right)^2}} \quad (\text{IV.10})$$

$$\arg[G(j\omega)] = \arctg \left( \frac{2\zeta \sin\left(\frac{\pi}{2}m\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^m}{1 + 2\zeta \cos\left(\frac{\pi}{2}m\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^m - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \quad (\text{IV.11})$$

La figure (IV.3) montre le diagramme de Bode du système général de Bagley-Torvik pour  $\omega_n = 1$ ,  $m = 1.20$  et pour différentes valeurs du paramètres  $\zeta$ . La figure (IV.4) montre aussi son diagramme de Bode pour  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta = 0.17$  et pour différentes valeurs du paramètres  $m$ .



**Figure (IV.3) :** Tracé de Bode pour  $m = 1.20$  et  $\zeta = 0.05$  (noir),  $\zeta = 0.41$  (rouge),  $\zeta = 0.92$  (bleu)



**Figure (IV.4) :** Tracé de Bode pour  $\zeta = 0.17$  et  $m = 0.23$  (noir),  $m = 0.86$  (rouge),  $m = 1.92$  (bleu)

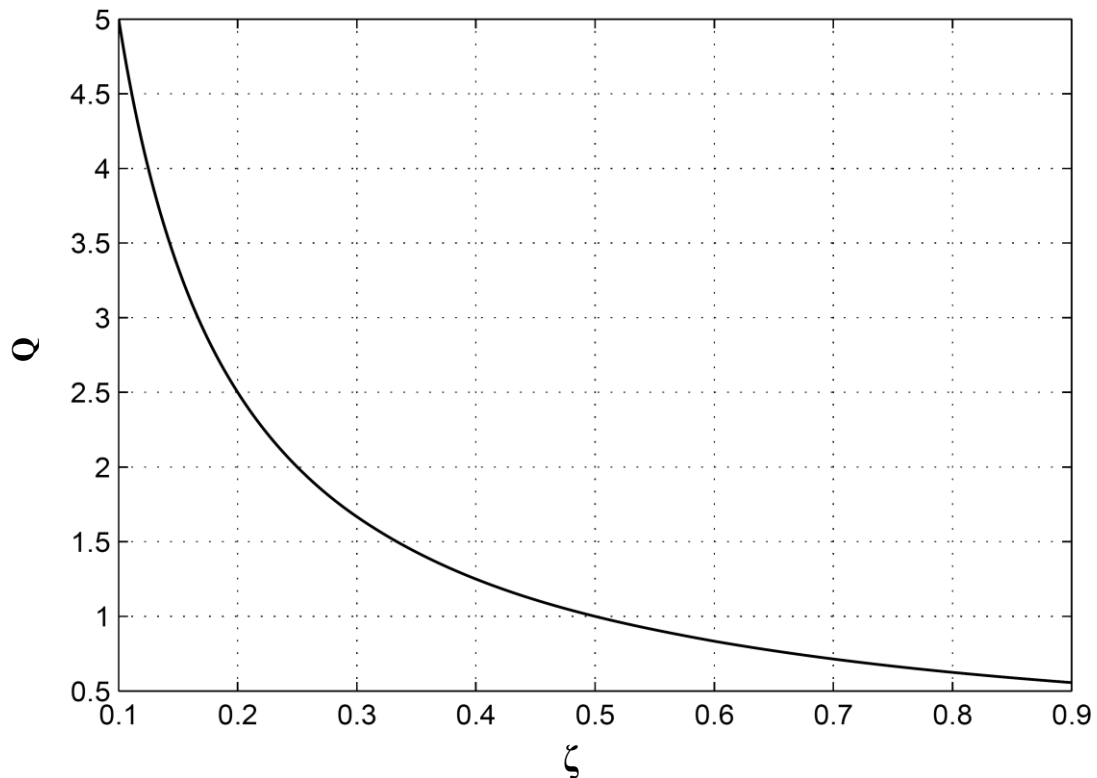
Des figures (IV.3) et (IV.4), on note que pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $\zeta$  le comportement fréquentiel de l'équation générale de Bagley-Torvik de l'équation (IV.8) prend différentes formes. Donc, il est très intéressant d'étudier les variations des spécifications fréquentielles de ce type de système fractionnaire en fonction des deux paramètres  $m$  et  $\zeta$ .

#### IV.3.1.1 Facteur de qualité $Q$

Le facteur de qualité  $Q$  est défini par l'expression suivante [57]:

$$Q = |G(j\omega_n)| = \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left( \frac{j\omega_n}{\omega_n} \right)^m + \left( \frac{j\omega_n}{\omega_n} \right)^2} \right| = \left| \frac{1}{2\zeta(j)^m} \right| = \frac{1}{2\zeta} \quad (\text{IV.12})$$

Le facteur de qualité  $Q$  est inversement proportionnel au paramètre  $\zeta$  et totalement indépendant du paramètre  $m$ . Sa variation par rapport au paramètre  $\zeta$  est représentée sur la figure (IV.5). On remarque que le facteur de qualité  $Q$  du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire est le même que celui du système classique du second ordre (cas pour  $m = 1$ ).



Figures (IV.5) : Tracé du facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $\zeta$

#### IV.3.1.2 Facteur de résonance

Le facteur de résonance  $M_r$  est la valeur maximale de l'amplitude de la réponse fréquentielle et qui est défini par l'expression suivante [57]:

$$M_r = |G(j\omega_r)|_{dB} \quad (IV.13)$$

où  $\omega_r$  est la fréquence de résonance, qui est obtenue tel que [57]:

$$\left. \frac{d|G(j\omega)|_{dB}}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_r} = 0 \quad (IV.14)$$

Les tracés de la variation du facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $m$  pour différentes valeurs du paramètre  $\zeta$  sont représentés dans la figure (IV.6). La figure (IV.7) montre aussi les tracés de la variation du facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $\zeta$  pour différentes valeurs du paramètre  $m$  y compris le cas où  $m = 1$ .

A partir de la figure (IV.6), on peut remarquer que pour une valeur donnée du paramètre  $\zeta$ , le facteur de résonance correspondant  $M_r$  peut être obtenu pour deux valeurs différentes du paramètre  $m$  et qu'un facteur de résonance  $M_r$ , donné, peut être obtenu par différents couples de paramètres  $(\zeta, m)$ . A partir de la figure (IV.7), on peut aussi noter que pour une valeur donnée du paramètre  $m$ , le facteur de résonance  $M_r$  est inversement proportionnel au paramètre  $\zeta$ , comme pour le cas classique où  $m = 1$ .

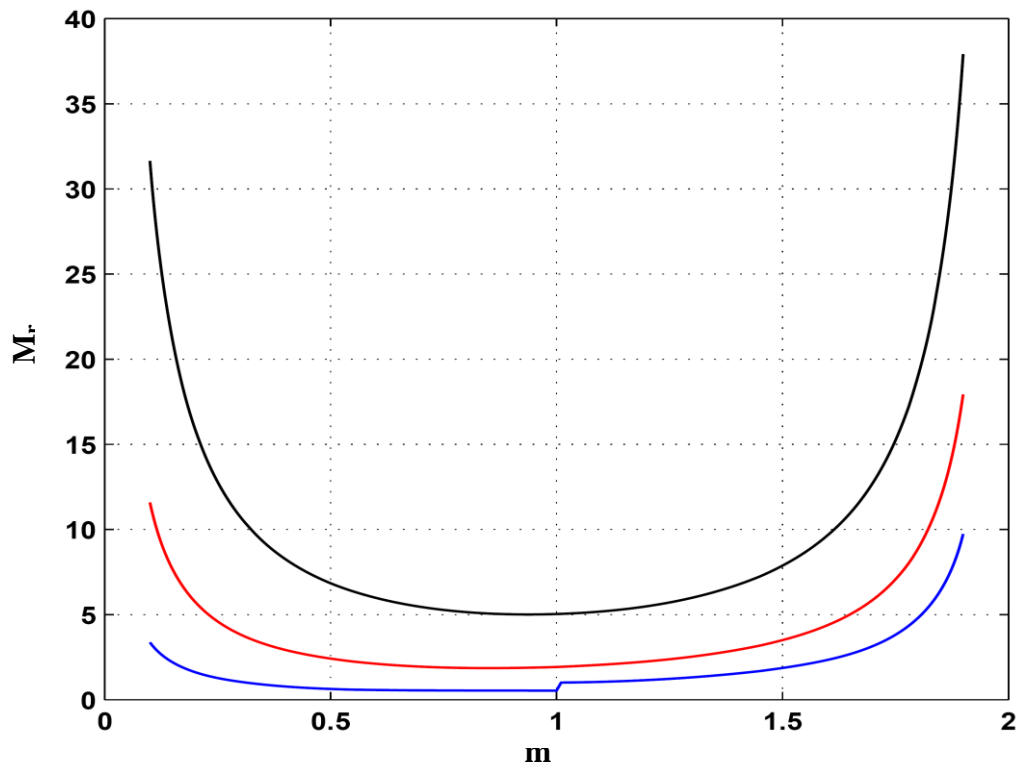


Figure (IV.6) : Tracé du facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $m$  pour  $\zeta = 0.1$  (noir),  $\zeta = 0.27$  (rouge),  $\zeta = 0.9$  (bleu)

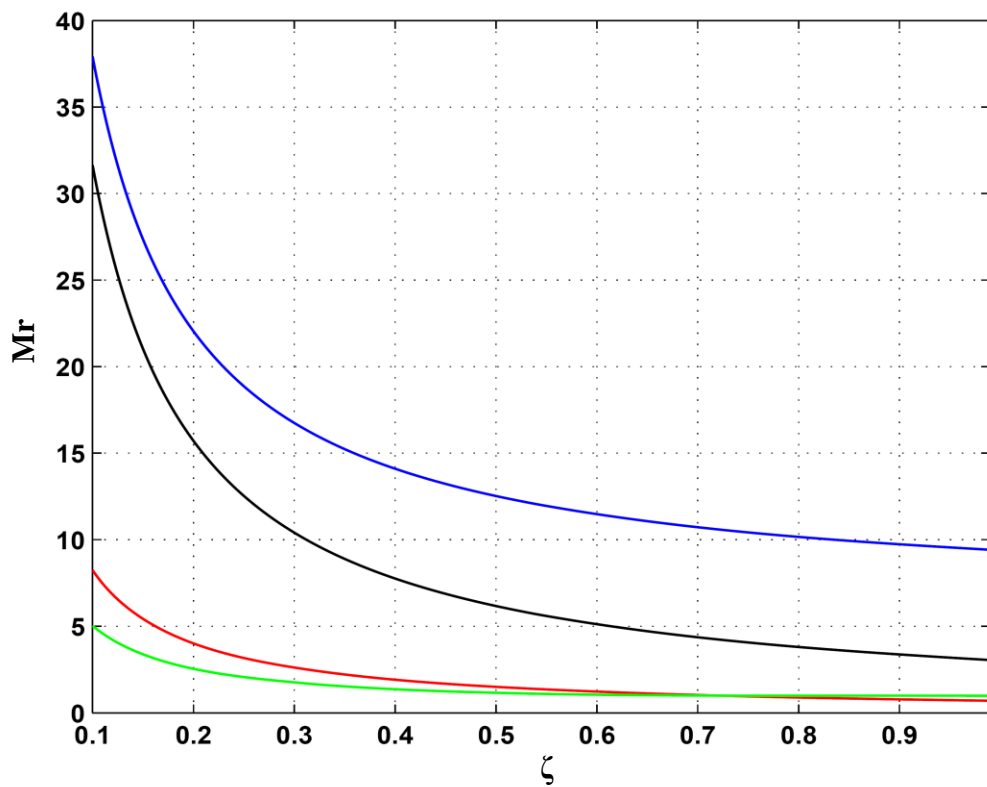


Figure (IV.7) : Tracé du facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $\zeta$  pour  $m = 0.1$  (noir),  $m = 0.4$  (rouge),  $m = 1.9$  (bleu) et  $m = 1$  (vert)

### IV.3.2 Spécifications temporelles

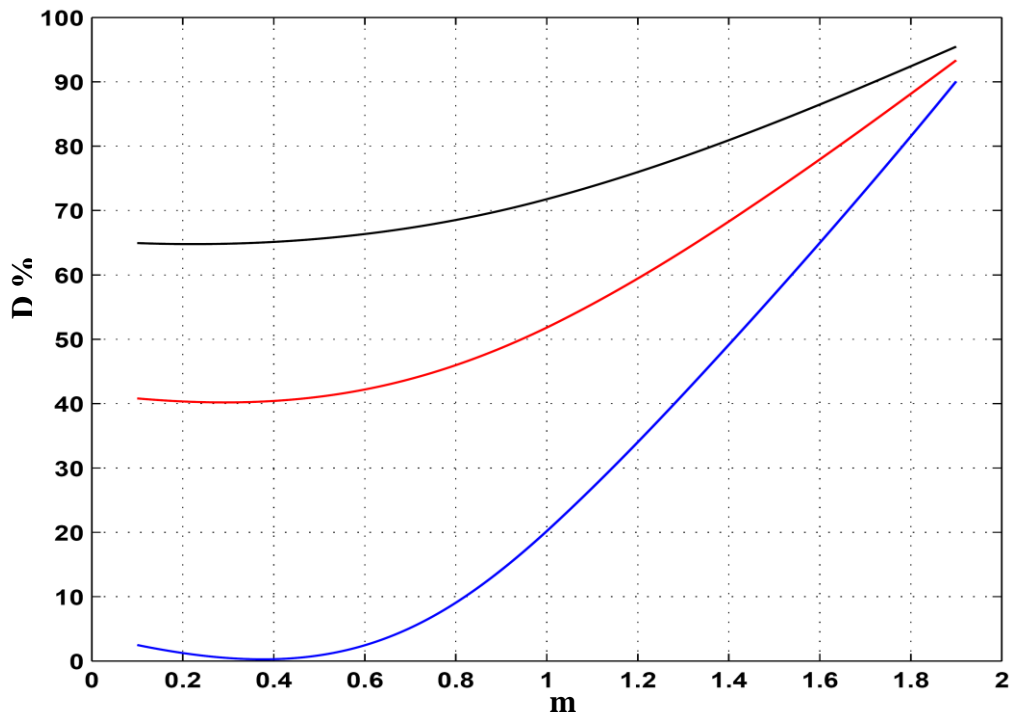
Les spécifications temporelles sont obtenues à partir de la réponse indicielle de l'équation différentielle générale de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.3) en utilisant la fonction `fode_sol()` sous MATLAB donnée dans de la section IV.2. Des figures (IV.1) et (IV.2), on a vu que le comportement de la réponse indicielle du système général de Bagley-Torvik fractionnaire varie considérablement pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $\zeta$ . Donc, il est très intéressant d'étudier les variations des spécifications temporelles de ce type de système fractionnaire en fonction des deux paramètres  $m$  et  $\zeta$ .

#### IV.3.2.1 Le dépassement $D(\%)$

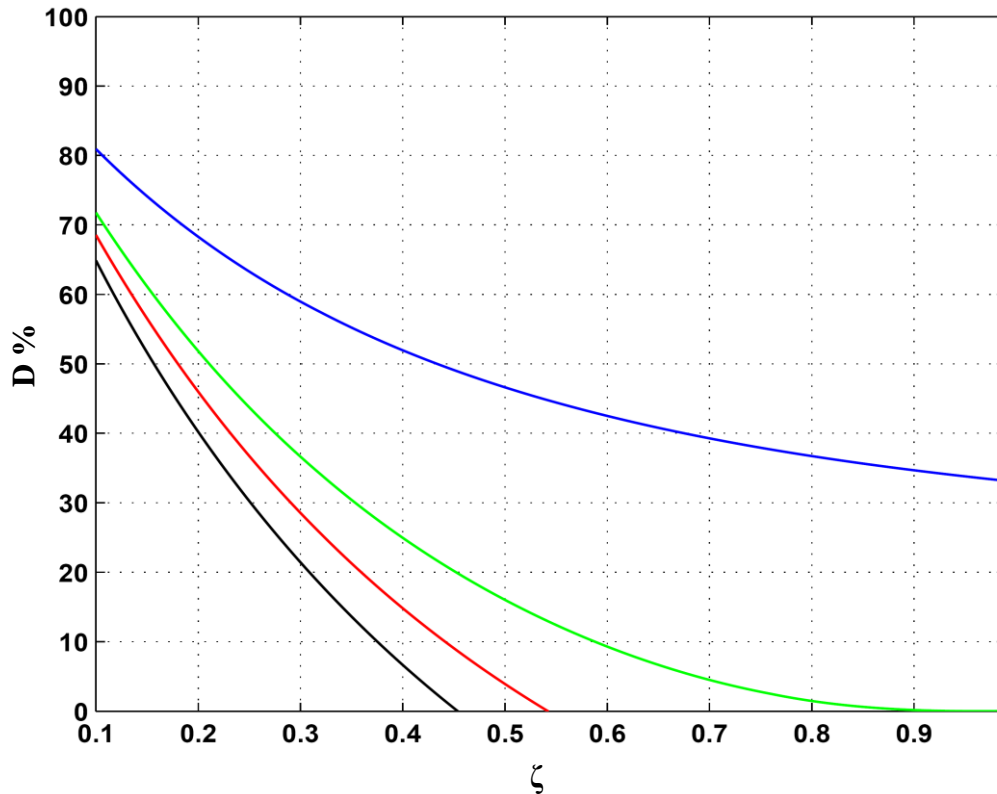
Le dépassement  $D(\%)$  est donné par l'expression suivante [57]:

$$D(\%) = \frac{M_p - X_\infty}{X_\infty} \times 100\% \quad (\text{IV.15})$$

où  $M_p$  est la première valeur maximale et  $X_\infty$  est la valeur finale de la réponse indicielle du système étudié. Les tracés de la variation du dépassement  $D(\%)$  en fonction de  $m$  pour différentes valeurs du paramètre  $\zeta$  sont représentés dans la figure (IV.8). La figure (IV.9) montre aussi les tracés de la variation du dépassement  $D(\%)$  en fonction de  $\zeta$  pour différentes valeurs du paramètre  $m$  y compris le cas pour  $m = 1$ .



**Figure (IV.8) :** Tracé du dépassement  $D(\%)$  en fonction de  $m$  pour  $\zeta = 0.1$  (noir),  $\zeta = 0.2$  (rouge),  $\zeta = 0.45$  (bleu)



**Figure (IV.9) :** Tracé du dépassement  $D(\%)$  en fonction de  $\zeta$  pour  $m = 0.3$  (noir),  $m = 0.8$  (rouge),  $m = 1.4$  (bleu) et  $m = 1$  (vert)

A partir de la figure (IV.8), on remarque que pour une valeur donnée du paramètre  $\zeta$  on peut obtenir le même dépassement  $D(\%)$  pour deux différentes valeurs du paramètre  $m$ . A partir de la figure (IV.9), on voit que pour une valeur donnée du paramètre  $m$  le dépassement  $D(\%)$  est inversement proportionnel au paramètre  $\zeta$ , comme pour le cas classique  $m = 1$ . Des deux figures, on note aussi qu'on peut obtenir une valeur du dépassement  $D(\%)$  donnée pour différents couples de paramètres  $(\zeta, m)$ .

#### IV.3.2.2 Le temps de réponse $T_s$

Le temps de réponse est le temps nécessaire pour que la réponse indicielle du système atteigne et reste dans une plage avec un certain pourcentage (généralement 2% ou 5%) de la valeur finale de la réponse indicielle [57]. Dans notre cas le pourcentage de 2% est choisi pour déterminer le temps de réponse  $T_s$ . Les tracés de variation du temps de réponse  $T_s$  en fonction de  $m$  pour différentes valeurs du paramètre  $\zeta$  sont représentés dans la figure (IV.10). La figure (IV.11) montre aussi les tracés de la variation du temps de réponse  $T_s$  en fonction de  $\zeta$  pour différentes valeurs du paramètre  $m$  y compris le cas pour  $m = 1$ .

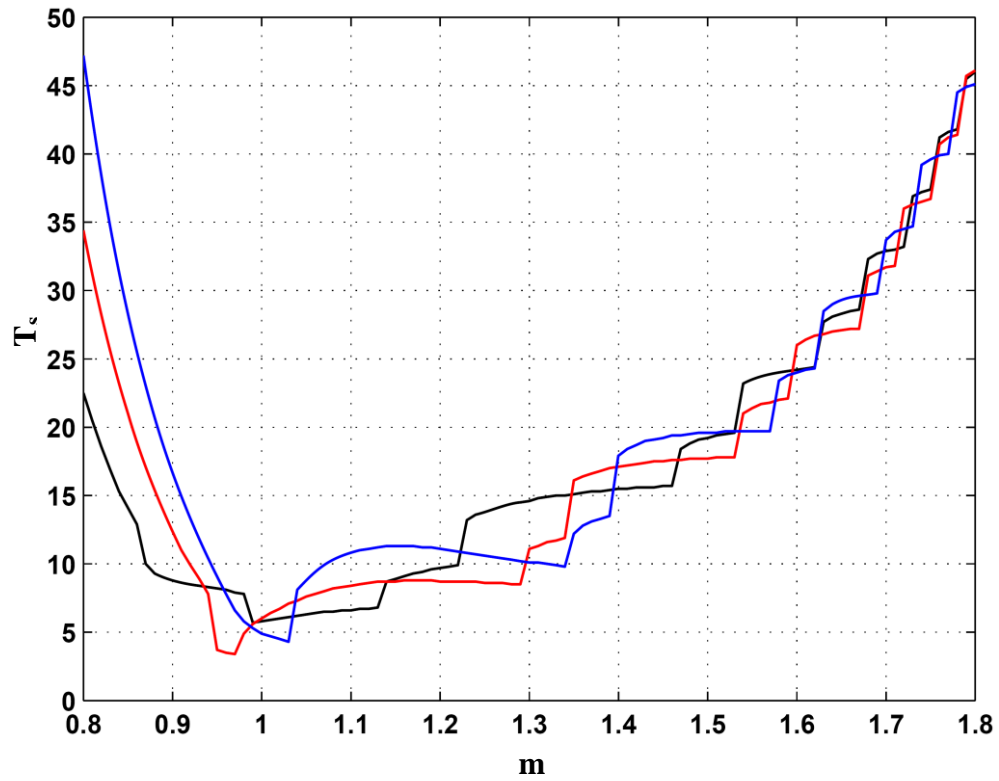


Figure (IV.10) : Tracé du temps de réponse  $T_s$  en fonction de  $m$  pour  $\zeta = 0.5$  (noir),  $\zeta = 0.7$  (rouge),  $\zeta = 0.9$  (bleu)

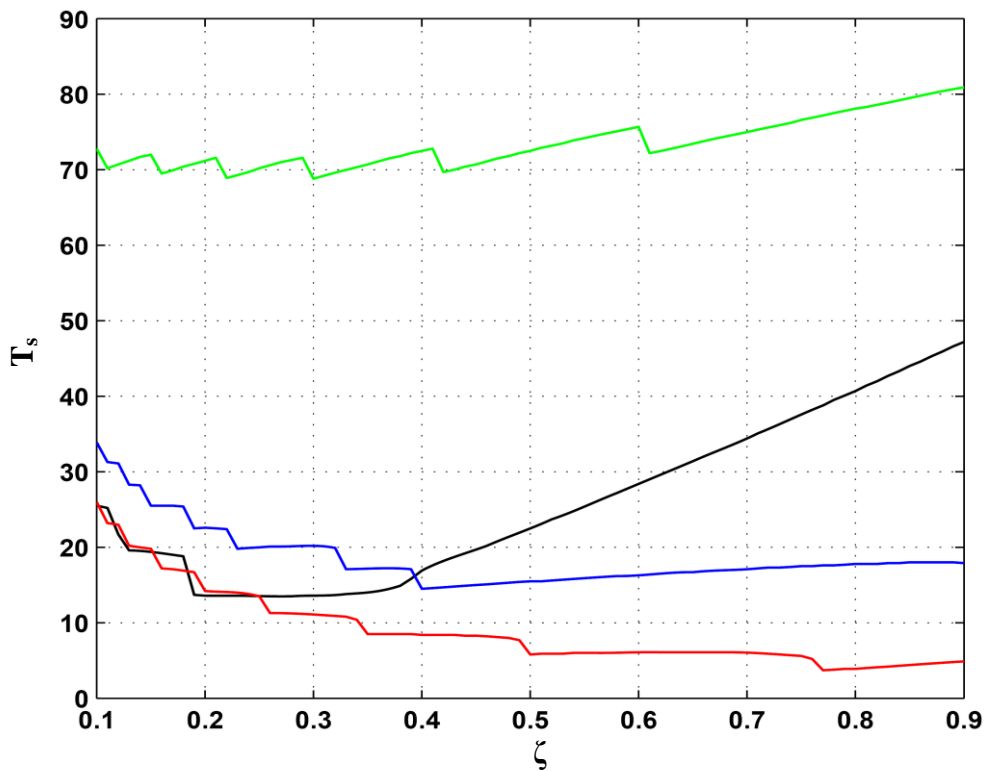


Figure (IV.11) : Tracé du temps de réponse  $T_s$  en fonction de  $\zeta$  pour  $m = 0.2$  (noir),  $m = 0.4$  (rouge),  $m = 1.4$  (bleu) et  $m = 1$  (vert)

De la figure (IV.10), on remarque que pour une valeur donnée du paramètre  $\zeta$  on peut obtenir le même temps de réponse  $T_s$  pour deux différentes valeurs du paramètre  $m$ . De la figure (IV.11), on remarque aussi que pour une valeur donnée du paramètre  $m$  on peut obtenir le même temps de réponse  $T_s$  pour deux différentes valeurs du paramètre  $\zeta$ . Des deux figures, On note aussi qu'on peut obtenir une valeur du temps de réponse  $T_s$  donnée pour différents couples de paramètres ( $\zeta$ ,  $m$ ). On a également remarqué que pour les valeurs du paramètre  $m < 0.8$ , le temps de réponse  $T_s$  est très grand, ce qui signifie que la réponse indicielle du système général de Bagley-Torvik de l'équation (IV.4) est très lente.

#### **IV.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a présenté une étude du comportement fréquentielle et temporelle du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire en fonction de l'ordre de différentiation  $m$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$ . Ses performances caractéristiques ont été obtenues et comparées à celles du système de second ordre classique afin de trouver leur similitude et leur différence. Comme le système classique du second ordre, ce type de système d'ordre fractionnaire a montré des comportements allant de la relaxation à l'oscillation pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $\zeta$ . On a constaté que dans le cas classique ( $m = 1$ ) pour une valeur donnée d'une performance caractéristique correspond une seule valeur du paramètre  $\zeta$  mais dans le cas du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire cette valeur donnée d'une performance caractéristique peut être obtenue par plusieurs valeurs du couple des paramètres ( $\zeta$ ,  $m$ ). On conclut alors que le système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire est un bon modèle de référence pour les systèmes de commande.

# Chapitre V

Conception d'un Correcteur  
Proportionnel Intégral Avec un Filtre  
d'Ordre Fractionnaire (PI-FF) pour le  
Système du Premier Ordre Avec Retard

---

## V.1 Introduction

Dans ce chapitre, une approche de conception d'une nouvelle structure d'un correcteur d'ordre fractionnaire pour un système de commande, dont le processus est un modèle du premier ordre avec retard, est proposée. Il est établi de telle sorte que la fonction de transfert en boucle fermée du système de commande à retour unitaire projetée est le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire. La structure du correcteur d'ordre fractionnaire ainsi obtenu a une fonction de transfert intéressante, qui peut être décomposée en deux fonctions en cascade; la première est un correcteur PI classique et la seconde est un filtre d'ordre fractionnaire (FF). Les paramètres de la fonction de transfert du correcteur proportionnel intégral avec le filtre d'ordre fractionnaire (PI-FF) conçu sont calculés analytiquement à partir des paramètres du modèle du premier ordre avec retard ainsi que les paramètres de la fonction de transfert du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire. Des exemples illustratifs sont présentés pour montrer l'efficacité et l'utilité de cette approche de conception des correcteurs d'ordre fractionnaire PI-FF. Les résultats de simulation obtenus sont également comparés à ceux obtenus en utilisant des correcteurs d'ordre fractionnaires  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  et  $PID^{\mu}$  pour l'amélioration de quelques performances caractéristiques du système de commande.

## V.2 Système générale de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire

Le système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire est représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

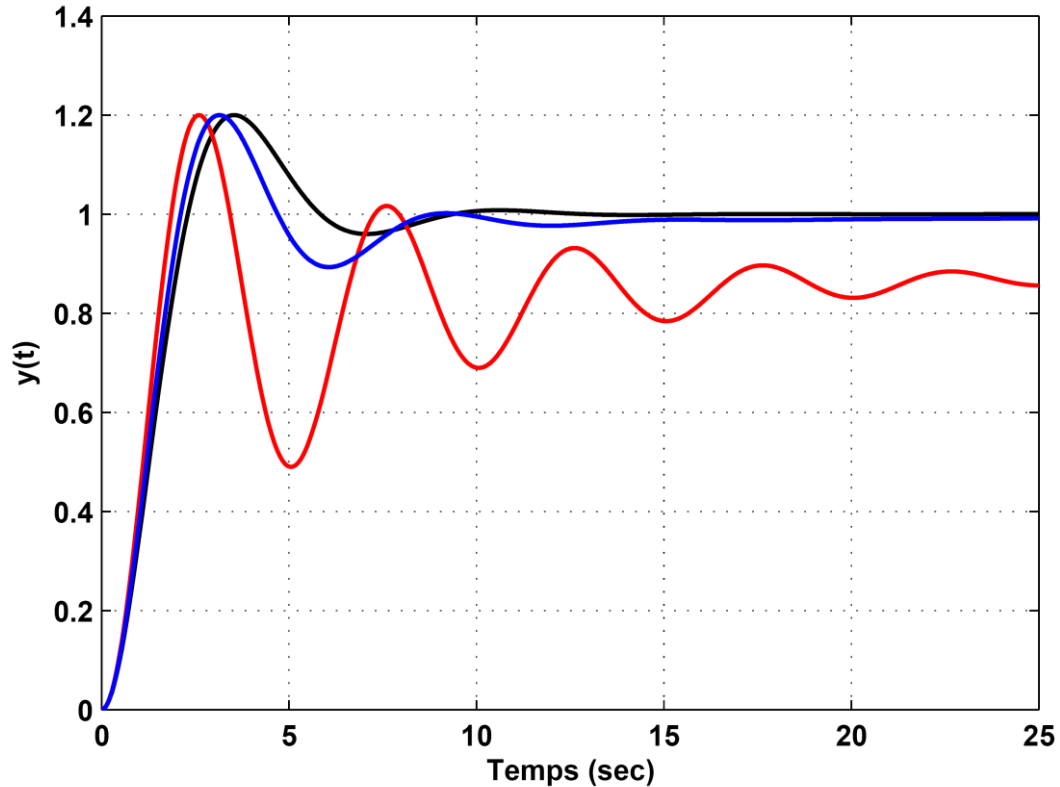
$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n^m} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad (V.1)$$

pour  $0 < m < 2$ ,  $0 < \zeta < 1$  et  $\omega_n > 0$ . Les réponses indicielles pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $\zeta$  du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire sont montrées dans les figures (IV.1) et (IV.2). A partir de ces deux figures, on peut facilement voir que le comportement de ce type de système fractionnaire va de la relaxation à l'oscillation pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $\zeta$ . On va donc présenter quelques spécifications temporelles et fréquentielles de ce système en fonction des deux paramètres  $m$  et  $\zeta$  pour montrer qu'on peut l'utiliser comme modèle de référence dans la théorie de la commande.

### V.2.1 Réglage des paramètres ( $m$ , $\zeta$ ) du système général de Bagley-Torvik fractionnaire

Dans cette section, on va considérer le réglage des paramètres ( $m$ ,  $\zeta$ ) du système général de Bagley-Torvik fractionnaire en termes des caractéristiques temporelles, telles que le dépassement  $D(\%)$  et le temps de réponse  $T_s$  pour répondre aux performances projetées d'un système de

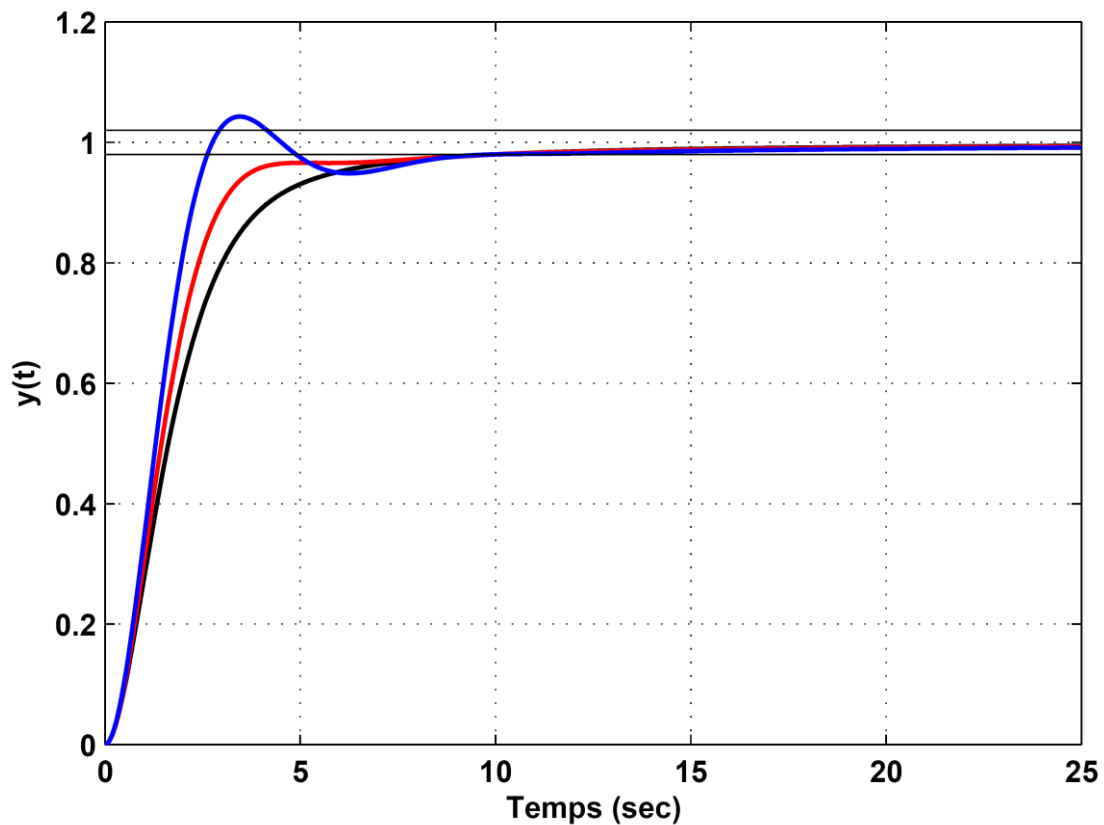
commande avec retour unitaire [58]. Figure (V.1) montre les réponses indicielles du système général de Bagley-torvik d'ordre fractionnaire pour différentes valeurs du couple de  $(m, \zeta)$ .



**Figure (V.1):** Réponses indicielles pour  $\omega_n = 1$  et différents couples de paramètres  $(m, \zeta)$   $(1, 0.452)$  (noir),  $(0.35, 0.30835)$  (rouge),  $(0.85, 0.37525)$  (bleu)

A partir de la figure (V.1), on remarque que pour les différents couples de paramètres  $(m, \zeta)$ , toutes les réponses indicielles du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire ont le même dépassement  $D(\%) \approx 20\%$ , avec différents temps de réponses. Alors, on peut, théoriquement, dire que pour un dépassement  $D(\%)$  donné d'un système de commande avec retour unitaire se comportant comme le modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire, il existe une infinité de couples  $(m, \zeta)$  qui réalisent ce dépassement.

Figure (V.2) montre aussi les réponses indicielles du système général de Bagley-torvik d'ordre fractionnaire pour d'autres différentes valeurs du couple de  $(m, \zeta)$ .



**Figure (V.2):** Réponses indicielles pour  $\omega_n = 1$  et différents couples de paramètres  $(m, \zeta)$  (0.948, 0.95) (noir), (0.925, 0.75) (rouge), (0.88345, 0.55) (bleu)

Sur la figure (V.2), on note aussi que, pour les différents couples de paramètres  $(m, \zeta)$ , toutes les réponses indicielles du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire ont le même temps de réponse  $T_s \approx 10$  s avec différents dépassements  $D(\%)$ . Alors, on peut, théoriquement, dire aussi, que pour un temps de réponse donné d'un système de commande avec retour unitaire, se comportant comme le modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire, il existe une infinité de couples  $(m, \zeta)$  qui réalisent ce temps de réponse.

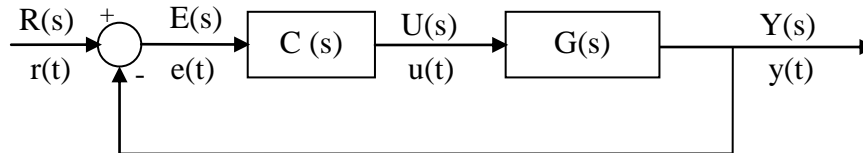
Donc, pour régler les paramètres  $(m, \zeta)$  du modèle général de Bagley-Torvik fractionnaire de telle sorte qu'un système de commande à retour unitaire projeté, avec un dépassement  $D(\%)$  et un temps de réponse  $T_s$  souhaités se comportant comme ce modèle général de Bagley-Torvik fractionnaire, on procède comme suit :

- Obtenir le dépassement  $D(\%)$  souhaité pour plusieurs valeurs du couple  $(m, \zeta)$  puis, choisir le meilleur couple qui garantisse le temps de réponse  $T_s$  souhaité.
- Ou obtenir le temps de réponse  $T_s$  souhaité pour plusieurs valeurs du couple  $(m, \zeta)$  puis, choisir le meilleur couple qui garantisse le dépassement  $D(\%)$  souhaité.

### V.3 Présentation de l'approche de conception du correcteur PI-FF

#### V.3.1 Formulation du problème

Figure (V.3) montre un système de commande à retour unitaire où  $G(s)$  est la fonction de transfert du processus et  $C(s)$  est la fonction de transfert du correcteur.



**Figure (V.3):** Système de commande avec retour unitaire

Le processus  $G(s)$  est un modèle du premier ordre avec retard dont la fonction de transfert est donnée comme suit:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + Ts} \quad (\text{V.2})$$

La fonction de transfert en boucle fermée de ce système de commande est donc donnée par:

$$G_{CL}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (\text{V.3})$$

Le problème de conception de ce système de commande est de trouver le correcteur  $C(s)$  qui garantit que la fonction de transfert en boucle fermée  $G_{CL}(s)$  se comporte comme le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire avec retard dont la fonction de transfert est donnée par l'expression suivante [58].:

$$G_d(s) = \frac{e^{-\theta s}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^m + 1} \quad (\text{V.4})$$

Où les paramètres  $m$  ( $0 < m < 2$ ),  $\zeta$  ( $0 < \zeta < 1$ ) et  $\omega_n$  ( $\omega_n > 0$ ) seront choisis de telle sorte que le modèle de référence désiré  $G_d(s)$  de l'équation (V.4) répond aux exigences de performance dynamique du système de commande projeté. Si les exigences de performance du système de commande projeté peuvent être exprimées en termes de fréquence de coupure  $\omega_c$  et de marge de phase  $\varphi_m$  du système en boucle ouverte qui sont liées, respectivement, au temps de réponse  $T_s$  et au dépassement  $D(\%)$  du système en boucle fermée; alors les trois paramètres  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  peuvent être réglés comme montré dans la section 2.1.

Pour un ensemble de performances caractéristiques données du système de commande projeté, le réglage des paramètres  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire est fait comme suit :

- Premièrement, on fait varier les paramètres  $m$  ( $0 < m < 2$ ),  $\zeta$  ( $0 < \zeta < 1$ ) et  $\omega_n$  ( $\omega_n > 0$ ) pour obtenir un ensemble de paramètres  $(m, \zeta, \omega_n)$ , pour lesquels le modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire répond aux performances caractéristiques du système de commande projeté.
- Ensuite, on choisit un seul triplet des valeurs de l'ensemble des paramètres  $(m, \zeta, \omega_n)$  pour calculer le correcteur  $C(s)$  pour que le système de commande projeté répond aux performances caractéristiques exigées.

La fonction de transfert du correcteur, ainsi obtenu  $C(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + f_1 s + f_2 s^m} \right)$ , a une

structure intéressante, qui est décomposée en deux fonctions en cascade; la première est un correcteur PI classique et la seconde est un filtre d'ordre fractionnaire. Les paramètres  $K_p$ ,  $K_I$ ,  $f_1$  et  $f_2$  de  $C(s)$ , sont calculés analytiquement à partir des paramètres du modèle du premier ordre avec retard  $K$ ,  $T$  et  $\theta$  de l'équation (V.2) et des paramètres de la fonction de transfert du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  de l'équation (V.4).

### V.3.2 Méthode de conception du correcteur

L'objectif de conception consiste simplement à trouver la fonction de transfert du correcteur  $C(s)$  pour satisfaire la condition  $G_{CL}(s) = G_d(s)$  [58]. Ainsi, à partir des équations (V.3) et (V.4), on aura :

$$\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{e^{-\theta s}}{\left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^m + 1} \quad (V.5)$$

Comme le processus  $G(s)$  est un modèle du premier ordre avec retard dont la fonction de transfert est donnée par l'équation (V.2), l'équation (V.5) deviendra donc :

$$\frac{C(s) \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + Ts}}{1 + C(s) \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + Ts}} = \frac{e^{-\theta s}}{\left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^m + 1} \quad (V.6)$$

En réarrangeant l'équation (V.6), on obtient:

$$\frac{KC(s)e^{-\theta s}}{1 + Ts + KC(s)e^{-\theta s}} = \frac{e^{-\theta s}}{\left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^m + 1} \quad (V.7)$$

$$\frac{KC(s)}{1 + Ts + KC(s)e^{-\theta s}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^m + 1} \quad (\text{V.8})$$

L'approximation de Taylor du premier ordre du retard temporel  $e^{-\theta s}$  est  $e^{-\theta s} \approx (1 - \theta s)$ . En substituant cette approximation de retard dans l'équation (V.8), on aura:

$$\frac{KC(s)}{1 + Ts + KC(s)(1 - \theta s)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^m + 1} \quad (\text{V.9})$$

Alors, le correcteur  $C(s)$  est déduit de l'équation (V.9) par l'expression suivante:

$$C(s) = \frac{1 + Ts}{K\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta K\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^m + K\theta s} \quad (\text{V.10})$$

Ce correcteur de l'équation (V.10) est réécrit comme suit :

$$C(s) = \left(\frac{1 + Ts}{\frac{K}{\omega_n^2} s}\right) \left(\frac{s}{s^2 + \omega_n^2 \theta s + 2\zeta \omega_n^{(2-m)} s^m}\right) \quad (\text{V.11})$$

$$C(s) = \left(\frac{\omega_n^2 T}{K} + \frac{\omega_n^2}{K} \frac{1}{s}\right) \left(\frac{s}{s^2 + \omega_n^2 \theta s + 2\zeta \omega_n^{(2-m)} s^m}\right) \quad (\text{V.12})$$

Ce correcteur  $C(s)$  est formé d'un correcteur PI classique  $C_c(s)$  en cascade avec un filtre d'ordre fractionnaire  $F(s)$ . Donc, on a:

$$C(s) = C_c(s) F(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) \left(\frac{s}{s^2 + f_1 s + f_2 s^m}\right) \quad (\text{V.13})$$

Où les paramètres  $K_p$  et  $K_I$  du correcteur PI classique et  $f_1$  et  $f_2$  du filtre d'ordre fractionnaire  $F(s)$ , sont donnés par les expressions suivantes:

$$K_p = \frac{T\omega_n^2}{K}, \quad K_I = \frac{\omega_n^2}{K}, \quad f_1 = \omega_n^2 \theta \quad \text{et} \quad f_2 = 2\zeta \omega_n^{(2-m)} \quad (\text{V.14})$$

En substituant  $C(s)$  de l'équation (V.12) dans l'équation (V.3), on aura l'expression suivante:

$$G_{CL}(s) = \frac{\left( \frac{1+Ts}{\frac{K}{\omega_n^2}s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + \omega_n^2\theta s + 2\zeta\omega_n^{(2-m)}s^m} \right) \left( \frac{Ke^{-\theta s}}{1+Ts} \right)}{1 + \left( \frac{1+Ts}{\frac{K}{\omega_n^2}s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + \omega_n^2\theta s + 2\zeta\omega_n^{(2-m)}s^m} \right) \left( \frac{Ke^{-\theta s}}{1+Ts} \right)} \quad (V.15)$$

En réarrangeant l'équation (V.15), on aura:

$$G_{CL}(s) = \frac{(\omega_n^2)e^{-\theta s}}{s^2 + \omega_n^2\theta s + 2\zeta\omega_n^{(2-m)}s^m + \omega_n^2e^{-\theta s}} \quad (V.16)$$

Pour éviter que la fonction de transfert en boucle fermée  $G_{CL}(s)$  de l'équation (V.16) soit exactement le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire, on utilise alors l'approximation de Pade du second ordre du retard temporel  $e^{-\theta s}$  donnée par

$$e^{-\theta s} \approx \left( \frac{1 - \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2}{1 + \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2} \right) \text{ au lieu de son approximation de Taylor du premier ordre.}$$

En substituant cette approximation du retard temporel dans le dénominateur de l'équation (V.16), on aura donc l'expression suivante:

$$G_{CL}(s) = \frac{(\omega_n^2)e^{-\theta s}}{s^2 + \omega_n^2\theta s + 2\zeta\omega_n^{(2-m)}s^m + \omega_n^2 \left( \frac{1 - \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2}{1 + \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2} \right)} \quad (V.17)$$

$$G_{CL}(s) = \frac{(\omega_n^2) \left( 1 + \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2 \right) e^{-\theta s}}{\left( 1 + \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2 \right) [s^2 + \omega_n^2\theta s + 2\zeta\omega_n^{(2-m)}s^m] + (\omega_n^2) \left( 1 - \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2 \right)} \quad (V.18)$$

$$G_{CL}(s) = \frac{(C_1s^2 + C_2s + C_3)e^{-\theta s}}{s^4 + D_2s^3 + D_3s^{2+m} + D_4s^2 + D_5s^{1+m} + D_6s + D_7s^m + D_8} \quad (V.19)$$

Où les coefficients  $C_1, C_2, C_3, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$  et  $D_8$  sont donnés comme suit :

$$C_1 = \omega_n^2, C_2 = \frac{6\omega_n^2}{\theta}, C_3 = \frac{12\omega_n^2}{\theta^2}, D_2 = \theta\omega_n^2 + \frac{6}{\theta}, D_3 = 2\zeta\omega_n^{(2-m)}, D_4 = 7\omega_n^2 + \frac{12}{\theta^2},$$

$$D_5 = \frac{12\zeta\omega_n^{(2-m)}}{\theta}, D_6 = \frac{6\omega_n^2}{\theta}, D_7 = \frac{24\zeta\omega_n^{(2-m)}}{\theta^2} \text{ et } D_8 = \frac{12\omega_n^2}{\theta^2}.$$

L'algorithme pour régler les quatre paramètres  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $f_1$  et  $f_2$  du correcteur PI-FF fractionnaire proposé du système de commande avec retour unitaire de la figure (V.3), et dont le processus  $G(s)$  est un modèle du premier ordre avec retard de l'équation (V.2) de telle sorte que sa fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme la fonction de transfert du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (V.4) et qui répond aux exigences de performance dynamique du système de commande projeté, l'algorithme proposé est composé par les étapes suivantes:

**Etape 1 :**

- Faire entrer les valeurs des spécifications de conception exigées du système de commande avec retour unitaire projeté (marge de gain, marge de phase, fréquence du gain unitaire, pourcentage de dépassement, temps de réponse...)
- Faire entrer les valeurs des paramètres  $K$ ,  $T$  et  $\theta$  du modèle du premier ordre avec retard

**Etape 2 :**

- Obtenir les paramètres  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  du modèle générale de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire de l'équation (V.4), qui répondent aux spécifications exigées du système de commande avec retour unitaire projeté.

**Etape 3 :**

- Calculer les quatre paramètres  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $f_1$  et  $f_2$  du correcteur PI-FF fractionnaire proposé

$$C(s) = \left( K_P + \frac{K_I}{s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + f_1s + f_2s^m} \right), \text{ en fonction des paramètres } K, T \text{ et } \theta \text{ du modèle du}$$

premier ordre avec retard et des paramètres du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  obtenus dans la première étape, en utilisant les expressions

$$\text{suivantes: } K_P = \frac{T\omega_n^2}{K}, K_I = \frac{\omega_n^2}{K}, f_1 = \omega_n^2\theta \text{ et } f_2 = 2\zeta\omega_n^{(2-m)}$$

**Etape 4 :**

- Les réponses fréquentielles et temporelles du système de commande en boucle fermée sont calculées en utilisant la fonction  $G_{CL}(s)$  de l'équation (V.19) :

$$G_{CL}(s) = \frac{(C_1s^2 + C_2s + C_3)e^{-\theta s}}{s^4 + D_2s^3 + D_3s^{2+m} + D_4s^2 + D_5s^{1+m} + D_6s + D_7s^m + D_8}$$

## V.4 Résultats de simulation

### V.4.1 Exemple 1

La commande du niveau du liquide dans les réservoirs est un problème fondamental dans les processus industriels. Dans [59], le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire a été utilisé, pour commander ce type de processus pour améliorer ses performances caractéristiques par rapport au correcteur PID classique. Alors, dans cet exemple, on va utiliser le correcteur PI-FF proposé pour la commande du niveau du liquide, pour vérifier l'efficacité et l'utilité de ce type de correcteur dans l'amélioration des performances caractéristique par rapport au correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

Le processus dynamique du niveau du liquide dans les réservoirs est représenté par un modèle du premier ordre avec retard comme suit [59]:

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + Ts} = \frac{3.13e^{-5s}}{1 + 433.33s} \quad (V.20)$$

Les spécifications de conception exigées du système de commande à retour unitaire projeté sont données par:

- Fréquence du gain unitaire:  $\omega_c = 0.01 \text{ rad/s}$
- Marge de phase:  $\varphi_m = 50^\circ$

L'objectif de la stratégie de commande PI-FF proposée pour la commande à retour unitaire du niveau du liquide dans les réservoirs est de trouver le correcteur  $C(s)$  qui garantisse que sa fonction de transfert en boucle fermée  $G_{CL}(s)$  est le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire, dont la fonction de transfert  $G_d(s)$  est celle de l'équation (V.4).

Dans la méthode de conception du correcteur PI-FF proposée, on doit premièrement traduire les spécifications de conception exigées du système de commande à retour unitaire projeté du niveau du liquide dans les réservoirs (fréquence du gain unitaire  $\omega_c = 0.01 \text{ rad/s}$  et Marge de phase  $\varphi_m = 50^\circ$ ) en termes des paramètres  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  de la fonction de transfert du model général de Bagley-Torvik. Après plusieurs essais de simulation et d'analyse du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire pour satisfaire les spécifications de conception exigées du système de commande à retour unitaire projeté, les valeurs numériques obtenues pour les paramètres  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  sont  $m = 0.986$ ,  $\zeta = 0.473$ , et  $\omega_n = 0.0127$ . Par conséquent, la fonction de transfert du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire  $G_d(s)$  est donnée par [58]:

$$G_d(s) = \frac{e^{-\theta s}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{e^{-5s}}{\left(\frac{s}{0.0127}\right)^2 + 0.946\left(\frac{s}{0.0127}\right)^{0.986} + 1} \quad (V.21)$$

De l'équation (V.13), la fonction de transfert du correcteur PI-FF proposé est donnée par:

$$C(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) \left(\frac{s}{s^2 + f_1s + f_2s^m}\right) \quad (V.22)$$

où  $K_p = \frac{T\omega_n^2}{K} = 0.0223$ ,  $K_I = \frac{\omega_n^2}{K} = 5.153e-5$ ,  $f_1 = \omega_n^2\theta = 8.0645e-4$  et  $f_2 = 2\zeta\omega_n^{(2-m)} = 0.0113$ .

Donc le correcteur PI-FF proposé  $C(s)$  est donné par:

$$C(s) = \left(0.0223 + \frac{5.153e-5}{s}\right) \left(\frac{s}{s^2 + 8.0645e-4s + 0.0113s^{0.986}}\right) \quad (V.23)$$

La fonction de transfert  $C_F(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire obtenu dans [59], pour la commande du niveau du liquide dans les réservoirs, est donnée par :

$$C_F(s) = 0.0469 + \frac{0.0469}{s^{0.7333}} + 1.4747s^{0.3146} \quad (V.24)$$

#### V.4.1.1 Analyse de la stabilité

Les fonctions de transfert en boucle fermée de la commande du niveau du liquide avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.23) [58] et du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire de l'équation (V.24) [59] sont données, respectivement, par les expressions suivantes:

$$G_{CLPIFF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(0.069799s + 1.612889e-4)e^{-5s}}{\left(433.33s^3 + 1.3494589785s^2 + 4.896629s^{1.986} + 8.0645e-4s\right) + 0.0113s^{0.986} + (0.069799s + 1.612889e-4)e^{-5s}} \quad (V.25)$$

$$G_{CLFPID}(s) = \frac{C_F(s)G(s)}{1 + C_F(s)G(s)} = \frac{(4.615811s^{1.0479} + 0.146797s^{0.7333} + 0.146797)e^{-5s}}{433.33s^{1.7333} + s^{0.7333} + (4.615811s^{1.0479} + 0.146797s^{0.7333} + 0.146797)e^{-5s}} \quad (V.26)$$

Les dénominateurs de ces deux fonctions de transfert sont donnés comme suit:

$$D_{PI-FF}(s) = \left(433.33s^3 + 1.3494589785s^2 + 4.896629s^{1.986} + 8.0645e-4s\right) + 0.0113s^{0.986} + (0.069799s + 1.612889e-4)e^{-5s} \quad (V.27)$$

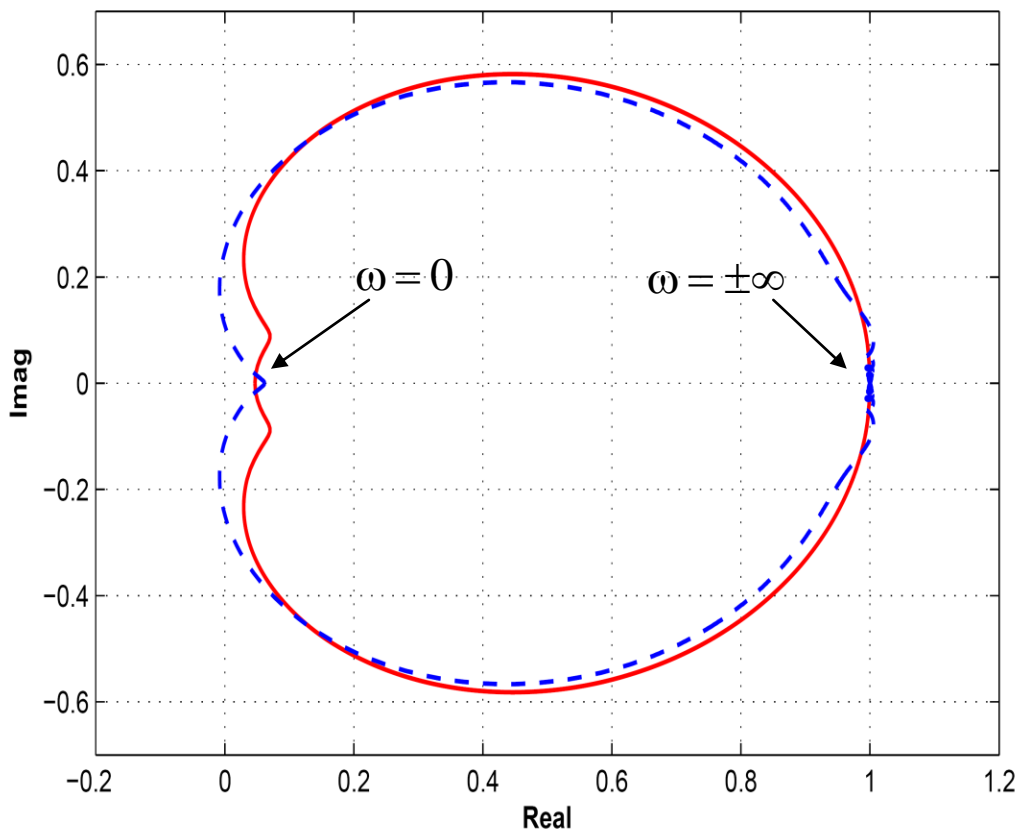
$$D_{PIDF}(s) = 433.33s^{1.7333} + s^{0.7333} + (4.615811s^{1.0479} + 0.146797s^{0.7333} + 0.146797)e^{-5s} \quad (V.28)$$

L'analyse de la stabilité pour ce type de système est réalisée en utilisant la méthode de Mikhailov généralisée modifiée, proposé dans [37]. Pour le système de commande de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé et le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire, les deux fonctions  $\psi_1(s)$  et  $\psi_2(s)$  sont données, respectivement, par les expressions suivantes :

$$\psi_1(s) = \frac{D_{PI-FF}(s)}{433.33(s+0.02)^3} = \frac{\left( 433.33s^3 + 1.3494589785s^2 + 4.896629s^{1.986} + 8.0645e^{-4s} + 0.0113s^{0.986} + (0.069799s + 1.612889e^{-4})e^{-5s} \right)}{433.33(s+0.02)^3} \quad (V.29)$$

$$\psi_2(s) = \frac{D_{PIDF}(s)}{433.33(s+0.05)^{1.7333}} = \frac{\left[ 433.33s^{1.7333} + s^{0.7333} + (4.615811s^{1.0479} + 0.146797s^{0.7333} + 0.146797)e^{-5s} \right]}{433.33(s+0.05)^{1.7333}} \quad (V.30)$$

Figure (V.4) montre les tracés des parties imaginaires contre les parties réelles des deux fonctions  $\psi_1(j\omega)$  et  $\psi_2(j\omega)$  pour  $s = j\omega$ , avec  $-\infty < \omega < +\infty$ . De la figure (V.4), on peut voir que les deux tracés n'encerclent pas l'origine du plan complexe. Alors, on peut dire que le système de commande en boucle fermée de cet exemple est stable avec les deux types de correcteur PI-FF proposé et  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire.



**Figure (V.4):** Tracés des fonctions  $\psi_1(j\omega)$  (rouge) et  $\psi_2(j\omega)$  (bleu)

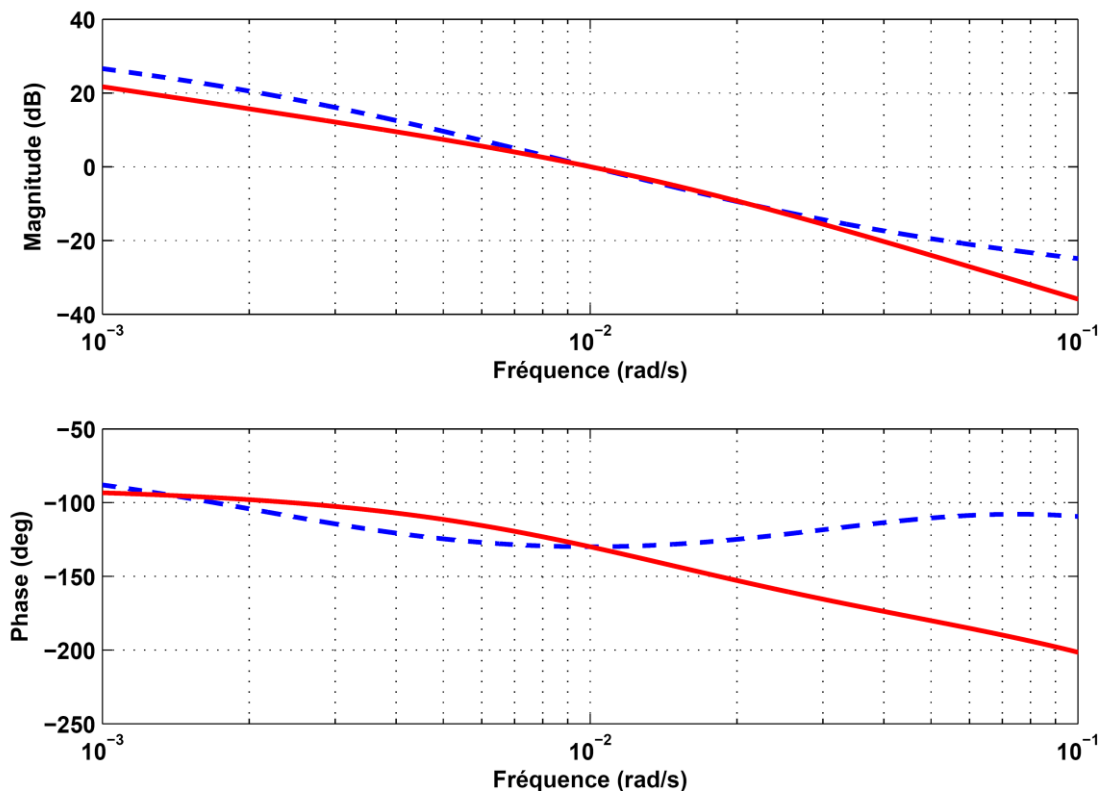
### V.4.1.2 Réponses fréquentielles et temporelles

Les fonctions de transfert en boucle ouverte de la commande du niveau du liquide avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.23) [58] et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire de l'équation (V.24) [59] sont données, respectivement, par les expressions suivantes:

$$C(s)G(s) = \left( 0.0223 + \frac{5.153e-5}{s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + 8.0645e-4s + 0.0113s^{0.986}} \right) \left( \frac{3.13e^{-5s}}{1 + 433.33s} \right) \quad (V.31)$$

$$C_F(s)G(s) = \left( 0.0469 + \frac{0.0469}{s^{0.7333}} + 1.4747s^{0.3146} \right) \left( \frac{3.13e^{-5s}}{1 + 433.33s} \right) \quad (V.32)$$

Figure (V.5) montre les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  et  $C_F(s)G(s)$  du système de commande de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.23) et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (V.24), respectivement. De la figure (V.5), on note que les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  et  $C_F(s)G(s)$  sont presque confondus autour de la fréquence au gain unité.



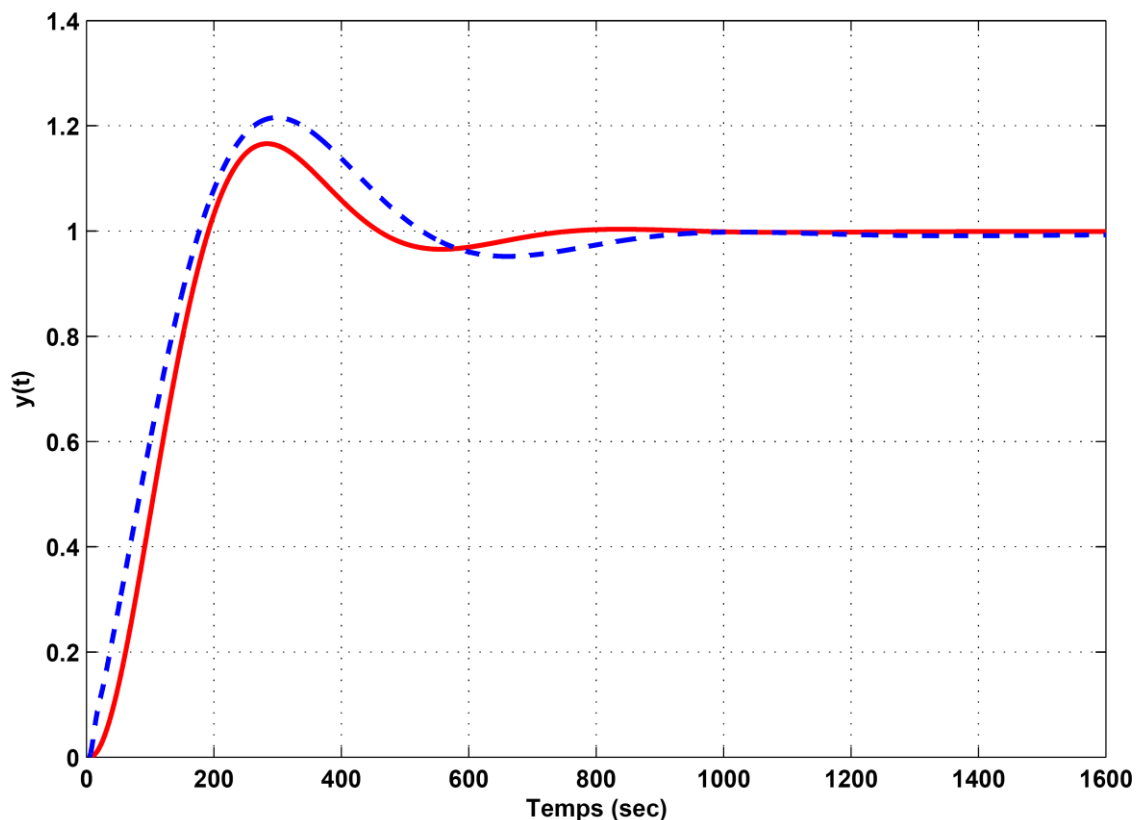
**Figure (V.5):** Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  (rouge) et  $C_F(s)G(s)$  (bleu)

De la figure (V.5), les résultats des spécifications de la conception exigées de la fréquence du gain unitaire  $\omega_c = 0.01 \text{ rad/s}$  et de la marge de phase  $\varphi_m = 50^\circ$  du système de commande à retour unitaire du niveau du liquide avec les deux correcteurs sont résumés dans le tableau (V.1).

**Tableau (V.1):** Résultats des spécifications de conception  $\omega_c$  et  $\varphi_m$

	$\omega_c$ (rad/s)	$\varphi_m$ (deg)
<b>Correcteur PI-FF proposé</b>	<b>0.01</b>	<b>50.000</b>
<b>Correcteur <math>PI^\lambda D^\mu</math> fractionnaire</b>	<b>0.01</b>	<b>49.994</b>

Figure (V.6) montre les réponses indicielles du système de commande de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.23) et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire de l'équation (V.24). De la figure (V.6), on remarque que le dépassement  $D(\%)$  et le temps de réponse  $T_s(2\%)$  de la réponse indicielle du système de commande en boucle fermée du niveau du liquide avec le correcteur PI-FF proposé, sont plus petits que ceux avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire.



**Figure (V.6):** Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  (bleu)

On a aussi fait le calcul de l'intégrale du carré de l'erreur multiplié par le temps (Integral Time Square error - ITSE) de la réponse indicielle du système de commande en boucle fermée du niveau du liquide avec les deux correcteurs PI-FF proposé et  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire. Il a été constaté que la valeur de l'ITSE avec le correcteur PI-FF est plus petite que celle de l'ITSE avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire. Pour voir l'amélioration des performances caractéristiques du système de commande en boucle fermée du niveau du liquide avec le correcteur PI-FF proposé, les résultats obtenus du dépassement  $D(\%)$ , du temps de réponse  $T_s (2\%)$  et de l'ITSE de la réponse indicielle du système de commande en boucle fermée avec les deux correcteurs PI-FF proposé et  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, sont résumés dans le tableau (V.2).

**Tableau (V.2):** Caractéristiques de performance des correcteurs PI-FF et  $PI^\lambda D^\mu$

	<b>D(%)</b>	<b><math>T_s (2\%) (s)</math></b>	<b>ITSE</b>
<b>Correcteur PI-FF proposé</b>	<b>17.588</b>	<b>654.100</b>	<b>6.4258e+5</b>
<b>Correcteur <math>PI^\lambda D^\mu</math> fractionnaire</b>	<b>21.574</b>	<b>832.200</b>	<b>11.5620e+5</b>

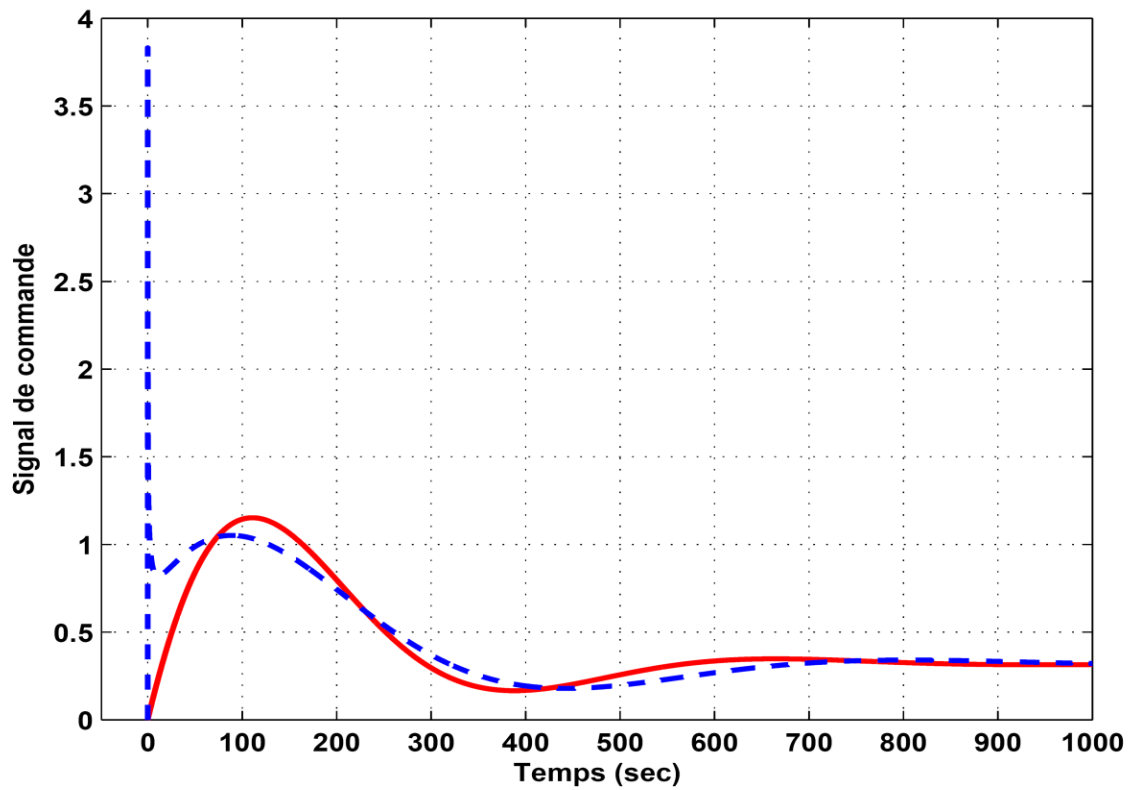
Du tableau (V.2), on tire les conclusions suivantes:

- Le dépassement  $D(\%)$  du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PI-FF est environ 18% plus petit que celui avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire.
- Le temps de réponse  $T_s (2\%)$  du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PI-FF est environ 21% plus petit que celui avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire.
- L'ITSE du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PI-FF est environ 44,42% plus petit que celui avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire.

A partir de ces résultats de simulation, on peut conclure que le correcteur PI-FF proposé a considérablement amélioré les caractéristiques de performance temporelle du système de commande à retour unitaire par rapport au correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

#### **V.4.1.3 Signal de commande**

Le signal de commande  $u(t)$  de la figure (V.3) du système de commande de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.23) et avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (V.24) sont présentés dans la figure (V.7).

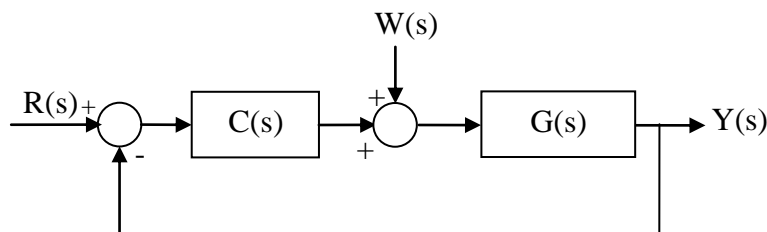


**Figure (V.7):** Signal de commande du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  (bleu)

De la figure (V.7), on note que malgré l'amélioration des performances du système de commande en boucle fermée du niveau du liquide en utilisant le correcteur PI-FF proposé par rapport au correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  l'effort initial du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé est inférieur à celui avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ .

**V.4.1.4 Perturbation**

Pour étudier l'influence d'une perturbation  $W(s)$  de cet exemple on considère le schéma de la figure (V.8) suivante :



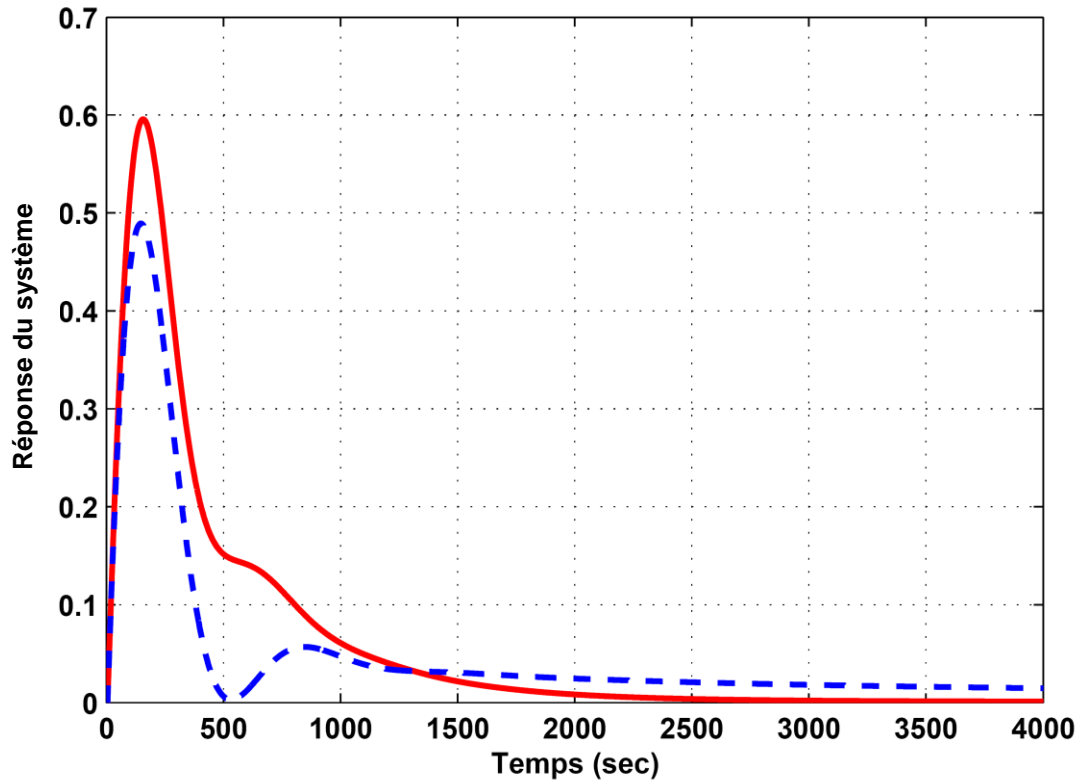
**Figure (V.8):** Système de commande avec le signal de perturbation

Pour  $R(s) = 0$  la fonction de transfert de la perturbation  $W(s)$  au signal de sortie  $Y(s)$  est

$$D(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Figure (V.9) montre les signaux de sortie du système de

commande en boucle fermée du niveau du liquide, noté perturbation. Pour l'entrée perturbation  $W(s)$  échelon unité avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.23) et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire de l'équation (V.24).

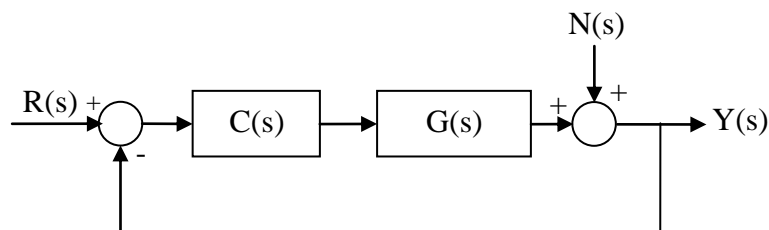


**Figure (V.9):** Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  (bleu).

A partir de la figure (V.9), on peut remarquer que le système de commande avec le correcteur PI-FF proposé rejette complètement la perturbation exactement comme le système de commande avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ .

#### V.4.1.5 Sensibilité

La sensibilité  $S(s)$  décrit la fonction de transfert d'une perturbation externe  $N(s)$  à la sortie du système de commande, comme il est montré dans la figure (V.10) suivante:



**Figure (V.10):** Système de commande avec une perturbation externe

Pour  $R(s) = 0$ , la fonction de transfert de la perturbation  $N(s)$  au signal de sortie  $Y(s)$  est donnée par l'expression suivante:

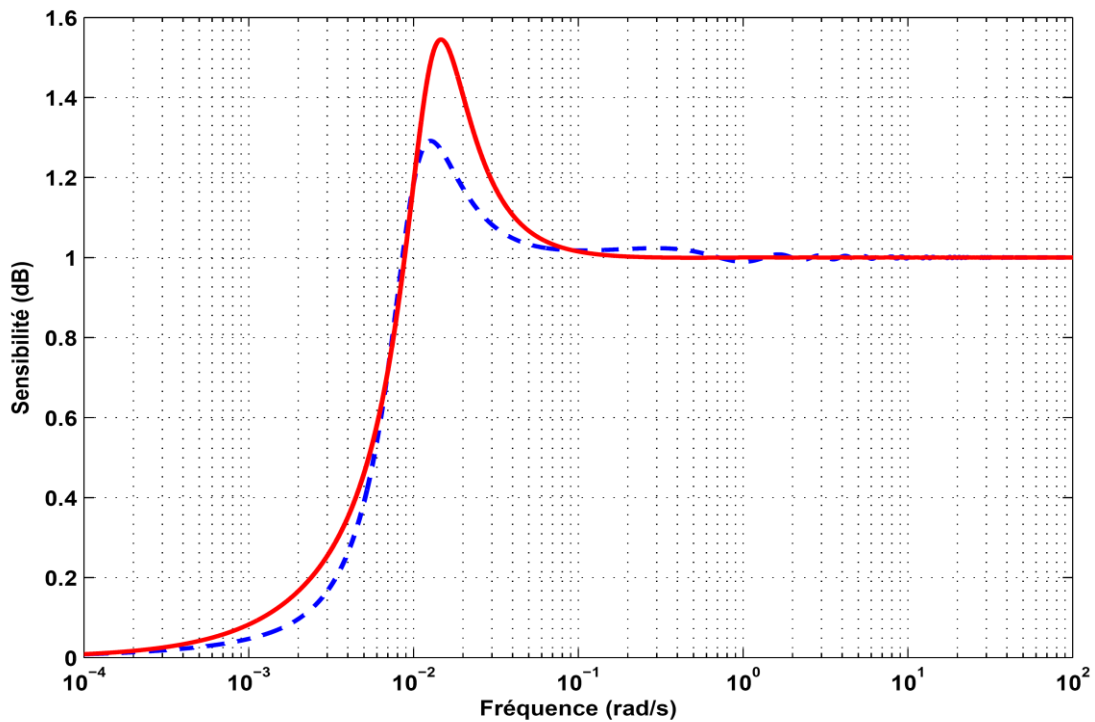
$$S(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \quad (\text{V.33})$$

Pour une bonne mesure de la sensibilité le paramètre  $M_s$  défini par l'expression suivante :

$$M_s = \max_{0 \leq \omega < \infty} |S(j\omega)|_{\text{dB}} = \max_{0 \leq \omega < \infty} \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{\text{dB}} \quad (\text{V.34})$$

doit être entre 1.3 et 2 dB. Figure (V.11) montre les tracés de Bode des fonctions de sensibilité  $S(s)$  du système de commande en boucle fermée du niveau du liquide pour l'entrée perturbation externe  $N(s)$  échelon unité avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.23) et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire de l'équation (V.24).

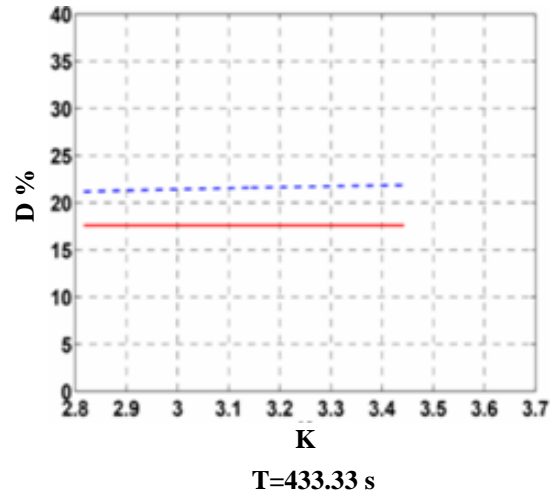
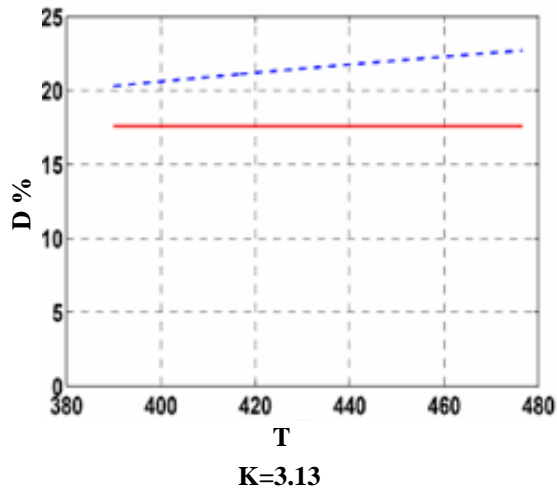
De la figure (V.11), on remarque que le paramètre de sensibilité  $M_s$  des deux tracés de Bode de la fonction  $S(s)$  est tel que  $1.3 < M_s < 2$ . Alors, le système de commande de cet exemple a une bonne mesure de la sensibilité pour les deux correcteurs PI-FF proposé et  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire. D'après les résultats obtenus, pour la méthode de conception du correcteur PI-FF proposée pour le système de commande en boucle fermée du niveau du liquide, on note que malgré les améliorations réalisées pour les trois performances caractéristiques considérées, le dépassement  $D(\%)$ , le temps de réponse  $T_s$  (2%) et l'ITSE, ni le signal de commande ni le rejet de la perturbation ni la mesure de la sensibilité n'a été altéré.



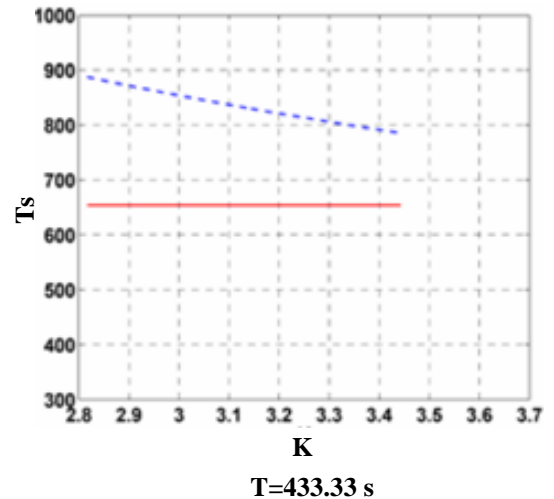
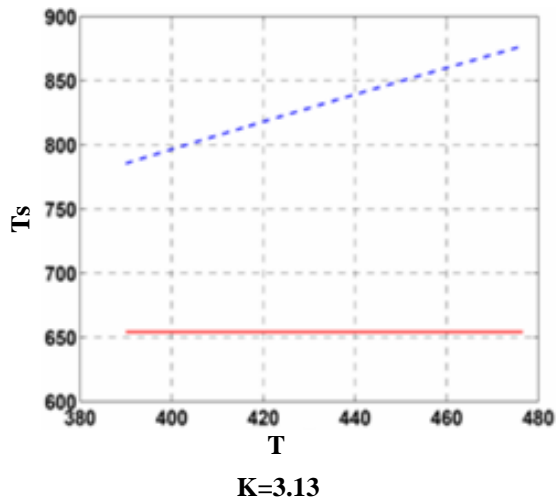
**Figure (V.11):** Tracés de Bode de la sensibilité  $S(j\omega)$  du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire (bleu)

#### V.4.1.6 Robustesse

Pour tester la robustesse du système de commande à retour unitaire du processus du niveau du liquide avec le correcteur PI-FF proposé et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, on fait varier la constante du temps  $T$  et le gain  $K$  du modèle du premier ordre avec retard de l'équation (V.20) dans les intervalles, respectivement,  $[0.90 T_N, 1.10 T_N]$  et  $[0.90 K_N, 1.10 K_N]$  où  $T_N = 433.33$  et  $K_N = 3.13$  sont les valeurs nominales des paramètres  $T$  et  $K$ ; puis, constater les variations du dépassement  $D(\%)$  et du temps de réponse  $T_s(2\%)$  dans ces intervalles. Figures (V.12) et (V.13) montrent, respectivement, les tracés des variations du dépassement  $D(\%)$  et du temps de réponse  $T_s(2\%)$  en fonction des paramètres  $T$  ( $389.997 < T < 476.663$ ) et  $K$  ( $2.817 < K < 3.443$ ) du système de commande à retour unitaire de l'exemple avec le correcteur PI-FF proposé et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire.



**Figure (V.12):** Tracé des variations de D en fonction de T et K du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  (bleu)



**Figure (V.13):** Tracé des variations de Ts en fonction de T et K du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  (bleu)

Des figures (V.12) et (V.13), on remarque que les tracés des variations du dépassement  $D(\%)$  et du temps de réponse  $T_s (2\%)$  en fonction de la constante de temps T et du gain K avec le correcteur PI-FF proposé sont des droites horizontales et les tracés des variations du dépassement  $D(\%)$  et du temps de réponse  $T_s (2\%)$  en fonction de la constante de temps T et du gain K avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  sont toutes des droites inclinées. On a conclut alors que le système de commande à retour unitaire du processus du niveau du liquide avec le correcteur PI-FF proposé est plus robuste que celui avec le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire aux variations de la constante du temps T et le gain K du modèle du premier ordre avec retard de l'équation (V.20) de cet exemple.

### V.4.2 Exemple 2

Dans [60], le correcteur PID<sup>μ</sup> d'ordre fractionnaire a été utilisé pour commander ce type de processus pour améliorer ses performances caractéristiques par rapport au correcteur PID classique. Alors, dans cet exemple, on va utiliser le correcteur PI-FF proposé pour la commande du processus pour vérifier l'efficacité et l'utilité de ce type de correcteur dans l'amélioration des performances caractéristiques par rapport au correcteur PID<sup>μ</sup> d'ordre fractionnaire.

Le processus de cet exemple est représenté par un modèle du premier ordre avec retard comme suit [60]:

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-0s}}{1 + Ts} = \frac{3.481e^{-6.4s}}{1 + 37.8s} \quad (V.35)$$

Les spécifications de conception exigées du système de commande à retour unitaire projeté sont données par:

- Fréquence du gain unitaire:  $\omega_c = 0.13 \text{ rad/s}$
- Marge de phase:  $\varphi_m = 95^\circ$

L'objectif de la stratégie de commande PI-FF proposée pour la commande à retour unitaire du processus présenté dans cet exemple, est de trouver le correcteur C(s) qui garantisse que sa fonction de transfert en boucle fermée  $G_{CL}(s)$  est le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est  $G_d(s)$  de l'équation (V.4).

Dans la méthode de conception du correcteur PI-FF proposée, on doit premièrement traduire les spécifications de conception exigées du système de commande à retour unitaire projeté du processus de cet exemple (fréquence du gain unitaire  $\omega_c = 0.13 \text{ rad/s}$  et Marge de phase  $\varphi_m = 95^\circ$ ) en termes des paramètres  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  de la fonction de transfert du modèle général de Bagley-Torvik. Après plusieurs essais de simulation et d'analyse du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire pour satisfaire les spécifications de conception exigées du système de commande à retour unitaire projeté, les valeurs numériques obtenues pour les paramètres  $m$ ,  $\zeta$  et  $\omega_n$  sont  $m = 0.76$ ,  $\zeta = 0.95$ , et  $\omega_n = 1.5$ . Par conséquent, la fonction de transfert du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire  $G_d(s)$  est donnée par [58]:

$$G_d(s) = \frac{e^{-0s}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{e^{-6.4s}}{\left(\frac{s}{1.5}\right)^2 + 2 * 0.95\left(\frac{s}{1.5}\right)^{0.76} + 1} \quad (V.36)$$

De l'équation (V.13), la fonction de transfert du correcteur PI-FF proposé est donnée par:

$$C(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + f_1 s + f_2 s^m} \right) \quad (V.37)$$

où  $K_p = \frac{T\omega_n^2}{K} = 24.4326$ ,  $K_I = \frac{\omega_n^2}{K} = 0.6464$ ,  $f_1 = \omega_n^2 \theta = 14.4$  et  $f_2 = 2\zeta\omega_n^{(2-m)} = 3.1413$ .

Donc le correcteur PI-FF proposé  $C(s)$  est donné par:

$$C(s) = \left( 24.4326 + \frac{0.6464}{s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + 14.4s + 3.1413s^{0.76}} \right) \quad (V.38)$$

La fonction de transfert  $C_F(s)$  du correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire obtenu dans [60] pour la commande du niveau du liquide dans les réservoirs est donnée par :

$$C_F(s) = 1.361 + \frac{0.0479}{s} + 1.0883s^{0.7899} \quad (V.39)$$

#### V.4.2.1 Analyse de la stabilité

Les fonctions de transfert en boucle fermée de la commande du processus de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.38) [58] et le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire de l'équation (V.39) [60] sont données, respectivement, par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} G_{CLPI-FF}(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\ &= \frac{(85.0499s + 2.2501)e^{-6.4s}}{\left( \begin{array}{l} 37.8s^3 + 545.32s^2 + 118.7411^{1.76} + 14.4s + 3.1413s^{0.76} \\ + (85.0499s + 2.2501)e^{-6.4s} \end{array} \right)} \end{aligned} \quad (V.40)$$

$$\begin{aligned} G_{CLFPID}(s) &= \frac{C_F(s)G(s)s}{1 + C_F(s)G(s)} \\ &= \frac{(3.7884s^{1.7899} + 4.7376s + 0.1667)e^{-6.4s}}{37.8s^2 + s + (3.7884s^{1.7899} + 4.7376s + 0.1667)e^{-6.4s}} \end{aligned} \quad (V.41)$$

Les dénominateurs des ces deux fonctions de transfert sont donnés comme suit:

$$D_{PI-FF}(s) = \left( \begin{array}{l} 37.8s^3 + 545.32s^2 + 118.7411^{1.76} + 14.4s + 3.1413s^{0.76} \\ + (85.0499s + 2.2501)e^{-6.4s} \end{array} \right) \quad (V.42)$$

$$D_{PIDF}(s) = 37.8s^2 + s + (3.7884s^{1.7899} + 4.7376s + 0.1667)e^{-6.4s} \quad (V.43)$$

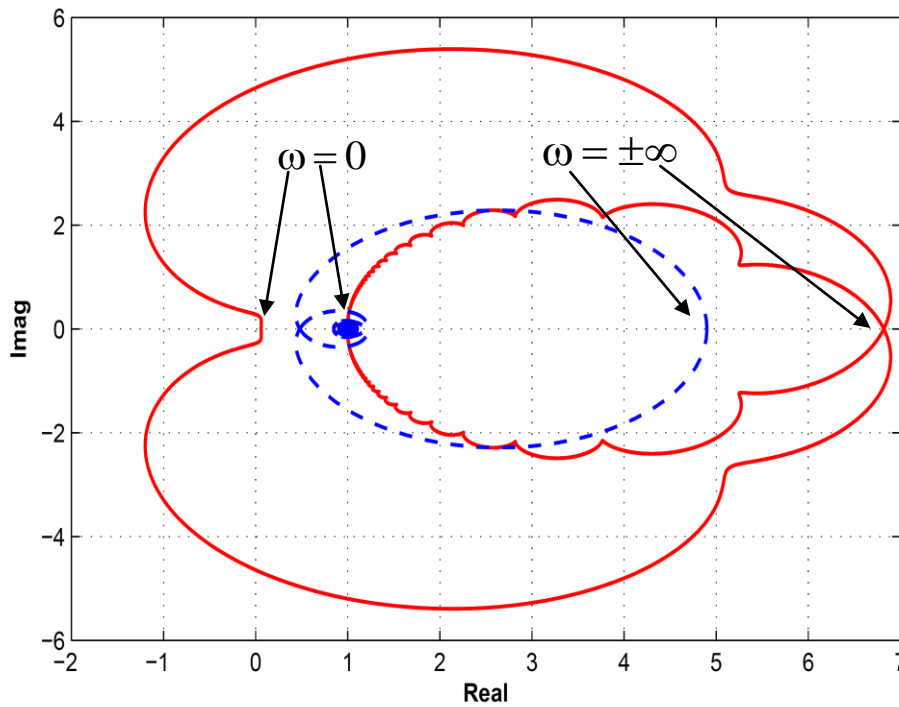
L'analyse de la stabilité pour ce type de système, est réalisée en utilisant la méthode de Mikhailov généralisée modifiée proposé dans [37]. Pour le système de commande de cet

exemple avec le correcteur PI-FF proposé et le correcteur PID<sup>μ</sup> d'ordre fractionnaire, les deux fonctions  $\psi_1(s)$  et  $\psi_2(s)$  sont données, respectivement, par les expressions suivantes :

$$\psi_1(s) = \frac{D_{PI-FF}(s)}{37.8(s+3)^3} = \frac{\left( 37.8s^3 + 545.32s^2 + 118.7411^{1.76} + 14.4s + 3.1413s^{0.76} \right) + (85.0499s + 2.2501)e^{-6.4s}}{37.8(s+3)^3} \quad (V.44)$$

$$\psi_2(s) = \frac{D_{PIDF}(s)}{37.8(s+2)^2} = \frac{37.8s^2 + s + (3.7884s^{1.7899} + 4.7376s + 0.1667)e^{-6.4s}}{37.8(s+2)^2} \quad (V.45)$$

Figure (V.14) montre les tracés des parties imaginaires contre les parties réelles des deux fonctions  $\psi_1(j\omega)$  et  $\psi_2(j\omega)$  pour  $s = j\omega$ , avec  $-\infty < \omega < +\infty$ . De la figure (V.14), on peut voir que les deux tracés n'encerclent pas l'origine du plan complexe. Alors, on peut dire que le système de commande en boucle fermée de cet exemple est stable avec les deux types de correcteur PI-FF proposé et PID<sup>μ</sup> d'ordre fractionnaire.



**Figure (V.14):** Tracés des fonctions  $\psi_1(j\omega)$  (rouge) et  $\psi_2(j\omega)$  (bleu)

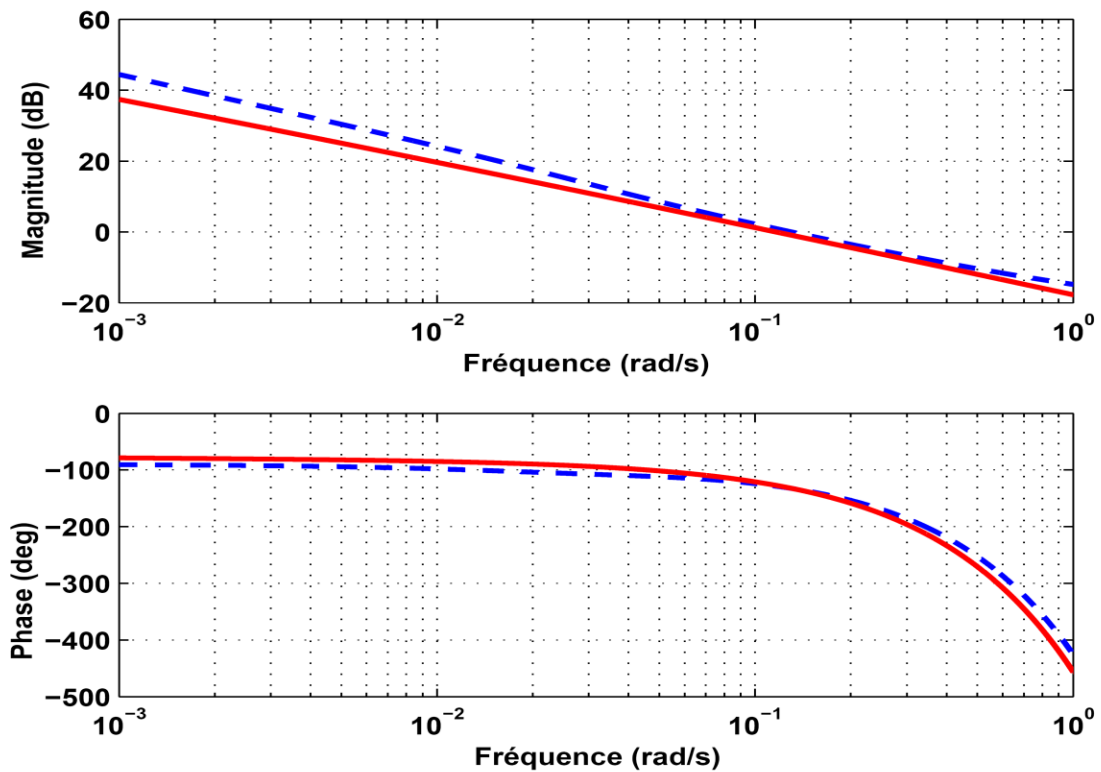
#### V.4.2.2 Réponses fréquentielles et temporelles

Les fonctions de transfert en boucle ouverte de la commande du processus de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.38) [58] et le correcteur PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> fractionnaire de l'équation (V.39) [60] sont données, respectivement, par les expressions suivantes:

$$C(s)G(s) = \left( 24.4326 + \frac{0.6464}{s} \right) \left( \frac{s}{s^2 + 14.4s + 3.1413s^{0.76}} \right) \left( \frac{3.481e^{-6.4s}}{1 + 37.8s} \right) \quad (V.46)$$

$$C_F(s)G(s) = \left( 1.361 + \frac{0.0479}{s} + 1.0883s^{0.7899} \right) \left( \frac{3.481e^{-6.4s}}{1 + 37.8s} \right) \quad (V.47)$$

Figure (V.15) montre les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  et  $C_F(s)G(s)$  du système de commande de cet exemple avec le correcteur PF-FF proposé de l'équation (V.38) et le correcteur PID<sup>μ</sup> d'ordre fractionnaire de l'équation (V.39), respectivement. De la figure (V.15), on note que les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  et  $C_F(s)G(s)$  sont presque confondus autour de la fréquence au gain unité.



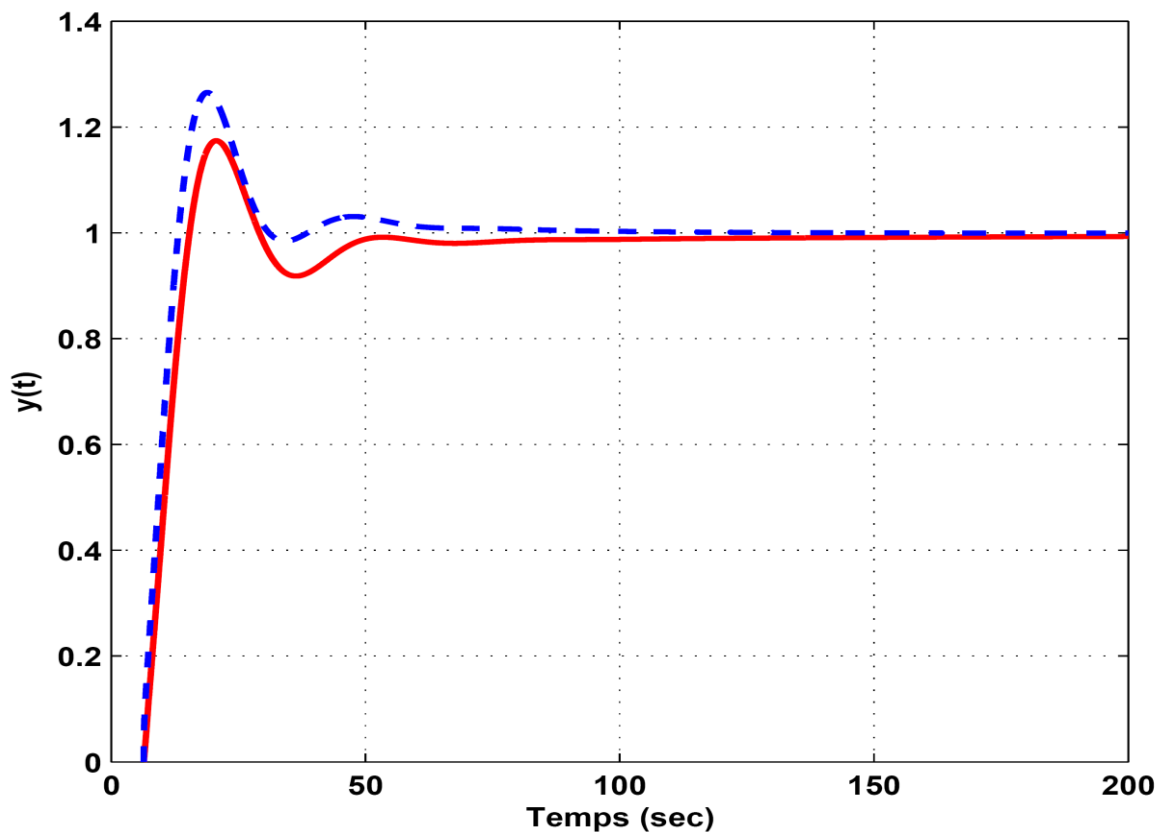
**Figure (V.15):** Tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  (rouge) et  $C_F(s)G(s)$  (bleu)

De la figure (V.15), les résultats des spécifications de la conception exigées de la fréquence du gain unitaire  $\omega_c = 0.13 \text{ rad/s}$  et de la marge de phase  $\varphi_m = 95^\circ$  du système de commande à retour unitaire du processus de cet exemple avec les deux correcteurs, sont résumés dans le tableau (V.3).

**Tableau (V.3):** Résultats des spécifications de conception  $\omega_c$  et  $\phi_m$ 

	$\omega_c$ (rad/s)	$\phi_m$ (deg)
<b>Correcteur PI-FF proposé</b>	<b>0.1161</b>	<b>52.8301</b>
<b>Correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire</b>	<b>0.1300</b>	<b>47.3355</b>

Figure (V.16) montre les réponses indicielles du système de commande de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.38) et le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire de l'équation (V.39). De la figure (V.16), on remarque que le dépassement D(%) et le temps de réponse Ts (2%) de la réponse indicielle du système de commande en boucle fermée du processus de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé sont plus petits que ceux avec le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire.



**Figure (V.16):** Réponses indicielles du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur PID<sup>μ</sup> (bleu)

On a aussi fait le calcul de l'intégrale du carré de l'erreur multiplié par le temps (Integral Time Square error - ITSE) de la réponse indicielle du système de commande en boucle fermée du processus de cet exemple avec les deux correcteurs PI-FF proposé et PID<sup>μ</sup> fractionnaire. Il a été

constaté que la valeur de l'ITSE avec le correcteur PI-FF est plus petite que celle de l'ITSE avec le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire. Pour voir l'amélioration des performances caractéristiques du système de commande en boucle fermée du processus de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé, les résultats obtenus du dépassement D(%), du temps de réponse Ts (2%) et de l'ITSE de la réponse indicielle du système de commande en boucle fermée avec les deux correcteurs PI-FF proposé et PID<sup>μ</sup> fractionnaire sont résumé dans le tableau (V.4).

**Tableau (V.4):** Caractéristiques de performance des correcteurs PI-FF et PID<sup>μ</sup>

	<b>D(%)</b>	<b>T<sub>s</sub> (2%) (s)</b>	<b>ITSE</b>
<b>Correcteur PI-FF proposé</b>	<b>17.4</b>	<b>47.63</b>	<b>62.9441</b>
<b>Correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire</b>	<b>26.52</b>	<b>55.11</b>	<b>103.7703</b>

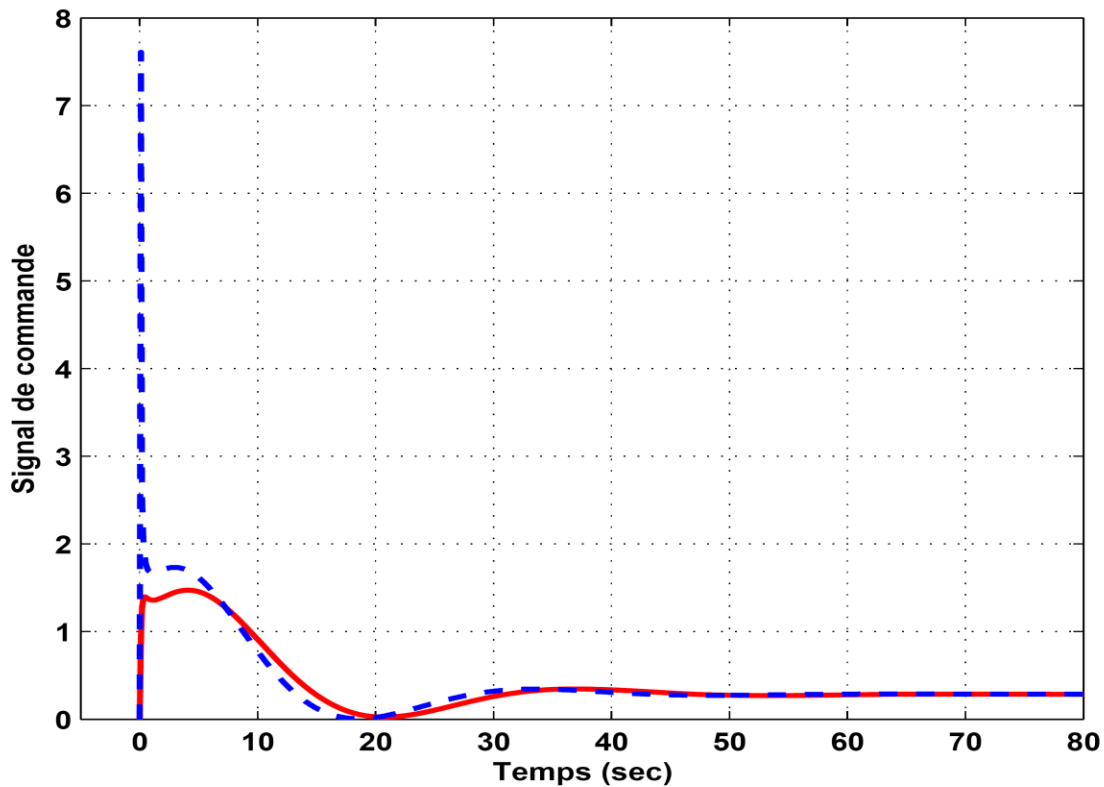
Du tableau (V.4), on tire les conclusions suivantes:

- Le dépassement D(%) du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PI-FF est environ 34.39% plus petit que celui avec le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire.
- Le temps de réponse Ts (2%) du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PI-FF est environ 13.57% plus petit que celui avec le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire.
- L'ITSE du système de commande à retour unitaire avec le correcteur PI-FF est environ 39.34% plus petit que celui avec le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire.

A partir de ces résultats de simulation, on peut conclure que le correcteur PI-FF proposé a considérablement amélioré les caractéristiques de performance temporelle du système de commande à retour unitaire par rapport au celles avec le correcteur PID<sup>μ</sup> d'ordre fractionnaire.

#### **V.4.2.3 Signal de commande**

Le signal de commande  $u(t)$  de la figure (V.3) du système de commande de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.38) et avec le correcteur PID<sup>μ</sup> d'ordre fractionnaire de l'équation (V.39) est présenté dans la figure (V.17).



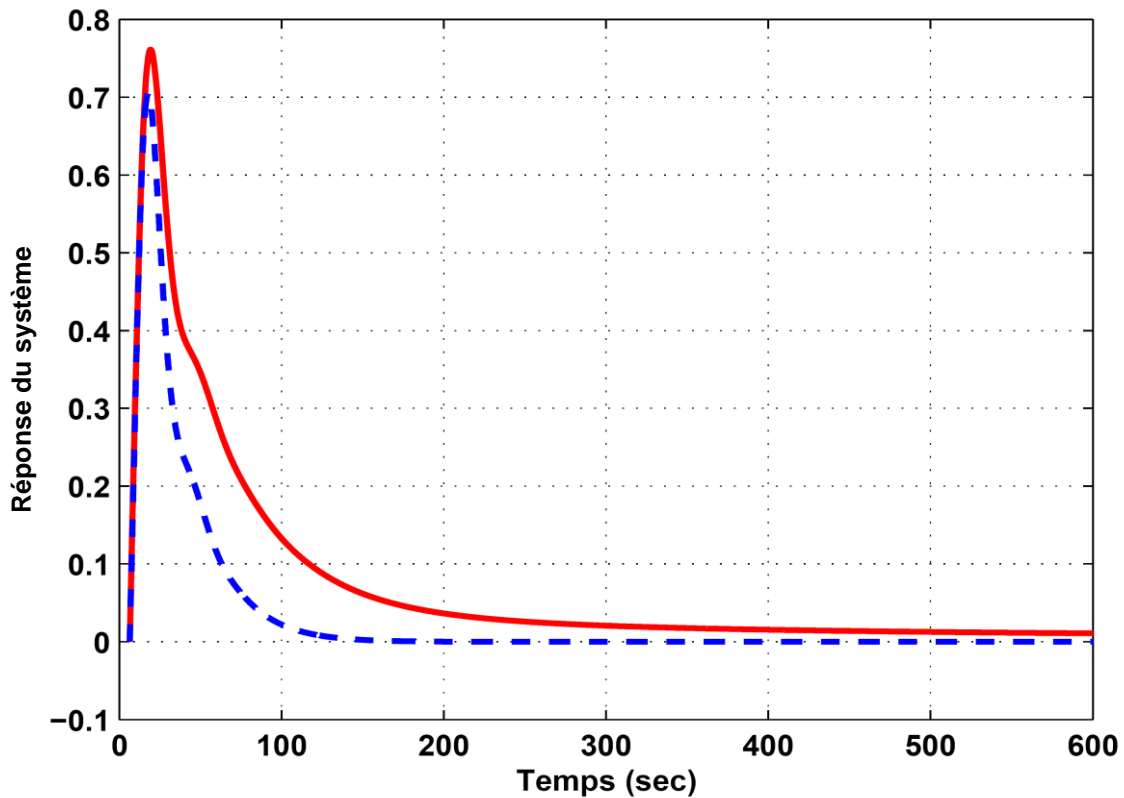
**Figure (V.17):** Signal de commande du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur  $PID^\mu$  (bleu)

De la figure (V.17), on note que malgré l'amélioration des performances du système de commande en boucle fermée du processus de cet exemple, en utilisant le correcteur PI-FF proposé par rapport au correcteur  $PID^\mu$ , l'effort initial du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé est inférieur à l'effort du système de commande avec le correcteur  $PID^\mu$ .

#### V.4.2.4 Perturbation

Par la même méthode que nous avons utilisé dans le premier exemple, nous étudions l'influence d'une perturbation  $W(s)$  de cet exemple.

Figure (V.18) montre les signaux de sortie du système de commande en boucle fermée du processus de cet exemple, noté perturbation, pour l'entrée perturbation  $W(s)$  échelon unité avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.38) et le correcteur  $PID^\mu$  fractionnaire de l'équation (V.39).



**Figure (V.18):** Réponse du système de commande à une perturbation échelon avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et avec le correcteur  $PID^{\mu}$  (bleu).

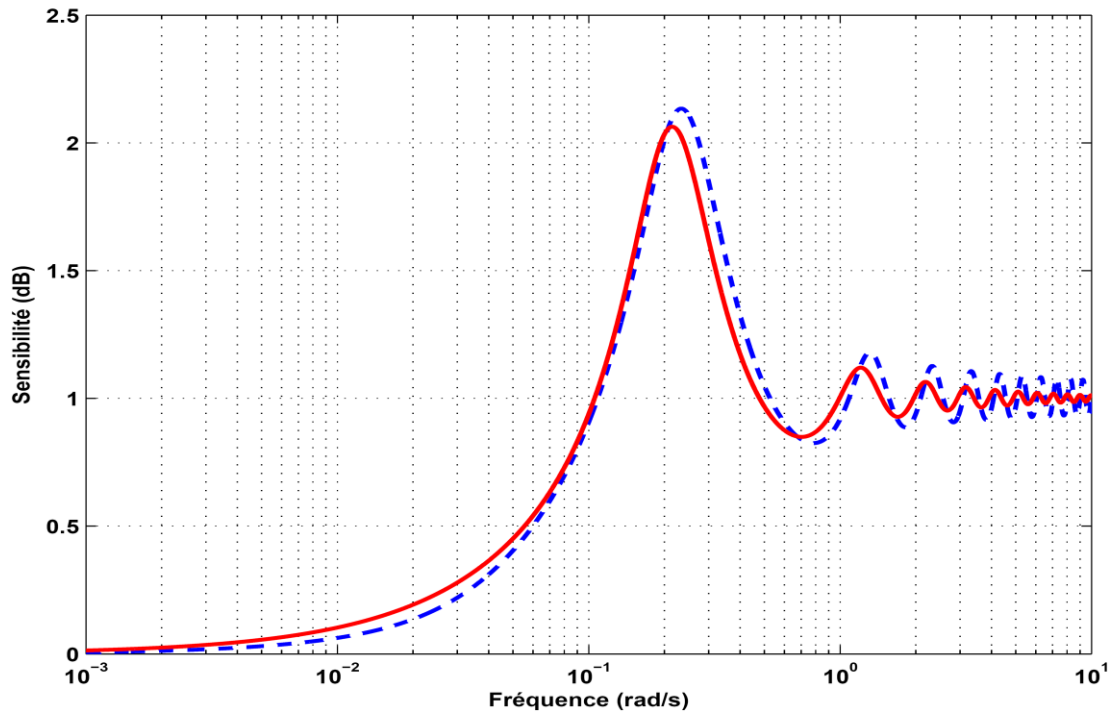
A partir de la figure (V.18), on peut remarquer que le système de commande avec le correcteur PI-FF proposé, rejette complètement la perturbation exactement comme le système de commande avec le correcteur  $PID^{\mu}$ .

#### V.4.2.5 Sensibilité

Par la même méthode que nous avons utilisé dans le premier exemple, nous étudions la sensibilité  $S(s)$  dans cet exemple.

Figure (V.19) montre les tracés de Bode des fonctions de sensibilité  $S(s)$  du système de commande en boucle fermée du processus de cet exemple pour l'entrée perturbation externe  $N(s)$  échelon unité avec le correcteur PI-FF proposé de l'équation (V.38) et le correcteur  $PID^{\mu}$  fractionnaire de l'équation (V.39).

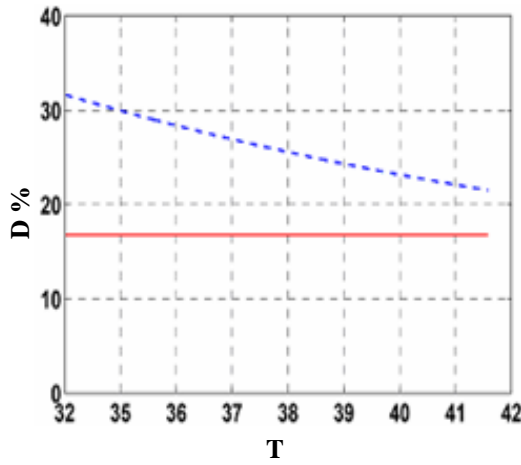
De la figure (V.19) on note que le paramètre  $M_s$  du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé est mieux que le paramètre  $M_s$  du système de commande avec le correcteur  $PID^{\mu}$ . D'après les résultats obtenus, pour la méthode de conception du correcteur PI-FF proposée pour le système de commande en boucle fermée du processus de cet exemple, on note que malgré les améliorations réalisées pour les trois performances caractéristiques considérées, le dépassement  $D(\%)$ , le temps de réponse  $T_s(2\%)$  et l'ITSE, ni le signal de commande ni le rejet de la perturbation ni la mesure de la sensibilité n'a été altéré.



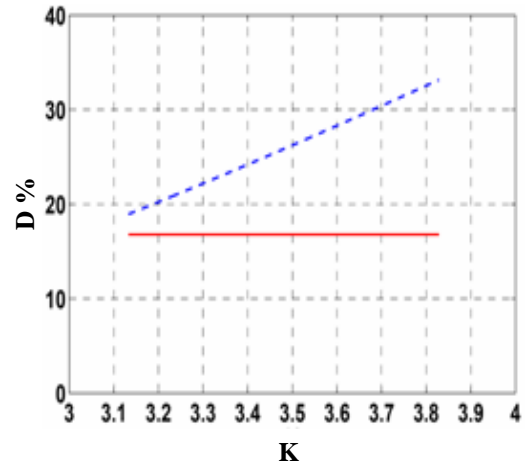
**Figure (V.19):** Tracés de Bode de la sensibilité  $S(j\omega)$  du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur  $PID^\mu$  fractionnaire (bleu)

#### V.4.2.6 Robustesse

Pour tester la robustesse du système de commande à retour unitaire du processus de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé et le correcteur  $PID^\mu$  fractionnaire, on fait varier la constante du temps  $T$  et le gain  $K$  du modèle du premier ordre avec retard de l'équation (V.35) dans les intervalles, respectivement,  $[0.90 T_N, 1.10 T_N]$  et  $[0.90 K_N, 1.10 K_N]$ ; où  $T_N = 37.8$  et  $K_N = 3.481$  sont les valeurs nominales des paramètres  $T$  et  $K$  puis, constater les variations du dépassement  $D(\%)$  et du temps de réponse  $T_s(2\%)$  dans ces intervalles. Figures (V.20) et (V.21) montrent, respectivement, les tracés des variations du dépassement  $D(\%)$  et du temps de réponse  $T_s(2\%)$  en fonction des paramètres  $T$  ( $34.02 < T < 41.58$ ) et  $K$  ( $3.1329 < K < 3.8291$ ) du système de commande à retour unitaire de l'exemple avec le correcteur PI-FF proposé et le correcteur  $PID^\mu$  fractionnaire.

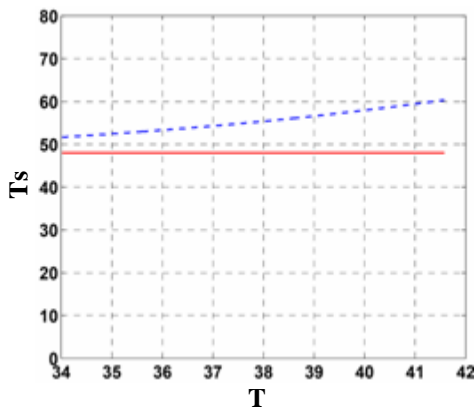


K=3.481

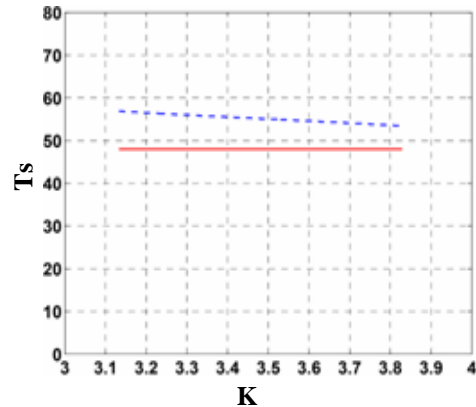


T=37.8 s

**Figure (V.20):** Tracé des variations de D en fonction de T et K du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur PID<sup>μ</sup> (bleu)



K=3.481



T=37.8 s

**Figure (V.21):** Tracé des variations de Ts en fonction de T et K du système de commande avec le correcteur PI-FF proposé (rouge) et le correcteur PID<sup>μ</sup> (bleu)

Des figures (V.20) et (V.21), on remarque que les tracés des variations du dépassement D(%) et du temps de réponse Ts (2%) en fonction de la constante de temps T et du gain K avec le correcteur PI-FF proposé sont des droites horizontales et les tracés des variations du dépassement D(%) et du temps de réponse Ts (2%) en fonction de la constante de temps T et du gain K avec le correcteur PID<sup>μ</sup> sont toutes des droites inclinées. On a conclut alors, que le système de commande à retour unitaire du processus de cet exemple avec le correcteur PI-FF proposé est plus robuste que celui avec le correcteur PID<sup>μ</sup> fractionnaire aux variations de la constante du

temps  $T$  et le gain  $K$  du modèle du premier ordre avec retard de l'équation (V.35) de cet exemple.

### **V.5 Conclusion**

Dans ce chapitre on a présenté une nouvelle approche de conception d'un correcteur d'ordre fractionnaire pour la commande d'un modèle FOPTD dans le but d'améliorer les performances caractéristiques du système de commande en boucle fermée. Le correcteur conçu garantit que la fonction de transfert en boucle fermée du système de commande est le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire. Le correcteur ainsi obtenu est un correcteur PI classique en cascade avec un filtre d'ordre fractionnaire (PI-FF). L'avantage principal de la méthode de conception proposée est que la fonction de transfert de ce correcteur PI-FF fractionnaire est calculée analytiquement à partir des fonctions de transfert du modèle FOPTD et du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire.

Des exemples illustratifs ont été présentés pour montrer l'efficacité du correcteur d'ordre fractionnaire PI-FF dans l'amélioration des performances caractéristiques de la commande d'un processus représenté par un modèle FOPTD comparées à celles obtenues avec les correcteurs fractionnaires  $PI^\lambda D^\mu$  et  $PID^\mu$ .

# Conclusion Générale

---

## Conclusion Générale

Plusieurs processus industriels sont représentés par le modèle du premier ordre avec retard (First Order Plus Time Delay, FOPTD) qui est un modèle très connu et très utilisé dans la modélisation. La commande de ces processus nécessite l'utilisation des régulateurs pour satisfaire les performances caractéristique exigés.

L'objectif principal de l'utilisation des différentes structures de correcteurs d'ordre fractionnaires est de satisfaire plus de performances caractéristiques temporelles et fréquentielles dans la commande des systèmes. L'apport supplémentaire dans l'utilisation de telles structures de correcteurs fractionnaires réside dans l'aspect fractionnaire de leurs ordres de dérivation ou d'intégration constituant ainsi des degrés de liberté supplémentaires qui peuvent améliorer considérablement la commande comparés aux correcteurs classiques.

Dans cette thèse, nous avons abordé la tâche de la conception des nouveaux correcteurs d'ordre fractionnaire pour les processus du premier ordre avec retard en se basent sur le modèle de référence de Bagley-Torvik.

Notre première contribution a été consacrée à la conception d'un correcteur  $PI^\lambda$  fractionnaire d'un système de commande à retour unitaire, dont le modèle du processus est un système du premier ordre avec retard. La technique de conception proposée consiste à utiliser les paramètres  $K_P$  et  $T_I$  du correcteur PI classique conçu pour ce même système de commande, puis ajuster l'ordre d'intégration  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda$  fractionnaire pour améliorer l'erreur quadratique intégrale, le dépassement et le temps de réponse de la réponse indicielle du système de commande avec le correcteur PI classique. Des exemples illustratifs, pour différents types de processus, sont présentés pour valider l'efficacité et la flexibilité de la méthode de réglage proposée. Les résultats de simulation obtenus ont été très satisfaisants. La seconde contribution consistait à faire une analyse des performances caractéristiques temporelles et fréquentielles du système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est donnée par

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^m + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad (\text{où } 0 < m < 2, 0 < \zeta < 1 \text{ et } \omega_n > 0)$$

en fonction des valeurs de l'ordre de différentiation  $m$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$ . Les résultats des performances caractéristiques obtenus ont montré que le comportement de ce type de système fractionnaire va de la relaxation à l'oscillation pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $\zeta$ . Alors, on a estimé qu'il serait très intéressant de considérer ce système fractionnaire comme modèle de référence dans la théorie de la commande des systèmes. La dernière contribution porte sur la conception d'un nouveau correcteur fractionnaire pour un système de commande à retour unitaire dont le

modèle du processus est un système du premier ordre avec retard, pour l'amélioration de ses performances et sa robustesse. Ce nouveau correcteur fractionnaire n'est pas choisi à partir des correcteurs classiques ; mais est établi de manière à ce que la fonction de transfert en boucle fermée du système de commande projetée, soit le modèle de référence général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire. Le correcteur d'ordre fractionnaire résultant a une fonction de transfert composée d'un correcteur PI classique et d'un filtre d'ordre fractionnaire en cascade. Le réglage des paramètres de ce nouveau correcteur se fait analytiquement, à partir des paramètres du modèle du premier ordre avec retard et du modèle général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire. Des exemples de simulation sont présentés pour valider l'utilité de cette approche de conception des correcteurs d'ordre fractionnaire pour les systèmes de commande à retour unitaire dont le modèle du processus est un système du premier ordre avec retard. Les résultats de simulation obtenus ont été très satisfaisants du point de vue de l'efficacité et de la flexibilité de la méthode de conception du nouveau correcteur. Pour monter l'amélioration de performances caractéristiques et de la robustesse apportées par le correcteur fractionnaire proposé, les résultats de simulation obtenus ont été comparés à ceux obtenus en utilisant des correcteurs d'ordre fractionnaires  $PI^\lambda D^\mu$  et  $PID^\mu$  pour les mêmes systèmes de commande.

### **Perspectives et suggestions:**

- ✓ Validation expérimentale de la technique de conception proposée.
- ✓ Extension de la technique de conception proposée aux systèmes de commande à retour unitaire dont le modèle du processus n'est pas un système du premier ordre avec retard.
- ✓ Développement d'autres formes de correcteurs fractionnaires encore plus efficaces pour la commande des systèmes.

# Références



# Références

- [1] A. O'Dwyer, Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules. London, UK, Imperial College Press, 2009.
- [2] J. Sabatier et al., Advances in Fractional Calculus: Theoretical Development and Applications in Physics and Engineering. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2007.
- [3] C.A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications, London, UK, Springer, 2010.
- [4] H. Sheng, Y.Q. Chen, T.S. Qiu, Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing: Techniques and Applications. Springer-Verlag, London, 2012.
- [5] V.V. Uchaikin, Fractional Derivatives for Physicists and Engineers: Applications, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2013.
- [6] K. Biswas, G. Bohannan, R. Caponetto, A.M. Lopes, J.A.T. Machado, Fractional-Order Devices, Cham, Switzerland, Springer, 2017.
- [7] S.K. Damarla, M. Kundu, Fractional order processes: simulation, identification, and control, CRC Press, Boca Raton, USA, 2019.
- [8] A. Oustaloup, B. Mathieu, La commande CRONE : du scalaire au multivariable. 2<sup>nd</sup> édition, Paris, France: Hermès science publications, 1999.
- [9] Y.Q. Chen, I. Petras, & D. Xue, "Fractional Order Control - A Tutorial", In proceeding of the American Control Conference (pp. 1397-1411). St. Louis, MO, USA. 2009.
- [10] S. Ladaci, A. Charef, "Fractional adaptive control: A survey", Chapter in: 'Classification and Application of Fractals: New Research', Editor: Eric W. Mitchell, Scott R. Murray, Nova Science Publishers, Inc., pp. 261-275, USA, 2011.
- [11] Y. Luo, & Y.Q. Chen, Fractional Order Motion Controls. Chichester, United Kingdom : John Wiley & Sons Ltd. 2012.
- [12] D.Valerio, & J. Sà da Costa, An Introduction to Fractional Control. IET Control Engineering Series 91. The Institution of Engineering and Technology, Stevenage, UK. 2013.
- [13] F. Padula, A. Visioli, Advances in Robust Fractional Control, New York, USA: Springer, 2015.
- [14] A. Tepljakov, Fractional-order Modeling and Control of Dynamic Systems, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2017.
- [15] S. Manabe, "The non-integer integral and its application to control systems", ETJ of Japan, Vol. 6, No. 3-4, pp. 83-87, 1961.
- [16] I. Podlubny, "Fractional order systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers", IEEE Transactions on automatic control, Vol. 44, No. 1, pp. 208-214, 1999.
- [17] P. Shah, S. Agashe, "Review of fractional PID controller", Mechatronics, Vol. 38, pp 29-41, 2016.
- [18] Y.Q. Chen and D. Xue, "A Comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers", In the Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automatic, Changhai, China, June 10-14, pp. 3228-3235, 2002.
- [19] C.A. Monje, B.M. Vinagre, A.J. Calderón, V. Feliu, and Y.Q. Chen, "Auto-Tuning of Fractional Lead-Lag Compensators", Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, July 3-8 Vol. 38, No. 1, pp. 319-324, 2005.
- [20] O. P. Agrawal, "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems", Nonlinear Dynamics, Vol. 38, No. 1-4, pp. 323-337, 2004.
- [21] S. Ladaci and A. Charef. Fractional adaptive control. Proc. CGE'03 Conférence sur le Génie Electrique, EMP, Alger, Algérie, 15\_16 Février, 2004.

- [22] A. Neçaibia, S. Ladaci, A. Charef, & J. J. Loiseau, “Fractional order extremum seeking approach for maximum power point tracking of photovoltaic panels”, *Front. Energy*, Vol. 9, No. 1, pp. 43–53, 2015.
- [23] S. Domek, “Multiple use of the fractional-order differential calculus in the model predictive control”, In proceeding of the 19th International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 359-362, Miedzyzdroje, Poland, 2014.
- [24] U.M. Al-Saggaf, I.M. Mehedi, R. Mansouri & M. Bettayeb, “State feedback with fractional integral control design based on the Bode’s ideal transfer function”, *International Journal of Systems Science*, Vol. 47, No. 1, pp. 149-161, 2016.
- [25] M. Bettayeb, & R. Mansouri, “IMC-PID-fractional-order-filter controllers design for integer order systems”, *ISA Transactions*, Vol. 53, No. 5, pp. 1620-1628, 2014.
- [26] J. Shen, & J. Lam, “State feedback  $H_\infty$  control of commensurate fractional-order systems”, *International Journal of Systems Science*, Vol. 45, No. 3, pp. 363-372, 2014.
- [27] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York, Wiley, 1993.
- [28] K.B. Oldham and J. Spanier, *Fractional calculus*, Academic Press. New York, 1974.
- [29] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [30] I.Podlubny, *Fractional Differential Equations*, San Diego, USA: Academic Press; 1999.
- [31] A. Erdélyi (ed.), *Tables of Integral Transforms*, vol. 1, McGraw-Hill, 1954.
- [32] I. Petras, I. Podlubny, O’Leary, P., Dorcak, L., and Vinagre, B. M., “Analogue Realization of Fractional Order Controllers,” *Fakulta Berg*, TU Kosice, 2002.
- [33] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, “Fractal system as represented by singularity function”, *IEEE Trans. Auto. Control*, 37, pp 1465-1470, sept 1992.
- [34] A. Charef, “Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controllers”, *IEE proceedings on Control Theory and Applications*, Vol 153, No. 6, pp 714-720, 2006.
- [35] M. Dalir, M. Bashour, “Applications of Fractional Calculus,” *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 21, pp. 1021-1032, 2010.
- [36] D. Matignon, “Stability properties for generalized fractional differential systems,” *ESAIM: Proceedings*, vol. 5, pp.145-158, 1998.
- [37] M. Busłowicz, “Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type”, *Bulletin of The Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, Vol. 56, No. 4, 319-324, 2008.
- [38] D. Matignon and B. d’Andréa-Novel, “Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems”, *Computational Engineering in Systems Applications*, vol. 2, pp. 952-956, 1996.
- [39] Y. Li, Y. Q. Chen, and Y. C. Cao, “Fractional Order Universal Adaptive Stabilization”, *Proceedings of the 3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Ankara, Turkey, November 05-07, 2008.
- [40] D. Wang and X. Gao, “ $H_\infty$  design with fractional-order  $PD^\mu$  controllers”, *Automatica*, Vol. 48, No. 5, pp. 974-977, 2012.
- [41] B. M. Vinagre, I.Petras, I.Podlubny and Y. Q. Chen, “Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 29, No. 1-4, pp. 269-279, 2002.
- [42] S. Ladaci and A. Charef, “On Fractional Adaptive Control”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 43, No. 4, pp. 365-378, 2006.
- [43] S. Ladaci and A. Charef, “An adaptive fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller”, In: *Proceedings TMCE 2006 international symposium series on tools and methods of competitive engineering*, Ljubljana, Slovenia, April 18–22, pp. 1533-1540, 2006.

- [44] S. Ladaci, J. J. Loiseau and A. Charef, “Fractional Order Adaptive High-Gain Controllers for Class of Linear Systems”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, Vol. 13, No. 4, pp. 707-714, 2008.
- [45] A. Charef, M. Assabaa, S. Ladaci and J.-J. Loiseau, “Fractional Order Adaptive Controller for Stabilized Systems via High-Gain Feedback”, *IET Proceedings on Control Theory & Applications*, Vol. 7, No. 6, pp. 822-828, 2013.
- [46] S. Ladaci, A. Charef and J.J. Loiseau, “Robust Fractional Adaptive Control based on the Strictly Positive Realness Condition”, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 19, No. 1, pp. 69-76, 2009.
- [47] A. Ilchmann and S. Townley, “Simple adaptive stabilization of high gain stabilizable systems”, *Systems and Control letters*, Vol. 20, No. 3, pp. 189-198, 1993.
- [48] J.C. Fan and T. Kobayashi. A simple adaptive pi controller for linear systems with constant disturbances. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 43, No. 5, pp. 733-736, 1998.
- [49] F. Padula, R. Vilanova, and A. Visioli, “ $H_\infty$  optimization-based fractional-order PID controllers design”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 24, No. 17, pp. 3009-3026, Jul. 2013.
- [50] F. Padula, S. Alcantara, R. Vilanova and A. Visioli, “ $H_\infty$  control of fractional linear systems”, *Automatica*, Vol. 49, No. 7, pp. 2276-2280, 2013.
- [51] K. Gherfi, A. Charef and H. A. Abbassi, D. Idiou, “Conception of fractional  $PI^\lambda$  controller through a classical PI controller”, *Proceedings of the 2nd International Conference on Automation, Control, Engineering and Computer Science, ACECS-2015*, March 22-24, Sousse, Tunisia, 2015.
- [52] H. Bekkouche and A. Charef, “Robust Automatic Voltage Regulator Design using Bode’s Ideal Transfer Function”, *Sciences & Technologie B*, No 42, pp. 9-21, 2015.
- [53] Yi. Sun, P.W. Nelson, and A.G. Ulsoy, “Proportional-Integral Control of First-Order Time-Delay Systems via Eigenvalue Assignment”, *IEEE transactions on control systems technology*, Vol. 21, No. 5, pp. 1586-1594, september 2013.
- [54] M. Shamsuzzoha, “IMC Based PI/PID Controller Tuning Rule for Time Delay Processes”, presented at 13th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2013) in Kimdaejung Convention Center, Gwangju, Korea, Oct. 20-23, 2013.
- [55] R. L. Bagley and P. J. Torvik, “Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures”, *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 5, pp. 741-748, 1983.
- [56] R. L. Bagley and P. J. Torvik, “On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials”, *Journal of Applied Mechanics.*, Vol. 51 No. 2, pp. 294-298, 1984.
- [57] Maurice Rivoire, Jean-Louis Ferrier, *Asservissement, régulation, commande analogique*, CPGE, IUT, IUP, écoles d’ingénieurs, maîtrise EEA Paru en juin 1998.
- [58] K. Gherfi, A. Charef, H. A. Abassi, “Proportional integral-fractional filter controller design for first order lag plus time delay system”, *International Journal of Systems Science*, Vol. 49, No. 8, pp. 1654-1673, 2018.
- [59] C.A. Monje, *Design methods of fractional order controllers for industrial applications*. PhD thesis, University of Extremadura, Spain, 2006.
- [60] R. Azarmi, A.K. Sedigh, M. Tavakoli-Kakhki, and A. Fatehi, “Design and Implementation of Smith Predictor Based Fractional Order PID Controller on MIMO Flow-Level Plant”, In proceeding of the 23<sup>rd</sup> Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE). Tehran, Iran, 2015.

# Résumé

Récemment, les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire ont investi tous les domaines de la commande classique par leur utilisation dans la conception de correcteurs et d'algorithmes pour la commande des systèmes dynamiques. Malgré l'introduction de beaucoup de correcteurs et d'algorithmes d'ordre fractionnaire, un travail de recherche continu et intensif pour le développement de nouvelles techniques de commande d'ordre fractionnaire est toujours en cours pour le rehaussement et l'amélioration de la qualité des performances et de la robustesse des systèmes de commande. Dans ce travail, des méthodes de conception de correcteurs fractionnaires en utilisant les opérateurs et les systèmes fractionnaires ont été développées pour des systèmes de commande à retour unitaire dont les processus sont représentés par un modèle du premier ordre avec retard afin d'améliorer la qualité de ses performances caractéristiques et sa robustesse. Des exemples illustratifs ont été présentés pour valider l'efficacité et la flexibilité des méthodes proposées dans la conception des correcteurs fractionnaires. Les résultats de simulation obtenus ont été comparés à ceux obtenus en utilisant des correcteurs classiques et d'ordre fractionnaires pour les mêmes systèmes pour montrer l'amélioration des performances caractéristiques et de la robustesse apportées par les correcteurs fractionnaires proposés.

## Mots Clés :

Commande d'ordre fractionnaire ; Correcteur d'ordre fractionnaire ; Modèle du premier ordre avec retard ; Opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire ; Système général de Bagley-Torvik d'ordre fractionnaire

.

# Abstract

Recently, fractional order operators and systems have invested all the classical control domains by using them in the design of controllers and algorithms for the control of dynamical systems. In spite of the introduction of a lot of fractional controllers and algorithms, an intensive and continuous research work for the development of new fractional control schemes is always underway for control systems performances and robustness improvement and enhancement. In this work, fractional controllers design methods using fractional operators and systems have been developed for unity feedback control system whose processes are represented by a first order plus time delay model so as to improve the quality of their performance characteristics and their robustness. Illustrative examples for different processes types have been presented to validate the fractional controllers design methods effectiveness and flexibility. The obtained simulation results have been very satisfactory. The obtained simulation results have also been compared to those obtained using classical and fractional controllers for the same control systems to show the performance characteristics and the robustness improvements brought by the proposed fractional controllers.

## **Keywords:**

Fractional order control; Fractional order controller; Fractional order operators and systems; First order plus time delay model; General Bagley-Torvik fractional system.

## ملخص

في الآونة الأخيرة، تم إدخال المؤثرات و الأنظمة الكسرية في جميع مجالات التحكم الكلاسيكية من خلال استخدامها في تصميم المصححات والخوارزميات للتحكم في الأنظمة الديناميكية. على الرغم من إدخال العديد من المصححات والخوارزميات الكسرية ، لا يزال العمل البحثي المستمر والمكثف لتطوير تقنيات تحكم كسرية جديدة مستمرًا لتحسين جودة أداء وقوة أنظمة التحكم. في هذا العمل ، تم تطوير طرق تصميم المصححات الكسرية التي تستخدم المؤثرات والأنظمة الكسرية من أجل أنظمة التحكم ذات العودة الموحدة والممثلة بواسطة نموذج من الدرجة الأولى ذو التأخر في الزمن و هذا من أجل تحسين جودة أداء وقوة النظام. تم تقديم أمثلة توضيحية لأنواع مختلفة من الأنظمة للتحقق من فعالية ومرونة الطرق المقترحة في تصميم المصححات الكسرية. كانت نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها مرضية للغاية. وتمت مقارنة نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها أيضًا بالنتائج التي تم الحصول عليها باستخدام مصححات كلاسيكية لنفس أنظمة التحكم لإظهار الأداء المميز والتحسينات المثبتة التي يوفرها المصححات الكسرية المقترحة.

### الكلمات المفتاحية

التحكم ذو الأس الكسري، المصحح ذو الأس الكسري، النموذج من الدرجة الأولى ذو التأخر في الزمن، المؤثرات و الأنظمة الكسرية، النظام العام الكسري لباغلي-تورفيك (Bagley-Torvik)