

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Badji Mokhtar Annaba University
Université Badji Mokhtar –
Annaba
Faculté de Technologie
Département Génie Mécanique



جامعة باجي مختار – عنابة
كلية التكنولوجيا
الميكانيكية قسم الهندسة

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat En-Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Par :

AIT SAID Ahcène

Thème :

Comportement en fatigue cyclique d'un composite sandwich à âme en nid d'abeilles en flexion trois points et quatre points.

Thèse soutenue le 13 Décembre 2022, devant le jury composé de :

N°	Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
01	LAOUAR Lakhdar	Prof	Université Badji Mokhtar-Annaba	Président
02	BEY Kamel	Prof	Université Badji Mokhtar-Annaba	Rapporteur
03	CHEMAMI Abdenacer	MCA	Université Badji Mokhtar-Annaba	Examineur
04	DJAMAA Med Cherif	Prof	Université 8 Mai 1945-Guelma	Examineur
05	BOUZAOUIT Azzedine	Prof	Université 20 Août 1955-Skikda	Examineur
06	GUEDRI A.E. Moumène	Prof	Université M. C. Messaadia-Souk Ahras	Examineur

"سلوك الكلل الدوري لمركب شطيرة ذات لب خلية النحل في الانحناء الدوري "ثلاثي النقاط ورباعي النقاط".

الملخص

يهدف العمل الحالي إلى دراسة السلوك الميكانيكي في الانحناء ثلاثي النقاط ورباعي النقاط لمواد مركبة ذات لب خلية النحل. لهذا الغرض تم إجراء العمل التجريبي بما في ذلك الاختبارات الميكانيكية في الانحناء الثابت ثلاثي النقاط ورباعي النقاط و اختبارات الكلل الدوري في الانحناء ثلاثي النقاط لثلاثة مستويات تحميل مختلفة وتردد ثابت قدره 5 هرتز وأخيرا اختبارات الكلل في الانحناء ثلاثي النقاط بمستوى تحميل واحد ولثلاثة ترددات مختلفة. تم تحليل وتفسير النتائج المحصول عليها من وجهة نظر السلوك الميكانيكي من خلال تفسير المنحنيات المختلفة و من وجهة الضرر الميكانيكي من خلال ملاحظة اوجه المكونات المختلفة للعينة.

تمت محاكاة رقمية بواسطة ABAQUS للاختبارات الانحناء الثابت ثلاثي النقاط لتأكيد النتائج التجريبية.

أدت هذه الدراسة إلى التوصيف الميكانيكي للمركب المدروس.

كلمات مفتاحية :

مركبات شطيرة - لب خلية النحل - الانحناء - الكلل - ا لتلف - تردد التحميل - محاكاة رقمية.

«Comportement en fatigue cyclique d'un composite sandwich à âme en nid d'abeilles en flexion trois-points et quatre-points»

Résumé :

Le présent travail a pour objectif l'étude du comportement mécanique en flexion trois-points et quatre-points d'un matériau composite sandwich à âme en nid d'abeilles. A cet effet, un travail expérimental a été réalisé comprenant des essais en flexion statique trois-points et quatre-points, des essais de fatigue cyclique en flexion trois-points pour trois niveaux de chargement différents et une fréquence constante de 5 Hz et enfin des essais de fatigue en flexion trois-points pour un seul niveau de chargement et trois fréquences différentes.

Les résultats obtenus sont analysés, du point de vue comportement mécanique, par l'interprétation des différentes courbes et, du point de vue endommagement, par l'observation des faciès des constituants du matériau de l'échantillon.

Une simulation numérique, par ABAQUS, des essais en flexion statique trois-points, a été exécutée afin de confirmer les résultats expérimentaux réalisés.

Cette étude constitue une contribution aux travaux de caractérisation mécanique des matériaux composites, en général, et des sandwiches en particulier.

Mots clés : composites sandwiches, âme en nid d'abeilles, flexion, fatigue, endommagement, fréquence de chargement, simulation numérique.

«Cyclic fatigue behavior of a honeycomb core sandwich composite in three-point and four-point bending».

Abstract :

The present work aims to study the mechanical behavior in three-point and four-point bending of a sandwich composite material with honeycomb core.

To this end, experimental work has been carried out including mechanical tests in three-point and four-point static bending, cyclic fatigue tests in three-point bending for three different levels at a constant stress frequency of 5 Hz and finally, three-point bending fatigue tests for single level of loading and three different frequencies.

The results obtained are analyzed, from the mechanical behavior point of view, by interpreting the different curves and, from the damage point of view, by observing the facies of different constituents of the sample material.

A numerical simulation, by ABAQUS, was performed for the three-point static bending tests in order to confirm the experimental results.

This study constitutes a contribution to the work of mechanical characterization of the composite materials, in general, and sandwich composites in particular.

Key words: sandwich composite, honeycomb core, bending, fatigue, damage, loading frequencies, numerical simulation.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie vivement Monsieur **BEY Kamel** pour ses permanents encouragements, son inlassable investissement et son perpétuel soutien pour que ce travail aboutisse. Son abnégation, sa disponibilité et sa volonté d'aplanir toute difficulté entravant l'avancement de mon travail m'ont poussé à persévérer dans l'effort et aller jusqu'à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tous les collègues qui ont voulu m'apporter leurs concours, chacun dans son domaine, durant la préparation de ce travail.

Une vive reconnaissance va vers Messieurs Professeur BRADAI Chedly et HADRICHE Ismail, enseignants à l'ENIS (Tunisie) pour leurs dévouements et leurs dispositions sans limite durant la réalisation de mes essais expérimentaux.

Comme je remercie chaleureusement le Professeur LAOUAR L., président du jury et les professeurs GUEDRI A.E.Moumène, BOUZAOUT A. et DJAMAA M. Cherif Président et Monsieur CHEMAMI A., pour l'amabilité et la disponibilité d'examiner mon travail et d'assurer la soutenance de ma thèse.

Ma pensée va à mes défunts parents qui sont les principaux acteurs de tout succès que j'ai pu avoir durant ma vie. Je prie Dieu de les accepter dans son vaste paradis.

Sommaire

N°	Titres	Pages
	Introduction générale.....	1
	Chapitre I : Etude bibliographique.....	3
I.1.	Définition.....	4
I.2.	Caractéristiques générales des sandwiches.....	4
I.3.	Historique et domaines d'utilisation des sandwiches.....	5
I.4.	Constituants d'une structure sandwich.....	8
I.4.1.	Les peaux.....	8
I.4.2	L'âme.....	9
I.4.3.	L'interface (adhésif).....	11
I.5.	Caractéristiques géométriques des sandwiches.....	11
I.5.1.	Procédé d'obtention du nid d'abeilles.....	12
I.6.	Intérêt des composites sandwiches... ..	13
I.7.	Théorie des poutres sandwiches.....	14
I.7.1.	Rigidité en flexion.....	14
I.7.2	Contraintes et déformations des matériaux sandwiches.....	15
I.8.	Comportement des sandwiches en flexion	17
I.8.1.	Introduction.....	17
I.8.2.	Comportement en flexion 3 points.....	17
I.8.3.	Comportement en flexion 4 points.....	20
I.9.	Mode de dégradation et de ruine des matériaux sandwiches.....	22
I.9.1.	Flambement généralisé du sandwich	23
I.9.2.	Flambement généralisé de l'âme du sandwich « crimping ».....	23
I.9.3.	Flambement localisé du sandwich « wrinkling » ou « dimpling ».....	24
I.9.4.	Rupture des peaux en traction ou en compression.....	24
I.9.5.	Endommagement local par indentation.....	25
I.9.6.	Rupture par cisaillement de l'âme.....	25
I.9.7.	Dégradation de l'adhésif.....	26
I.10.	Comportement en fatigue des matériaux sandwiches.....	27
I.10.1.	Introduction.....	27
I.11.	Aspects phénoménologiques de l'endommagement.....	27
I.11.1.	Représentation mécanique de l'endommagement.....	27
I.11.2.	Variable d'endommagement unidimensionnel.....	28
I.11.3.	Concept de la contrainte effective.....	28
I.11.4.	Principe d'équivalence des déformations.....	28
I.11.5.	Mesures de l'endommagement.....	29
I.11.6.	Mesures directes ou microstructurales de l'endommagement.....	30
I.11.6.1.	Mesures des surfaces fissurées.....	30
I.11.6.2.	Mesure de la longueur cumulée des microfissures.....	30
I.11.7.	Evolution des propriétés mécaniques et physiques.....	31
I.11.7.1.	Mesure de l'endommagement par variation du module d'élasticité.....	31
I.11.7.2.	Mesure basée sur la variation de la densité.....	33
I.11.7.3.	Mesure basée sur la variation de la flèche d'une poutre chargée en flexion.....	33
I.11.7.4.	lois d'endommagement de fluage.....	34
I.11.7.5.	lois d'endommagement en fatigue.....	35
I.12.	Approche de dégradation de rigidité en cisaillement.....	39
I. 12.1.	Introduction.....	39
I.12.2.	Concept du module de fatigue.....	39
I.12.3.	Equation de la dégradation.....	40
I.12.4.	Equation Contrainte/ Nombre de cycles.....	40

Sommaire

I.12.5.	Equation d'endommagement cumulatif.....	41
I.12.6.	Conclusion.....	43
	Chapitre II : Essais de flexion 3- points et 4 -points du sandwich à âme en nid d'abeilles.....	44
II.1.	Introduction.....	45
II.2.	Essais de flexion 3 points en sollicitation statique.....	45
II.2.1.	Matériau.....	45
II.2.2.	Machine d'essai de flexion statique 3 points.....	46
II.2.3.	Conditions d'essai.....	47
II.2.4.	Résultats des essais expérimentaux.....	47
II.2.5.	Conclusion.....	50
II.3.	Essais de flexion quatre points en sollicitation statique.....	50
II.3.1.	Matériau.....	50
II.3.2.	Machine d'essai de flexion statique 4 points.....	50
II.3.3.	Conditions d'essais.....	51
II.3.4.	Résultats des essais expérimentaux.....	52
II.3.5.	Conclusion.....	53
II.4.	Essais de flexion 3 points en sollicitation cyclique.....	54
II.4.1.	Conditions d'essais.....	54
II.4.2.	Dispositif d'essais.....	54
II.4.3.	Résultats des essais.....	55
II.4.4.	Conclusion.....	59
II.5.	Influence de la fréquence de chargement sur le comportement mécanique en fatigue du sandwich à âme en nid d'abeilles.....	59
II.5.1.	Résultats des essais.....	60
II.5.2.	Conclusion.....	63
	Chapitre III : Homogénéisation et simulation numérique.....	64
III.1.	Introduction.....	65
III.2.	Concept d'homogénéisation	67
III.3.	Théorie des stratifiés	68
III.4.	Cinématique d'un panneau en nida (cœur).....	69
III.4.1.	Géométrie et notations	70
III.4.2.	Principales caractéristiques élastiques du nid d'abeilles.....	70
III.4.3.	Approches existantes dans la littérature	70
III.5.	Approches analytiques.....	71
III.5.1.	Introduction.....	71
III.5.2.	Modèle de Gibson.....	72
III.5.3.	Propriétés dans le plan.....	72
III.5.4.	Modules E_1, E_2	72
III.5.5.	Module de cisaillement dans le plan.....	73
III.5.6.	Module d'élasticité longitudinal E_3	73
III.5.7.	Coefficients de Poisson.....	73
III.5.8.	Modules de cisaillement transverses	73
III.6.	Récapitulatif.....	74
III.7.	Conclusion.....	76
III.8.	Simulation numérique des sandwiches en flexion statique 3 points.....	76
III.8.1.	Introduction.....	76
III.8.2.	Conditions aux limites.....	77
III.8.3.	Calcul en structures par élément finis du matériau étudié sous ABAQUS	77

Sommaire

III.8.3.1.	Etat et disposition géométrique du composite sandwich	77
III.8.3.2.	Maillage.....	78
III.8.4.	Déformées du sandwich	79
III.8.5.	Déplacements vertical (flèches).....	79
III.8.6.	Contrainte de Von Mises.....	79
III.8.7.	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux.....	81
	Conclusion générale.....	82
	Perspectives	83
	Annexe 1	84
	Homogénéisation du cœur.....	85
	Annexe 2 : production scientifique.....	89
	Bibliographie.....	91

Liste des figures

Figure 1.	Schéma d'un sandwich.....	1
Figure 2.	Différentes formes de cœur	2
Figure I.1.	Matériau composite.....	4
Figure I.2.	Schématisation d'une structure sandwich.....	8
Figure I.3.	Matériaux pour les peaux.....	9
Figure I.4.	Effet de l'épaisseur de l'âme sur la rigidité en flexion d'un sandwich.....	10
Figure I.5.	Eléments constitutifs d'un sandwich à âme pleine.....	10
Figure I.6.	Eléments constitutifs d'un sandwich à âme creuse.....	11
Figure I.7.	Principaux matériaux des âmes d'un sandwich.....	11
Figure I.8.	Principales dimensions d'un sandwich.....	12
Figure I.9.	Procédé de fabrication du nida.....	13
Figure I.10.	Poutre chargée dans son plan.....	16
Figure I.11.	Schéma d'un essai de flexion 3 points.....	17
Figure I.12.	Répartition des contraintes dans une section transversale d'un sandwich.....	18
Figure I.13.	Répartition des contraintes de cisaillement dans le sandwich.....	19
Figure I.14.	Sollicitation d'une poutre en flexion 4 points.....	20
Figure I.15.	effort tranchant et du moment fléchissant en flexion 4 - points.....	22
Figure I.16.	Différentes sollicitations appliquées à un sandwich.....	22
Figure I.17.	Flambement généralisé des peaux du sandwich.....	23
Figure I.18.	Flambement généralisé de l'âme du sandwich.....	23
Figure I.19.	Flambement localisé « wrinkling ».....	24
Figure I.20.	Flambement localisé « dimpling».....	24
Figure I.21.	Endommagement par rupture des peaux du sandwich.....	25
Figure I.22.	Rupture par indentation localisée des peaux.....	25
Figure I.23.	Rupture par cisaillement de l'âme.....	25
Figure I.24.	Dégradation de l'adhésif entre l'âme et la peau.....	26
Figure I.25.	Dégradation de l'adhésif entre les cellules.....	26
Figure I.26.	Variation du module d'élasticité avec l'endommagement pour le cuivre.....	29
Figure I.27.	Histogramme des longueurs des microfissures.....	30
Figure I.28.	Évolution de la longueur cumulée de microfissures de fatigue en fonction du... nombre de cycles appliqués	31
Figure I.29.	Mesure de l'endommagement ductile du cuivre en traction.....	32
Figure I.30.	Évolution de l'endommagement fragile du béton en compression.....	32
Figure I.31.	Évolution linéaire et non linéaire de l'endommagement en fonction de la..... fraction de vie	35
Figure I.32.	Évolution non linéaire de Corten Dolan pour deux niveaux de contrainte.....	36
Figure I.33.	Évolution en « S » de l'endommagement en fonction de la fraction de vie.....	38

Sommaire

Figure I.34.	Concept de module de fatigue.....	40
Figure II.1.	Configuration Let W des alvéoles du nid d'abeilles	46
Figure II.2.	Eprouvette sandwich selon la norme AFNOR NF 54-606.....	46
Figure II.3.	Machine d'essais en flexion statique.....	46
Figure II.4.	Schéma de montage de l'essai.....	47
Figure II.5.	Courbes force-déplacement.....	47
Figure II.6.	Courbe moyenne forces-déplacements.....	48
Figure II.7.	Microscope optique FALCON Vision Engineering.....	48
Figure II.8.	Indentation des peaux et cisaillement des parois des cellules.....	49
Figure II.9.	Indentation de la peau et décollement de l'âme.....	49
Figure II.10.	Machine d'essais de flexion statique quatre points (MTS Criterion).....	51
Figure II.11.	Schéma de montage de l'essai en flexion statique quatre points.....	51
Figure II.12.	Courbes charge-déplacement avec courbe moyenne en flexion statique 4- points	52
Figure II.13.	Indentation, fissure des peaux et cisaillement des parois des cellules.....	52
Figure II.14.	Indentation des peaux, décollement et cisaillement des parois des cellules.....	53
Figure II.15.	Contrainte ondulée.....	54
Figure II.16.	Dispositif d'essais de fatigue en flexion (Machine Epsiflex).....	54
Figure II.17.	Courbes de perte de rigidité à 90% de chargement.....	55
Figure II.18.	Courbes de perte de rigidité à 80% de chargement.....	55
Figure II.19.	Courbes de perte de rigidité à 70% de chargement.....	56
Figure II.20.	Courbe de Wöhler à 90%.....	57
Figure II.21.	Courbe de Wöhler à 75%.....	58
Figure II.22.	Légère indentation des peaux.....	58
Figure II.23.	Cisaillement des parois de l'âme.....	58
Figure II.24.	Décollement de l'âme.....	58
Figure II.25.	Répartition irrégulière de la colle entre l'âme et les peaux.....	59
Figure II.26.	Courbes de perte de rigidité pour trois fréquences différentes.....	60
Figure II.27.	Histogrammes des nombres de cycles pour un critère de fin d'essai à 90%.....	61
Figure II.28.	Histogrammes des nombres de cycles pour un critère de fin d'essai à 75%.....	62
Figure II.29.	Légère indentation des peaux.....	62
Figure II.30.	Fissure des peaux pour une fréquence de 15 Hz.....	62
Figure III.1.	Structure d'un sandwich à âme alvéolaire en nids d'abeilles.....	65
Figure III.2.	Structure en nids d'abeilles régulière.....	67
Figure III.3.	Représentation de la cellule élémentaire.....	67
Figure III.4.	Géométrie d'une cellule en nid d'abeilles en vue de dessus.....	70
Figure III.5.	Perspective d'une structure en nids d'abeilles régulières.....	72
Figure III.6.	Déformation des parois des cellules en flexion.....	72
Figure III.7.	Déformation en flexion et rotation des parois des cellules.....	73
Figure III.8.	Conditions aux limites.....	77
Figure III.9.	Modélisation éclatée de l'éprouvette dans le module Part.....	78
Figure III.10.	Assemblage des éléments du modèle (éprouvette, poinçon et appuis).....	78
Figure III.11.	Maillage du modèle éléments finis de l'éprouvette montée.....	78
Figure III.12.	Déformées de l'éprouvette sandwich.....	79
Figure III.13.	Déplacements de l'éprouvette sandwich.....	79
Figure III.14.	Contraintes normales de Von Mises suivant X.....	80
Figure III.15.	Contraintes normales de Von Mises suivant Y.....	80
Figure III.16.	Contraintes tangentielles de Von Mises dans le plan XZ.....	81
Figure A.1	Déformation des parois de cellules en flexion.....	85
Figure A.2.	Déformation en flexion et en rotation des parois.....	87

Sommaire

Liste des tableaux

Tableau I.1.	Exemples de matériaux composites.....	5
Tableau II.1.	Dimensions de l'éprouvette.....	46
Tableau II.2	Résultats pour le critère de fin d'essai à 90% pour $f = 5$ Hz.....	56
Tableau II.3	Résultats pour le critère de fin d'essai à 75% pour $f = 5$ Hz	57
Tableau II.4.	Résultats pour le critère de fin d'essai à 90% pour $f = 5$ Hz; 7,5 Hz; 10 Hz....	60
Tableau II.5.	Résultats pour le critère de fin d'essai à 75% pour $f = 5$ Hz; 7,5 Hz; 10 Hz....	61
Tableau III.1.	Géométrie d'une cellule en nida.....	70
Tableau III.2.	Paramètres mécaniques et géométriques d'une cellule.....	74
Tableau III.3.	Tableau des modules de Gibson.....	75
Tableau III.4.	Comparaison des résultats obtenus par simulation et par expérience.....	81

Introduction générale

Les progrès scientifiques et techniques dans le domaine des matériaux ont incité, depuis ces dernières décennies, les concepteurs à découvrir ou à redécouvrir les vertus d'un matériau pensé en fonction de la pièce à réaliser et des performances recherchées.

Cette nouvelle approche suppose une évolution au niveau de la conception ; ce à quoi participe, grandement, les matériaux **composites** en permettant de nouvelles opportunités pour la création, l'innovation et le design dans tous les secteurs d'activités industrielles.

Les matériaux composites sont des matériaux solides, hétérogènes et anisotropes. Ils sont obtenus par l'association de deux ou plusieurs matériaux aux caractéristiques complémentaires. Cette association leur confère, à l'échelle macroscopique, un ensemble de propriétés, notamment mécaniques, que chacun des composants pris, séparément, ne possède pas.

Les matériaux composites dits sandwichs sont un très bon compromis entre résistance, légèreté et rigidité. Le concept d'une construction sandwich a été introduit dès le milieu du 19^{ème} siècle. L'utilisation des composites sandwichs, dans les structures avioniques, a vu le jour dès le début de la deuxième guerre mondiale.

De nos jours, les structures sandwichs sont très répandues dans les domaines de l'aérospatial, des constructions navales et ferroviaires, des infrastructures de génie civil et dans plusieurs autres secteurs de l'industrie.

Les panneaux sandwichs à « **nids d'abeilles** » sont de plus en plus utilisés dans divers domaines pour leur grande capacité à supporter les charges et cette caractéristique a attiré de nombreux chercheurs. Plusieurs études et travaux, sur ces matériaux, ont été réalisés et continuent de l'être afin de maîtriser leurs comportements dans des conditions d'utilisation spécifiques. Le présent travail de thèse s'inscrit dans ce cadre dans l'espoir de constituer une touche supplémentaire dans la compréhension et la découverte des secrets comportementaux de ces matériaux.

Parmi les nombreuses structures composites, on peut citer les matériaux sandwichs qui présentent une conception similaire et qui résultent de l'association de deux peaux ou **semelles** et d'une **âme** ou **cœur** (figure 1).

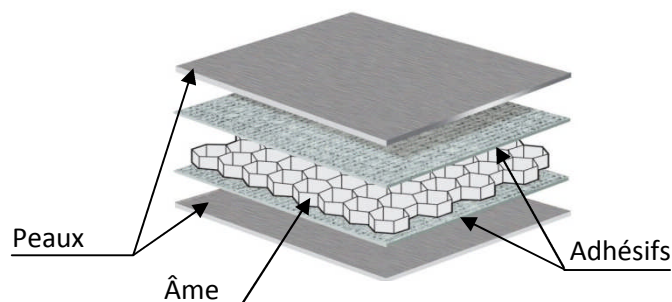


Fig.1. Schéma d'un sandwich

Introduction générale

L'âme se présente sous différentes formes et sous différents matériaux (figure 2) :

- Nids d'abeilles dits « **NIDA** » (Aluminium, fibres aramides, papier imprégné de résine phénolique, fibres de carbone, mousse, balsa et autres...),
- Mousse (aluminium, carbone, céramique, époxy, PVC et autres matériaux),
- Matériaux syntactiques moussés ou non moussés.

Quant aux peaux, elles sont, généralement :

- Des stratifiés (verre, carbone, kevlar)
- Des feuilles en alliages légers.

Les matériaux sandwichs présentent d'innombrables avantages :

- faible masse volumique,
- grande rigidité,
- bonne résistance à la flexion,
- faible coût d'obtention et d'utilisation,
- amélioration de la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques,
- meilleure sécurité due à leurs bonnes résistances aux chocs et au feu,
- bonne isolation thermique et/ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique,
- facilité de conception,
- légèreté des structures et possibilité de réalisation de formes complexes.

Néanmoins, il est nécessaire de faire des études sur leurs comportements, à long terme, sur leurs fatigues et de définir des procédés d'essais mécaniques et de contrôles non destructifs fiables afin de standardiser les méthodes de production.

La nouveauté des composites sandwichs nécessite la prospection de nouveaux domaines d'applications et l'augmentation du degré d'automatisation de leurs fabrications.

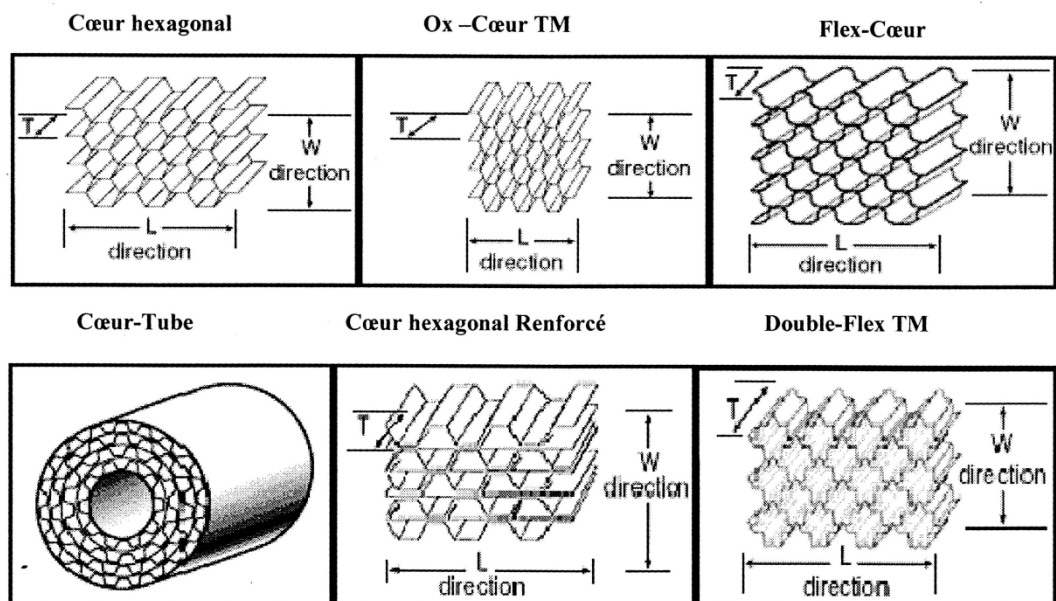


Figure 2 : Différentes formes de cœur [2].

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Définitions:

- Un matériau composite est défini, d'une manière générale [3], comme étant l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.
- Un matériau composite, d'une manière plus restrictive [4], est un arrangement de fibres (continues ou non) d'un matériau résistant (**le renfort**) qui sont noyées dans une **matrice** dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible (figure I.1). La matrice conserve leur disposition géométrique aux fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce.

I.2. Caractéristiques générales:

Un matériau composite est, dans le cas le plus général, constitué d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Un composite à plusieurs phases discontinues est dit **hybride**. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques plus performantes que celles de la phase continue (figure I.1.). Néanmoins, il existe des exceptions importantes à cette description des matériaux composites qui sont les cas des composites sandwichs et de polymères modifiés par des élastomères. Les premiers sont constitués de deux parties distinctes : les peaux et l'âme réunies par un adhésif ; pour les seconds, une matrice polymère rigide est chargée avec des particules élastomères.

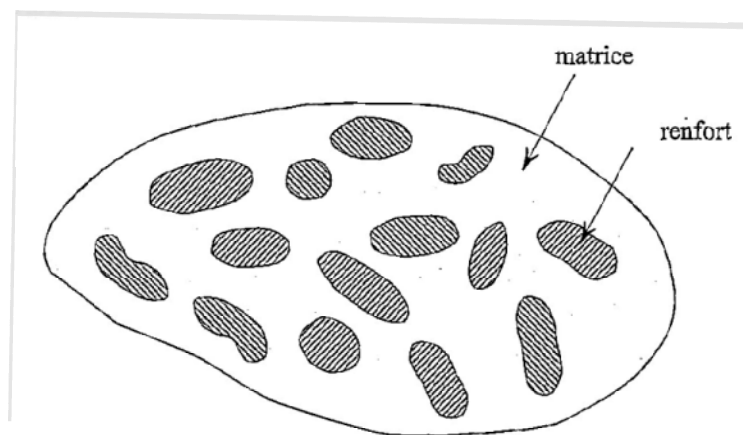


Figure I.1. Matériau composite.

Tableau I.1. Exemples de matériaux composites.

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. <i>Composites à matrice organique</i> : ➤ Papier, carton ➤ Panneaux de particules ➤ Panneaux de fibres ➤ Toiles enduites ➤ Matériaux d'étanchéité ➤ Pneumatiques ➤ Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charges/fibres cellulosiques Résine/Copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports, bâtiments Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. <i>Composites à matrice minérale</i> : ➤ Béton ➤ Composite carbone/carbone ➤ Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, biomédecine, etc. Pièces thermomécaniques
3. <i>Composites à matrice métallique</i> :	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. <i>Sandwiches</i> : Peaux Ames	Métaux stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples

Dans cette étude, l'intérêt sera porté, plus particulièrement, aux composites sandwiches.

I.3. Historique et domaines d'utilisation des composites sandwiches:

De nos jours, on enregistre une progression importante dans l'emploi des matériaux composites dans des domaines aussi divers que l'aéronautique, l'automobile, le sport et les loisirs... (tableau I.1).

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on peut citer les matériaux sandwiches.

Les structures sandwiches occupent un large créneau dans la construction des pièces composites. Les composites sandwiches structurés sont une classe spéciale de

matériaux composites, fabriqués par la fixation de deux peaux fines, solides et rigides à un noyau léger et relativement épais. Le noyau est collé aux peaux par un adhésif. Une variété de matériaux de base est utilisée dans les structures sandwiches. Les composants en sandwich permettent d'atteindre quasiment les mêmes performances que les matériaux classiques de construction avec beaucoup moins de poids [5].

Les peaux d'un sandwich composite typique sont minces, solides et rigides ; le noyau est léger et structurellement assez rigide afin de garder les peaux dans leurs positions relatives sous chargement.

L'objectif de ce premier chapitre est de positionner la problématique des matériaux sandwiches en nous attachant à mettre en évidence toutes leurs particularités intrinsèques.

Historiquement, le Français Duleau en 1820 [6] a été le premier à relever l'intérêt des matériaux composites et à y travailler. Mais les premières importantes applications n'ont fait leurs apparitions qu'une centaine d'années plus tard avec la naissance de l'industrie aéronautique. La conception des structures d'aéronefs étant soumise à des impératifs de performances toujours accrues en termes de rigidité, de résistance et de légèreté d'où la nécessité permanente de rechercher de nouveaux matériaux répondant à ces exigences. Si les débuts de l'aviation ont consacré la construction en bois et toile, leur substitution par des peaux minces métalliques a été adoptée dès les années 20. Dans les années 30, les industriels ont envisagé la possibilité de réaliser des éléments de structures en sandwichs fabriqués par les matériaux de l'époque. Un brevet, à ce sujet, a été déposé par Von Karman en 1924 [7].

Le procédé Brodeau (1934), consiste en «deux épaisseurs de contreplaqué qui enserrant en sandwich une certaine épaisseur de matière légère : du liège ou de l'aggloméré de liège». Ce modèle de solution fut étudié simultanément par les grands pays de la construction aéronautique avant la deuxième guerre et fut appliqué ponctuellement à la conception de certains éléments de structure : Avion Lignel (1938, F), Schneider (1938, F), De Havilland Albatros (1938, GB), Skydine (1939, U.S.A.). L'application la plus connue qui marqua le réel décollage de la construction sandwich fut le bombardier De Havilland Mosquito (1943) où 7741 exemplaires ont été fabriqués. L'extrados de l'aile était constitué d'un sandwich peaux en contreplaqué et cœur en balsa ; alors que l'intrados était construit de simples panneaux de contreplaqué. Toutefois, avec le développement et la fiabilité des qualités intrinsèques de la construction sandwich, la disponibilité des matériaux, la facilité de leurs mises en œuvre, la tolérance aux impacts et la réparation, l'adoption de la conception sandwich a été largement choisie pour les éléments de structure. L'apparition des fibres de verre tissées et de résines performantes au début des années 50, a permis la fabrication des premiers sandwichs à peaux composites et à âme en nid d'abeille. Ils furent, en France, appliqués à des éléments de structures secondaires de l'avion Vautour (1953) : Carénage d'arête dorsale, contre-dérive, radôme [8]. Actuellement, le pourcentage en masse de composites utilisés dans la structure plafonne à 20% environ dans les avions civils et leur utilisation se limite aux structures secondaires. Très peu d'appareils voient leur structures primaires réalisées entièrement ou partiellement en composites. L'appareil civil le plus avancé,

de ce point de vue et qui fait largement appel à la construction sandwich, est certainement le Beechcraft Starship (1983, U.S.A. 6-10 passagers) dont 70% de la masse de la structure est en matériaux composites. En Europe, le caisson d'extrémité de voilure de l'ATR 42 est en carbone. Le nouvel Airbus A340-500/600 (1er vol en 2001) a adopté, pour la première fois, un élément de structure travaillant en carbone, à savoir une poutre ventrale d'une longueur de 16 mètres (Air et Cosmos, N°1680). Dans le domaine militaire, on parle de plus de 90% de la structure en composite pour les avions du Lockheed Skunk Works : les bombardiers furtifs B2 et F117. En ce qui concerne la conception des hélicoptères, l'état de l'art publié [Aérospatiale 1986] est bien représenté par le Dauphin 2. Pour cet hélicoptère, 25% de la masse de sa structure sont réalisés en matériaux composites. Toutefois, des éléments de structure primaire sont réalisés en sandwich NIDA Nomex / peau métallique ultra fine. Le récent convertibles V22-Osprey n'intègre, pour sa part, que des structures secondaires en sandwich composite [9].

Le fait de pouvoir construire léger et rigide intéresse de nombreux autres domaines. Les premières coques de bateau en fibre de verre/balsa datent du début des années 60 et l'utilisation dans ce domaine prend de l'ampleur avec l'arrivée de frégates militaires furtives et de bateaux à grande vitesse [10]. Par ailleurs, les impératifs de diminution de l'émission de dioxyde de carbone ont conduit les constructeurs automobiles à intégrer dans leur technologie des solutions sandwichs pour construire des structures plus légères [11]. Néanmoins, jusqu'à présent, leur introduction se heurte aux problèmes de la fabrication en grande série et seules des applications ponctuelles et ciblées ont été réalisées : boucliers anti-crash prototypes [12], containers frigorifiques [13]. En compétition automobile, des sandwichs NIDA et peaux en aluminium sont utilisés pour le châssis en remplacement de treillis soudés. Les mêmes contraintes conduisent à l'apparition de constructions hybrides sandwich/aluminium dans le matériel ferroviaire [14]. Le génie civil utilise, aussi, des sandwichs pour réaliser des voûtes de grandes portées. Le gain en densité surfacique est spectaculaire : de 2600 kg/m² pour une voûte en pierre à 33 kg/m² pour une solution sandwich acier/mousse [15]. Récemment, des portes d'écluses, un tablier de pont et un balcon pour habitat collectif ont été réalisés en composites sandwichs [16]. Des structures sandwichs possédant une âme en élastomère chargée par des particules peuvent, également, être incorporées dans la matrice des polymères fragiles, afin d'améliorer leurs résistances à la rupture et aux chocs par diminution de la sensibilité à la fissuration [17].

Le bref historique cité dans ce bref paragraphe montre, si besoin est, les avantages intrinsèques des solutions sandwichs qui sont appelées, sans aucun doute, à se répandre davantage dans le court terme.

I.4. Constituants d'une structure sandwich

Le sandwich se compose de trois éléments fonctionnels (figure I.2).

- Les peaux (revêtements) composites qui supportent les chargements de traction ou de compression appliqués aux sandwichs.
- Le matériau d'âme (cœur) collé aux peaux a pour fonction d'assurer la régularité de l'écartement des peaux et de transmettre le cisaillement à ces dernières. La liaison collée âme/peau doit supporter des tensions et pouvoir transférer le cisaillement [18].
- L'adhésif représentant l'interface et qui permet la liaison des peaux et de l'âme.

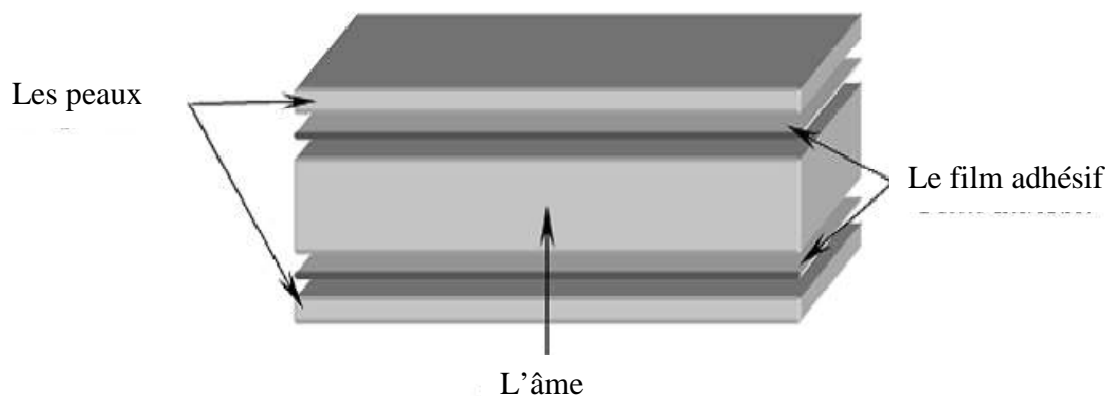


Figure I.2. Schématisation d'une structure sandwich.

I.4.1. Les peaux:

Généralement planes, elles reprennent les efforts de flexion. Elles peuvent être de plusieurs natures : en métal, en stratifié, en bois (contreplaqué) ou encore en plaque thermoplastique.

Le choix de la nature de la peau s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées. Mais en général, une rigidité relative élevée et une excellente résistance à la compression et à la tension sont les principales qualités recherchées [19].

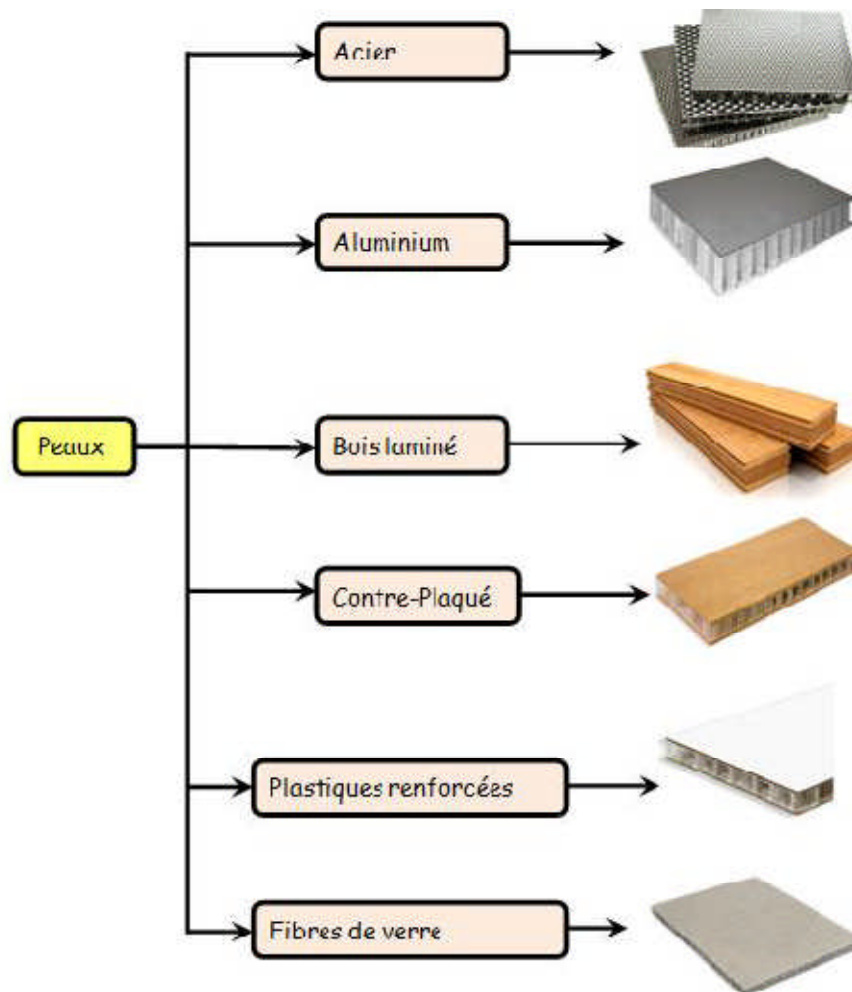


Figure I.3. Matériaux pour les peaux.

I.4.2. L'âme:

C'est l'élément central d'une structure sandwich. Elle se caractérise par une faible masse et des faibles caractéristiques mécaniques, en particulier, sa très faible résistance à la flexion.

Son rôle principal est de supporter les efforts de cisaillement engendrés par le mouvement de glissement des peaux, sous chargement, de compression et de maintenir l'écartement de ces dernières. En effet, si l'épaisseur des panneaux n'est pas maintenue constante, il en résulte une diminution des capacités des peaux externes à résister à la flexion. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau sans augmenter la masse volumique. Comme le montre la figure I.3, une structure sandwich d'épaisseur « $4t$ » est 37 fois plus rigide que celle d'épaisseur « t », pour seulement une augmentation de 6% de son poids. Les types d'âmes les plus communs dans le secteur industriel sont : le bois de balsa, les nids d'abeilles et les mousses en polymères rigides [20].

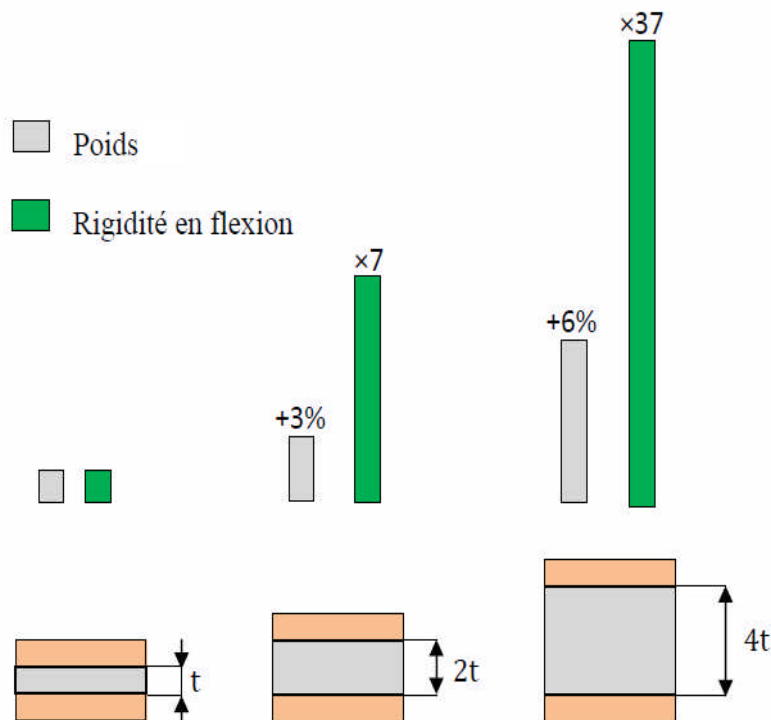


Figure I.4. Effet de l'épaisseur de l'âme sur la rigidité en flexion d'une structure sandwich.

Les matériaux de l'âme, les plus couramment utilisés, se présentent, principalement sous deux formes :

- Les âmes pleines parmi lesquelles on retrouve le balsa (ou bois cellulaire), diverses mousses cellulaires et des résines chargées de micro - sphères creuses de verre (mousses syntactiques) (figure I.5).
- Les âmes creuses, essentiellement en nids d'abeilles (NIDA) et profilés : des maillages métalliques légers, du papier kraft (enduit ou non de résine) et du polyamide (type papier Nomex) (figure I.6).

La figure (I.7) représente les matériaux de fabrication de ces types d'âmes.

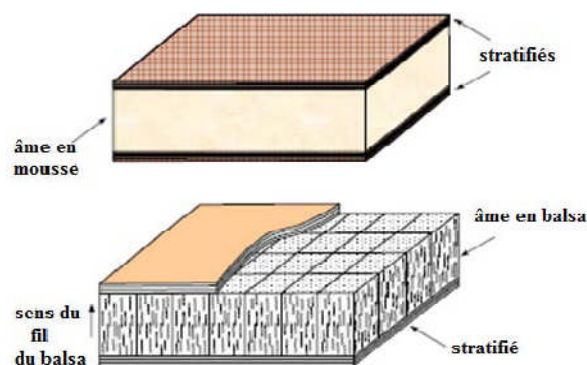


Figure I.5. Eléments constitutifs d'un sandwich à âme pleine.

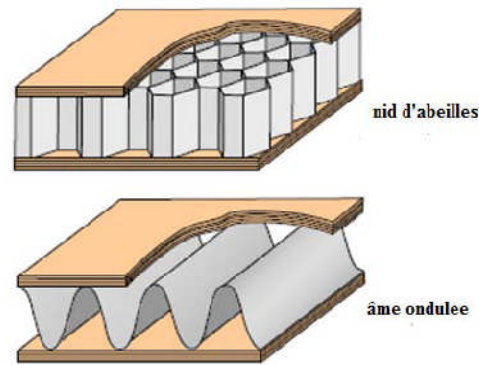


Figure I.6. Eléments constitutifs d'un sandwich à âme creuse.

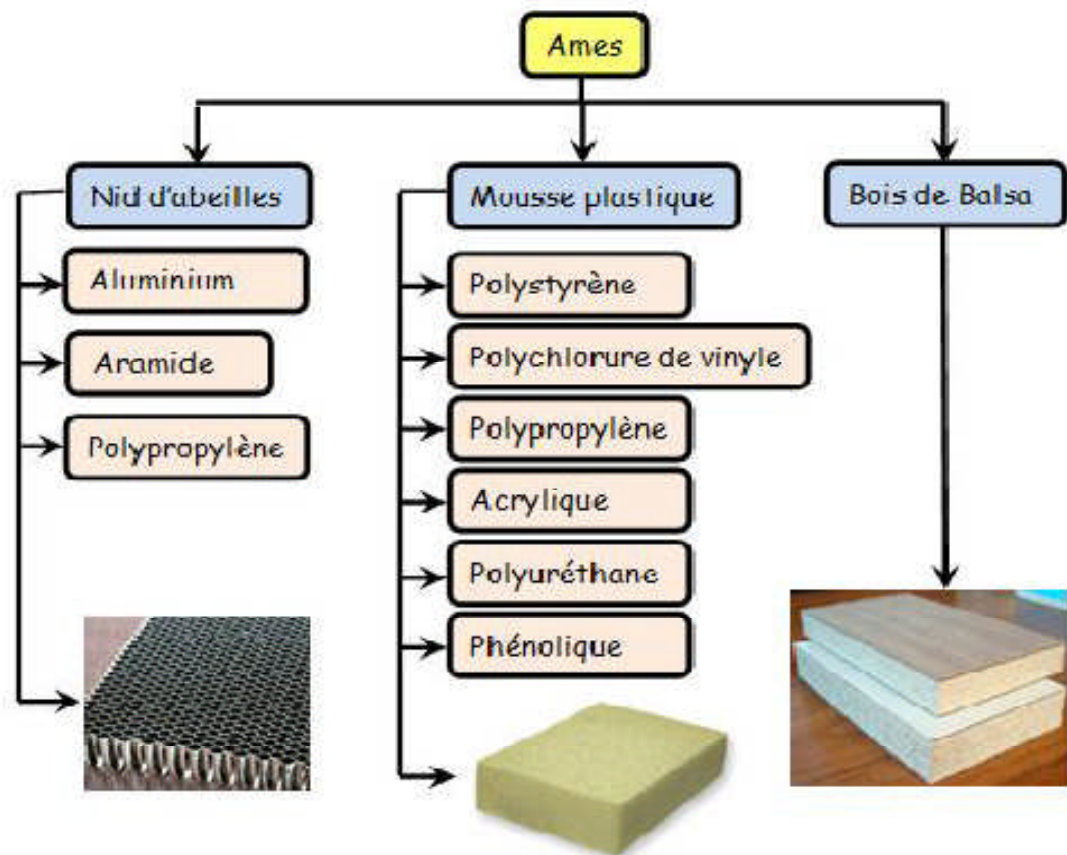


Figure I.7. Principaux matériaux des âmes d'un sandwich.

I.4.3. L'interface (adhésif)

Pour que les structures sandwich jouent pleinement leurs rôles, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence [21].

I.5. Caractéristiques géométriques des sandwichs

Du fait de la fabrication des sandwichs, les propriétés mécaniques sont adaptées en faisant varier :

- la nature des peaux (identiques ou non)
- la nature de l'âme
- l'épaisseur de chacune des phases.

En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f et le rapport t_f/h_c (h_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,01 et 0,1. D'après Allen [22], les sandwichs sont classés en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f , d étant la distance entre les axes neutre des peaux du sandwich (figure I.8):

- Pour un rapport d/t_f inférieur à 5.77, le sandwich est dit à peaux épaisses.
- Pour un rapport d/t_f compris entre 5.77 et 100, le sandwich est dit à peaux fines.
- Pour un rapport d/t_f supérieur à 100, le sandwich est dit à peaux très fines.

Ces bornes limites sont définies par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

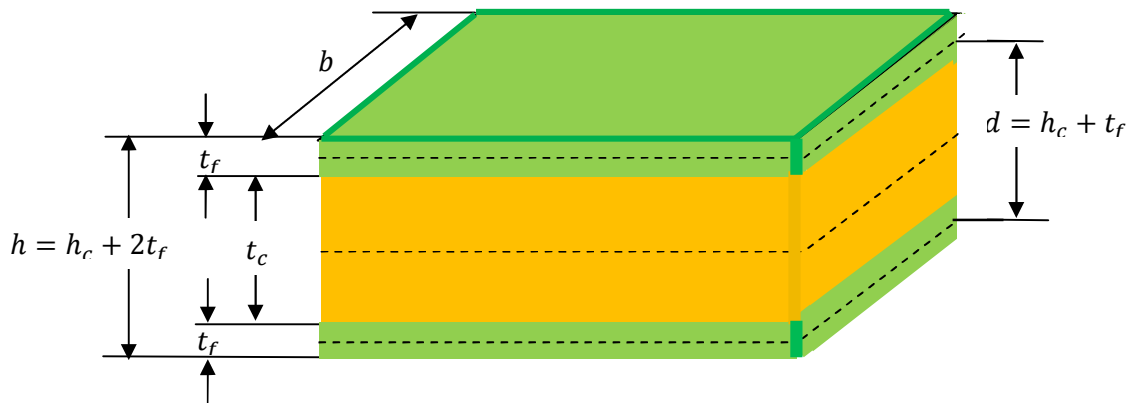
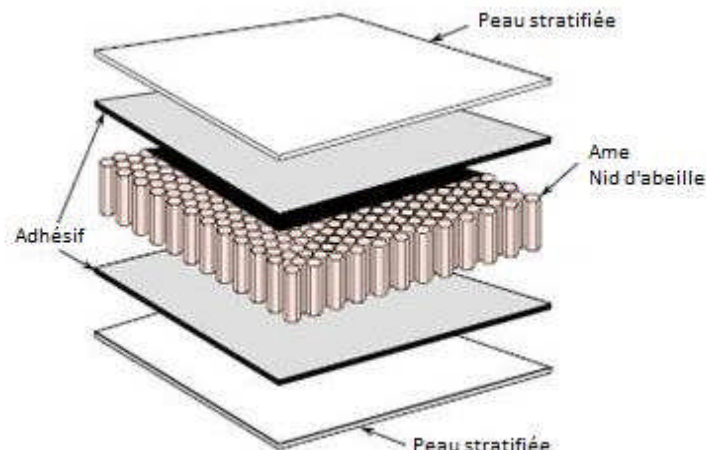


Figure I.8. Principales dimensions d'un sandwich.

I.5.1. Procédé d'obtention du nid d'abeilles

Les âmes, en nid d'abeilles, des sandwichs ont leurs cellules (alvéoles) en forme d'hexagones réguliers. Elles sont obtenues, à partir de feuilles minces ou clinquants partiellement encollés, à des intervalles réguliers, déterminés préalablement, en fonction des dimensions de la cellule puis empilés et subissant ensuite une expansion (figure I.9).



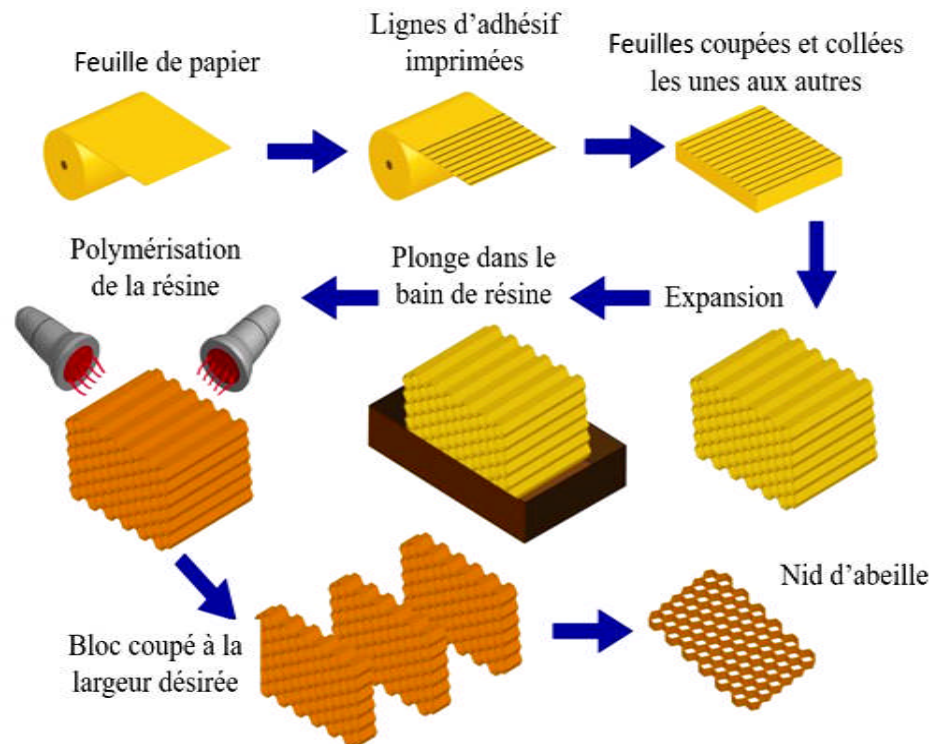


Figure I.9. Procédé de fabrication du nida.

I.6. Intérêt des composites sandwichs

L'analogie entre une structure sandwich et un profilé en I (IPN) peut être établie : les peaux jouent le même rôle que les semelles du profilé. L'intérêt du composite sandwich est double : il permet une augmentation de la rigidité de la structure sans pour autant augmenter de façon significative la masse. En effet, l'augmentation de l'épaisseur d'une poutre conduit à l'augmentation de son moment quadratique et par suite sa rigidité. Cette augmentation de rigidité pour la structure sandwich, s'opère par une augmentation de l'âme. Puisque cette dernière possède une faible densité, la masse du composite sandwich n'évolue pas de façon importante. Un grand intérêt de la construction composite est de permettre la fabrication des poutres de grande raideur, c'est-à-dire fléchissant peu sous charge, en utilisant des sandwichs. L'utilisation des matériaux composites permet des gains de masse variant de 10 % à 50% sur le même composant en alliage métallique conventionnel, avec un coût inférieur de 10 à 20% [23]. L'association des trois couches permet de combiner la rigidité, la résistance mécanique élevée et la légèreté. Un exemple typique est le gain occasionné par la réalisation du sustentateur rotatif d'hélicoptère en structures sandwichs (peaux en couches de composite stratifiées unidirectionnelles orientées à $\pm 45^\circ$, l'âme en nida aluminium) [23] :

- coût de fabrication abaissé de 50%
- cout d'utilisation diminué
- durée de vie augmentée
- pale réparable
- pale insensible à la corrosion

I.7. Théorie des poutres sandwiches :

La théorie des poutres simples est adaptée aux poutres sandwiches avec quelques modifications mineures. L'utilisation de cette théorie permet de trouver une méthode simple permettant de calculer la rigidité en flexion et en cisaillement, les contraintes dans les peaux et la contrainte de cisaillement dans l'âme.

I.7.1. Rigidité en flexion

La répartition des sollicitations dans une structure sandwich est, dans le cas général, conforme à la figure I.9. Afin de simplifier l'étude, la poutre sandwich sera, uniquement, soumise à un moment de flexion M_x et à un effort tranchant T_x . Dans un premier temps, la poutre est supposée seulement sous l'action d'un moment de flexion. Il s'ensuit qu'une déformation à une distance z de l'axe neutre du sandwich est donnée par :

$$\varepsilon_x = \frac{M_x}{D} z \quad (1)$$

D désigne la rigidité en flexion du sandwich et est déterminée par :

$$D = \int E b z^2 dz = \frac{E_f b t_f^3}{6} + 2E_f b t_f \left[\frac{d}{2} \right]^2 + \frac{E_c b t_c^3}{12} = \frac{E_f b t_f^3}{6} + \frac{E_f b t_f d^2}{2} + \frac{E_c b t_c^3}{12}$$

$$D = 2D_f + D_0 + D_c \quad (2)$$

t_f et E_f sont respectivement l'épaisseur et le module d'élasticité des peaux.

t_c et E_c sont respectivement l'épaisseur et le module d'élasticité de l'âme.

$2D_f$: rigidité des peaux par rapport à leurs axes neutres.

D_0 : contribution à la rigidité en flexion des peaux par rapport à l'axe neutre du sandwich au milieu de l'âme pour un sandwich symétrique.

D_c : rigidité de l'âme par rapport à son axe neutre.

Dans le cas d'un sandwich symétrique, à peaux fines et pour une âme à module d'élasticité faible, la rigidité en flexion, après négligence de certains termes, se réduit à l'expression :

$$D = \frac{E_f b t_f d^2}{2} \quad (3)$$

avec pour la condition d'approximation de peaux fines :

$$\frac{2D_f}{D_0} < 0,01 \quad \text{si} \quad 3 \left(\frac{d}{t_f} \right)^2 > 100 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{t_f} > 5,77$$

et pour la condition d'approximation de l'âme faible :

$$\frac{D_c}{D_0} < 0,01 \quad \text{si} \quad \frac{6E_f t_f d^2}{E_c t_c^3} > 100$$

I.7.2. Contraintes et déformations des matériaux sandwiches

Pour simplifier l'étude, la poutre est supposée soumise, uniquement, à un moment de flexion M_x et à une force transversale T_x [24].

L'axe neutre vérifie la condition :

$$\int \sigma_x dz = 0 \quad (4)$$

En intégrant sur toute la section transversale, la rigidité sera donnée par :

$$E_{f1}t_{f1} \left(\frac{t_{f1}}{2} + t_c + \frac{t_{f2}}{2} \right) + E_c t_c \left(\frac{t_c}{2} + \frac{t_{f2}}{2} \right) = e(E_{f1}t_{f1} + E_c t_c + E_{f2}t_{f2}) \quad (5)$$

Pour un sandwich ayant une symétrie matérielle, un module d'élasticité élevé et des peaux de faibles épaisseurs, la position de l'axe neutre est au milieu de l'âme. Les contraintes de traction ou de compression dans les peaux seront déduites de l'équation (1), à savoir :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{M_x}{D} z \quad (6)$$

d'où l'on déduit l'expression de la contrainte de compression dans la peau supérieure :

$$\sigma_1 = -E_{f1} \frac{M_x(d-e)}{D} \approx -\frac{M_x}{bdt_{f1}} \quad (7)$$

et celle de la contrainte de traction dans la peau inférieure

$$\sigma_2 = E_{f2} \frac{M_x e}{D} \approx +\frac{M_x}{bdt_{f2}} \text{ (avec: } d-e=e) \quad (8)$$

La contrainte de cisaillement est, quant à elle, calculée en utilisant une définition plus générale de l'équation d'équilibre, soit :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0 \Rightarrow \tau_{xz}(z) = \int_z^{\left(\frac{d+t_f}{2}\right)} \frac{d\sigma_x}{dx} dz \quad (9)$$

Sachant que $\tau_{xz}(z)$ est nulle pour $z = \left(\frac{d}{2} + t_f\right)$ et que $\frac{dM_x}{dx} = T_x$, l'équation (9) devient :

$$\tau_{xz}(z) = \frac{T_x}{D} \int_z^{\left(\frac{d+t_f}{2}\right)} E z dz = \frac{T_x B(z)}{D} \quad (10)$$

où $B(z)$ est le moment surfacique d'ordre 1, donné par :

$$B(z) = \int_z^{\left(\frac{d+t_f}{2}\right)} E z dz \quad (11)$$

Les contraintes de cisaillement dans les peaux et dans l'âme sont données par :

- dans la peau supérieure pour $-d + e - \frac{t_{f1}}{2} \leq z \leq -d + e + \frac{t_{f1}}{2}$,

$$\tau_1(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{T_x E_{f1}}{D} \frac{1}{2} \left[\left(d - e + \frac{t_{f1}}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (12)$$

- dans la peau inférieure pour $e - \frac{t_{f2}}{2} \leq z \leq e + \frac{t_{f2}}{2}$,

$$\tau_2(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{T_x E_{f2}}{D} \frac{1}{2} \left[\left(e + \frac{t_{f2}}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (13)$$

- dans l'âme pour $-d + e - \frac{t_{f1}}{2} \leq z \leq 0$,

$$\tau_c(z) = \frac{T_x}{D} \left[E_{f1} t_{f1} (d - e) + \frac{E_c}{2} \left\{ \left(d - e - \frac{t_{f1}}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (14)$$

- dans l'âme pour $0 \leq z \leq e - \frac{t_2}{2}$,

$$\tau_c(z) = \frac{T_x}{D} \left[E_{f2} t_{f2} e + \frac{E_c}{2} \left\{ \left(e - \frac{t_{f2}}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (15)$$

Pour un sandwich, matériellement et géométriquement symétrique avec :

$E_{f1} = E_{f2}$, $t_{f1} = t_{f2}$, $e = d/2$ et dont le module d'élasticité de l'âme est faible, la contrainte de cisaillement demeure constante dans l'âme et s'exprimera par :

$$\tau_c = \frac{T_x}{bd} \quad (16)$$

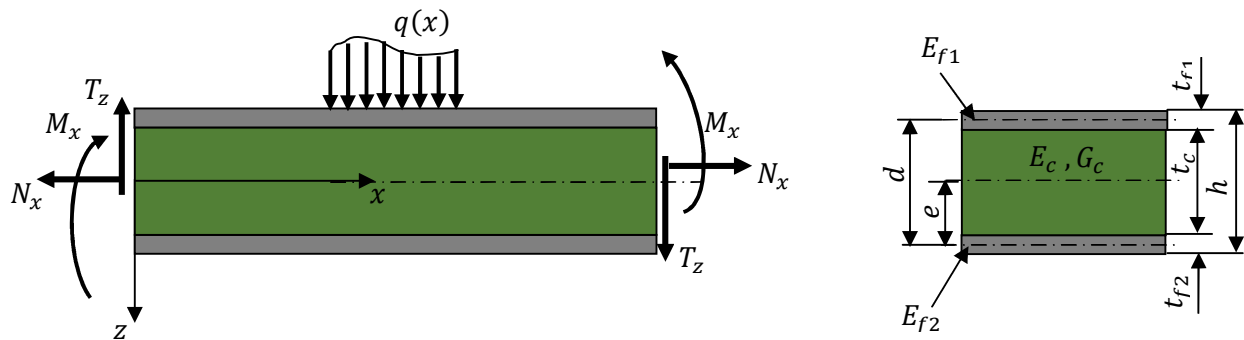


Figure I.10. Poutre chargée dans son plan.

La faible densité du cœur associée à une contrainte de cisaillement plus ou moins constante dans la section transversale, font que dans toute analyse mécanique de ce type de structure, la prise en compte des déformations de cisaillement est primordiale.

On peut admettre que la déformation est composée d'une contribution classique due à la flexion notée W_f et d'une autre due au cisaillement W_s . Pour une poutre sandwich de peaux fines, l'analyse mécanique se trouve simplifiée. La courbure

totale peut être, alors définie comme étant la contribution d'une flexion et d'un cisaillement :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{M_x}{D} + \frac{1}{S} \frac{T_x}{dx} \quad (17)$$

avec S étant la rigidité en cisaillement donnée par :

$$S = \frac{Gd}{k} \quad (18)$$

où G est le module de cisaillement du cœur, d la distance entre les axes neutres du sandwich et k le facteur de cisaillement égal à 1,2 pour une section transversale rectangulaire homogène. La rigidité en cisaillement peut être calculée en utilisant l'équation d'équilibre énergétique.

Pour un sandwich à peaux fines $t_{f1,f2} \ll t_c$ et de cœur à faible module d'élasticité

$E_c \ll E_{f1,f2}$, cette rigidité est donnée par:

$$S = \frac{G_c b d^2}{t_c} \quad (19)$$

I.8. Comportement des sandwichs en flexion

I.8.1. Introduction

les structures sandwichs sont, généralement, sollicitées en flexion [25], il est, donc, primordial de connaître leurs comportements pour cette sollicitation afin d'optimiser les caractéristiques de leurs constituants (âme et peaux).

I.8.2. Comportement en flexion 3 points

Pour un chargement central d'une poutre sandwich (figure I.11), le moment fléchissant M est donné par l'équation :

$$\text{pour } 0 < x < \frac{L}{2} : \quad M = \frac{Px}{2} \quad (20)$$

$$\text{pour } \frac{L}{2} < x < L : \quad M = \frac{P(L-x)}{2} \quad (21)$$

où P est la charge appliquée et x la distance de la section considérée par rapport à l'origine.

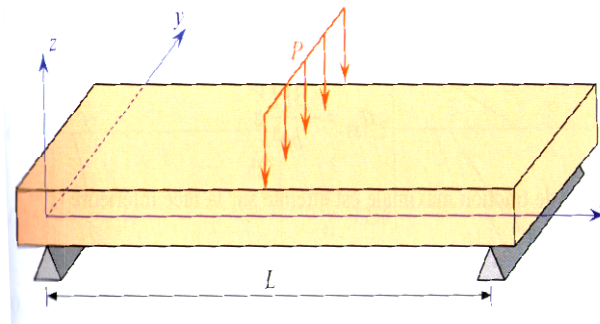


Figure I.11. Schéma d'un essai de flexion 3 points.

L'effort tranchant T est donné par :

$$\text{pour } 0 < x < \frac{L}{2} : \quad T = -\frac{P}{2} \quad (22)$$

$$\text{pour } \frac{L}{2} < x < L : \quad T = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2} \quad (23)$$

Les contraintes de traction (dans la peau inférieure) ou de compression (dans la peau supérieure) et de cisaillement (dans l'âme) sont déterminées par :

- contraintes dans les peaux, pour $\frac{t_c}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ et $-\frac{h}{2} \leq z$

$$\sigma_p = \frac{Mz}{D} E_p \quad (24)$$

Les valeurs extrêmes de la contrainte normale sont atteintes pour $z = \pm \frac{h}{2}$ et $x = \frac{L}{2}$

$$\sigma_{p,max} = \pm \frac{PLh}{8D} E_p \quad (25)$$

- les contraintes dans l'âme pour $(z = \pm \frac{t_c}{2}$ et $x = \frac{L}{2})$:

$$\sigma_c = \frac{Mz}{D} E_c \quad (26)$$

Les contraintes planes maximales, pour $(z = \pm \frac{t_c}{2}$ et $x = \frac{L}{2})$, supportées par le cœur, sont alors :

$$\sigma_{c,max} = \pm \frac{PLt_c}{8D} E_c \quad (27)$$

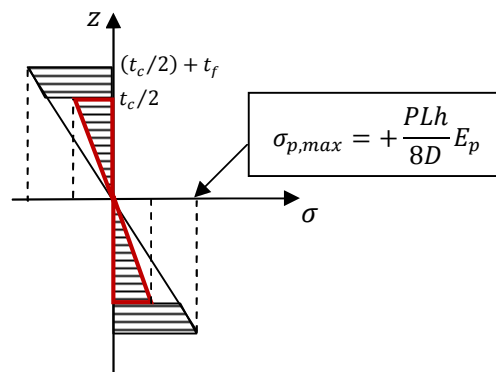


Figure I.12. Répartition des contraintes dans une section transversale d'un sandwich.

La contrainte de cisaillement τ_c , dans le cœur, est calculée en tenant compte de la variation du module dans une même section droite due à l'hétérogénéité du matériau, il vient :

$$\tau_c = \frac{T}{Db} \sum SE \text{ avec : } \sum SE = E_p \frac{bt_f d}{2} + E_c \frac{b}{2} \left(\frac{t_c}{2} - z \right) \left(\frac{t_c}{2} + z \right) \quad (28)$$

où S est le moment statique de la section par rapport à l'axe Oy.

Il vient :

$$\tau_c = \frac{T}{D} \left[E_p \frac{t_f d}{2} + \frac{E_c}{2} \left(\frac{t_c^2}{4} - z^2 \right) \right] \quad (29)$$

La contrainte de cisaillement, dans l'âme, est maximale au milieu de l'âme ($z = 0$), il vient :

$$\tau_{c,max} = \frac{P}{4D} \left(E_p t_f d + E_c \frac{t_c^2}{4} \right) \quad (30)$$

De plus, étant donné que $E_p \gg E_c$, le terme contenant E_c peut être négligé, ce qui donne :

$$\tau_{c,max} = \frac{P}{4D} E_p t_f d \quad (31)$$

La rigidité en flexion D peut être réduite au second terme du second membre

$\left(D \approx 2E_p b t_f \left[\frac{d}{2} \right]^2 \right)$ dans son expression générale (équation 3). Il en découle l'expression de la contrainte de cisaillement maximale dans l'âme :

$$\tau_{c,max} = \frac{P}{2bd} \quad (32)$$

On remarque que la contrainte de cisaillement est quasiment constante dans toute l'épaisseur de l'âme.

La répartition de ces contraintes sur une portion de poutre sandwich, est illustrée sur la figure I.13.

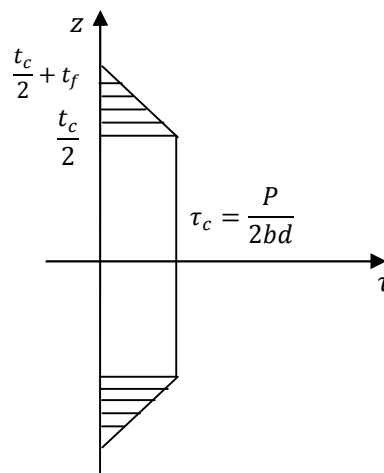


Figure I.13. Répartition des contraintes de cisaillement dans le sandwich.

Les sections droites des peaux, par rapport à leurs axes neutres, restent droites; tandis que celles de l'âme sont fortement déformées : des points alignés avant chargement ne le sont plus après chargement.

Le déplacement mesuré, pour une poutre sandwich soumise à la flexion trois points, se compose de deux parties indépendantes :

- le déplacement engendré par la flexion w_f
- le déplacement dû au cisaillement w_c

Le déplacement total est : $w = w_f + w_c$

La flèche est déterminée par l'expression bien connue en RDM, à savoir :

$$w_f = \frac{PL^3}{48D} \quad (33)$$

Quant au déplacement dû au cisaillement, il est obtenu en intégrant l'expression

$\frac{\partial w_c}{\partial x} = \gamma \frac{c}{d}$, il vient :

$$w_c = \frac{PL}{4S} \quad (34)$$

En définitive, la flèche totale est donnée par :

$$w = w_f + w_c = \frac{PL^3}{48D} + \frac{PL}{4S} = \frac{PL}{4} \left(\frac{L^2}{12D} + \frac{1}{S} \right) \quad (35)$$

I.8.3. Comportement en flexion 4 points

Pour l'étude du comportement d'une poutre sandwich en flexion 4-points, nous considérons le type de sollicitation le plus couramment utilisé dans les essais pour la caractérisation du comportement des matériaux. La poutre est chargée avec deux forces $P/2$ exercées aux quarts de la longueur entre appuis (figure I.14). La symétrie du problème nous permet de considérer que la moitié gauche de la poutre.

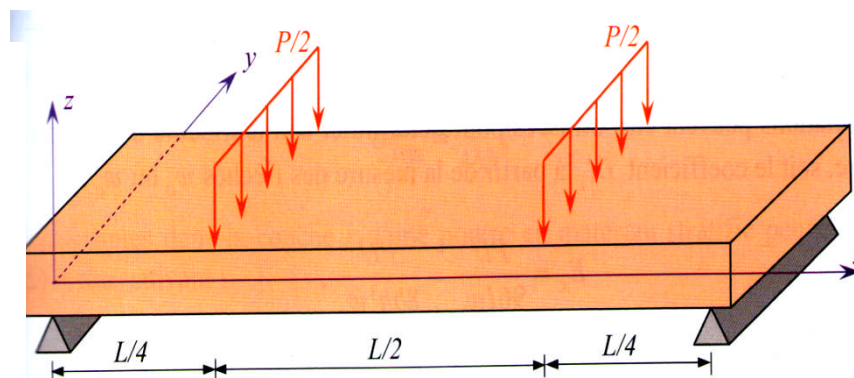


Figure I.14. Sollicitation d'une poutre en flexion 4-points.

Pour la moitié gauche de la poutre, le moment fléchissant est donné par :

$$M = \frac{Px}{2} \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \quad (36)$$

$$M = \frac{PL}{8} \text{ pour } \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (37)$$

En particulier, au centre de la poutre, le moment fléchissant est égal à :

$$\frac{PL}{8}$$

L'effort tranchant T est donné par :

$$T = \frac{P}{2} \quad \text{pour } 0 < x < \frac{L}{4} \quad (38)$$

$$T = 0 \quad \text{pour } \frac{L}{4} < x < \frac{L}{2} \quad (39)$$

Les contraintes de traction (dans la peau inférieure) ou de compression (dans la peau supérieure) sont données par :

$$\sigma_p = \pm \frac{M}{t_f d} \quad (40)$$

$$\sigma_{p,max} = \pm \frac{PL}{4t_f b d} \quad (41)$$

La contrainte de cisaillement maximale dans l'âme s'exprime comme suit :

$$\tau_{c,max} = \frac{P}{2bd} \quad (42)$$

Quant au déplacement mesuré, pour une poutre sandwich, aux points de chargement $L/2$ et $L/4$, il est la résultante d'une contribution classique due à la flexion w_f et de celle due au cisaillement de l'âme w_c telle que : $w = w_f + w_c$

En particulier, le déplacement total mesuré est :

- au point de chargement $L/2$ (par raisonnement analogue au cas de la flexion 3-points)

$$w_f = \frac{11PL^3}{768D} \quad (43)$$

$$w_c = \frac{PL}{8S} \quad (44)$$

$$w = PL \left(\frac{11L^2}{768D} + \frac{1}{8S} \right) \quad (45)$$

- au point de chargement $L/4$:

$$w_f = \frac{P \left(\frac{L^2}{4} \right) 2L}{48D} = \frac{PL^3}{96D} \quad (46)$$

$$w_c = \frac{PL}{8S} \quad (47)$$

$$w = \frac{PL}{8} \left(\frac{L^2}{12D} + \frac{1}{S} \right) \quad (48)$$

➤ la déformation maximale des peaux en flexion:

$$\varepsilon_{p,max} = \frac{PLh}{8D} \quad (49)$$

➤ la déformation maximale du cœur en cisaillement:

$$\gamma_{c,max} = \frac{P_{max}}{G_c bd} \quad (50)$$



Figure I.15. Diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant en flexion 4-points.

I.9. Mode de dégradation et de ruine des matériaux sandwichs :

Nous exposerons, dans ce qui suit, les principaux modes d'endommagement des structures sandwichs [26] induites par les différents types de sollicitations (effort normal N , effort de cisaillement T et moment de flexion M) (figure I.15).

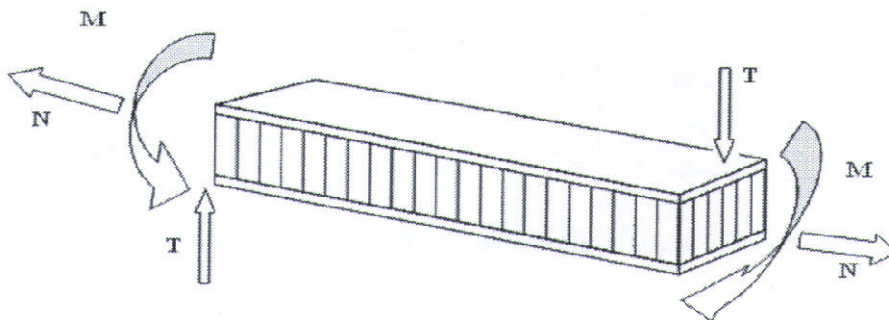


Figure I.16. Différentes sollicitations appliquées à un sandwich.

I.9.1. Flambement généralisé du sandwich :

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder par instabilité générale de toute la poutre (figure I.17). Le flambement généralisé peut survenir lorsque les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont au delà des valeurs de résistance à la rupture respectives.

La charge de flambement du sandwich dépend de plusieurs facteurs tels que le type du sandwich : sa rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux et leurs propriétés élastiques, l'épaisseur de l'âme et son module de cisaillement, les dimensions de la section droite, les conditions aux limites. Afin d'éviter un flambement généralisé du sandwich, on peut prévoir des peaux à module d'élasticité plus élevé ou une âme à module de cisaillement plus élevée.

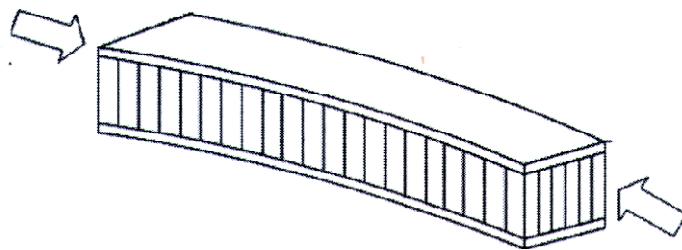


Figure I.17. Flambement généralisé des peaux du sandwich.

I.9.2. Flambement généralisé de l'âme du sandwich « crimping »:

Le flambement généralisé de l'âme du sandwich dépend, essentiellement, du rapport longueur/épaisseur du sandwich et de la proportionnalité entre la rigidité au cisaillement et la rigidité de flexion.

Si ce rapport est, relativement, faible et la rigidité de cisaillement est négligeable devant celle de flexion, le flambement généralisé se résume à un flambement de l'âme (figure I.18). Le flambement de l'âme ne dépend, pratiquement pas des propriétés des peaux, mais; essentiellement de son épaisseur: il augmente linéairement avec les valeurs de l'épaisseur et celle du module de cisaillement de l'âme. Par conséquent, afin d'augmenter la résistance à la charge critique, on peut agir sur l'augmentation de l'épaisseur de l'âme et/ou de son module de cisaillement.

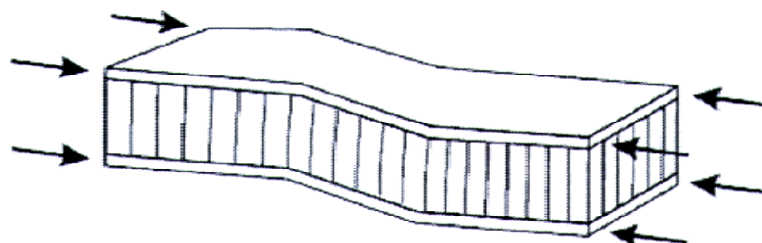


Figure I.18. Flambement généralisé de l'âme du sandwich.

I.9.3. Flambement localisé du sandwich « wrinkling » ou « dimpling » :

À cause de leurs faibles épaisseurs, les peaux, prises séparément de l'âme, flambent très facilement. L'assemblage de ces dernières avec l'âme a pour intérêt, justement, d'empêcher ce flambement sous réserve de ne pas atteindre la contrainte limite; auquel cas, l'âme ne peut l'éviter. Dans ce cas de figure, apparaîtra, alors un flambement localisé des peaux ou « wrinkling» [26] (figure I.19).

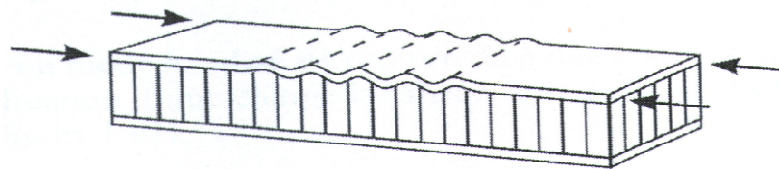


Figure I.19. Flambement localisé « wrinkling ».

Le flambement localisé, contrairement au flambement généralisé, peut s'illustrer par des configurations variées qui ne dépendent ni de la géométrie de la structure du sandwich, ni des conditions aux limites. Néanmoins, il est tributaire des modules d'élasticité des peaux et de l'âme et ainsi que du module de cisaillement de l'âme.

Afin de pallier à ce type de flambement localisé de la peau, on peut prévoir des peaux confectionnées avec des matériaux de module d'élasticité plus élevé et/ou une âme de propriétés élastiques plus importantes.

Un autre type de flambement localisé des peaux, nonobstant les ruptures par « wrinkling », est constaté pour les sandwichs à âme en nids d'abeilles, appelé flambement localisé de la peau en fossettes dit, aussi, « dimpling » (figure I.20).

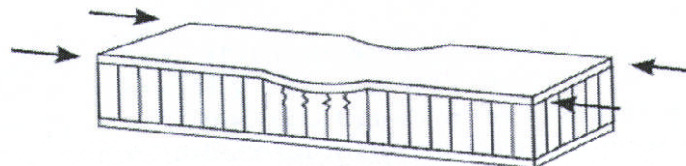


Figure I.20. Flambement localisé « dimpling ».

I.9.4. Rupture des peaux en traction ou en compression:

La rupture des peaux, en traction ou en compression, survient lorsque les contraintes, dans les peaux, sont supérieures aux contraintes admissibles du matériau qui les constitue (figure I.21).

Pour contourner ce type de rupture, on agit, soit :

- sur les peaux; en choisissant un matériau dont les contraintes admissibles sont plus élevées ou en augmentant leurs épaisseurs
- sur l'âme en augmentant son épaisseur.

Ces deux procédés permettent, tous, de réduire les contraintes dans les peaux et d'éviter ainsi leurs ruptures.

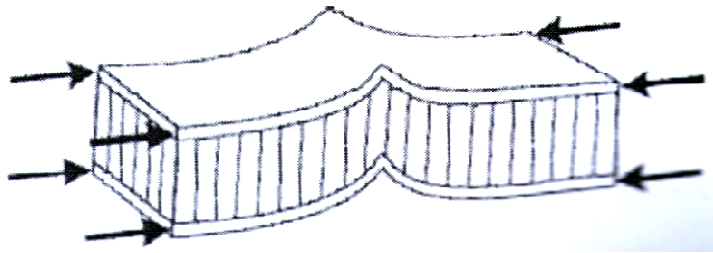


Figure I.21. Endommagement par rupture des peaux du sandwich.

I.9.5. Endommagement local par indentation:

L'indentation locale est un mode localisé de rupture qui survient suite à une concentration de contraintes due à l'application d'une charge localisée ou à la position d'un appui ponctuel ou linéique (figure I.22).

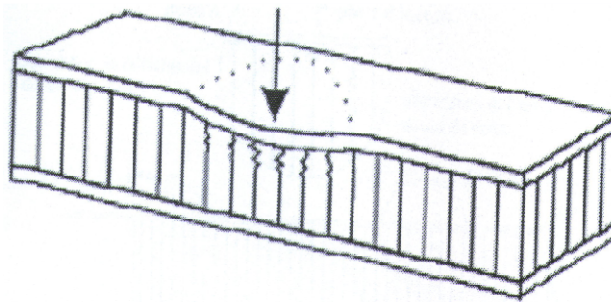


Figure I.22. Rupture par indentation localisée des peaux.

I.9.6. Rupture par cisaillement de l'âme:

La contrainte prépondérante dans l'âme est la contrainte de cisaillement. Quand celle-ci dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de cette dernière (figure I.23).

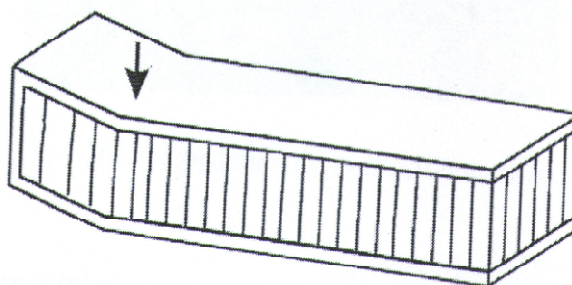


Figure I.23. Rupture par cisaillement de l'âme.

I.9.7. Dégradation de l'adhésif:

On peut observer, généralement, trois principaux types de dégradation de l'adhésif :

- rupture de la liaison âme-peau (décollement de l'âme)
- dégradation de l'attachement des cellules du cœur
- dégradation de l'attachement du nœud des cellules du cœur.

Les figures I.24 et I.25 illustrent respectivement la dégradation de l'adhésif qui rompt la solidarisation âme-peau et la dégradation de l'adhésif assurant la liaison des cellules du cœur entre elles.

Il est à signaler qu'une longue exposition du sandwich à l'humidité altère, considérablement, la résistance de l'adhésif et peut causer sa ruine [27].

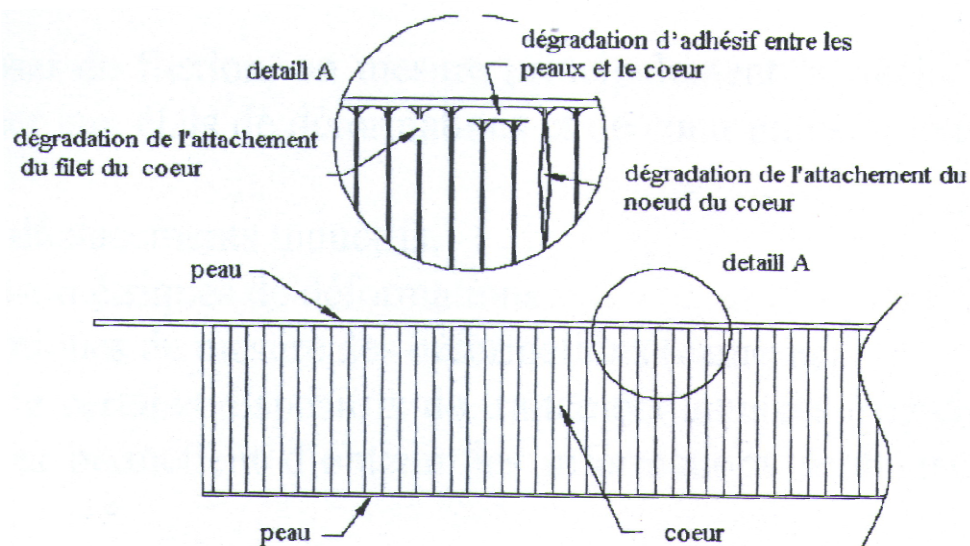


Figure I.24. Dégradation de l'adhésif entre l'âme et la peau.

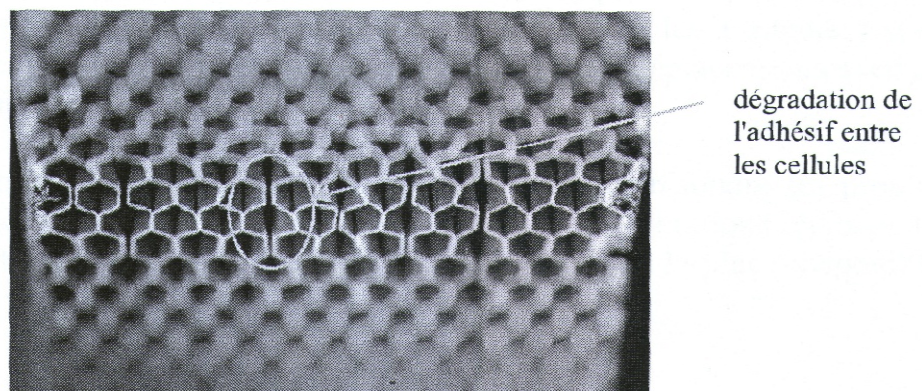


Figure I.25. Dégradation de l'adhésif entre les cellules.

I.10. Comportement en fatigue des matériaux sandwiches:

I.10.1. Introduction:

L'endommagement évolue en fonction du temps et du chargement. Il est, donc, essentiel de chercher à maîtriser sa loi d'évolution afin de déterminer la durée de service résiduelle et donc la capacité de résistance de la structure. La dégradation des propriétés mécaniques dépend de l'intensité du chargement (amplitude), de sa direction et de la durée de son application. Toute variation de l'un de ces paramètres induit un changement de la loi d'évolution de l'endommagement.

Une branche de la mécanique a été consacrée à l'étude de l'endommagement qui consiste à expliquer l'évolution de la détérioration des matériaux chargés en corrélation avec les variables mécaniques.

La description de l'évolution de cette détérioration peut être schématisée par quatre phases essentielles :

- formation de nouveaux défauts ponctuels
- microfissuration générée par les défauts ponctuels
- croissance des microfissures par décohésion
- réunion des microfissures en une macro fissure et amorçage d'une fissure.

La prévision phénoménologique, par calculs, de la détérioration jusqu'à sa phase ultime de rupture requiert l'introduction, en plus des variables classiques du comportement des solides, d'une variable d'endommagement : contraintes et déformations.

Les premières bases de la mécanique d'endommagement ont été énoncées, en 1958, par Kachanov [28] et, en 1968, par Rabotnov [29] en introduisant la notion de contrainte effective et de loi d'évolution d'une variable de l'endommagement dans le cadre restreint de la rupture par fluage des métaux sous sollicitation unidimensionnelle. Plus tard, dans les années 70 [30, 31, 32, 33, 34], cette théorie a été reprise et étendue à d'autres cas tels la rupture ductile et la rupture par fatigue. Il s'en est suivi, ensuite, sa généralisation au cas tridimensionnel isotrope dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles.

I.11. Aspects phénoménologiques de l'endommagement

I.11.1. Représentation mécanique de l'endommagement

Le paramètre d'endommagement est une propriété utilisant la détérioration comme indicateur de l'endommagement. Plusieurs propriétés peuvent être utilisées comme paramètre d'endommagement qu'elles soient microstructurales, physiques ou mécaniques.

Dans sa théorie, Kachanov [28], a considéré que la perte de rigidité du matériau est le paramètre d'endommagement. Lemaitre et Chaboche [33] ont fait de même.

I.11.2. Variable d'endommagement unidimensionnel [28]

D'après Kachanov, l'endommagement peut être considéré comme la formation de microfissures et micro défauts. Il est dit isotrope si l'orientation des microfissures et des défauts est distribuée uniformément dans toutes les directions. Il en résulte que la valeur de la variable d'endommagement ne dépend pas de la direction. Elle est définie, selon Kachanov par :

$$D = \frac{S_D}{S} = \frac{S - \tilde{S}}{S} \quad (51)$$

avec :

S_D : surface des défauts contenus dans S.

S : surface usuelle de l'intersection du plan, avec l'élément de volume.

\tilde{S} : surface sans les microfissures et défauts.

I.11.3. Concept de la contrainte effective:

La contrainte effective désigne la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux charges appliquées, soit $(S - S_D)$.

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D)$$

La contrainte effective sera alors :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (52)$$

avec :

σ : contrainte macroscopique usuelle

$\tilde{\sigma}$: contrainte effective

L'opérateur endommagement qui fait passer de la contrainte usuelle à la contrainte effective, dans le cas tridimensionnel, est très complexe; il est tensoriel d'un ordre qui peut être différent selon les définitions adoptées [35].

L'endommagement isotrope tridimensionnel est représenté par le scalaire D et le tenseur des contraintes effectives $\tilde{\sigma}_{ij}$ défini par :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} \quad (53)$$

I.11.4. Principe d'équivalence des déformations [34]:

En utilisant la notion de contrainte effective, on adopte l'hypothèse suivante : les relations de comportement du matériau endommagé s'expriment sous la même forme que les matériaux non encore endommagés, en substituant aux contraintes usuelles les contraintes effectives. La loi d'élasticité linéaire unidimensionnelle d'un matériau endommagé s'écrira, alors :

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1-D)} \quad (54)$$

et le module d'élasticité du matériau endommagé est donné par :

$$\tilde{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_e} = E(1-D) \quad (55)$$

On voit que l'endommagement est associé, dans cette approche, à la perte de rigidité du matériau.

A titre d'exemple, on montre, sur la figure I.26, un exemple de variation du module d'élasticité lors d'un endommagement ductile [34], en l'occurrence le cuivre.

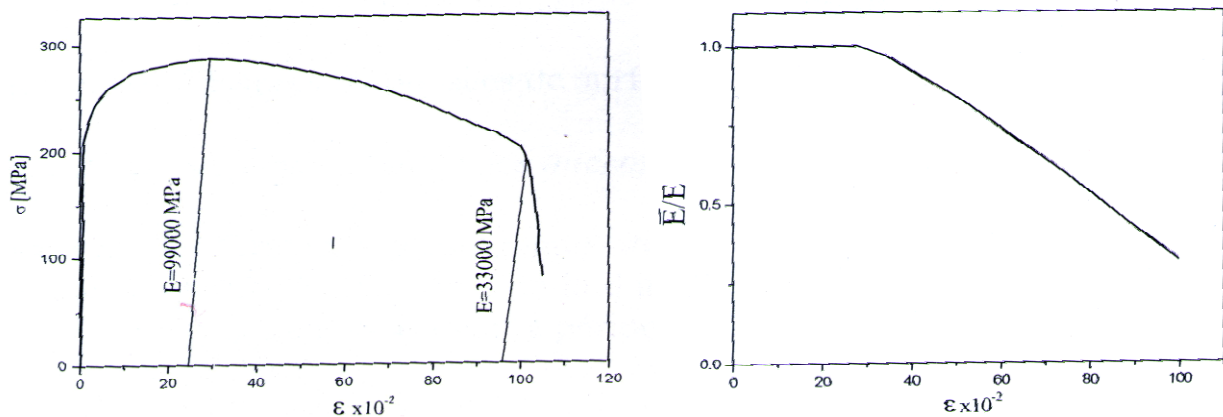


Figure I.26. Variation du module d'élasticité avec l'endommagement pour le cuivre (cuivre à 99,9%)[34].

I.11.5. Mesures de l'endommagement:

Des moyens d'observation et de mesure permettent de traduire d'une manière univoque, les variables classiques que sont les contraintes et les déformations, en variables concrètes. Opération qui ne peut être réalisée pour l'endommagement inaccessible, directement, aux mesures.

Il n'est pas simple de quantifier la variable d'endommagement.

On ne peut passer, aisément, de l'observation microscopique qualitative des microfissures à une mesure quantitative de l'endommagement. Son évaluation quantitative ne peut se faire, indéniablement, que par des méthodes indirectes en passant par l'évaluation de certains paramètres physiques du matériau (module de Young, densité, ...) au fur et à mesure de l'endommagement. Les variations de ces paramètres physiques nous renseigneront, par corrélation, de l'évolution du paramètre de l'endommagement.

I.11.6. Mesures directes ou microstructurales de l'endommagement:

I.11.6.1. Mesures des surfaces fissurées [34,35]

La mesure directe des surfaces fissurées S_D contenue dans la surface totale S consiste à les évaluer entièrement en réalisant l'observation, par microscope, sur un faciès. Néanmoins, cette méthode présente des inconvénients car elle est approximative, destructive et difficile à mettre en pratique.

La répartition des microfissures n'étant pas régulière, il est, donc, possible que le plan d'observation ne contienne pas de micro-défauts, mais, seulement les lignes d'intersection des microfissures avec le plan d'observation.

L'endommagement est déterminé, en supposant que les microfissures ont une forme carrée; soit :

$$D = \frac{\sum a_i^2}{S} \quad (56)$$

avec :

a_i : longueurs des fissures (supposées de surfaces carrées).

I.11.6.2. Mesure de la longueur cumulée des microfissures

Le processus de fatigue s'accompagne, très rapidement, de l'apparition de multiples microfissures en surfaces. La période particulière de la durée de vie d'un matériau, au cours de laquelle les longueurs et le nombre des microfissures, augmentent, ostensiblement, est appelé stade I (figure I.27).

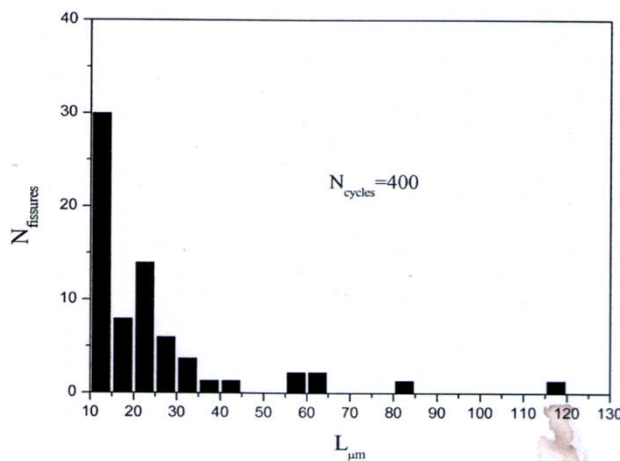


Figure I.27. Histogramme des longueurs des microfissures (Acier à rotor, nombre de cycles 400)[35].

Le stade II du phénomène de fatigue est la période au cours de laquelle la plus grande des microfissures dépasse une certaine taille de l'ordre de quelques distances intergranulaires et continue de se propager, seule, en s'accaparant la totalité de l'énergie élastique stockée.

La figure I.26 représente l'exemple de l'historique de longueurs de fissures pour un essai de fatigue oligocyclique sur un acier à rotor.

La figure I.28 illustre l'allure de la courbe de variation de la longueur de fissure cumulée en fonction du nombre de cycles appliqués.

L'endommagement, dans ce cas, sera défini comme suit :

$$D = \frac{L_{c,i}}{L_{c,r}} \quad (57)$$

où : $L_{c,i}$: est la longueur des microfissures à l'ième cycle,

$L_{c,r}$: celle de la rupture finale.

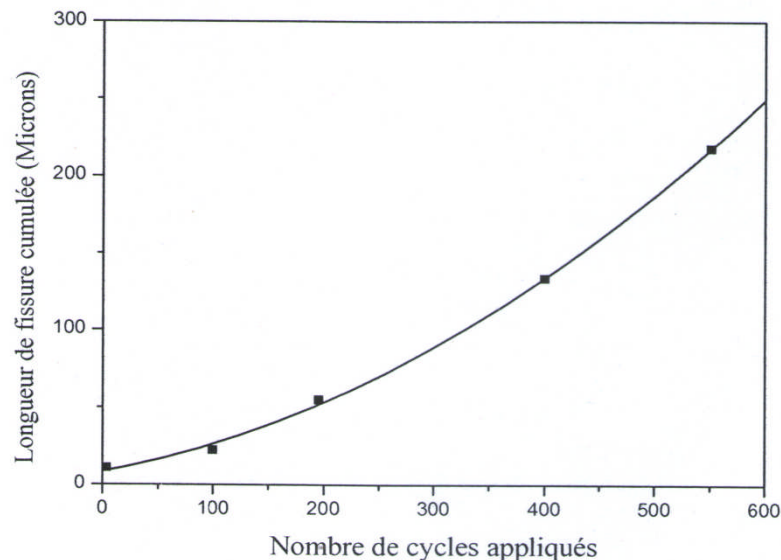


Figure I.28. Évolution de la longueur cumulée de microfissures de fatigue en fonction du nombre de cycles appliqués.

I.11.7. Evolution des propriétés mécaniques et physiques choisies comme paramètres d'endommagement.

La mesure de l'endommagement, lors d'un chargement statique ou cyclique, peut-être effectué, d'une manière indirecte, en utilisant diverses propriétés mécaniques ou physiques du matériau tels que :

- le module d'élasticité
- la densité
- la dureté
- la limite d'endurance en fatigue....

Il est à noter que certains de ces paramètres mettent en évidence l'évolution de l'endommagement au début de vie; tandis que d'autres le font en fin de vie.

I.11.7.1. Mesure de l'endommagement par variation du module d'élasticité [33, 34]

Cette méthode est indirecte et consiste à utiliser l'influence de l'endommagement sur l'élasticité. La variable d'endommagement est

variation du module de Young. On obtient, ainsi, l'expression de l'endommagement à partir de la variation du module d'élasticité :

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \tag{58}$$

où \tilde{E} représente le module d'élasticité endommagé et est mesuré lors des déchargements à partir des courbes $\sigma = f(\varepsilon)$.

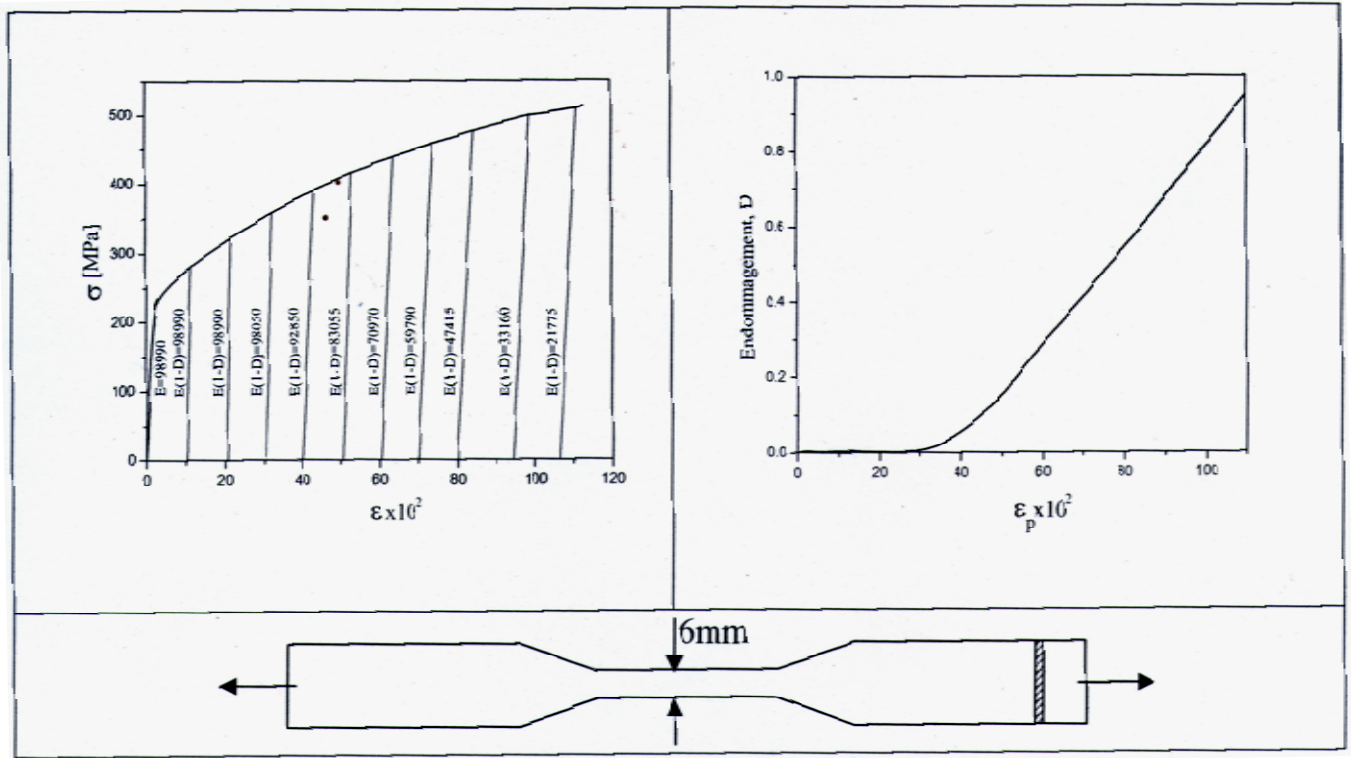


Figure I.29. Mesure de l'endommagement ductile du cuivre en traction [33, 34].

Les exemples, montrés sur les figures I.29 et I.30, illustrent l'évolution du paramètre d'endommagement D, respectivement, en traction et en compression.

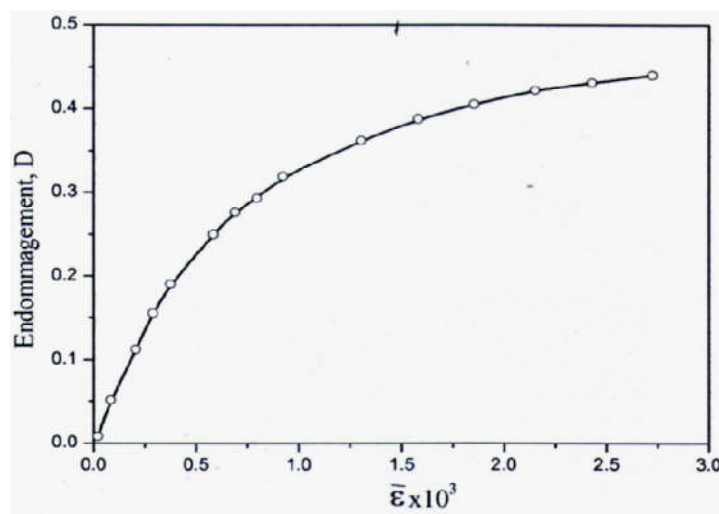


Figure I.30. Évolution de l'endommagement fragile du béton en compression [33, 34].

I.11.7.2. Mesure basée sur la variation de la densité [34].

Cette méthode est préconisée pour un endommagement ductile et en supposant que les défauts ont une forme sphérique. Les volumes des défauts augmentent avec l'importance des dommages. L'augmentation, des défauts induit la diminution de la densité qui est mesurée par des appareils utilisant le principe d'Archimède.

En introduisant la variation relative de la densité $\left(\frac{\tilde{\rho} - \rho}{\rho}\right)$ entre la densité $\tilde{\rho}$ à l'état endommagé et ρ à l'état initial et en se plaçant dans le domaine de la micromécanique, on considère le défaut de forme sphérique de rayon r dans un volume élémentaire représentatif (VER) de rayon initial R et de masse m . on peut écrire :

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{et} \quad \tilde{\rho} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi(R^3 + r^3)}$$

d'où:
$$\frac{\tilde{\rho} - \rho}{\rho} = \frac{R^3}{R^3 + r^3} - 1 = \frac{-r^3}{R^3 + r^3}$$

Le paramètre d'endommagement D s'exprimera comme suit :

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} = \frac{\pi r^2}{\pi(R^3 + r^3)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{r^3}{R^3 + r^3}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ il vient:}$$

$$D = \left(1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (59)$$

I.11.7.3. Mesure basée sur la variation de la flèche d'une poutre chargée en flexion [36].

La mesure de l'endommagement d'une poutre en bois, soumise à la flexion en fluage est réalisée en introduisant dans l'expression du paramètre de dommage la flèche de la poutre. Kirch [37] a établi que :

$$D = \frac{f_i - f_o}{f_r - f_o} \quad (60)$$

avec :

f_i : flèche à l'instant t_i .

f_r : flèche à la rupture.

f_o : flèche à l'instant $t = 0$.

I.11.7.4. Lois d'endommagement de fluage

➤ Loi de Kachanov [28, 33]

En 1958, Kachanov a suggéré une modélisation de l'évolution de l'endommagement viscoélastique fragile par la relation :

$$D = \left(\frac{\sigma_v}{A_o(1-D)} \right)^r \quad (61)$$

où A_o et r sont deux coefficients caractéristiques de l'endommagement de fluage pour chaque matériau. Le temps à la rupture, dans un essai de fluage à contrainte vraie constante, s'exprime par la solution de l'équation différentielle du modèle pour la valeur critique de l'endommagement $D = D_c$, avec la condition initiale à $t = 0$,

$D = 0$, le temps de rupture est donné par :

$$t_c = \frac{1 - (1 - D_c)^{r+1}}{r + 1} \left(\frac{\sigma_v}{A_o} \right)^{-r} \quad (62)$$

Compte tenu des valeurs de r permettant de négliger le terme $(1 - D_c)^{r+1}$ devant 1, l'expression de l'évolution de l'endommagement aura une forme plus simple obtenue par intégration de la loi différentielle entre 0 et D :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{\frac{1}{r+1}} \quad \text{avec } t_c = \frac{1}{r + 1} \left(\frac{\sigma_v}{A_o} \right)^{-r} \quad (63)$$

➤ Loi de Rabotnov [29, 33]

Pour le cas de chargement complexe (contraintes variables et chargement multiaxial), la loi d'endommagement de Rabotnov correspond à une généralisation de la loi de Khachanov.

Rabotnov a introduit un coefficient supplémentaire $k(\sigma)$ afin d'améliorer la loi de Khachanov. Il propose le modèle suivant :

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma}{A} \right)^r (1-D)^{-k} \quad (64)$$

$$A = A_o \left[\frac{k(\sigma) + 1}{r + 1} \right]^{\frac{1}{r}}$$

avec :

A : coefficient caractéristique de l'endommagement de fluage du matériau.

$k(\sigma)$: dépend du niveau de contrainte σ .

L'intégrale de cette loi, pour un essai à contrainte constante, donne :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\frac{1}{1+k(\sigma)}} \text{ avec } t_c = \frac{1}{1+k(\sigma)} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r} \quad (65)$$

I.11.7.5. Lois d'endommagement en fatigue

Les lois d'évolution de l'endommagement en fonction de la durée de vie sont diverses et peuvent être classées en lois linéaires et non linéaires.

➤ **Loi linéaire de Miner [33]**

Cette loi d'évolution est la plus répandue ; bien que l'évolution de l'endommagement soit rarement linéaire. La figure I.31 présente deux types d'évolution de l'endommagement en fonction de la fraction de vie, l'un linéaire et l'autre non linéaire.

$$dD = C_1 dN \quad (66)$$

avec comme conditions aux limites :

$$D = 0 \text{ pour } N = 0 \text{ et } D = 1 \text{ pour } N = N_R$$

La constante C_1 vaut :

$$C_1 = \frac{1}{N_R} \quad (67)$$

N_R est le nombre de cycles à rupture.

L'endommagement D s'écrit, alors :

$$D_i = \frac{N_i}{N_R} = \beta \quad (68)$$

où β est la durée de vie.

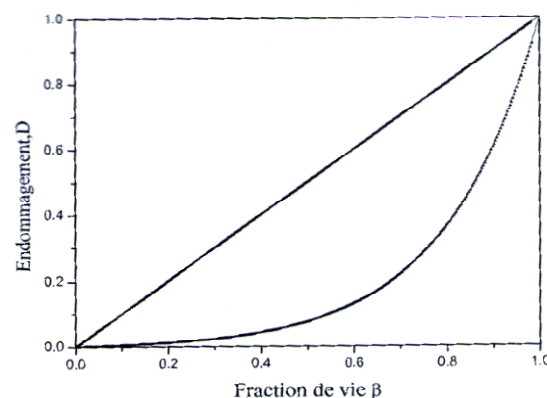


Figure I.31. Évolution linéaire et non linéaire de l'endommagement en fonction de la fraction de vie.

➤ **Loi de Corten Dolan [37]**

Cette loi d'évolution de l'endommagement est non linéaire. L'endommagement D est une fonction puissance de la fraction de vie (figure I.32). L'exposant de cette fraction dépend du matériau utilisé et du niveau de chargement.

L'évolution non linéaire de l'endommagement est une fonction puissance du nombre de cycles appliqués N :

$$D = C_2 \cdot N^a \quad (69)$$

C_2 et a sont des constantes dont C_2 dépend du niveau de contrainte.

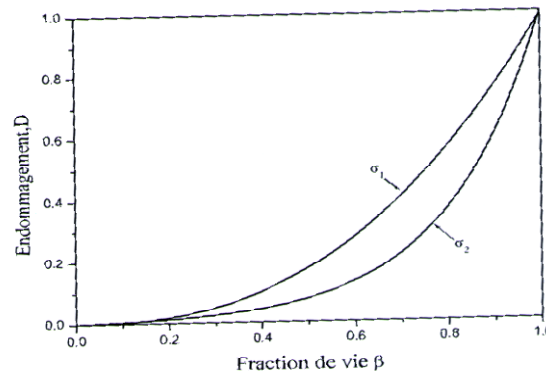


Figure I.32. Évolution non linéaire de Corten Dolan pour deux niveaux de contrainte σ_1 et σ_2 [12].

➤ **Modèle de Chaboche [33, 34]**

Ce modèle, plus élaboré, rend compte de l'effet de cumulation non linéaire de l'endommagement et suppose que l'on peut écrire la relation intégrée $\frac{\partial D}{\partial N}$ en fonction de l'amplitude de la contrainte effective :

$$\Delta \tilde{\sigma} = \frac{\sigma_M - \sigma_m}{1 - D}$$

et de la contrainte moyenne:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_M + \sigma_m}{1 - D} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

$$\frac{\partial D}{\partial N} = [1 - (1 - D)^{1+\delta}]^{\alpha(\sigma_M, \sigma)} \left[\frac{\sigma_M - \sigma}{(1 - D)M(\bar{\sigma})} \right]^\delta \quad (70)$$

où :

α : exposant dépendant du chargement

δ : une constante du matériau

σ_M : contrainte maximale

$\bar{\sigma}$: contrainte moyenne

$M(\bar{\sigma})$: fonction de l'amplitude de la contrainte effective.

Soit le changement de variable suivant :

$$u = (1 - D)^{1+\delta} \Rightarrow du = -(1 + \delta)(1 - D)^\delta dD$$

$$\Rightarrow -\frac{du}{1 + \delta} = (1 - u)^\alpha \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^\delta \cdot N \Rightarrow N = \left[\frac{(1 - u)^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)(1 + \delta)} \right] \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^{-\delta}$$

il vient :

$$N = \left[\frac{\{1 - (1 - D)^{1+\delta}\}^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)(1 + \delta)} \right] \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^{-\delta} \quad (71)$$

Sachant que pour $N = N_R, D = 1$, il vient :

$$N_R = \left(\frac{1}{(1 - \alpha)(1 + \delta)} \right) \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right)^{-\delta} \quad (72)$$

En faisant le rapport des équations (71) et (72), on obtient l'expression de l'endommagement en fonction de la fraction de vie $\beta = \frac{N}{N_R}$:

$$D = 1 - \left[1 - \beta^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \right]^{\frac{1}{1-\delta}} \quad (73)$$

où :

δ : est une constante du matériau

α : un exposant dépendant de l'amplitude de la charge appliquée.

Ces deux constantes sont déterminées expérimentalement (courbes de Wöhler).

➤ **Modèle de Lemaitre-Plumtree[33]**

Analogue au modèle de Chaboche, ce modèle [33, 34] repose sur un seul paramètre qui dépend de l'amplitude des charges appliquées. La forme différentielle de l'équation d'endommagement est, à une modification près, celle de Khachanov [28]; elle tient compte de la cumulation non linéaire de l'endommagement.

L'endommagement par fatigue est exprimé comme suit :

$$D = 1 - \left[1 - \beta^{\left(\frac{1}{1+\delta}\right)} \right] \quad (74)$$

➤ **Loi d'endommagement en « S » de Mankowsky [38]**

Dans certains cas, l'allure de la courbe de la loi d'évolution de l'endommagement se présente sous la forme d'un « S » et est caractérisée par la relation non linéaire de Mankowsky [38], à savoir :

$$D = a \left(\frac{t^b}{1 - t^c} \right) \quad (75)$$

où :

D : paramètre d'endommagement

$$t = \frac{t_i}{t_R} = \frac{\text{temps à l'instant } i}{\text{temps à la rupture}} \text{ étant le temps normalisé}$$

a, b et c sont des paramètres du matériau.

Cette évolution a été établie par Dinkel et al.[39 – 40] (figure I.33).

On voit, clairement, que la variable de l'endommagement D tend vers l'infini pour un temps normalisé t égal à l'unité :

$$\lim_{t \rightarrow 1} D = \infty \quad (76)$$

Afin de retrouver les conditions aux limites de la variable d'endommagement, une modification au niveau de la relation non linéaire de Mankowsky est adoptée par Azouaoui et al.[41].

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1} D = 1 \quad (77)$$

Ce qui nous donne, en définitive la relation :

$$D = a \left[\frac{t^b}{(1+a)t^c} \right] \quad (78)$$

Les paramètres a, b et c rendent compte, respectivement, du niveau de la seconde zone de la courbe d'endommagement (figure I.33), de la pente de la première zone et du début de la troisième zone.

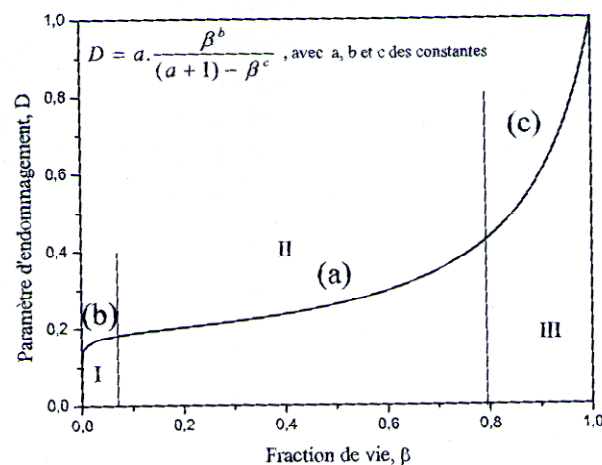


Figure I.33. Évolution en « S » de l'endommagement en fonction de la fraction de vie.

I.12. Approche de dégradation de rigidité en cisaillement

I. 12.1. Introduction

L'endommagement par fatigue des composites, y compris les sandwichs, a été, souvent modélisé par les approches de la résistance résiduelle ou celles de la dégradation de rigidité.

La résistance résiduelle est déterminée à partir d'un essai statique sur éprouvette cyclée. Néanmoins, une série d'essais est nécessaire pour tracer une seule courbe de cette résistance résiduelle. Les approches de dégradation de rigidité ont l'avantage de permettre la mesure de rigidité effective durant le cyclage, sans détruire l'échantillon, de telle sorte qu'une courbe de dégradation de rigidité peut être obtenue à partir d'un seul essai.

La rigidité peut être définie de plusieurs manières. Elle est prise comme le terme représentant le modèle de dégradation de rigidité en fatigue $G(N)$, qui peut être mesuré à partir de la portion linéaire de la courbe (contrainte/déformation) pour différents cycles (fig. I.33).

Yang et al. [42] ont supposé que la vitesse de dégradation est une fonction puissance du nombre de cycles N .

I.12.2. Concept du module de fatigue [43]

Dans Cette approche, la perte de rigidité est supposée proportionnelle à la progression de la flèche mesurée en fonction du nombre de cycles. Dans cette étude, l'approche basée sur le concept de module de fatigue proposée par Hwang et Han [44] sera utilisée. Cela est applicable dans le cas où la rupture du matériau est dominée par le cisaillement de l'âme.

Le terme « module de fatigue » est le rapport entre la contrainte appliquée et la déformation résultante pour un nombre de cycles donné (figure I.33). Lorsque le nombre de cycles augmente, pour une contrainte de cisaillement appliquée τ_a , la résultante de la déformation par cisaillement à N cycles devient plus grande jusqu'à ce qu'elle atteigne une rupture par déformation de cisaillement. Il est supposé que le critère de déformation est valable quand la déformation en fatigue, dépendant du nombre de cycles est égale à la déformation de rupture obtenue lors des essais statiques c'est-à-dire $\gamma(N_R) = \gamma_u$.

Le module de fatigue, pour un rapport de charge r et un nombre de cycles N , peut être donné par l'équation :

$$G_f(N, r) = \frac{\tau_a}{\gamma(N)} \quad (79)$$

Ainsi, la connaissance de la courbe contrainte /déformation pour chaque nombre de cycles n'est pas exigée ; la mesure du module de fatigue peut être, directement, effectuée par la connaissance de l'historique de la déformation pour un matériau donné.

I.12.3. Equation de la dégradation

La vitesse de perte de rigidité du module de fatigue proposé par Hwang et Han [44] peut être liée à une fonction puissance empirique de la forme AN^c . La relation théorique de la diminution du module de fatigue peut être donné par :

$$G_f(N) = G_o = AN^c \quad (80)$$

où :

$G_f(N)$ et G_o sont respectivement le module transitoire et le module statique instantané.

A et c sont des constantes déterminées expérimentalement.

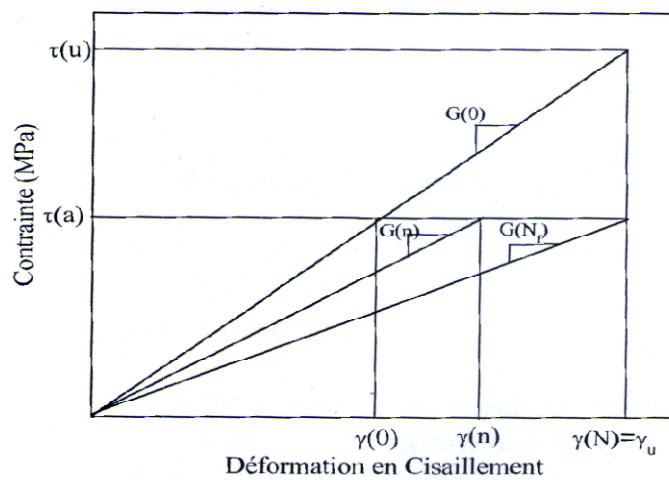


Figure I.34. Concept de module de fatigue [44].

Le processus de fatigue consiste en une phase d'initiation suivie par une phase de progression de l'endommagement. Le nombre de cycles N , définissant l'initiation de l'endommagement par fatigue, est donné par N_{if} . Le modèle utilisé sera modifié pour être applicable dans le domaine correspondant à $N \geq N_{if}$. L'équation (79) a été modifiée par l'utilisation d'une fonction exponentielle de la forme Ae^{nc} [43]:

$$\left. \begin{aligned} G_f(N) &= G_o && \text{pour } N \leq N_{if} \\ G_f(N) &= G_o - Ae^{(N-N_{if})c} && \text{pour } N \geq N_{if} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

I.12.4. Equation Contrainte/ Nombre de cycles

La courbe non linéaire (contrainte/Nombre de cycles) peut être obtenue à partir de dégradation non linéaire du module de fatigue du cœur (équation 80).

En supposant la déformation de cisaillement cyclique à la rupture égale à la déformation de cisaillement statique maximale $[\gamma_f(N_R)] = \gamma_u$, le module de fatigue à la rupture devient :

$$\frac{G_f(N_R)}{G_o} = \frac{\tau_a \gamma_u}{\gamma_u \tau_u} = \frac{\tau_a}{\tau_u} = r \quad (82)$$

r est le rapport entre la contrainte appliquée et la contrainte statique à rupture.

En substituant N_R à N dans l'expression de $G_f(N)$ (équation 80), il vient :

$$N_R = N_{if} + \frac{\ln[B(1-r)]}{c} \quad (83)$$

avec :

$$B = \frac{G_o}{A}$$

L'équation 82 peut être utilisée pour prédire le nombre de cycles à la rupture pour différents niveaux de contrainte appliquée.

I.12.5. Equation d'endommagement cumulatif

Les lois d'évolution de l'endommagement en fonction de la durée de vie sont multiples et peuvent être classées en lois linéaires et non linéaires.

Il a été supposé [43] que l'endommagement est initié à $N = N_{if}$. Pour $N = N_R$, l'endommagement D est égal à 1.

Pour tous les modèles d'endommagement cumulatifs, il est supposé que :

$$\left. \begin{array}{l} D(N) = 0 \text{ pour } N \leq N_{if} \\ 0 \leq D(N) \leq 1 \text{ pour } N_{if} \leq N \leq N_R \end{array} \right\} \quad (84)$$

➤ Modèle I [43]

Ce modèle basé sur l'endommagement cumulatif linéaire, est supposé par Miner [45].

L'état de l'endommagement correspondant à un nombre de cycles N donné est le rapport du nombre de cycles actuel par le nombre de cycles provoquant la rupture par fatigue. Dans ce cas, le modèle d'endommagement produit après initiation de l'endommagement s'écrit :

$$D(N) = \frac{N - N_{if}}{N_R - N_{if}} \text{ pour } N \geq N_{if} \quad (85)$$

➤ Modèle II [43]

La fonction d'endommagement D est définie à partir du modèle de cisaillement en fatigue, soit :

$$D(N) = \frac{G_o - G_f(N)}{G_o - G_f(N_R)} \quad (86)$$

où :

G_o : module en cisaillement statique

$G_f(N)$: module de fatigue transitoire
 $G_f(N_R)$: module de fatigue à la rupture

En utilisant l'équation 80, l'expression 85 devient :

$$D(N) = \frac{e^{(N-N_{if})c}}{e^{(N-N_R)c}} \text{ pour } N \geq N_{if} \quad (87)$$

➤ **Modèle III [43]**

Ce modèle est défini en privilégiant l'évolution de la déformation en cisaillement du cœur. La fonction de l'endommagement D est donnée par :

$$D(N) = \frac{\gamma(N) - \gamma(0)}{\gamma(N_R) - \gamma(0)} \quad (88)$$

En tenant compte de l'équation et de la relation (contrainte / déformation) dérivée de la fatigue, la fonction de l'endommagement devient :

$$D(N) = \left(\frac{r}{1-r} \right) \left[\frac{e^{(N-N_{if})c}}{B - e^{(N-N_{if})c}} \right] \text{ pour } N \geq N_{if} \quad (89)$$

➤ **Modèle IV [41]**

Pour ce modèle, l'endommagement apparaît après initiation de fissure et s'exprime comme suit:

$$D(N) = \frac{k\beta^l}{(1+k) - \beta^m} \text{ pour } N \geq N_{if} \quad (90)$$

avec :

$$\beta = \frac{N - N_{if}}{N_f - N_{if}}$$

l, k et m : constantes du matériau.

I. 12.6. Conclusion

Les composites sandwichs à âme en nids d'abeilles sont de nouveaux matériaux composites utilisés, particulièrement, dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial. Leurs avantages résident, principalement, dans leurs fortes rigidités, leurs excellentes résistances à la fatigue, leurs résistances au feu, leurs bonnes isolations thermiques et, surtout, leurs faibles poids. Leur seul inconvénient réside dans le coût de développement qui reste assez élevé.

Vu leurs performances mécaniques (compression, flexion), l'utilisation de ces matériaux sandwichs ne cesse de prendre de l'ampleur. Seul ennui, leur mode de rupture ou de ruine reste quelque peu imprévisible, à savoir :

- Flambement des cellules (alvéoles)
- Indentation du cœur
- Cisaillement de l'âme
- Rupture des peaux
- Dégradation de l'adhésif (colle)
- Influence de la densité et du sens d'orientation des cellules (L, W).

Il est donc nécessaire de connaître leur comportement en statique et en fatigue afin d'exploiter entièrement leurs performances et leurs possibilités. Leurs comportements en fatigue restent, quelque peu, peu étudiés. A chaque type de rupture du composite sandwich correspond un modèle d'endommagement bien spécifique. De nombreuses propriétés peuvent être utilisées pour identifier l'endommagement :

- Module d'élasticité
- Module de cisaillement
- Flèche
- Déformation
- Ductilité en compression dureté
- Limite d'endurance en fatigue, énergie dissipée dans la boucle d'hystérésis, etc.

En ce qui concerne les sandwichs à âmes en nids d'abeilles, objet de notre étude, la recherche bibliographique nous a permis de montrer que les modèles d'endommagement appliqués sont basés, essentiellement, sur la dégradation de la rigidité (perte de rigidité). Le modèle choisi dépend, fortement, du type de rupture observé. Dans le cas où la rupture est due à un cisaillement du cœur, l'endommagement est basé sur le modèle de cisaillement en fatigue G.

Le chapitre II est consacré à l'étude du comportement en flexion statique et cyclique des sandwichs à âme en nid d'abeilles. L'homogénéisation des propriétés mécaniques de l'âme du sandwich est exposé dans le chapitre III.

Les principaux résultats des essais expérimentaux et de la modélisation sont commentés et analysés dans la conclusion finale.

CHAPITRE II

ESSAIS DE FLEXION TROIS POINTS ET QUATRE POINTS DU SANDWICH A AME EN NID D'ABEILLES.

II.1. Introduction

L'utilisation, de plus en plus répandue, des structures sandwiches dans les domaines de la construction navale, ferroviaire et dans l'aéronautique exige une plus grande connaissance de leurs comportements mécaniques en sollicitation statique et cyclique.

Les structures sandwiches sont, assez souvent, soumises à des chargements cycliques : on peut citer :

- Efforts du vent sur les ailes d'un avion
- Efforts des vagues sur la coque d'un bateau.

Des travaux de recherche sur le comportement de ces structures sont, de plus en plus fréquents. Néanmoins, les problématiques restent, encore, peu étudiées sur ce type de structures.

La plus grande partie des essais effectués, actuellement, sont les essais de flexion trois points et quatre points, en sollicitation statique et cyclique. Les chargements peuvent être trapézoïdaux, carrés ou sinusoïdaux. Les modes de chargement sont choisis de façon à ce que l'effort soit imposé ou le déplacement.

Dans la présente étude, les essais de flexion trois points sont réalisés pour les deux sollicitations statique et cyclique; quant à la flexion quatre points, les expériences ne sont effectuées que pour la sollicitation statique.

Les essais statiques et cycliques en flexion trois points sont réalisés au laboratoire des systèmes électromécaniques (LASEM) de Sfax (Tunisie); quant aux essais de flexion quatre points en sollicitation statique, ils sont réalisés à l'unité de recherche de matériaux avancés (URMA) d'Annaba, (Algérie).

Les différentes normes permettent de préciser les méthodes des essais existants sur les structures sandwiches et les modes opératoires, les dimensions des éprouvettes et l'exploitation des résultats.

Les essais décrits ci-après, sont réalisés selon la norme NF T54-606.

II.2. Essais de flexion trois points en sollicitation statique:

II.2.1. matériau:

Les éprouvettes sont découpées, selon l'orientation « **L** » des alvéoles (figure II.1), d'un panneau sandwich symétrique, de densité 148 kg/m^3 , à peaux en Aluminium et à âme en Aramide en forme de nids d'abeille (figure II.2). Les dimensions de l'éprouvette, selon la norme utilisée, sont données dans le tableau II.1.

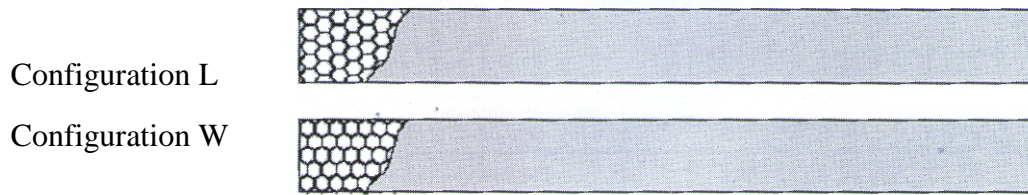


Figure II.1. Configuration Let W des alvéoles du nid d'abeilles.

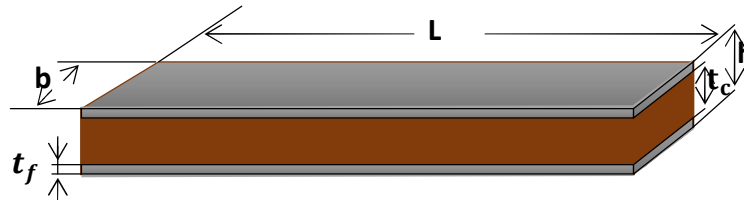


Figure II.2. Epreuve sandwich selon la norme NF T54-606

Tableau II.1. Dimensions de l'éprouvette.

L (mm)	b (mm)	h (mm)	t_c (mm)	t_f (mm)
200	25	10	8	1

II.2.2. Machine d'essai de flexion statique 3 points:

Les essais de flexion statique ont été réalisés, à l'école nationale d'ingénieurs de Sfax (ENIS) – Tunisie, sur une machine WDW-5 (figure II.3), de cellule de charge de 50 kN, pilotée par ordinateur, selon le schéma de montage de la figure II.4.



Figure II.3. Machine d'essais en flexion statique 3-points (Machine universelle WDW-5).

II.2.3. Conditions d'essais:

- Nombre d'éprouvettes : 4
- Vitesse : 5 mm/mn
- Température : 27°C
- Entre-appui conforme Norme NF T54-606 : $L = 120$ mm (fig. II.4).

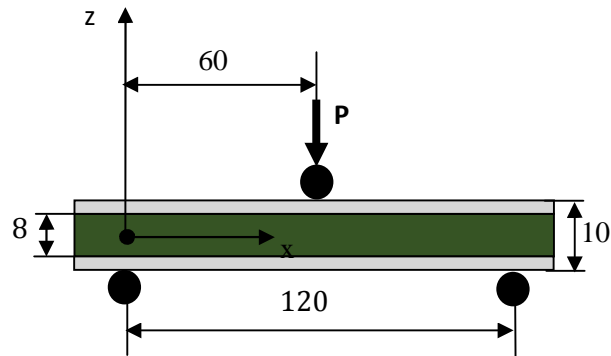


Figure II.4. Schéma de montage de l'essai.

II.2.4. Résultats des essais

II.2.4.1. Courbes de comportement mécanique

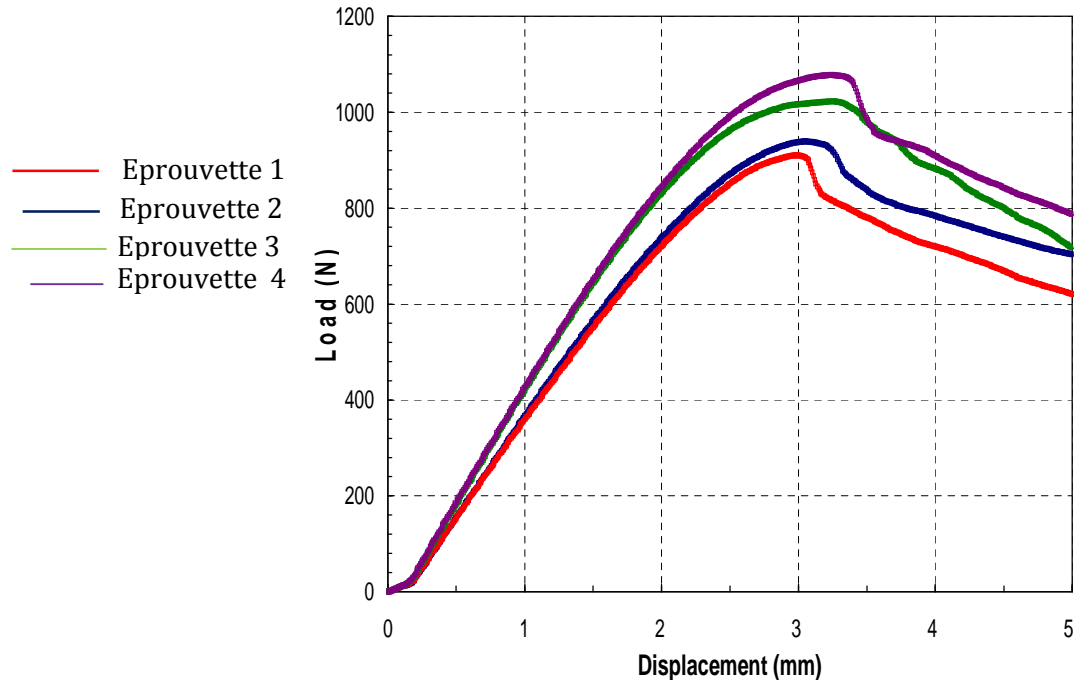


Figure II.5. Courbes forces - déplacements.

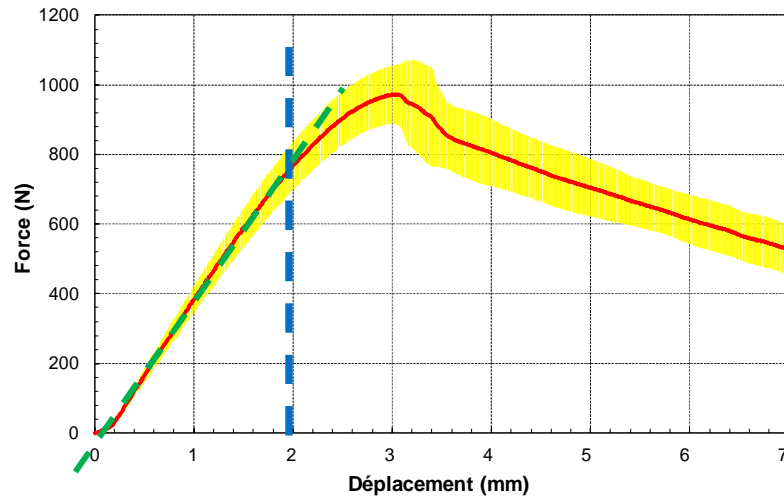


Figure II.6. Courbe moyenne forces-déplacements.

II.2.4.2. Observation des faciès et endommagements

L'observation des endommagements et de la nature de la ruine qu'ont subies les éprouvettes est réalisée à l'aide d'un microscope optique FALCON équipé du logiciel Vision et assurant un agrandissement pouvant aller jusqu'à 50 fois les dimensions réelles (fig. II.7). Ce microscope se trouve au Laboratoire de maintenance industrielle (LMI) de l'université Badji Mokhtar – Annaba.

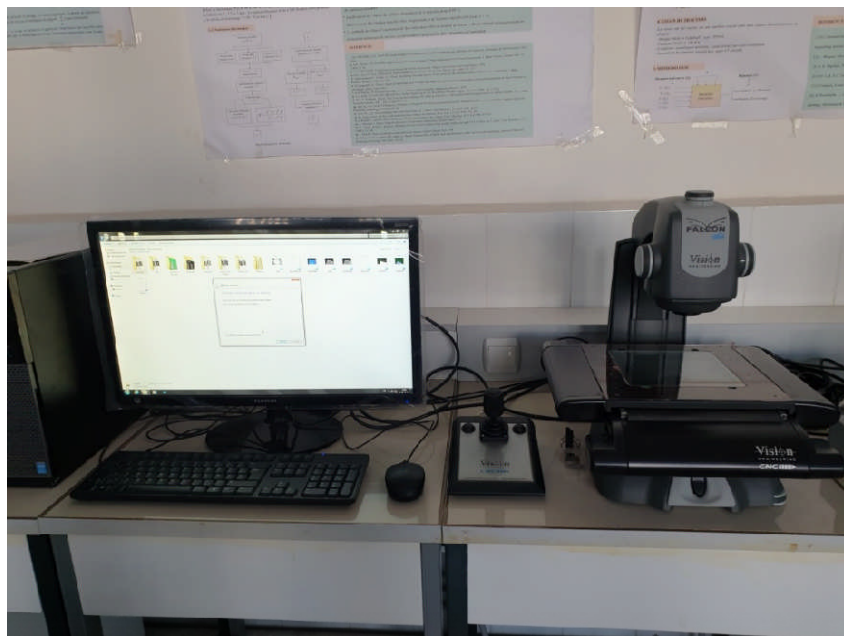


Figure II.7. Microscope optique FALCON Vision Engineering.

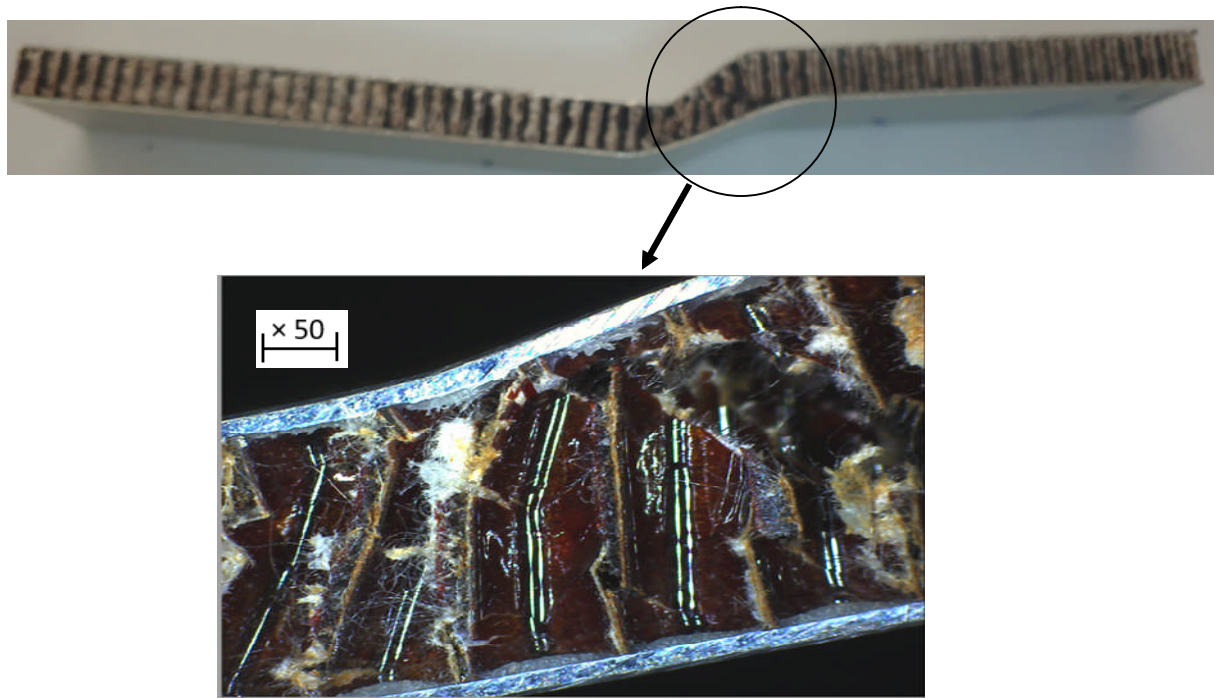


Figure II.8. Indentation des peaux et cisaillement des parois des cellules.

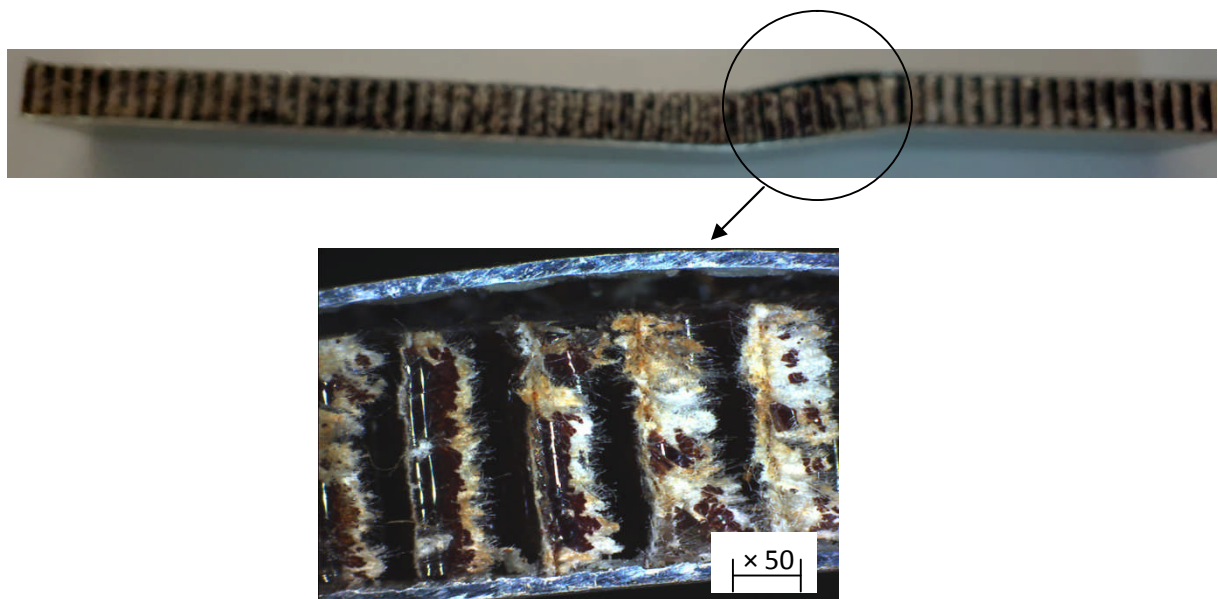


Figure II.9. Indentation de la peau et décollement de l'âme.

II.2.5. Conclusion

II.2.5.1. Comportement mécanique

On distingue trois zones de déformations:

- une zone linéaire correspondant à une déformation élastique jusqu'à une valeur limite ($\approx 760\text{N}$) correspondant à une flèche $f \approx 2\text{ mm}$ (figure II.6).
- une zone non linéaire correspondant à une déformation plastique jusqu'à la valeur maximale ($\approx 960\text{N}$).
- une zone non linéaire correspondant à l'endommagement par déformation plastique à allure décroissante sans atteindre une rupture finale.

II.2.5.2. Endommagement

- une importante indentation des peaux (figure II.8)
- un flambement des cellules de l'âme engendrant le cisaillement des parois (fig. II.8)
- décollement de l'âme (figure II.9 détail)

II.3. Essais de flexion quatre points en sollicitation statique:

II.3.1. Matériau:

Les éprouvettes sont identiques à celles utilisées en flexion statique trois points (figure II.1 et figure II.2). Leur nombre est également le même. Les dimensions de l'éprouvette, selon la norme utilisée, sont données dans le tableau II.1.

II.3.2. Machine d'essai de flexion statique 4 points:

Les essais de flexion statique quatre points ont été réalisés sur une machine **MTS Criterion Model 43** dotée d'un capteur de force de cellule de charge de 50 kN et pilotée par un ordinateur utilisant le logiciel **Testexpert V9.01** (figure II.10), selon le schéma de montage de la figure II.11. La machine se trouve à l'unité de recherche de matériaux avancés (URMA) d'Annaba, (Algérie).



Figure II.10. Machine d'essais de flexion statique quatre points (MTS Criterion Model 43).

II.3.3. Conditions d'essais:

- Nombre d'éprouvettes : 4
- Vitesse : 5 mm/mn
- Température : 27°C
- Entre-appui conforme à la Norme NF T54-606 : $L = 120$ mm (figure II.11).

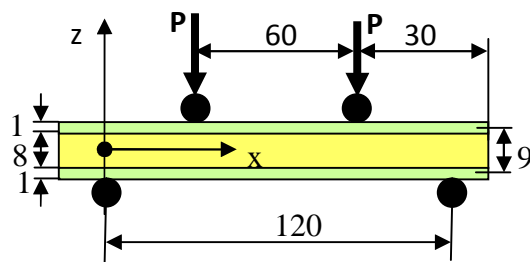


Figure II.11. Schéma de montage de l'essai en flexion statique quatre-points.

II.3. 4. Résultats des essais

II.3. 4.1. Courbe de comportement mécanique du matériau

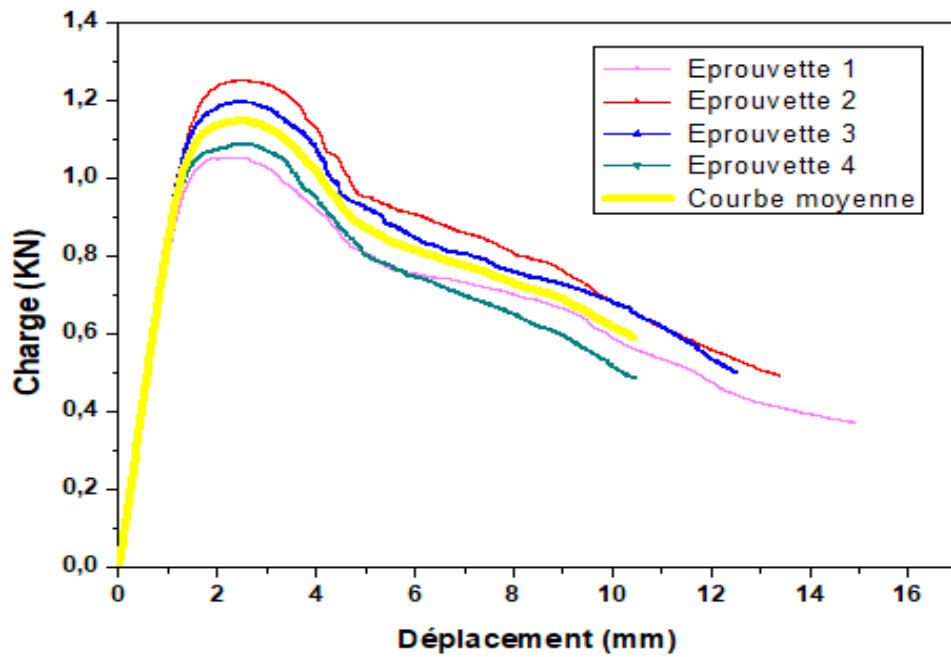


Figure II.12. Courbes charges-déplacements et courbe moyenne en flexion statique 4-points.

II.3. 4.2. Endommagement

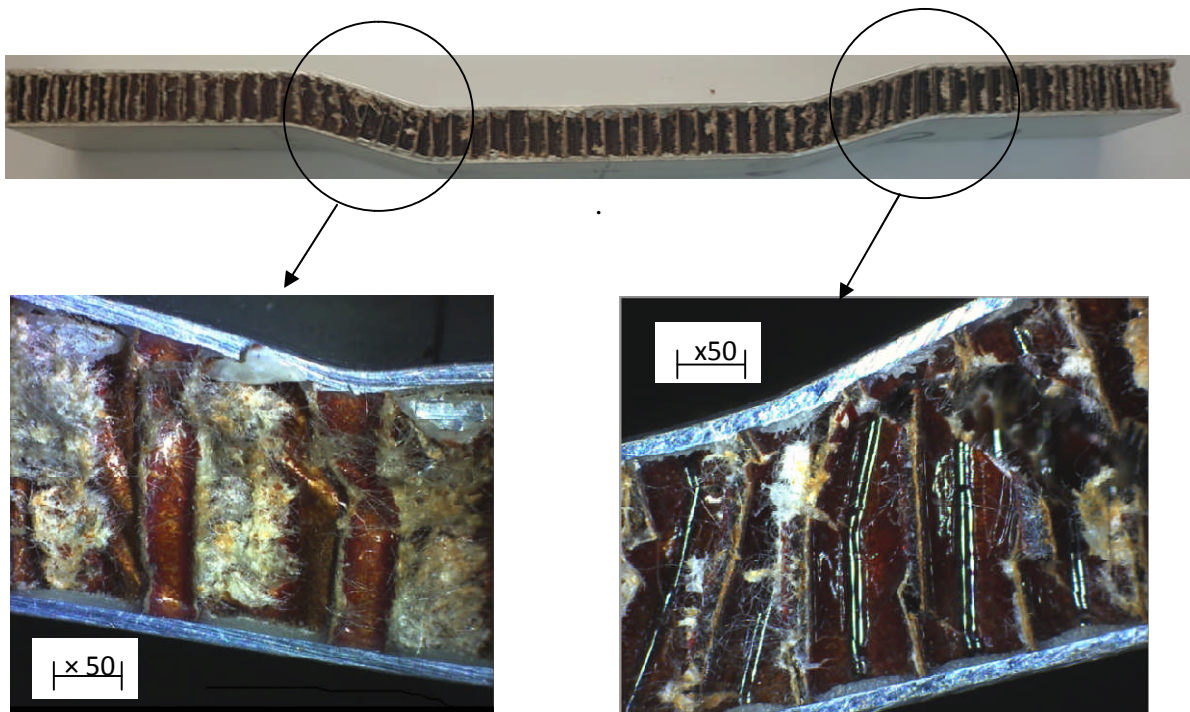


Figure II.13. Indentation, fissure des peaux et cisaillement des parois des cellules.

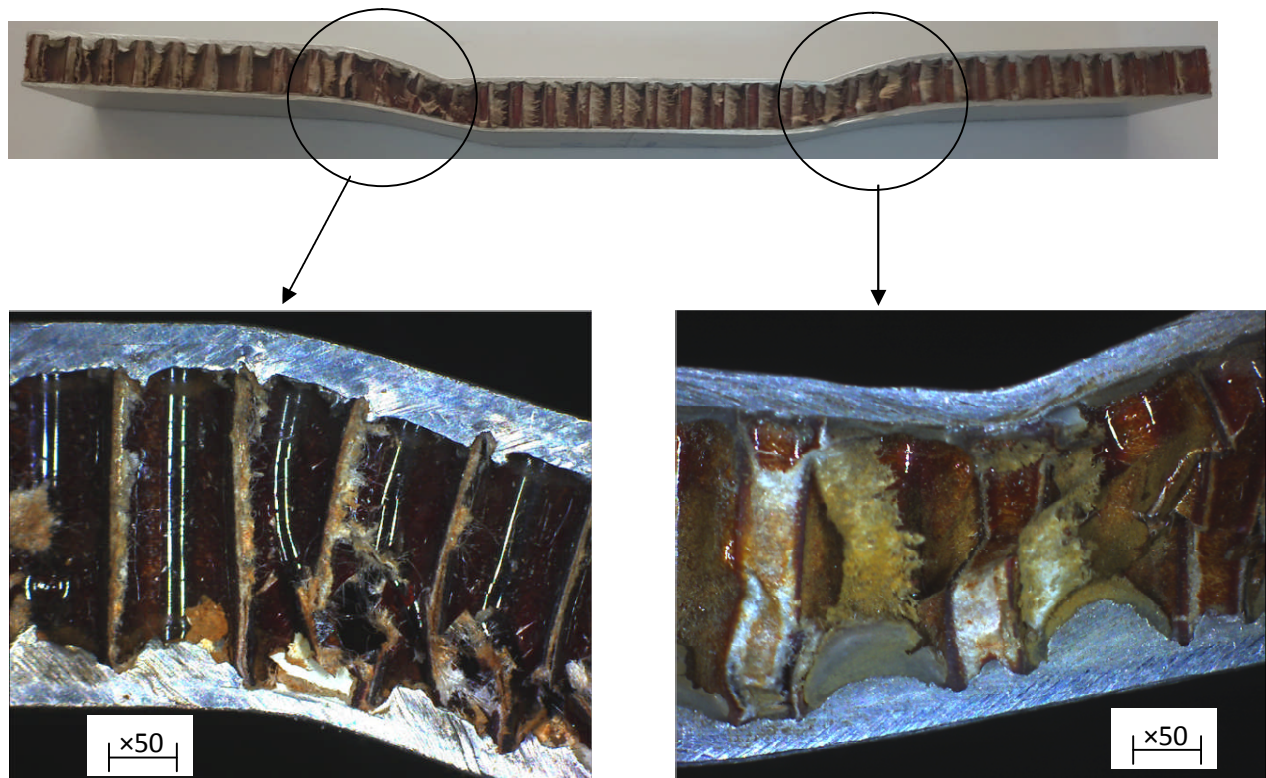


Figure II.14. Indentation des peaux, décollement et cisaillement des parois des cellules.

II.3. 5. Conclusion

- **Comportement mécanique**

On distingue trois zones de déformations:

- une zone linéaire correspondant à une déformation élastique jusqu'à une valeur limite ($\approx 900\text{N}$) correspondant à une flèche $f \approx 1\text{ mm}$ (figure II.12).
- une zone non linéaire correspondant à une déformation plastique jusqu'à la valeur maximale ($\approx 1100\text{N}$) provoquant une flèche $f \approx 2,5\text{ mm}$ (figure II.12).
- une zone non linéaire correspondant à l'endommagement par déformation plastique à allure décroissante jusqu'à la ruine de l'âme sans atteindre une rupture finale des peaux pouvant atteindre un déplacement de 14 mm (figure II.12).

- **Endommagement et observation des faciès**

- une importante indentation des peaux (fig. II.13)
- un flambement des cellules de l'âme engendrant le cisaillement des parois (figure II.13)
- fissuration des peaux (figure II.13).
- décollement de l'âme (figure II.14).

II.4. Essais de flexion trois points en sollicitation cyclique:

Les essais d'endurance sont réalisés pour trois niveaux de chargement avec quatre éprouvettes chacun. Ils sont effectués à déformation (flèche) constante. La force maximale est prise égale à la force limite élastique obtenue lors des essais statiques de flexion (760 daN) pour rester dans le domaine des déformations élastiques.

II.4.1. Conditions d'essais

- Chargement sinusoïdal ondulé (figure II.15).
- Une fréquence de chargement de 5Hz.
- Un rapport $L/h=12$.
- Un rapport de charge fixé à $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{f_{min}}{f_{max}} = 0,2$

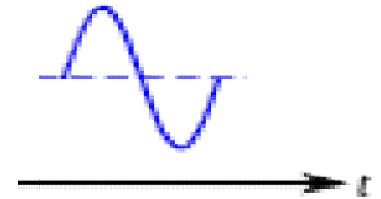


Figure II.15. Contrainte ondulée.

Nous avons opté pour le choix de la contrainte ondulée qui générera une précontrainte empêchant tout déplacement de l'éprouvette lors de son chargement cyclique qui pourrait fausser les résultats escomptés.

II.4.2. Dispositif d'essai

Les essais de fatigue sont réalisés, à l'école nationale d'ingénieurs de Sfax (ENIS) – Tunisie, sur un dispositif « EPSIFLEX » composé d'une machine assurant le mouvement rectiligne alternatif généré par un moteur électrique et transmis par un mécanisme à cames réglables pour sélectionner les valeurs de flèches désirées. Elle est munie d'un capteur de force qui transmet les différentes valeurs des forces à un afficheur et d'un logiciel qui permet de traiter les valeurs obtenues lors des essais et de visualiser les courbes correspondantes (figure II.16).

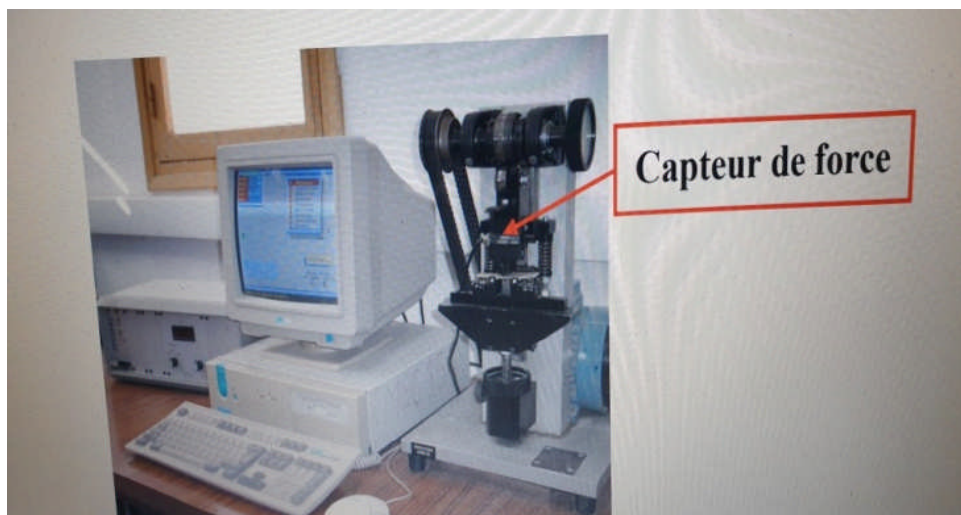


Figure II.16. Dispositif d'essais de fatigue en flexion cyclique 3-points (Machine Epsiflex).

II.4.3. Résultats des essais

II.5.3.1. Courbes de comportement mécanique

➤ Premier niveau de chargement (90%)

Ces quatre essais sont effectués avec une force de chargement initiale F_0 avec: $F_0 = 0,9F_{max} = 0,9 \cdot 760 = 684N$.

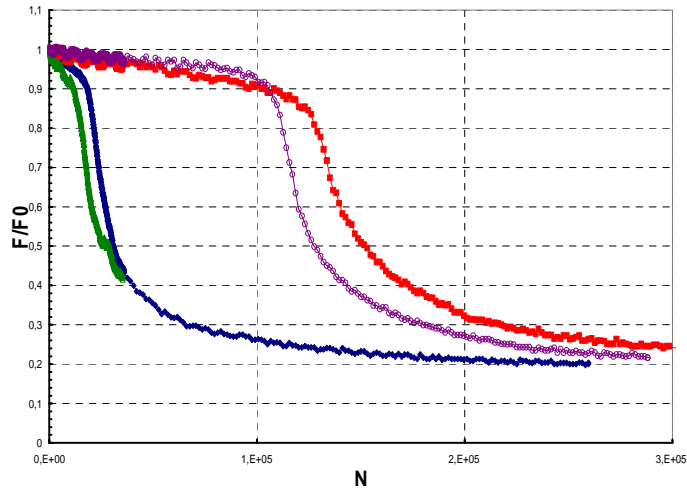


Figure II.17. Courbes de perte de rigidité à 90 % de chargement.

➤ Deuxième niveau de chargement (80%)

Ces quatre essais sont effectués avec une force de chargement initiale F_0 avec: $F_0 = 0,8F_{max} = 0,8 \cdot 760 = 608N$

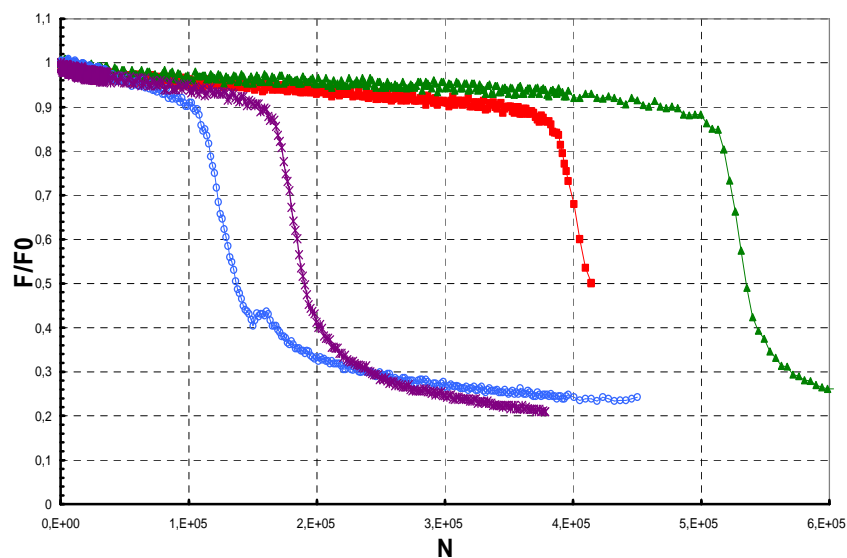


Figure II.18. Courbes de perte de rigidité à 80 % de chargement.

➤ **Troisième niveau de chargement (70%)**

Ces quatre essais sont effectués avec une force de chargement initiale F_0 avec : $F_0 = 0,7F_{max} = 0,7 \cdot 760 = 532N$.

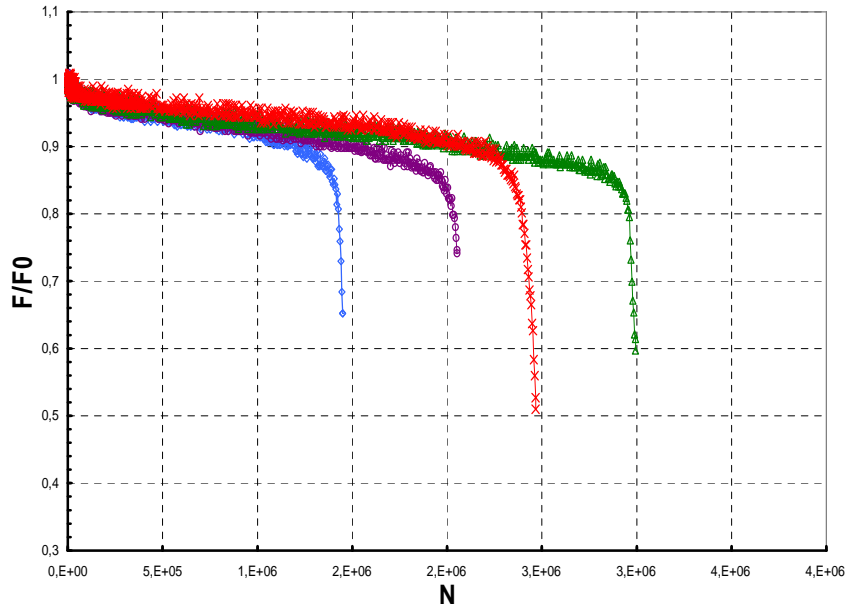


Figure II.19. Courbes de perte de rigidité à 70 % de chargement

II.5.3.2. Courbes de Wöhler

Remarque : les essais sont réalisés à amplitude de déformation constante (ADC) et à fréquence d’excitation constante (5 Hz).

➤ **Critère de fin d’essai à 90%**

Tableau II.2. Résultats pour le critère de fin d’essai à 90% (N_{10}) pour $f = 5$ Hz.

		R= 0,2	Valeur 1	Valeur 2	Valeur 3	Valeur 4
90% chargement	N		11750	18250	96050	105050
	Log N		9,3716085	9,81192035	11,472624	11,562191
	F/F ₀		0,9	0,9	0,9	0,9
	Amplitude flèche Max (mm)		1,8	1,8	1,8	1,8
	Amplitude contrainte (MPa)					
80% chargement	N		102050	154550	321050	468050
	Log N		11,533218	11,9482729	12,679352	13,0563304
	F/F ₀		0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche Max (mm)		1,57	1,57	1,57	1,57
	Amplitude contrainte (MPa)					
70% chargement	N		1143050	1435550	2007050	2079050
	Log N		13,9492106	14,1770586	14,5121765	14,5474216
	F/F ₀		0,7	0,7	0,7	0,7
	Amplitude flèche Max (mm)		1,375	1,375	1,375	1,375

➤ Critère de fin d'essai à 75%

Tableau II.3. Résultats pour le critère de fin d'essai à 75% (N_{25}) pour $f = 5$ Hz .

R=0, 2		Valeur 1	Valeur 2	Valeur 3	Valeur 4
90% chargement	N	16650	22550	114050	132050
	Log N	9,72016549	10,0234903	11,6443922	11,7909359
	F/F ₀	0,9	0,9	0,9	0,9
	Amplitude flèche Max (mm)	1,8	1,8	1,8	1,8
	Amplitude contrainte (MPa)				
80% chargement	N	120050	175550	394550	522050
	Log N	11,695663	12,0756791	12,8855011	13,1655186
	F/F ₀	0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche Max (mm)	1,57	1,57	1,57	1,57
	Amplitude contrainte (MPa)				
70% chargement	N	1435550	2047550	2416550	2965550
	Log N	14,1770586	14,5321545	14,6978514	14,9025730
	F/F ₀	0,7	0,7	0,7	0,7
	Amplitude flèche Max (mm)	1,375	1,375	1,375	1,375

➤ Courbe de Wöhler pour le critère de fin d'essai à 90% pour $f = 5$ Hz

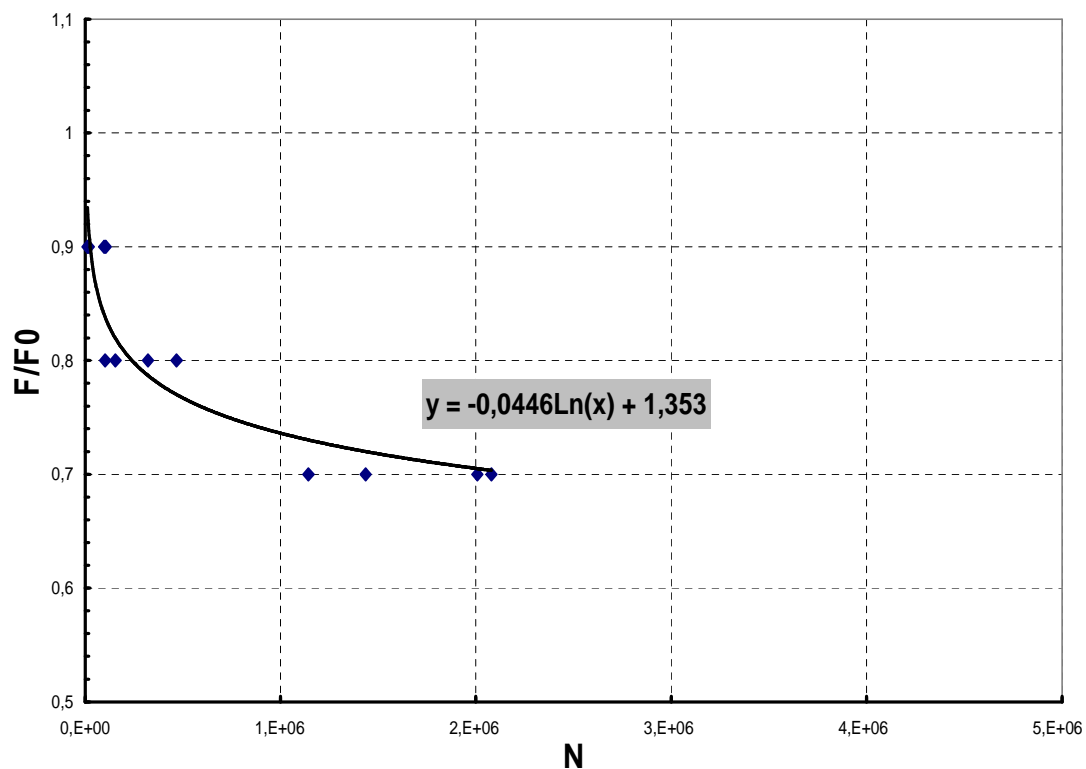


Figure II.20. Courbe de Wöhler à 90% pour $f = 5$ Hz .

➤ **Courbe de Wöhler pour le critère de fin d'essai à 75%**

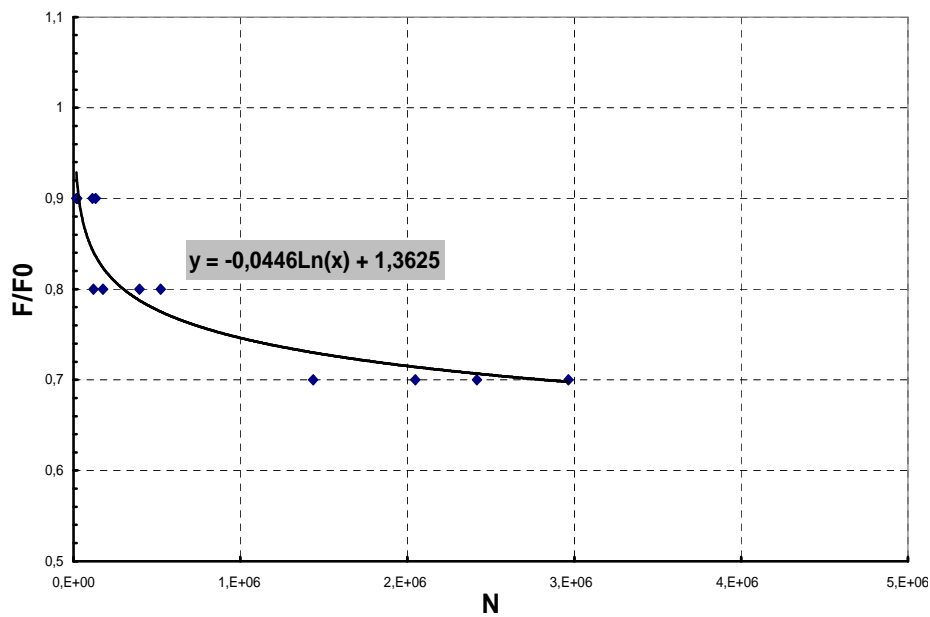


Figure II.21. Courbe de Wöhler à 75% pour $f = 5$ Hz.

II.5.3.3. Endommagement du matériau et observation des faciès



Figure II.22. Légère indentation des peaux.



Figure II.23. Cisaillement des parois de l'âme

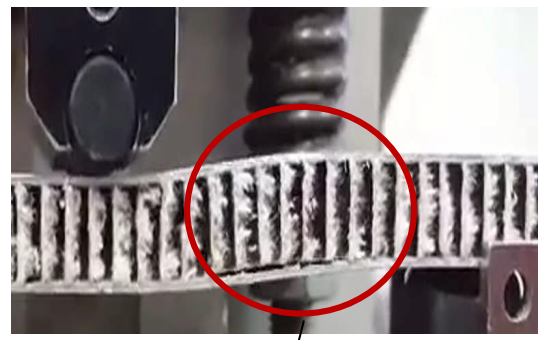


Figure II.24. Décollement de l'âme

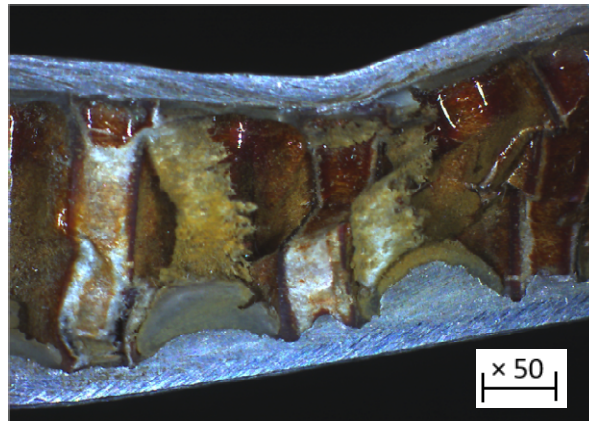


Figure II.25. Répartition irrégulière de la colle entre l'âme et les peaux.

II.4.4. Conclusion

Les courbes de perte de rigidité en flexion 3 points lors de la sollicitation cyclique montrent que la ruine du sandwich est d'autant plus rapide que le niveau de chargement est élevé (figure II.17, figure II.18 et figure II.19).

Des dispersions, dont l'importance est d'autant plus significative que le niveau de chargement est plus élevé, sont observées. Elles sont dues, d'une part aux défauts de l'obtention du matériau, très particulièrement, l'assemblage des alvéoles de l'âme et l'irrégularité de l'épaisseur de la colle adhésive (figure II.25) et d'autre part aux positions des plans de coupe des éprouvettes relativement à la géométrie des cellules hexagonales.

Les courbes de Wöhler montrent, quant à elles, que la limite d'endurance du matériau étudié est atteinte plus rapidement pour un critère de fin d'essai 75% (pour N_{25}) que pour le critère 90% (pour N_{10}) (figures II.20 et II.21).

Pour ce qui est de l'endommagement, on constate :

- une légère indentation des peaux suite à la déformation plastique (figure II.22)
- un cisaillement des parois des cellules causant leurs ruines (figure II.23)
- un décollement de l'âme (figure II.24).

II.5. Influence de la fréquence de chargement sur le comportement mécanique en fatigue du sandwich à âme en nids d'abeilles.

Ces essais sont réalisés afin d'illustrer l'influence de la fréquence de chargement sur le comportement mécanique du sandwich en nids d'abeilles en flexion cyclique 3 points. Pour cela, la fréquence de chargement a été variée pour le niveau intermédiaire (80%) en la fixant respectivement à 5 Hz, 7.5 Hz et à 10 Hz. Quatre éprouvettes sont utilisées pour chaque fréquence.

II.5.1. Résultats des essais

II.5.1.1. Courbes de comportement mécanique

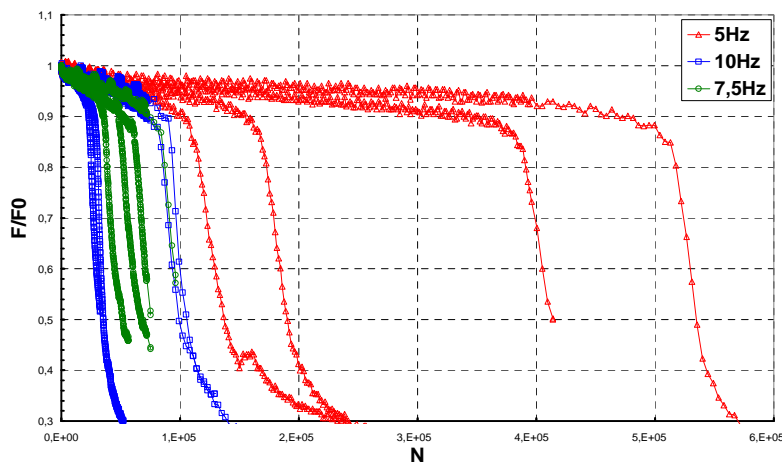


Figure II.26. Courbes de perte de rigidité pour trois fréquences différentes.

II.5.1.2. Courbes de Wöhler

➤ Critère de fin d'essai à 90%(N₁₀)

Tableau II.4. Résultats pour le critère de fin d'essai à 90% pour f = 5 Hz; 7,5 Hz; 10 Hz

f=5Hz

R=0, 2

80% chargement	N	102050	154550	321050	468050
	Log N	11,53321817	11,94827295	12,67935215	13,05633041
	F/F0	0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche MAX (mm)	1,57	1,57	1,57	1,57

f=7,5Hz

80% chargement	N	35100	48200	51400	72100
	Log N	10,4659564	10,7831143	10,8473935	11,1858093
	F/F0	0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche MAX (mm)	1,57	1,57	1,57	1,57

f=10Hz

80% chargement	N	23100	27600	70700	84100
	LogN	10,0475879	10,2255711	11,1662009	11,3397618
	F/F0	0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche MAX (mm)	1,57	1,57	1,57	1,57

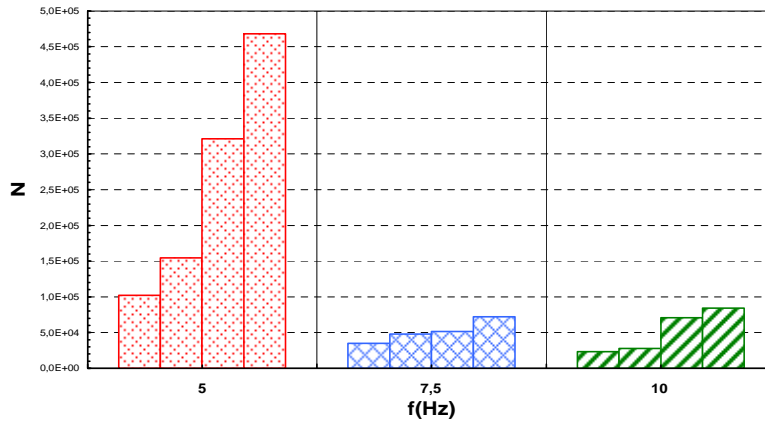


Figure II.27. Histogrammes des nombres de cycles pour un critère de fin d'essai 90% (N_{10}).

➤ Critère de fin d'essai à 75% (N_{25})

Tableau II.5. Résultats pour le critère de fin d'essai à 75% pour $f = 5 \text{ Hz}; 7,5 \text{ Hz}; 10 \text{ Hz}$

f=5Hz

R=0, 2

80% chargement	N	120050	175550	394550	522050
	Log N	11,6956636	12,07567918	12,88550115	13,16551865
	F/F0	0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche MAX (mm)	1,57	1,57	1,57	1,57

f=7,5Hz

80% chargement	N	39700	54000	65800	90100
	Log N	10,5891065	10,8967393	11,0943751	11,4086754
	F/F0	0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche MAX (mm)	1,57	1,57	1,57	1,57

f=10Hz

80% chargement	N	26000	31300	87100	97100
	Log N	10,1658518	10,3513734	11,3748122	11,4834967
	F/F0	0,8	0,8	0,8	0,8
	Amplitude flèche MAX (mm)	1,57	1,57	1,57	1,57

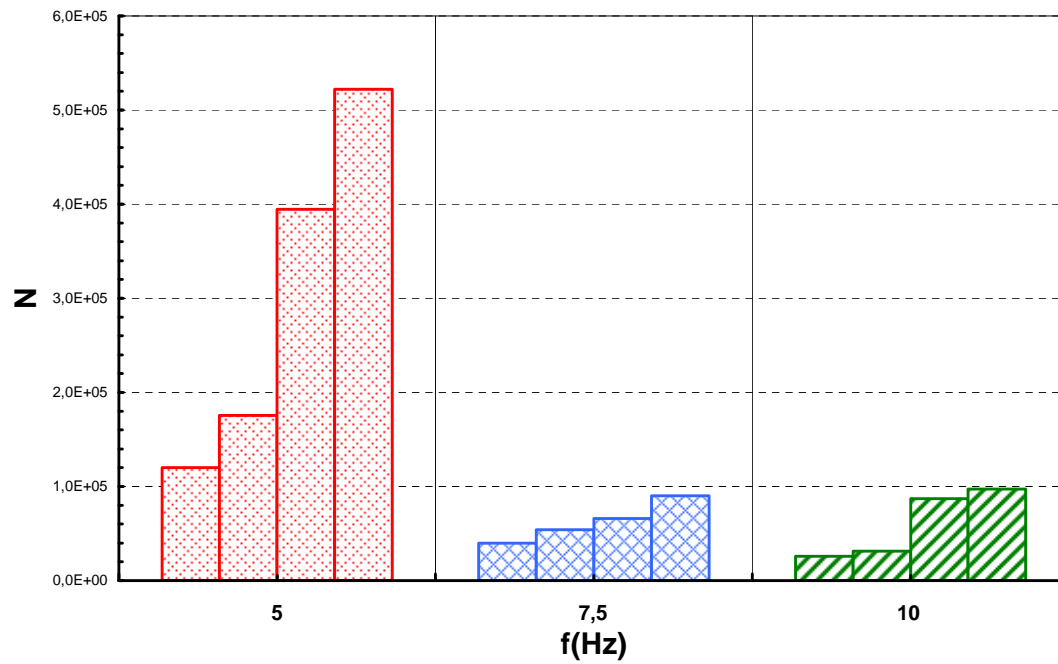


Figure II.28. Histogrammes des nombres de cycles pour un critère de fin d'essai à 75% (N_{25}).

II.5.1.3. Endommagements



Figure II.29. Légère indentation des peaux.

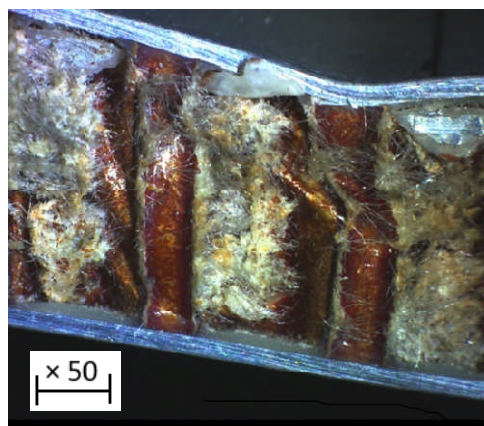


Figure II.30. Fissure des peaux pour une fréquence de 10 Hz.

III.5.2. Conclusion

Nous constatons que la variation de la fréquence des sollicitations, en flexion 3 points, influe considérablement sur le comportement mécanique en fatigue du composite sandwich à âme en nids d'abeilles (figure II.26).

En effet, on remarque que les dispersions sont visiblement très importantes pour les faibles fréquences (5 Hz) et qu'elles se réduisent de plus en plus pour des valeurs plus élevées (7,5 Hz et 10 Hz) (figure II.26).

D'autre part, les critères de fin d'essai sont atteints, beaucoup plus vite, pour des fréquences plus élevées (figure II.26), à savoir :

- pour N_{10} :
 - à un nombre de cycles N de 10^5 à $6,5 \cdot 10^5$ pour une fréquence de 5 Hz.
 - à N allant de $4 \cdot 10^4$ à $8 \cdot 10^4$ pour une fréquence de 7,5 Hz.
 - à N allant de $2 \cdot 10^4$ à $9 \cdot 10^4$ pour une fréquence de 10 Hz.

- pour N_{25} :
 - à un nombre de cycles N de $1,2 \cdot 10^5$ à $5,2 \cdot 10^5$ pour une fréquence de 5 Hz.
 - à N allant de $4 \cdot 10^4$ à $9 \cdot 10^4$ pour une fréquence de 7,5 Hz.
 - à N allant de $2 \cdot 10^4$ à $9,8 \cdot 10^4$ pour une fréquence de 10 Hz.

Quant à l'endommagement, les mêmes types de ruine observés lors des essais de fatigue à une fréquence de sollicitation de 5 Hz sont remarqués, à une seule différence près, pour les deux autres fréquences (7,5 Hz et 10 Hz), à savoir :

- une légère indentation des peaux suite à la déformation plastique pour les faibles fréquences (5 Hz et 7,5 Hz (figure II.29)
- un flambement des cellules causant leurs cisaillements (figure II.23)
- un décollement de l'âme (figure II.24).
- néanmoins, une **fissure transversale** des peaux est apparue, pour la fréquence de chargement de 10 Hz (figure II.30).

Chapitre III

Homogénéisation et simulation numérique

III.1. Introduction

Les structures légères en nids d'abeilles (nida) ont été amplement développées à partir de divers matériaux, tels les feuilles d'aluminium, le kevlar ou le papier, le caoutchouc...

Ce type de matériaux cellulaires permet d'assurer un équilibre pratique entre la force, la rigidité et le poids, en lui permettant son utilisation dans des domaines divers.

Nonobstant leur propre importance en tant que matériaux structuraux, les nids d'abeilles ont été intensivement étudiés pour leurs propriétés mécaniques, ils représentent un exemple typique d'un matériau cellulaire.

Les nids d'abeilles sont fortement anisotropes avec un rapport rigidité/ résistance significativement plus grand en compression hors plan, comparé à la compression dans le plan.

Un panneau sandwich en nids d'abeilles est constitué de deux couches relativement minces et rigides, représentant les « peaux », collées symétriquement à un noyau épais, léger et à parois très minces avec une structure alvéolaire périodiquement répartie.

Principalement, un composite sandwich est une structure à trois couches dont deux peaux (faces) supérieure et inférieure et d'un noyau intermédiaire (âme ou cœur).

Aux interfaces, les peaux et le noyau sont collés (figure III.1).

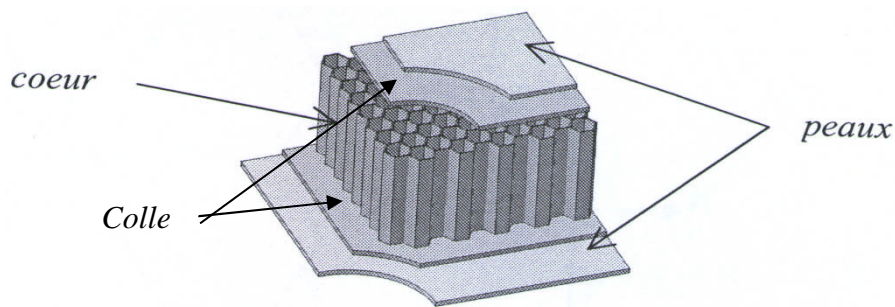


Figure III.1. Structure d'un sandwich à âme alvéolaire en nids d'abeilles.

Le rôle principal des peaux est de supporter les charges dans le plan ; tandis que celui du noyau est de maintenir une distance respectivement constante entre les peaux, assurant de ce fait, une rigidité à la flexion élevée avec un faible poids de la structure. Outre cette tâche fondamentale, le noyau permet la reprise des forces transversales.

Les sandwiches à âme en nids d'abeilles peuvent être l'assemblage de divers matériaux : le plus répandu est celui où les faces sont des stratifiés en plastique renforcés par des fibres de carbone; tandis que le noyau est une structure cellulaire en nids d'abeille, réalisé, lui, à partir de feuilles en aluminium ou en fibre d'aramide.

Exploitant l'avantage de leurs rigidités spécifiques élevées à la flexion, les composites sandwiches sont utilisés fréquemment avec des peaux, de plus en plus minces et des noyaux en nids d'abeilles plutôt épais. Le noyau n'assure pas uniquement le maintien de la distance entre les peaux ; mais, il intervient dans la contribution à l'amélioration de la rigidité globale de la structure toute entière.

Avec le développement des matériaux composites et de la technologie de leurs fabrications, cette structure est appliquée dans divers domaines. Les sandwiches en nids d'abeilles pourraient être optimisés (géométrie, matériaux) globalement et localement.

Un choix important du noyau en nids d'abeilles est disponible. La taille, la forme, l'épaisseur, la topologie et le type de matériaux peuvent être optimisés en tenant compte des interactions locales et des comportements globaux conséquents. Les structures alvéolaires ont vu un énorme développement suite à l'important intérêt qui leur sont accordés, ces derniers temps, par plusieurs chercheurs [46,47,48] dont les travaux ont porté sur les cellules périodiques et non périodiques. L'ouvrage de Gibson et Ashby [47] constitue la première littérature de référence dans ce domaine.

Les propriétés élastiques fondamentales équivalentes ont été établies, pour la première fois, en s'appuyant sur la théorie standard des poutres [47,49]. Masters et Evans ont amélioré, ensuite, ces modèles [49].

La particularité de l'arrangement des trois couches (peaux et noyau) mène intuitivement à la théorie des sandwichs [22, 50,51]. C'est, en même temps, le début et une branche de la théorie actuelle des stratifiés. Les modèles numériques qui traitent des structures sandwichs en nids d'abeilles, comme présentés dans le travail [52], sont, principalement, basés sur le remplacement du noyau en nids d'abeilles par un milieu continu homogène équivalent. Cette approche est imposée par le coût très élevé d'une analyse détaillée en 3-D par éléments finis. Il est à noter que la fiabilité d'une modélisation, avec un milieu continu, dépend, étroitement de l'exactitude des propriétés équivalentes du noyau. On s'intéresse, actuellement, à des recherches détaillées sur des champs locaux tels que le décollement et les divers modes de flambage locaux.

L'application de la théorie des stratifiés sur des panneaux sandwichs en nids d'abeille n'est, cependant, pas aussi réussie que sur les composites microcellulaires stratifiés.

La difficulté réside dans l'acquisition des propriétés homogénéisées des sandwichs en nids d'abeilles ; car les discussions sont toujours ouvertes sur la façon à adapter les modèles numériques existants.

Il faut noter que tous les modèles mathématiques appliqués pour les structures à noyaux en nids d'abeilles ont été établis, à la base, sur des structures cellulaires pures. La présence des effets de peaux a été, rarement, prise en considération.

La théorie d'homogénéisation appliquée aux matériaux composites périodiques, a été adaptée dans le sens de la théorie des plaques hétérogènes depuis les années 70 [53,54].

Ces résultats dépendent, essentiellement, des simplifications adoptées par les acceptations des champs de contraintes d'une théorie correspondante de plaque [55,56,57,58]. Toutes ces approximations reposent sur le rapport des deux petits paramètres de la plaque : l'épaisseur caractéristique et la périodicité caractéristique. L'approche conventionnelle ne résout pas les problèmes de l'hétérogénéité du noyau et du gradient élevé, conséquence des variations mécaniques à travers l'épaisseur.

L'objectif principal de ce chapitre est le développement numérique pour l'homogénéisation d'une structure sandwich en nids d'abeilles. Le résultat analytique sera comparé à la simulation numérique. La première partie de ce chapitre est consacré à l'étude bibliographique. Les divers modèles existants seront analysés dans le but de comprendre l'utilité de chaque modèle, mais surtout ses limites. Cette étape importante nous permettra de choisir, de développer et d'adapter la technique qui convient le mieux aux structures sandwichs en nids d'abeilles.

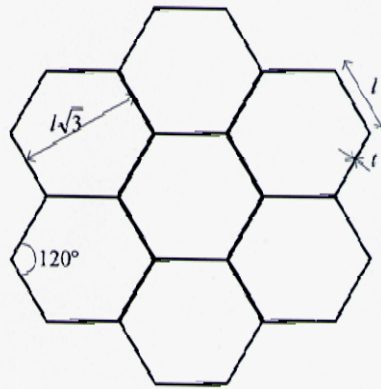


Figure III.2. Structure en nids d'abeilles régulière.

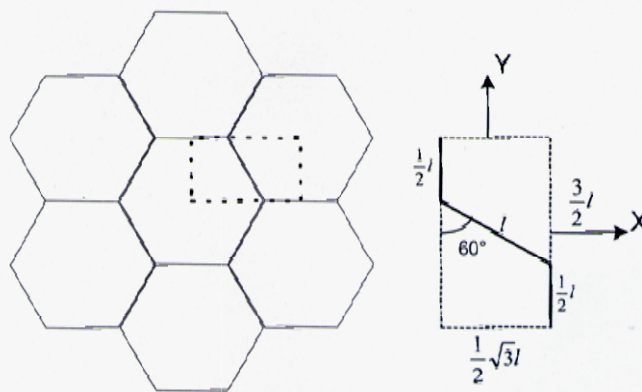


Figure III.3. Représentation de la cellule élémentaire.

III.2. Concept d'homogénéisation

Le concept d'homogénéisation consiste à remplacer un matériau réel hétérogène par un matériau fictif homogène avec des propriétés macroscopiques équivalentes. Ces propriétés peuvent être utilisées dans des modèles de calcul où les effets locaux, phénomènes qui interviennent à l'échelle microstructurale, peuvent être négligés.

Les procédures d'homogénéisation peuvent être appliquées pour déterminer une large gamme de propriétés physiques qui peuvent être mécaniques, électriques, acoustiques, thermiques et autres...

Dans sa forme la plus élémentaire, une procédure d'homogénéisation consiste en une série d'expériences (de simulations) réalisées sur le plus petit volume élémentaire représentatif (V.E.R) et d'un modèle mathématique permettant la détermination des propriétés du matériau homogène équivalent au matériau réel qui, lui, est hétérogène.

Dans le cas de notre sandwich en nids d'abeilles qui a une structure répétitive, le VER peut être choisi comme étant une cellule unitaire (avec ses plaques de couverture) et le reste de la structure est modélisé à travers l'adoption de conditions aux limites appropriées. Le chargement sur la cellule doit être considéré de telle manière à ce que tous les modes de déformation en question soient pris en compte.

Des restrictions sur le chargement doivent être appliquées de façon à ce que les deux faces opposées de l'alvéole se déforment de la même manière et que le vecteur de traction agissant sur les faces opposées du VER soit le même en module et direction, mais ; de

sens opposé. La première restriction est une condition aux limites périodiques garantissant la continuité d'une cellule par rapport à une cellule voisine, alors que la deuxième condition assure le respect de l'équilibre entre les cellules.

Il va sans dire que la géométrie du VER est compliquée pour permettre une solution analytique du problème posé par les équations de l'élasticité et des conditions aux limites déjà mentionnées. Néanmoins, une procédure numérique peut être appliquée pour résoudre ce problème. La méthode des éléments finis est généralement la plus adaptée à ce contexte. En plus, les données utilisées dans la MEF peuvent être exploitées dans le schéma de calcul des propriétés moyennes du matériau homogène équivalent.

Il existe une multitude de méthodes de calcul des valeurs moyennes des caractéristiques homogènes du matériau. Entre autres, on peut citer l'utilisation de l'énergie interne de déformation en s'assurant que les propriétés mécaniques du matériau homogène peuvent être déterminées de façon à ce que l'énergie emmagasinée soit la même que celle dans le matériau réel non homogène. Une autre méthode serait de calculer la valeur moyenne du champ de contraintes dans la cellule de base et de déterminer les propriétés du matériau homogène permettant de recréer ce même champ de contraintes dans le matériau homogène équivalent.

III.3. Théorie des stratifiés

Le nida est considéré comme un matériau orthotrope. Sa matrice de rigidité ou de souplesse est caractérisée par neuf termes indépendants. La loi de comportement d'un matériau orthotrope s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (III.1)$$

Vu que la matrice est symétrique, il vient :

$$C_{ij} = C_{ji} \Rightarrow \begin{cases} C_{12} = C_{21} \\ C_{23} = C_{32} \\ C_{13} = C_{31} \end{cases}$$

Quant à la matrice de souplesse S d'un matériau orthotrope, elle est de la forme :

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{12}}{E_1} & -\frac{1\mu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{31}}{E_3} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (III.2)$$

Compte tenu de la symétrie de cette matrice, on aboutit à la relation suivante :

$$\frac{\mu_{ij}}{E_i} = \frac{\mu_{ji}}{E_j} \quad (III.3)$$

Ces matrices caractérisent les stratifiés dans le repère fibre – matrice. Afin de trouver les expressions de ces matrices dans un repère faisant un angle θ avec le repère fibre – matrice, il suffit de les multiplier par la matrice de passage.

Pour caractériser le nida, on doit, donc, déterminer les constantes suivantes :

- Les 3 modules d'élasticité E_1, E_2 et E_3 .
- Les 6 coefficients de Poisson : $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}, \mu_{23}, \mu_{31}$ et μ_{32}
- Les 6 modules de cisaillement $G_{12}, G_{13}, G_{21}, G_{23}, G_{31}$ et G_{32} .

III.4. Cinématique d'un panneau en nida (cœur)

L'intérêt de partie de l'homogénéisation du nida indépendamment des peaux, en remplaçant celui-ci, de géométrie complexe, par un matériau homogène de propriétés mécaniques équivalentes, aussi bien dans les modèles numériques que dans les modèles analytiques.

Le nid d'abeilles est assimilé à un matériau orthotrope. Son homogénéisation passe, obligatoirement par la détermination des modules de l'ingénieur qui sont :

Les modules d'élasticité longitudinale, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement.

La connaissance du comportement mécanique des âmes, en particulier en cisaillement, est indispensable lors de la phase de conception des structures sandwiches en nids d'abeilles. Néanmoins, dans le cas général, les modules de cisaillement peuvent, seulement, être bornés avec ce type d'approche [59].

III.4.1. Géométrie et notations

Il est à noter que suivant les littératures, les dénominations et indices peuvent varier. La géométrie, ainsi que les notations dans la suite du chapitre seront détaillées.

- X_1 est la direction de traction et E_1 est le module d'élasticité dans la direction de traction X_1
- Les coefficients de Poisson : μ_{12} où X_1 est la direction de traction et X_2 est la direction de contraction.
- X_1 est la direction de traction et G_{12} est le module de cisaillement dans le plan (X_1, X_2) .

Les modules sont calculés dans le repère (X_1, X_2, X_3) , Gibson et Ashby [47].

Les résultats obtenus par Ashby seront donnés dans ce repère (figure III.4)

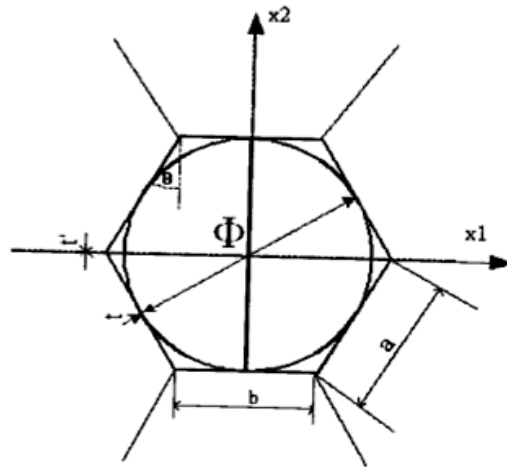


Figure III.4: Géométrie d'une cellule en nid d'abeilles en vue de dessus.

Le nid d'abeilles est, essentiellement, caractérisé par un angle de cellule et quatre paramètres définis à partir des caractéristiques donnés dans le tableau III.1.

Tableau III.1. Géométrie d'une cellule en nida.

paramètres	définitions
θ	angle de cellule
Φ	diamètre de cellule
b	longueur de la paroi centrale
a	longueur de la paroi inclinée
t'	épaisseur de la paroi centrale
t	épaisseur de la paroi inclinée
h	hauteur du nid d'abeilles

III.4.2. Principales caractéristiques élastiques du nid d'abeilles

Le nid d'abeille est assimilé à un matériau orthotrope que l'on ne peut caractériser que si l'on connaît les modules de l'ingénieur. La détermination de ces caractéristiques peut être effectuée par deux méthodes différentes :

- la modélisation analytique et
- la modélisation numérique

III.4.3. Approches existantes dans la littérature

Trois constantes élastiques caractérisent, principalement, le comportement du nid d'abeilles : le module d'élasticité E_3 dans la direction perpendiculaire au plan et les deux modules transverses de cisaillement G_{13} et G_{23} (hors plan). Les autres modules sont, généralement, faibles. De plus, il s'avère que les nids d'abeilles n'ont pas de coefficient de Poisson connus [60].

- Une première solution proposée par [61] en 1994 est de prendre les deux modules d'élasticité dans le plan (X_1, X_2), à savoir E_1, E_2 , égaux à un pour cent du module de la troisième direction (E_3), le module de cisaillement égal à un pour cent de la moyenne de G_{13} et G_{23} et tous les coefficients de Poisson égaux à 0,1.
- Une deuxième solution proposée par Chamis [62] est de réaliser un modèle éléments finis tridimensionnel détaillé de la structure nids d'abeilles dans l'objectif de déterminer les propriétés équivalentes du cœur avec des chargements spécifiques.
- La troisième solution proposée par Grédiac [59] est d'effectuer la même analyse que celle proposée par Chamis [62], mais sur une seule cellule de base et d'en déduire les modules transverses de cisaillement équivalents.
- Une quatrième solution est proposée par Gibson [47] : elle s'appuie sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients du nida en fonction des paramètres géométriques et mécaniques.

III.5. Approches analytiques

III.5.1. Introduction

La modélisation analytique est basée, essentiellement, sur des modèles mathématiques. Elle s'appuie, fondamentalement, vu la complexité du problème, sur des hypothèses simplificatrices.

Cette approche est intéressante, à plus d'un titre, car elle permet de montrer le rôle de chaque paramètre de conception (a, b, h, t). L'utilisation du modèle Gibson [47] est très répandu dans l'industrie.

III.5.2. Modèle de Gibson

Comme indiqué plus haut, le modèle de Gibson s'appuie sur les équations d'élasticité pour la détermination des principaux modules et coefficients du nida en fonction de leurs paramètres géométriques. Les propriétés sont considérées dans le plan (X_1, X_2) et hors plan.

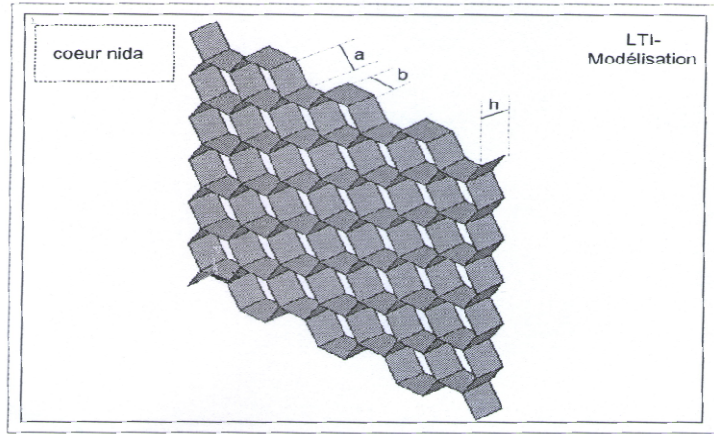


Figure III.5. Perspective d'une structure en nids d'abeilles régulières.

III.5.3. Propriétés dans le plan

Gibson a supposé, par hypothèse, que les déplacements sont uniquement dus à la flexion élastique des parois des cellules et que les effets de compression et de traction sont négligeables. Les propriétés visées sont: E_1 , E_2 , G_{12} , et les coefficients de Poisson μ_{12} et μ_{21} .

III.5.4. Modules E_1 , E_2

Les modules d'élasticité longitudinaux sont calculés en exerçant, respectivement, une pression suivant X_1 et sur X_2 qui générera un effort P suivant l'axe X_1 et, par conséquent, un moment [47].

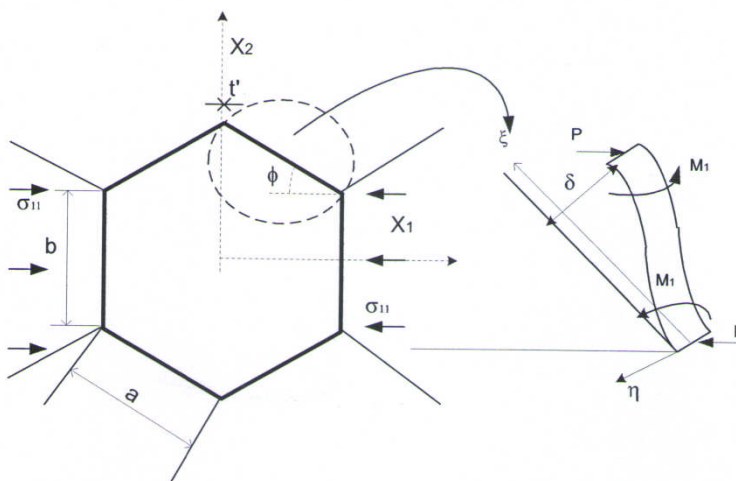


Figure III.6. Déformation des parois des cellules en flexion [47].

III.5.5. Module de cisaillement dans le plan

Le modèle de cisaillement dans le plan est déterminé à partir du schéma de la figure III.7. Les points A, B, C n'ont aucun mouvement relatif en exerçant un état de cisaillement sur le nida. En raison de la symétrie, la déviation u_s est uniquement due à la flexion et à la rotation de la paroi (rotation d'angle φ) autour de B. Les propriétés dans le plan sont très importantes dans la détermination des caractéristiques mécaniques des plaques sandwiches en nids d'abeilles.

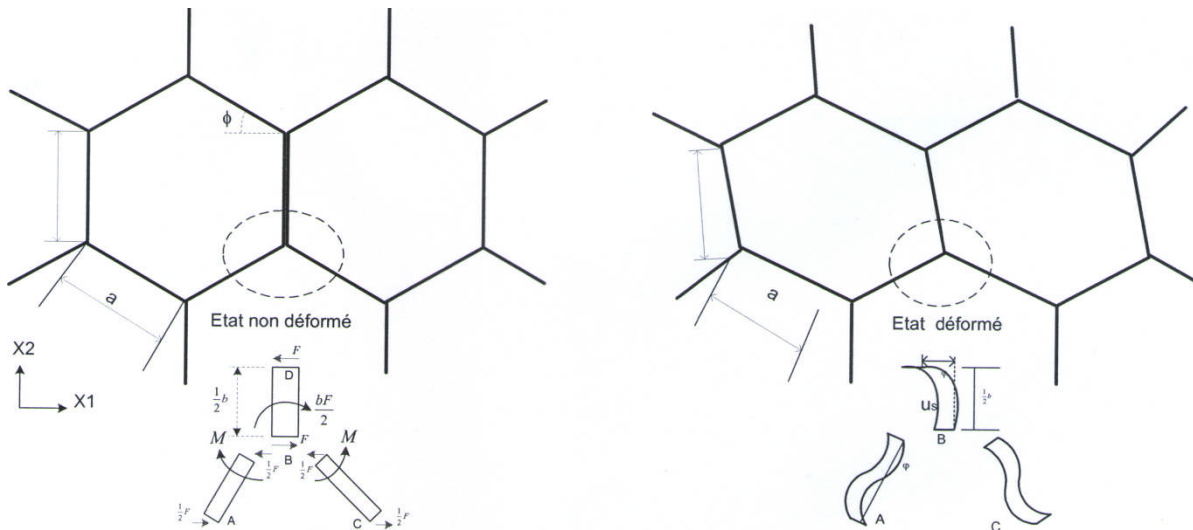


Figure III.7. Déformation en flexion et rotation des parois des cellules [47].

III.5.6. Module d'élasticité longitudinal E_3

Le module d'élasticité longitudinal E_3 suivant la direction X_3 est défini comme étant le produit du module de la matière constituant la paroi par le rapport de la section de la cellule et de la surface totale de l'hexagone [47].

III.5.7. Coefficients de Poisson

Les coefficients de Poisson suivant la direction verticale (μ_{31}, μ_{32}) sont supposés égaux au coefficient de Poisson du matériau du feuillard constituant le nid d'abeilles. Les autres coefficients sont déterminés grâce aux relations de réciprocité :

$$(E_1\mu_{31} = E_3\mu_{13}) \text{ et } (E_2\mu_{32} = E_2\mu_{23}).$$

III.5.8. Modules de cisaillement transverses

Les nids d'abeilles sont une répétition de parois régulièrement disposées dans l'espace. Son comportement au cisaillement transverse dépend de deux modules G_{13} et G_{23} . Les faces supérieure et inférieure du panneau sont soumises à un déplacement dans une direction quelconque perpendiculairement à X_3 , avec un champ de cisaillement fortement hétérogène au sein de la paroi [59]. Les sections supérieure et inférieure de chaque paroi ont tendance à tourner, néanmoins, ce mouvement est contrarié par la

présence des peaux. Le modèle proposé par Gibson ne permet pas de déterminer les valeurs de ces modules de cisaillement.

Par une approche énergétique avec, successivement, un champ de cisaillement pur statiquement admissible et un champ de glissement homogène cinématiquement admissible,[64] a proposé des bornes pour le module de cisaillement transverse. La direction X_2 constitue un cas particulier important pour lequel le cisaillement est justement nul dans les parois centrales et constant dans les parois inclinées. Dans ce cas, les bornes sont identiques et égales à la valeur du module dans le plan (X_2, X_3) , par contre, les bornes sont distinctes dans le plan (X_1, X_3) .

La tâche pour déterminer les modules de cisaillement est difficile ; la distribution des contraintes est complexe dans ce cas de figure. Les faces sur lesquelles on applique un cisaillement ne sont plus planes après déformation. On peut, cependant, utiliser des méthodes énergétiques pour borner ces modules. Cette approche initiée par Kelsey [64] s'est développée avec les approches micro-macro.

Rappelons les théorèmes des bornes :

- Borne supérieure : elle est déterminée en utilisant le principe du travail maximal. Il indique que l'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de déplacement virtuel compatible avec les conditions aux limites est supérieure à l'énergie utilisée par le champ de déplacement réel.
- Borne inférieure : l'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de contraintes statiquement admissible est inférieure à l'énergie de déformation obtenue par un champ de contraintes réelles.

Le principe des bornes est basé sur le concept de l'énergie minimale.

III.6. Récapitulatif

Tableau III.2. Paramètres mécaniques et géométriques d'une cellule.

Paramètres	Définitions
$G_o = 130 \text{ MPa}$	module de cisaillement
$[\tau_c] = 2,4 \text{ MPa}$	Résistance au cisaillement
$d = 148 \text{ Kg/m}^3$	densité
$\theta = 30^\circ$	angle de cellule
$\varnothing = 6,4 \text{ mm}$	diamètre de cellule
$a = 3,695 \text{ mm}$	longueur de la paroi centrale
$b = 3,695 \text{ mm}$	longueur de la paroi inclinée
$t' = 360 \text{ mm}$	épaisseur de la paroi centrale
$t = 175 \text{ mm}$	épaisseur de la paroi inclinée
$h = 8 \text{ mm}$	hauteur du nid d'abeilles

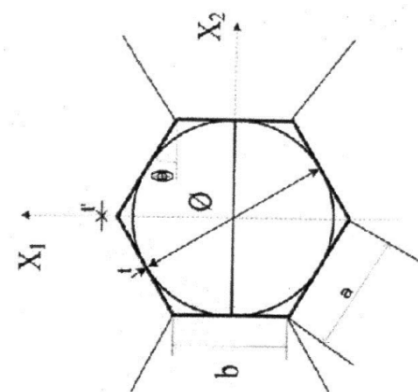


Tableau III.3. Tableau des modules de Gibson.

Modules	Modules de Gibson
Module d'élasticité dans la direction X1	$E_1 = E_o \left(\frac{t}{a}\right)^3 \frac{(b/a + \sin\theta)}{\cos^3\theta}$
Module de Young dans la direction X2	$E_1 = E_o \left(\frac{t}{a}\right)^3 \frac{\cos\theta}{(b/a + \sin\theta)}$
Module de cisaillement dans le plan (X1-X2)	$G_{12} = E_o \left(\frac{t}{a}\right)^3 \frac{(b/a + \sin\theta)}{(b/a)^2(1 + 2b/a)\cos\theta}$
Coefficient de Poisson dans le plan (X1-X2)	$\nu_{12} = \frac{(b/a + \sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}$
Coefficient de Poisson dans le plan (X2-X1)	$\nu_{21} = \frac{\cos^2\theta}{(b/a + \sin\theta)\sin\theta}$
Module de Young dans la direction X3	$E_3 = E_o \left(\frac{t}{a}\right) \frac{(b/a + 2)}{2(b/a + \sin\theta)\cos\theta}$
Cisaillement transverse dans le plan (X2-X3)	$G_{23} = G_o \left(\frac{t}{a}\right) \frac{\cos\theta}{(b/a + \sin\theta)}$
Cisaillement transverse dans le plan (X1-X3)	$G_{13} \leq G_o \left(\frac{t}{a}\right) \frac{(b/a + \sin^2\theta)}{(b/a + \sin\theta)\cos\theta}$
	$G_{13} \geq G_o \left(\frac{t}{a}\right) \frac{(b/a + \sin\theta)}{(b/a + 1)\cos\theta}$
Coefficients de Poisson	$\nu_{32} = \nu_{31} = \nu$ (matériau solide) $\nu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31} \quad ; \quad \nu_{23} = \frac{E_2}{E_3} \nu_{32}$

III.7. Conclusion

Les modèles analytiques présentés ci-haut sont d'un grand intérêt dès qu'il s'agit d'apprécier l'influence des paramètres géométriques et mécaniques. Cependant, pour les paramètres de cisaillement, ils ne donnent que des indications sur les bornes.

Dans le modèle de Gibson, le seul processus de déformation pris en compte est la flexion des parois des cellules. Toutefois, la flexion n'est pas la seule sollicitation provoquant des déformations ; d'autres modes de déformation (élongation et rotation) interviennent dans la cinématique des structures en nids d'abeilles. Le processus de rotation peut être envisagé dans le cas de parois rigides et que le déplacement prend naissance au niveau des jonctions entre parois. Par contre, le déplacement par élongation intervient pour des chargements dans le plan du panneau [48].

La combinaison des trois modes de déplacement permet d'obtenir une forme générale de l'expression des modules de l'ingénieur. Cette approche suppose, à priori, que le principe de superposition est applicable (cas linéaire).

III.8. Simulation numérique des sandwichs en flexion 3 points

III.8.1. Introduction

Devant la difficulté de mener à bien certains travaux expérimentaux pour des raisons surtout de lourdeur de moyens d'expériences ou de complexité de réalisation, voire même d'impossibilité, il serait plus judicieux de s'orienter vers les méthodes numériques lesquelles restent, après vérification, très efficaces.

L'étude numérique a pour but le développement de modèles fiables et prédictifs pour la simulation numérique du comportement des structures. Ces modèles numériques permettent de vérifier les résultats obtenus expérimentalement.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux calculs numériques et de structures du matériau étudié soumis à la flexion 3 points statique.

La simulation numérique a été réalisée en utilisant le calcul de structures par éléments finis sous le code ABAQUS. Les résultats sont présentés en termes numériques et graphiques relatifs à la flèche au centre du sandwich, aux contraintes normales correspondantes en ayant, au préalable, homogénéisé le composite sandwich afin d'obtenir un modèle proche du matériau réel.

L'étude de la flexion statique 3 points a été effectuée en 3D (figure III.10), en utilisant le code ABAQUS. La modélisation par éléments finis du sandwich à âme en nid d'abeilles a été réalisée en considérant l'âme comme une couche homogène et isotrope de 8 mm d'épaisseur. L'interface entre les peaux et l'âme du composite sandwich est modélisée en utilisant des éléments cohésifs disponibles dans ABAQUS.

Pour simuler les conditions d'essai, le spécimen est soumis à une charge verticale croissante. L'étude a été effectuée sur un élément quadratique linéaire à quatre nœuds et six degrés de liberté.

III.8.2. Conditions aux limites

- **au niveau des appuis :**
fixation de la translation U_z ,
- **au niveau du plan de symétrie :**
fixation des translations U_x , U_y .

Les conditions aux limites sont modélisées en appliquant les définitions relatives aux torseurs cinématiques correspondants aux zones de contact de la plaque avec les deux appuis. La charge linéaire est appliquée au milieu de l'éprouvette (figure III.8).

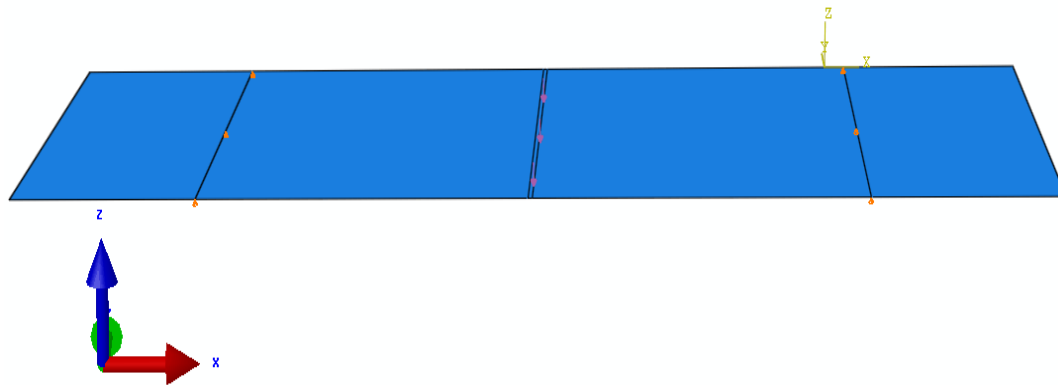


Fig.III.8. Conditions aux limites.

III.8.3. Calcul en structures par élément finis du matériau étudié sous ABAQUS

III.8.3.1. Etat et disposition géométrique du composite sandwich à âme en nid d'abeilles

Dans notre étude, pour modéliser le composite sandwich à âme en nid d'abeilles, par le calcul de structure sous le code ABAQUS, les dimensions des éprouvettes sont conservées telles quelles (200 x 25 x 10) mm³.

Dans le module PART nous avons créé les objets géométriques nécessaires à la définition géométrique de notre problème en les dessinant dans ABAQUS CAE.

La figure III.9 illustre la modélisation éclatée de l'éprouvette avec poinçon et pannes et la figure III.10 montre le modèle de leur assemblage.

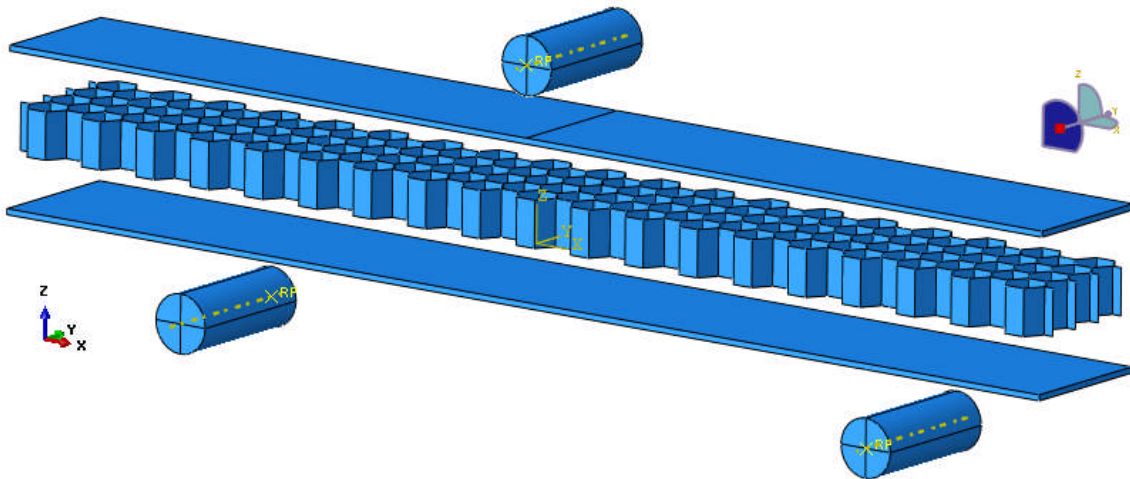


Figure III.9. Modélisation éclatée de l'éprouvette dans le module Part.

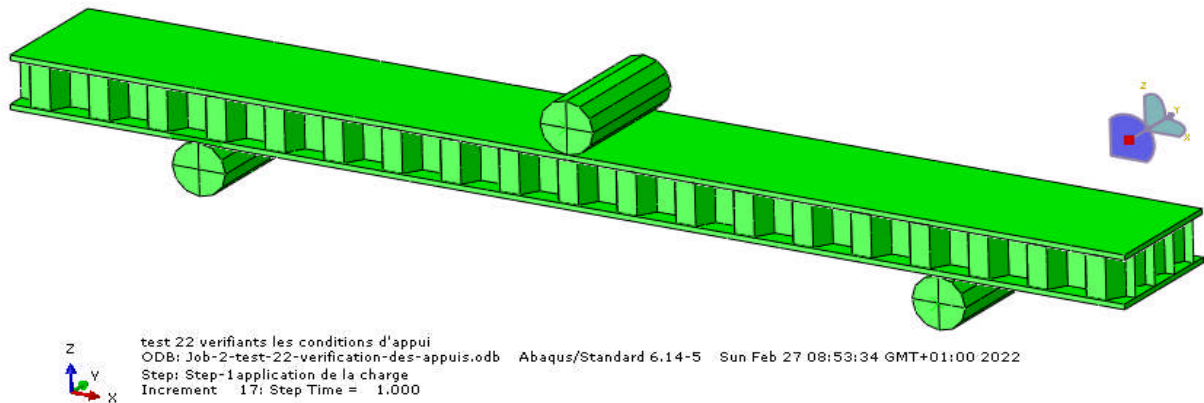


Figure III.10. Assemblage des éléments du modèle (éprouvette, poinçon et appuis).

III.8.3.2. Maillage

La discrétisation du panneau (peaux + âme) est effectuée par des éléments de type 'brique' à 8 nœuds linéaires à intégration réduite. La convergence du maillage est acquise à 1155 éléments du type C3D8R et un nombre de nœuds de 1440, répartis en 70 éléments suivant X et 8 éléments suivant Y.

La figure III.11 représente la discrétisation de la plaque en éléments finis dans le cas de la flexion 3 points statique.

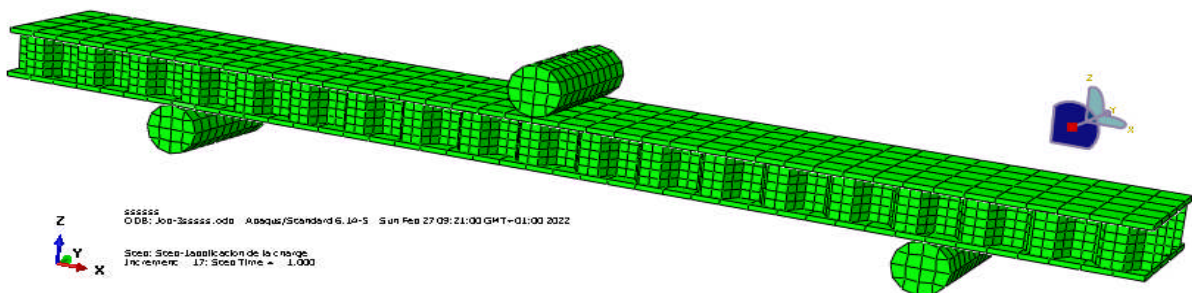


Figure III.11. Maillage du modèle éléments finis de l'éprouvette montée.

III.8.4. Déformée du sandwich

L'application de la charge en flexion statique 3-points provoque la déformation de l'éprouvette selon les allures montrées sur la figure III.12. Les zones colorées montrent la répartition des champs de déplacements suivant l'épaisseur et la longueur de l'éprouvette.

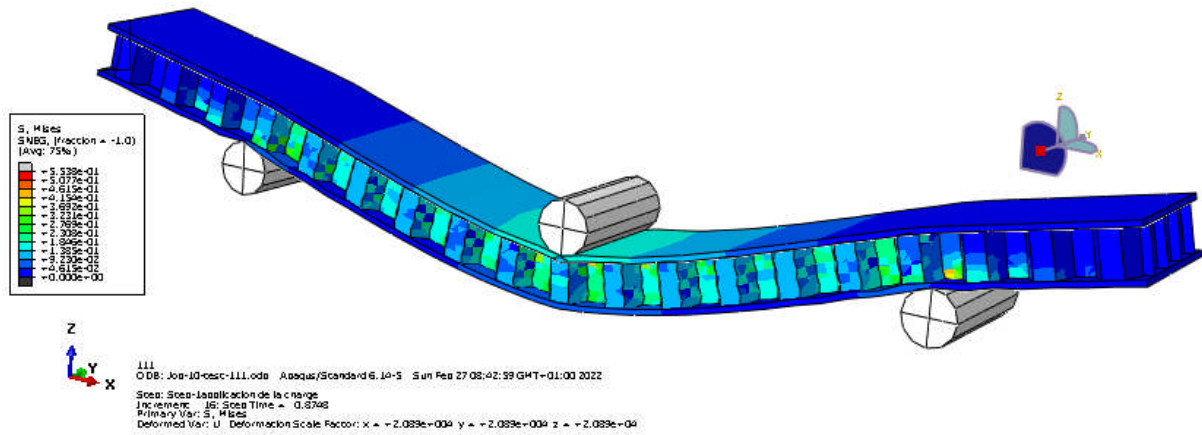


Figure III.12. Déformées de l'éprouvette sandwich.

III.8.5. Déplacement vertical (flèche)

Les déplacements vers le bas (négatifs) sont maximaux au point d'application de la charge. En réalité, dans la simulation, on impose un déplacement et non une charge. Le déplacement vertical maximal imposé $U_3 = -3,30$ mm, descendant d'un nœud, correspond au dernier point de la courbe croissante linéaire (figure III.13).

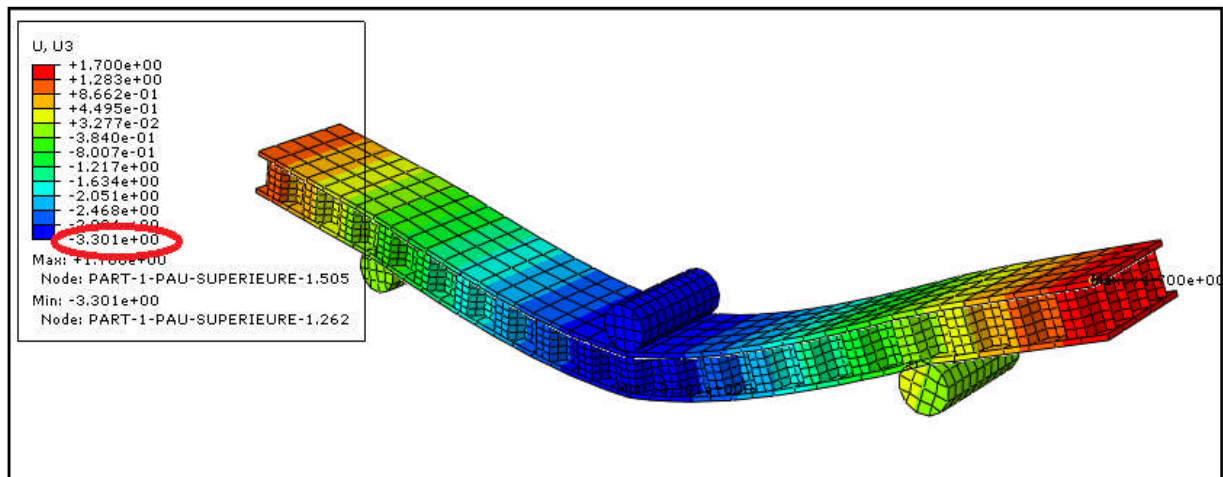


Figure III.13. Déplacements de l'éprouvette sandwich.

III.8.6. Contrainte de Von Mises

Les champs de contraintes sont représentés dans les figures III.14, III.15, III.16.

Le choix de représenter les contraintes de Von Mises est dû au fait qu'elles sont les plus proches à celles obtenues expérimentalement.

Les contraintes axiales selon l'axe des x sont maximales au nœud correspondant au point inférieur de jonction âme-peau : c'est à ce niveau que le risque de l'apparition du glissement relatif peau / âme (rupture du joint de colle) est fort probable (figure III.14).

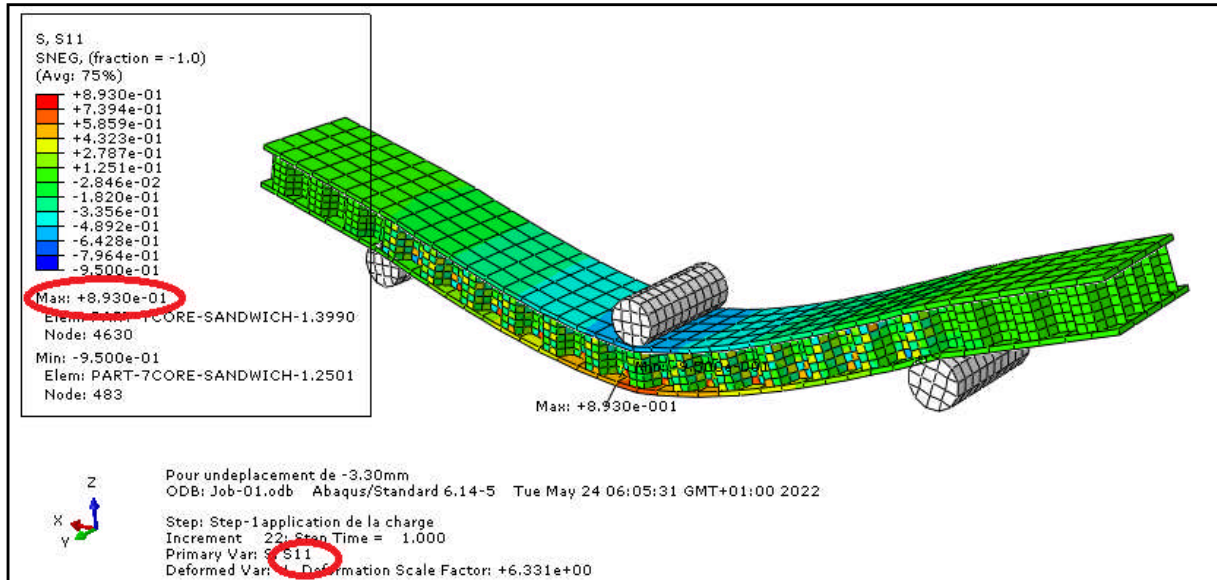


Figure III.14. Contraintes normales de Von Mises suivant X.

La contrainte axiale selon Y est inférieure à celle selon X (figure III.15).

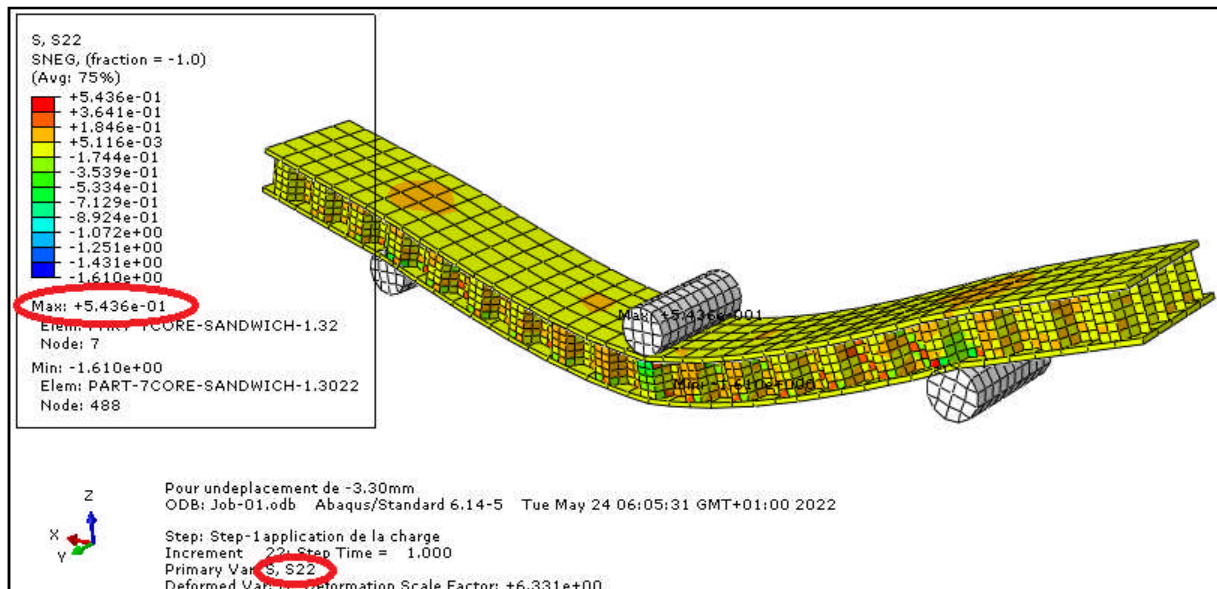


Figure III.15. Contraintes normales de Von Mises suivant Y.

La contrainte de cisaillement σ_{xz} est maximale sous le poinçon qui applique la charge : au milieu de l'éprouvette (Figure III.16).

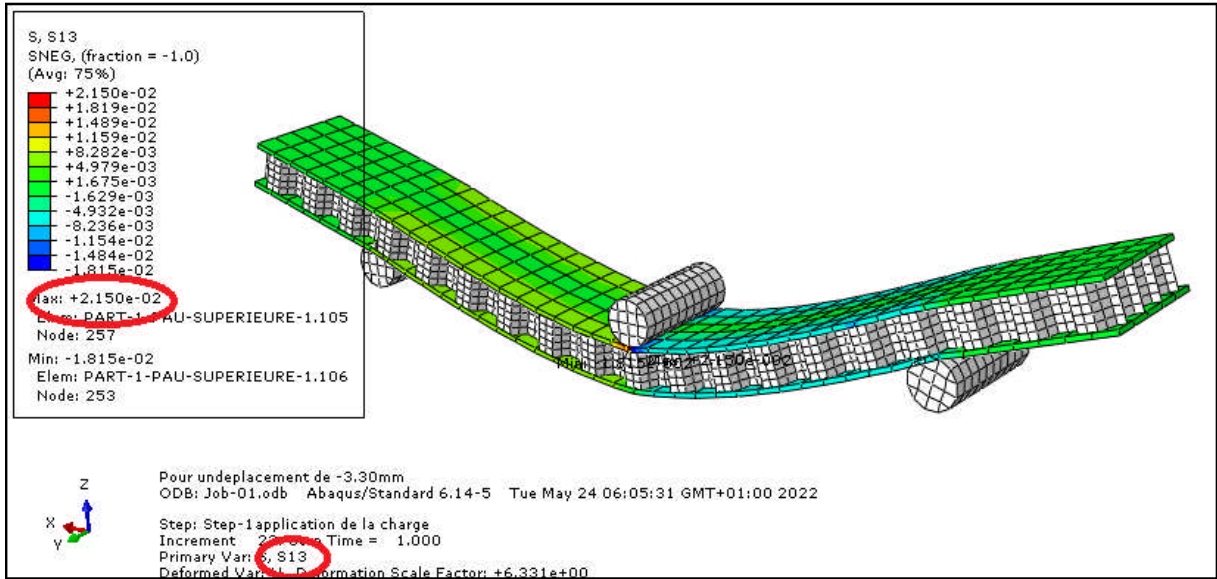


Figure III.16. Contraintes tangentielles de Von Mises dans le plan XZ.

Valeurs des contraintes obtenues par simulation:

➤ La contrainte de Von Mises maximale est de : 4.83 MPa

➤ Les contraintes axiales :

$$S_{11} (\sigma_{xx}) = 0.893 \text{ Mpa}$$

$$S_{22} (\sigma_{yy}) = 0,543 \text{ Mpa}$$

$$S_{33} (\sigma_{zz}) = - 3.30 \text{ Mpa}$$

➤ La contrainte de cisaillement axiale :

$$S_{13} (\sigma_{xz}) = 0.1225 \text{ Mpa}$$

III.8.7. Comparaison des résultats obtenus numériques et expérimentaux

La comparaison des résultats expérimentaux obtenus lors des essais en flexion statique 3 points avec les résultats donnés par la simulation numérique sous le code ABAQUS est donnée dans le tableau III.4.

Tableau III.4. Comparaison des grandeurs obtenues par ABAQUS et par l'expérimental.

Grandeurs	Simulées	Expérimentales	Erreurs absolues
Flèche au centre (mm)	-3,30	-3,20	0,10
Contrainte maximale (MPa)	4,83	4,70	0,13

CONCLUSION GENERALE

L'étude du comportement mécanique du composite sandwich à âme en nid d'abeilles en flexion statique trois points et quatre points nous a permis de déterminer son comportement mécanique et les types d'endommagements subis pour chacune des sollicitations. L'analyse des résultats expérimentaux obtenus pour les flexions statiques 3 points et 4 points et leur comparaison montrent que :

- les allures des courbes de comportement mécanique sont semblables en présentant, pour les deux cas, une partie linéaire correspondant à la zone de déformation élastique, une partie non linéaire correspondant aux déformations plastiques passant par un maximum pour la contrainte maximale.
- les valeurs remarquables de l'essai de flexion statique sont, quant à elles, différentes : les limites élastiques et les contraintes maximales (de rupture) sont plus importantes en flexion quatre points qu'en flexion trois points ; alors que les déplacements (flèches) sont, au contraire, plus importants en flexion trois points qu'en quatre points. Cette différence revient aux conditions d'essais différentes.
- la nature de l'endommagement est, à une différence près, la même. Nous avons pu constater que, pour les deux cas, nous avons enregistré d'importantes indentations des peaux, le cisaillement des parois des alvéoles et le décollement de l'âme. Néanmoins, une fissure des peaux est relevée pour la flexion quatre points due, sans doute, à la valeur élevée de la contrainte de rupture comparativement à celle de la flexion 3 points.

Pour la sollicitation cyclique, nous avons pu observer :

- les courbes de perte de rigidité en flexion 3 points lors de la sollicitation cyclique montrent que la ruine du sandwich est d'autant plus rapide que le niveau de chargement est élevé.
- les dispersions sont visiblement très importantes pour les faibles fréquences (5 Hz) et qu'elles sont plus réduites pour des valeurs plus grandes (7,5 Hz et 10 Hz)
- la limite d'endurance du matériau étudié est atteinte plus rapidement pour un critère de fin d'essai 75% (pour N_{25}) que pour le critère 90% (pour N_{10})
- la nature de l'endommagement est, sensiblement, la même. Les éprouvettes ont subi de légères indentations des peaux, un flambement des cellules causant leurs cisaillements, un décollement de l'âme et, pour les fréquences élevées (≥ 15 Hz), une fissure des peaux s'est produite.

La simulation numérique du sandwich étudié en flexion statique 3 points a permis de valider les résultats expérimentaux. La comparaison de ces derniers avec ceux obtenus par la simulation numérique de la structure sandwich étudiée a révélé un léger écart. Cet écart reste très raisonnable en tenant compte des défauts possibles du processus de fabrication.

PERSPECTIVES

Afin d'optimiser la caractérisation du composite sandwich à âme en nid d'abeilles et de maîtriser, au maximum, la technique de son utilisation, des études complémentaires, pourront être envisagées.

Il serait intéressant, entre autres, de connaître l'influence, sur son comportement mécanique, de(s):

- l'orientation « L » ou « W » des alvéoles
- la densité du sandwich
- hautes fréquences de chargement...

Annexe I

Homogénéisation du cœur

Nous nous proposons de calculer les modules de Young E_1 et E_2 , le module de cisaillement transversal G_{12} et les coefficients de Poisson μ_{12} et μ_{21} en faisant les suppositions suivantes :

- les déplacements engendrés par une charge appliquée selon deux directions X_1 et X_2 sont dus aux parois des cellules qui fléchissent de façon élastique,
- la traction et la compression simple sont négligées.

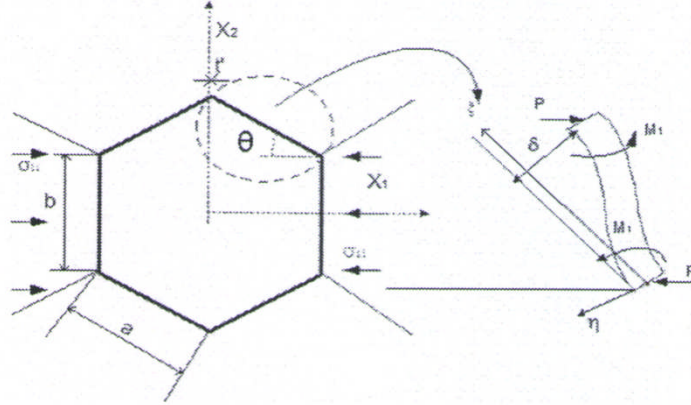


Figure A.1. Déformation des parois de cellules en flexion.

D'autre part, nous supposons que le clinquant d'une cellule est une poutre de longueur a , d'épaisseur t , de profondeur h et de module de Young E_o (figure A.1). Une pression suivant X_1 engendre un effort P suivant cette même direction et, par conséquent, un moment de flexion. L'expression, dans le repère local (η, ξ) de la poutre :

$$E_o I \frac{d^2 \eta(\xi)}{d\xi^2} = P \left(\frac{a}{2} - \xi \right) \sin \theta \quad (\text{A.1})$$

En procédant à la double intégration, en prenant comme conditions aux limites

$$\eta(0) = 0, \frac{d\eta(0)}{d\xi} = 0, \text{ il vient:}$$

$$E_o I \eta(\xi) = P \left(\frac{a}{4} \xi^2 - \frac{\xi^3}{6} \right) \sin \theta \quad (\text{A.2})$$

Le module de Young E_1 est défini par l'expression suivante :

$$E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad (\text{A.3})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\Delta l_{X_1}}{l_{X_1}} = \frac{\delta \sin \theta}{a \cos \theta} \\ \delta &= \frac{\Delta l_{X_1}}{l_{X_1}} = \frac{Pa^3 \sin \theta}{12 E_o I} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 4})$$

La déformation s'écrira :

$$\varepsilon_{11} = \frac{Pa^2 \sin \theta \sin^2 \theta}{12 E_o I \cos \theta} \quad (\text{A. 5})$$

où :

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{\Delta l_{X_1}}{l_{X_1}} = \frac{ht^3}{12} \\ P &= \varepsilon_{11} (b + a \sin \theta) h \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 6})$$

De ce fait, le module de Young s'exprimera comme suit:

$$E_1 = E_o \left(\frac{t}{a} \right)^3 \frac{\cos \theta}{\left(\frac{b}{a} + \sin \theta \right) \sin^2 \theta} \quad (\text{A. 7})$$

Par analogie, en exerçant une pression suivant X_2 de façon similaire que précédemment, le module de Young E_2 se calcule :

$$E_2 = E_o \left(\frac{t}{a} \right)^3 \left(\frac{\frac{b}{a} + \sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) \quad (\text{A. 8})$$

Les coefficients de Poisson se déterminent comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{21} &= -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = \frac{\left(\frac{b}{a} + \sin \theta \right) \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ \mu_{12} &= -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\cos^2 \theta}{\left(\frac{b}{a} + \sin \theta \right) \sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 9})$$

Le module de cisaillement G_{12} est calculé en considérant que les points A, B et C ne subissent pas de déplacements relatifs dans le cas d'un cisaillement sur l'âme.

La symétrie des clinquants implique une dérivation unique due à la flexion et à la rotation du clinquant autour du point B (figure A.2).

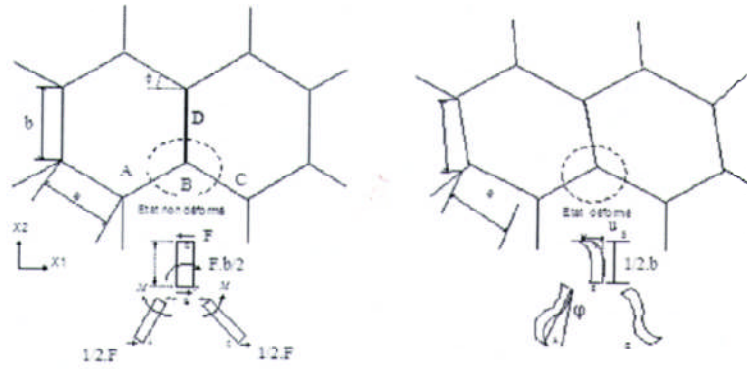


Figure A.2. Déformation en flexion et en rotation des parois.

La déviation u_s est de la forme :

$$u_s = \frac{1}{2} \varphi b + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3E_o I} \quad (\text{A. 10})$$

où :

$I = \frac{ht^3}{12}$ est le moment d'inertie du clinquant central BD suivant la direction X_3 .

En écrivant l'équation d'équilibre des moments au point B, les moments au niveau de AB et BC s'expriment comme suit :

$$M = \frac{Fb}{4} \quad (\text{A. 11})$$

d'où l'on peut tirer l'angle φ :

$\varphi \approx \text{tang} \varphi = \frac{\delta}{a}$ (approximation pour les petits angles).

$$\text{avec : } \delta = \frac{Ma^2}{6E_o I'} \quad (\text{A. 12})$$

$I' = \frac{ht^3}{12}$ est le moment d'inertie des clinquants AB et BC

d'où :

$\varphi = \frac{Fab}{24E_o I'}$ et en substituant la valeur de φ dans l'expression de u_s , on obtient :

$$u_s = \frac{Fb^2}{48E_o} \left(\frac{a}{I'} + \frac{2b}{I} \right) \quad (\text{A. 13})$$

La loi de comportement en cisaillement s'écrira :

$$G_{12} = \frac{\tau}{\gamma} \quad (\text{A. 14})$$

avec :

$$\tau = \frac{F}{2ah\cos\theta} \text{ et } \gamma = \frac{2u_s}{b + a\sin\theta}$$

En définitive, on obtient l'expression de G_{12} :

$$G_{12} = E_o \left(\frac{t}{a}\right)^3 \frac{\frac{b}{a} + \sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{2b}{a}\right) \cos\theta} \quad (\text{A. 15})$$

En dernier lieu, on détermine les propriétés mécaniques hors plan (X_1, X_2).

Le module de Young E_3 est calculé en multipliant le module du clinquant E_o par le rapport « section de la cellule et la surface totale de l'hexagone », soit :

$$E_3 = E_o \frac{\text{section de la cellule}}{2 \text{ aire de l'hexagone}} = E_o \left(\frac{t}{a}\right) \frac{2 + \frac{b}{a}}{2 \left(\frac{b}{a} + \sin\theta\right) \cos\theta} \quad (\text{A. 16})$$

Les coefficients de Poisson μ_{31} et μ_{23} sont supposés égaux au coefficient de Poisson μ du matériau constituant le nida :

$$\mu_{31} = \mu_{23} = \mu \quad (\text{A. 17})$$

La relation de réciprocité permet de déterminer les deux autres coefficients, soit :

$$\mu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \mu_{31} \quad ; \quad \mu_{32} = \frac{E_2}{E_3} \mu_{32} \quad (\text{A. 18})$$

Production scientifique dans le cadre de la préparation de cette thèse

Publications internationales

- [1] **A. AIT SAID, K. BEY, H. MZAD, “ Coupled effect of load ratio and frequency on mechanical fatigue behaviour of precast Aluminum/Aramid fibre composite”**, Composites Theory and Practice, Scientific Journal of Polish Society of Composite Material, 21; 1-2, 46-53, 2021 .
- [2] **A. AIT SAID, K. BEY, H. MZAD, “Mechanical fatigue test of Aluminum composite panel (ACP) with aramid nida-core under cyclic bending”**, Journal of Mechanical Engineering, Vol. 70, No2, 1-10, 2020.

Communications internationales :

- [1] **A. AIT SAID, A. CHEMAMI, K. BEY, B. BOUZITOUNA “Equilibrage d’un corps de masse variable en rotation”** Journées scientifiques Franco-Maghrébines, 2^{èmes} JSFM’15, du 11 – 13 OCT 2015, Annaba, ALGERIE.
- [2] **K. TADJINE, Y. KHADRI, A. AIT SAID, B. BOUZITOUNA, K. BEY, “Modeling damage of composite sandwich foam-laminated glass/Epoxy under three points bending fatigue”** Journées Scientifiques Franco-Maghrébines, 2^{èmes} JSFM’15, du 11 – 13 OCT 2015, Annaba, ALGERIE.
- [3] **A. AIT SAID, A. CHEMAMI, K. BEY, B. BOUZITOUNA “Mechanical behavior in three points bending of composite sandwich honeycomb material (Aluminum/Aramid Fibre Core”** International conference on innovative Materials and Structures Technologies in Metallurgical Engineering, METECH’15, 27-29 November 2015, Istanbul, TURKEY.
- [4] **A. AIT SAID, K. BEY, A. CHEMAMI, B. BOUZITOUNA “ Mechanical behavior of composite laminates sandwiches Foam-glass/Epoxy, under 3-points and 4-points static bending”** International conference on advances in Mechanical Engineering, ICAME 2016, 10 – 13 Mai 2016, Istanbul, TURKEY.
- [5] **B. BOUZITOUNA, K. BEY, A. CHEMAMI, A. AIT SAID, K. TADJINE, “Comportment mécanique en traction statique de deux composites Fibre/Epoxy[04] et [0/90₂/0]”** International conference on advances in Mechanical Engineering, ICAME 2016, 10 – 13 Mai 2016, Istanbul, TURKEY.
- [6] **A. AIT SAID, K. BEY, A. CHEMAMI, « Détermination expérimentale et analytique du module de Young d’un composite sandwich à âme en nids d’abeilles »** 3^{èmes} JSFM – CMC 2016, 27 – 30 Nov. 2016, Paris, FRANCE.
- [7] **N. KHELIFA, A. AIT SAID, A. CHEMAMI, K. BEY “ Etude expérimentale et numérique du comportement en flexion trois points statique des matériaux composites stratifiés verre/polyester”** 3^{ème} ICM, 26 – 27 Avril 2017, Annaba, ALGERIE.

- [8] K. BEY, A. NEHAL, A. AIT SAID, A. CHEMAMI, N. KHELIFA “**Loading frequency effect on experimental mechanical behavior of [O₆/9O₂] cross ply laminates**” International Conference on Advances in Science. ICAS 2017, 13-15 September 2017, Istanbul, TURKEY.
- [9] K. BEY, A. NEHAL, A. AIT SAID, A. CHEMAMI, N. KHELIFA « **Caractérisation d’un matériau composite stratifié à fibres de Kevlar /Epoxyde sollicité en flexion trois points statique** », 4^{ème} JSFM – CMC 2017, 27 – 29 Nov 2017 Rabat (MAROC).
- [10] N. KHELIFA, T. KEBABSA, A. CHEMAMI, A. AIT SAID, K. BEY « **Modélisation du comportement mécanique des stratifiés composites sous chargement statique** » 5^{èmes} JSFM – CMC 2018, 22 – 24 Oct. 2018 Hammamet (TUNISIE).
- [11] A. AIT SAID, K. BEY, I. HADRICHE, C. BRADAI, « **Comportement mécanique en fatigue d’un composite sandwich à âme en nids d’abeilles en flexion 3 points** », Congrès Français de Mécanique, 24^{ème} CFM, 26-30 Aout 2019, Brest, FRANCE
- [12] A. AIT SAID, K. BEY, I. HADRICHE, C. BRADAI « **Influence de la fréquence d’excitation sur le comportement en fatigue d’un sandwich à âme en nids d’abeilles en flexion 3 points** » 5^{èmes} JSFM – CMC 2019 du 17 – 18 Nov 2019 Annaba (ALGERIE).

Projets de recherche:

- [1] Membre de l’équipe de recherche du projet CNEPRU sous le thème “**Comportement en fatigue du composite sandwich à âme en nid d’abeilles en flexion trois points et quatre points**”, agréé du 01/01/2016 au 31/12/2019 sous le code A11N01UN230120150004.
- [2] Membre de l’équipe de recherche du projet PRFU sous le thème “**Comportement en choc et simulation numérique d’un matériau composite à fibre de verre /résine époxyde** ”, agréé du 01/01/2021 au 31/12/2024 sous le code A11N01UN230120200007.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Grau "Relating interfacial fracture toughness to core thickness in honeycomb-core sandwich composites"
- [2] http://www.hexcelcomposites.com/Markets/Honeycomb/Hexweb_attrib/hw_p04.htm, Hexcel Corporation, Accessed November 2003.
- [3] J.M Berthelot, « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures », Techniques & Documentation, 3^e édition, 1999.
- [4] D. GAY, « Matériaux composites », 5^e édition révisée, Hermès, Lavoisier, Paris, 2005.
- [5] Sandwich concept, "Diab sandwich handbook", Available from, <http://www.diabgroup.com>
- [6] D. Zenkert, The handbook of sandwich construction. EMAS Publishing, 1997.
- [7] Hoff N.J., Mautner S.E., Sandwich construction. Aeronautical Engineering Review, Vol. 3>Aug. 1944, 1944.
- [8] Aérospatiale, Matériaux composites : dans la grande mutation des structures. Plaque interne. 1986.
- [9] Schulze E.J., Kesack W.J., Honeycomb sandwich composite structures used on the V22-Osprey fuselage. Proceeding of the 22nd International SAMPE technical conference, Boston MA 1990.
- [10] Olsson K.A., Makinen K.E., HELLBRATT S.E., The development of sandwich structures for naval vessel during 25 years. Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers., 1997.
- [11] Gustafsson R. N-G., Hybrid stainless assemblies for weight reduction and performance. Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing., 1999
- [12] Klein Hermann: General about buckling tests with thin-walled shells. Rapport DLR-Mitt; 89-13., 1989.
- [13] D. Zenkert. « An introduction to sandwich construction », EMAS, Solihull, UK, 1995.
- [14] Den Haan L.; G Reif., "Challenges for teaming – up sandwich technology and business success in rail transportation". Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E – MAS Publishing., 1998.
- [15] Gay Daniel., Matériaux Composites. Editions HERMES., 1991.
- [16] J.E.C. : Comptes rendus des Journées Européennes des Composites. Composites n°25-26., 1998.
- [17] Jean-Marie Berthelot., Mécanique des Matériaux Composites. Editions HERMES., 2010.
- [18] Bruno Castanié, "Contribution à l'étude des structures sandwichs dissymétriques" Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace de Toulouse, France, 2000.
- [19] Bourouis Fairouz, "Optimisation de la rupture et de l'endommagement de différents matériaux sandwichs", Thèse de Doctorat, Université Constantine 1, 2013.
- [20] Lachguer. A et Akyoud. M "Les matériaux sandwich et les risques d'instabilités géométriques locales", Etude bibliographique, ECOLE DES MINES DE DOUAI, France, 2014
- [21] Mertani Boubekur Med Bilel, "Modélisation numérique et expérimentale du comportement des panneaux sandwichs à âme en nids d'abeilles", mémoire Magister, Université Ferhat Abbas – Sétif .UFAS (Algérie)

Bibliographie

- [22] Allen H. G., "Analysis And Design of Structural Sandwich Panels", Pergamon Press, Oxford. 1969.
- [23] Gibson L.J, Ashby M.F., "Cellular Solids Structure & Properties" Pergamon Press, Oxford, U.K., 1988
- [24] Gibson L.J., Ashby M.F., Zhang J., Triantafillou T.C., "Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads", I. Modelling, Int J Mech Sci 31 (1989) .
- [25] H. Berthelot, « comportement sous sollicitation dynamique de composites sandwichés à âme mousse », Thèse de Doctorat Ecole Centrale de Lyon, 1997.
- [26] L.Al Bachi, « Modélisation numérique et expérimentale du comportement des matériaux sandwichés appliqués à l'aéronautique », Thèse de l'ENI de Tarbes, 2002.
- [27] T.C. Radette, A. Charon and R. Vodicka, "Environnement degradation of Honeycomb sandwich structure", Airframes and Engines Division Aeronautical and Maritime research Laboratory. California, April 2004.
- [28] L. M. Khachanov, « Time of the rupture process under creep condition », Izvestya Akademii Nauk SSR OtdTekh. Nauk. N° 8, p. 26-31, 1958.
- [29] Y. N. Rabotonov, « Creep rupture », Proc. XII Int.Con. Appl. Mech. Stanford, 1968. Ed. Springer 1969
- [30] S. Murakami, « Mechanical Modeling of Material Damage »
- [31] J.Hult, « Continuum Damage Mechanics, Capabilities, Limitation and Promises », Mechanisms of Deformation and Fracture, Pergamon, Oxford, p. 233-347, 1979.
- [32] D. Krajcinovic, « Continuum Damage Mechanics », Applied Mechanic Review, 37 (1), p.1-6, 1984.
- [33] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, « Mécanique des Matériaux Solides », Dunod (2^{ème} édition), Bordas, Paris, 1988.
- [34] J. Lemaitre « A course on damage mechanics », Springer Verlag (2^{ème} édition), New York, 1996.
- [35] J. L. Chaboche, « Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement », Thèse Université Paris VI, 1978.
- [36] Kirsh X. Thèse de Doctorat à l'Université de Metz, 2001.
- [37] H. T. Corten and T. J. Dolan, "Cumulative fatigue damage", Proc. Int. Conf. on fatigue of metals Tust. Of Mech. Eng. ASTM. p. 235-246, 1956.
- [38] V. A. Mankowsky, « Non-linear parametric creep function », Mech. Composite Mater, N° 4, p. 579-584, 1982.
- [39] O. Dinkel, « Etude de l'endommagement des structures en bois collées », Thèse de Doctorat à l'Université de Metz, 2001.
- [40] O. Dinkel, P. Jodan and G.Pluvinage, "Modelization of the damage and failure of finger joint", Damage and failure of interfaces, Rossmanith (ed.) Balkema, Rotterdam, p. 459-464, 1977.
- [41] K. Azouaoui, « Etude de l'endommagement de plaque composites en Verre / Epoxy soumise à la fatigue par chocs »,
- [42] J. N. Yang, D. L. Jones, S. H. Yang and A. Meskini, "A stiffness degradation model for Graphite/Epoxy laminate", J. of Composite Materials, Vol. 24, p. 753-769, 1990.
- [43] S. D. Clark, R.A. Shenoï and H. G. Allen, "modeling the fatigue behavior of sandwich beams under monotonic, 2-steps and block-loading regimes", J. of Composites Science and Technology, Vol. 59, p. 471-486, 1999.

Bibliographie

- [44] W. Hwang and K. S. Han, "Fatigue of composites fatigue modulus concept and life prediction", *J. of composites materials*, Vol. 20, p. 155-165, 1986.
- [45] M. Miner, « cumulative damage in fatigue », *J. of Applied Mechanichs Part A*, p. 159-164, 1945.
- [46] Warren and Kraynik, « foam mechanics the linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials, *Mech. Mater.*, 6, 1987.
- [47] Gibson and Ashby, « Cellular solids: structure and properties », Pergamon, Oxford, 1988.
- [48] Fortes and Ashby, « the effect of non-uniformity on the in-plane modulus of honeycombs », *Acta. Mater.*, Vol. 4712, p.3469-3473, 1999.
- [49] Masters and Evans, « Models for the elastic deformation of honey combs », *Compos. Struc.* Vol. 35, p. 403-422, 1996.
- [50] Pantema, « Sandwich construction », John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [51] D. Zinkert, « An introduction to sandwich construcyion », Chamelon Peress, London, 1995.
- [52] A. K. Nour, W. S. Burton and C. W. Bert, " Computational models for sandwich panels and shells", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 155 3, p. 155-199, 1993.
- [53] Duvaut, « Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement », *Lecture Notes in Math.* Vol 594. Springer, Berlin, p. 131-145, 1977
- [54] Caillerie, « Thin elastic and periodic plates », *Math. Mech. Appl. Scie.* Vol 6, p.159-191, 1984.
- [55] A. E. H. Love, "Treatise on the mathematical theory for elasticity" 4th Edn, Dover, New York, 1927.
- [56] E. Reissner, « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *J. Appl. Mech.* Vol. 12, p. 69-77, 1945.
- [57] J. N. Reddy, « A simple high-order theory for laminated composite plates », *J. Appl. Mech.* Vol. 51, p.745-752, 1984.
- [58] M. Touratier, « Un modèle simple et efficace en mécanique des struictures composites », *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 309, série II, p.933-938, 1989.
- [59] M. Grediac, « A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores », *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, p.1777-1788, 1993.
- [60] T.N.Bitzer, « Useful analysis methods for sandwich structures »? Hexcel corporation report SAMPE symposium California, April 1994.
- [61] Hexcel composite, « Reference society Hexcel composite », 2004, <http://www.Hexcel.com>.
- [62] C. C. Chamis, R. A. Aiello, L. N. Murthy, « fiber composite sandwich thermostructural behavior: computational simulation", *Journal of composite technology &research*, Vol.10, p. 93-99, 1988.
- [63] Bourgeois et all. « Homogenization of periodic sandwiches », in : *Mechanics of sandwich structures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p.139-146, 1998.
- [64] Kelsey et all. « The shear modulus of foil honey comb cores », *Aircraft Eng.* Vol. 30, p. 294-302, 1958.
- [65] J - M. Berthelot, "Matériaux composites, Comportement mécanique et analytique des structures », *Technique & Documentation*, 3^{ème} édition, 1999.