

Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University -
Annaba



جامعة باجي مختار

-عنابة

Année 2014

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires perturbées

Option

Mathématiques Appliquées

Présentée par

BERREHAIL CHEMSEDDINE

DIRECTEUR DE THÈSE : Makhlouf Amar PROF. UNIV. B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Djoudi Ahcène PROF. UNIV. B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Lakrib Mustapha PROF. U.D.L. Sidi Bel Abbès
EXAMINATEUR : Bebbouchi Rachid PROF. UNIV. USTHB Alger
EXAMINATEUR : Benmezai Abdelhamid PROF. UNIV. USTHB Alger
EXAMINATEUR : Salmi Abdelwahab MC(A) U.B.M. ANNABA

Remerciements

JE voudrais tout d'abord remercier Monsieur Makhlouf Amar, mon Directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Je lui suis infiniment reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me proposer un sujet de thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il m'a beaucoup encouragé.

Je tiens à remercier Monsieur Djoudi Ahcène, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse, je l'en remercie énormément.

Je remercie les professeurs Lakrib Mustapha, de l'université Sidi Bel Abbès, Bebbouchi Rachid, de l'université USTHB Alger, Benmezai Abdelhamid, de l'université USTHB Alger, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ma thèse.

Je remercie Monsieur Salmi Abdelwahad, Maître de Conférence à l'université Badji Mokhtar Annaba, d'avoir accepté de faire partie du jury, et d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse.

Enfin, merci à mes parents qui m'ont toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir.

Merci à tous...

Cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires perturbées

Résumé

Résumé : Dans cette thèse, on étudie les cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires non autonomes. En utilisant un théorème de la théorie de moyennisation du premier ordre, on transforme l'étude des cycles limites d'un système différentiel ordinaire en l'étude des zéros non dégénérés d'un système algébrique. La première classe étudiée est du troisième ordre et de la forme :

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0,$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction 2π -périodique en t . En outre, on présente une application aux oscillateurs de mémoire "memory oscillators". La deuxième classe étudiée est du sixième ordre et de la forme :

$$x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)\ddot{x} + (p^2 + q^2 + pq)\dot{x} + pqx = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t), \quad (1)$$

où p et q sont des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$, et $p \neq q$, ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction non-linéaire non autonome périodique en t . La troisième classe étudiée est du sixième ordre et de la forme :

$$x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + A\ddot{x} - B\dot{x} + Cx + Sx + \lambda\mu p^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, x^{(5)}, t), \quad (2)$$

avec $A = p^2 + 1 + \lambda\mu$, $B = \mu + (\mu + \lambda)p^2 + \lambda$, $C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2)$, $S = p^2(\lambda + \mu)$, où λ et μ sont deux paramètres réels, p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction non-linéaire, non autonome et périodique en t . On a distingué un cas suivant les différentes valeurs des paramètres p et q pour l'équation (1) et trois cas suivant les différentes valeurs des paramètres λ , μ et p pour l'équation (2).

Mots clés : cycle limite, méthode de moyennisation, système différentiel, perturbation.

Limit cycles of three classes of ordinary differential equations perturbed

Abstract

Abstract : In this thesis, we study the limit cycles of three classes of non-autonomous ordinary differential equations. Using a theorem of first order averaging theory, we transform the study of limit cycles of a differential system to the study of non-degenerate zeros of an algebraic system. The first class is of third-order which takes the form :

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0,$$

where ε is a small parameter and F is a 2π -periodic function in the variable t . Moreover we provide an application to memory oscillators. The second class is of sixth-order of the form :

$$x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)\ddot{x} + (p^2 + q^2 + p^2q^2)\dot{x} + p^2q^2x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t), \quad (3)$$

where p and q are rational numbers different from $-1, 0, 1$ and $p \neq q$, ε is small and F is a nonlinear non-autonomous periodic function, The third class is of sixth-order which takes the form :

$$x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + A\ddot{x} - B\dot{x} + Cx + Sx + \lambda\mu p^2x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, x^{(5)}, t), \quad (4)$$

where $A = p^2 + 1 + \lambda\mu$, $B = \mu + (\mu + \lambda)p^2 + \lambda$, $C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2)$, $S = p^2(\lambda + \mu)$, with λ and μ are two real parameters, p is rational number different from $-1, 0, 1$, ε is sufficiently small and F is a nonlinear non-autonomous periodic function in the variable t . We distinguished one cases for the various values of the parameters p and q for the equation (3), and three cases for the various values of the parameters λ , μ and p for the equation (4).

Keywords. limit cycle, averaging method, differential system, perturbation.

الحلول الدورية للثلاثة اقسام من المعادلات التفاضلية

ملخص

ملخص: موضوع هذه الأطروحة يركز أساسا على دراسة الحلول الدورية المعزولة للثلاثة اقسام من المعادلات التفاضلية. باستعمال إحدى نتائج طريقة المتوسط من الدرجة الأولى نقوم بتحويل مسألة البحث عن الحلول الدورية المعزولة لجملة معادلات تفاضلية إلى البحث عن الجذور غير المنحلة لجملة معادلات جبرية غير خطية. القسم الأول هو عبارة عن معادلات من الدرجة الثالثة من الشكل

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$$

حيث ε صغير كفاية و F هي دالة 2π - دورية بالنسبة للمتغير t , بالإضافة إلى ذلك، نقدم تطبيق حول تذبذب الذاكرة. والقسم الثاني عبارة عن معادلات من الدرجة السادسة من الشكل

$$x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)\ddot{x} + (p^2 + q^2 + pq)\dot{x} + pqx = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t) \quad (1)$$

حيث p و q وسيطين حقيقيين يختلفان عن $-1, 0, 1$ و $p \neq q$, ε صغير كفاية و F هي دالة 2π - دورية بالنسبة للمتغير t . والقسم الثالث عبارة عن معادلات من الدرجة السادسة من الشكل

$$x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + Ax'' - B\ddot{x} + C\dot{x} + Sx + \lambda\mu p^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t) \quad (2)$$

مع $A = p^2 + 1 + \lambda\mu, B = \mu + (\lambda + \mu)p^2 + \lambda, C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2), S = (\lambda + \mu)p^2$ حيث λ و μ وسيطين حقيقيين, p وسيط حقيقي يختلف عن $-1, 0, 1$, ε صغير كفاية و F هي دالة 2π - دورية بالنسبة للمتغير t . نميز حالة واحدة حسب القيم المختلفة للوسيطين p و q بالنسبة للمعادلة (1) و ثلاثة حالات حسب القيم المختلفة للوسائط λ, μ, p بالنسبة للمعادلة (2).

الكلمات الرئيسية: دورة الحد، طريقة المتوسط، النظام التفاضلي، اضطراب.

Table des matières

Introduction générale	1
I Notions préliminaires et généralités	5
1 Système dynamique, points d'équilibre	5
2 Nature des points critiques	8
3 Portrait de phase et cycles limites	8
4 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales	11
II Théorie de moyennisation	13
1 Un théorème de moyennisation de Fatou	13
2 Second théorème de moyennisation du premier ordre	14
3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre	20
III Cycles limites pour une classe d'équations différentielles du troisième ordre	27
1 Introduction	27
2 Résultat principal	27
3 Application	31
IV Cycles limites pour une première classe d'équations différentielles du sixième ordre	34
1 Introduction	34

2	Résultat principal	34
2.1	Cas 1 : p et q sont des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$, et $p \neq q$.	36
VI Solutions périodiques pour une deuxième classe d'équations différentielles du sixième ordre		47
1	Introduction	47
2	Résultat principal	47
2.1	Cas 1 : p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda\mu \neq 0$	49
2.2	Cas 2 : p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda = 0, \mu \neq 0$ (ou $\mu = 0, \lambda \neq 0$).	58
2.3	Cas 3 : p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda = \mu \neq 0$	66
Conclusion et Perspectives		75
Références bibliographiques		76

Introduction générale

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude de leurs orbites périodiques, leur existence, leur nombre et leur stabilité. Un cycle limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques de l'équation différentielle. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par **H. Poincaré** en 1881 dans son "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" [19]. Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire des points d'équilibre, des cycles limites et de leur stabilité. Ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié. A la fin des années **1920**, **Van Der Pol**, **Liénard** et **Andronov** ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de tube vide était un cycle limite.

Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de **Poincaré-Bendixson** qui affirme que dans une région compacte et bornée du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un point d'équilibre ou un cycle limite. Le critère de Dulac donne une méthode de non existence des solutions périodiques. La bifurcation de Hopf est un outil important pour détecter l'existence d'une solution périodique d'un système autonome qui dépend d'un paramètre λ .

Le mathématicien David Hilbert présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques ([12], 1900), 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". Le problème numéro 16 est de savoir le nombre maximal et la position relative des cycles limites d'un système différentiel

polynomial plane de degré n . On note H_n ce nombre maximal. Dulac [7] (1923), proposa une démonstration prouvant que H_n est fini. Ces dernières années, plusieurs d'articles ont étudié les cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux planaires. La raison principale de cette étude est le seizième problème non résolu de Hilbert. En particulier, un grand nombre d'articles ont étudié les cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire.

Le développement rapide de diverses variantes de la méthode de moyennisation a été motivé par la recherche d'une méthode universelle qui convient à l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires se produisant dans de nombreuses branches de l'industrie, de génie civil, mécanique, construction de navires et de véhicules, avions et la technologie spatiale.

La première démonstration de la validité asymptotique de la moyennisation dans le cas périodique est due à Fatou (**Fatou**, 1928). La démonstration basée sur le lemme de Gronwall est due à **M. Roseau**, (Roseau, 1966). Une étape importante a été franchie ensuite par **Krylov et Bogoliubov**(1937)[13], qui ont traité le cas quasi-périodique. L'idée générale de la méthode de moyennisation est d'étudier le système différentiel perturbé

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon),$$

où $t \in D$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|\varepsilon| \ll 1$ et f est une fonction T -périodique en t , en considérant le système moyenné

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x),$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt.$$

La méthode de moyennisation a été ensuite développée par **Bogoliubov et Mitropolskii** (1961) [5], **Verhulst** [28], **Sanders et Verhulst** [24], **Malkin** (1956) [15], **Roseau** (1966) [23], **Llibre et Buica** (2004) [4]...

La méthode de moyennisation "Averaging Method" est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques.

Dans ce travail, on étudie les cycles limites des systèmes différentiels non autonomes. On s'intéresse à la recherche des solutions périodiques de trois classes d'équations différentielles ordinaires de sixième et troisième ordre en utilisant un théorème de la méthode de moyennisa-

tion.

La suite du travail est organisée comme suit :

Le premier chapitre présente quelques rappels et des notions préliminaires sur les systèmes différentiels ordinaires dans R^n . Dans le deuxième chapitre, on utilise la théorie de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre des orbites périodiques d'un système différentiel. On utilise aussi une autre théorème de la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier les cycles limites d'un système différentiel.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la recherche des cycles limites de l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre perturbée

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0, \quad (5)$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et $F \in C^2$ est une fonction 2π -périodique en t . On donne une application aux oscillateurs de mémoire "Memory oscillators".

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à la recherche des cycles limites de la classe suivante des équations différentielles ordinaires de sixième ordre

$$x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)\ddot{x} + (p^2 + q^2 + pq)\dot{x} + pqx = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t), \quad (6)$$

où p et q sont des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$, et $p \neq q$, ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction non-linéaire périodique en t . De plus nous proposons quelques applications.

Au chapitre 5, on s'intéresse à la recherche des cycles limites de la classe suivante d'équations différentielles ordinaires de sixième ordre

$$x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + A\ddot{x} - B\dot{x} + Cx + Sx + \lambda\mu p^2 x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, x^{(5)}), \quad (7)$$

avec $A = p^2 + 1 + \lambda\mu$, $B = \mu + (\mu + \lambda)p^2 + \lambda$, $C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2)$, $S = p^2(\lambda + \mu)$, où λ et μ sont deux paramètres réels, p est un nombre rationnel différent de $1, 0, -1$, ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction non-linéaire, et périodique en t , en utilisant une nouvelle version de la méthode de moyennisation.

Il existe une littérature nombreux qui s'intéresse l'étude des orbites périodiques des équations

tions différentielles du sixième et troisième ordre, voir par exemple dans [[1], [2], [6], [8], [9], [10], [11], [17], [8], [18], [21], [22], [26] [27] [29]]. Mais notre principal outil pour l'étude des orbites périodiques des équations (5), (6) et (7), est totalement différent des outils des travaux mentionnés. Nous allons utiliser la théorie de moyennisation, plus précisément le théorème II.3.5. La plupart des documents cités portant sur les orbites périodiques des équations différentielles du sixième ordre utilisent le théorème de **Schauder** ou de **Leray-Schauder** du point fixe.

Notons que le travail de cette thèse a fait l'objet des trois publications suivantes

1. [16] **Limit cycles of the sixth-order non-autonomous differential equation.**
Amar Makhlouf, Chems Eddine Berhail, "Arab Journal of Mathematical Sciences", production and hosting by Elsevier, 3 March 2012, pp. 177-187.
2. [3] **On the Limit cycles of the sixth-order non-autonomous differential equation.**
Chems Eddine Berhail, Amar Makhlouf, "Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 5, Issue. 4, 2013, pp. 59-77. Online ISSN : 1943-023X.
3. [14] **Periodic solutions of the third-order differential equation $\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$.**
Jaume Llibre, Chems Eddine Berhail and Amar Makhlouf, submitted in the journal "Canadian Applied Mathematics Quarterly".

Chapitre I

Notions préliminaires et généralités

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires. On commence par définir les systèmes dynamiques, on examinera les notions de : flot, point singulier, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibre, le portrait de phase, orbite périodique, cycle limite, nature des points critiques. On introduira aussi un rappel sur les théorèmes fondamentaux : le théorème d'existence et d'unicité, le lemme de Gronwall, le théorème de Poincaré-Bendixon avec quelques exemples.

1 Système dynamique, points d'équilibre

Définition 1.1. *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie et continue sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ satisfait*

$$(i) \quad \Phi_0(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$(ii) \quad \Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1. *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est linéaire si*

$$\Phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \Phi(t, x) + \beta \Phi(t, y) \quad \forall \alpha, \beta, t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1. *L'application*

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

définie par

$$\Phi(t, x) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} x,$$

est un système dynamique dans \mathbb{R}^2 , et pour $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(t, x_0)$ est la solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Définition 1.2. (*Flot*) : Soit le système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \tag{I.1}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (I.1) telle que $\Phi(0, x_0) = x_0$.

L'ensemble des applications $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (I.1).

Remarque 2. Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps, sinon il est dit non autonome.

Définition 1.3. (*Points d'équilibre*) : On appelle point critique ou point d'équilibre du système (I.1), tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x_0) = 0.$$

Définition 1.4. Le système

$$\dot{x} = Ax, \text{ où } A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \tag{I.2}$$

est appelé le système linéarisé du système (I.1) en x_0 .

Exemple 1.2. Dans le système (I.1) si $f(x)$ est donnée par l'expression

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix},$$

alors les points critiques de $f(x) = 0$ sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

Le système linéarisé est

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Donc

$$Df(1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

et

$$Df(-1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Les systèmes linéarisés sont :

a) Au point $(1, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \end{cases}$$

b) Au point $(-1, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \end{cases}$$

Remarque 3. On utilise La linéarisation pour étudier la nature des points critiques.

Définition 1.5. (Point d'équilibre hyperbolique) : Le point critique x_0 est hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a une partie réelle nulle.

2 Nature des points critiques

Soit le système différentiel linéaire (I.2) où A est une matrice d'ordre 2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice.

On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .

- (i) λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signes différents, le point critique $x = x_0$ est une selle. Il est toujours instable.
- (ii) λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe
 - si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un noeud stable.
 - si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un noeud instable.
 - si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un noeud propre ; il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.
- (iii) λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées c'est à dire $\forall j = \overline{1,2}, \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ et $Im(\lambda_j) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer ; il est stable si $Re(\lambda_j) < 0$ et instable si $Re(\lambda_j) > 0$.
- (iv) λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $Im(\lambda_j) \neq 0$ et $Re(\lambda_j) = 0, \forall j = \overline{1,2}$, alors le point critique $x = x_0$ est un centre ; il est stable mais pas asymptotiquement stable.

3 Portrait de phase et cycles limites

Définition 3.1. Soit le système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (I.3) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 3.2. (*Orbite périodique*) : On appelle orbite périodique toute trajectoire $\Phi_t(x)$ de (I.3) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x). \quad (\text{I.4})$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (I.4) est appelé période.

Définition 3.3. (*Cycle limite*) : Un cycle limite C du système (I.3) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phases, c'est à dire qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

Théorème I.3.1. C étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C sont telle que :

soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou bien $t \rightarrow -\infty$.

1. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de C , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable.
2. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de C pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est instable.

Exemple 3.1. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

tel que α est un paramètre.

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} &= \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

$r=1$ correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$, le système a une infinité d'orbites périodiques et il n'y a pas de cycles limites.

Remarque 4. *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.*

Définition 3.4. (*L'amplitude du cycle limite*) : *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.*

Proposition 3.1. (*Cycle limite hyperbolique*) : *Supposons que le système (I.3) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T . Soit l'exposant caractéristique donné par*

$$s = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt. \quad (\text{I.5})$$

Si $s > 0$ (respectivement $s < 0$), alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite instable (respectivement stable). L'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est dite un cycle limite hyperbolique si $s \neq 0$.

Exemple 3.2. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

En coordonnées polaires, le système devient

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1,$$

pour $r = 1$, on a

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

alors

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos(t), \sin(t)) dt, \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta) - 3\sin^2(\theta)) dt, \\
 &= \int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2(\theta) - 4\sin^2(\theta)) dt, \\
 &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0.
 \end{aligned}$$

Donc, le système (I.6) a un cycle limite hyperbolique $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ qui est stable.

Définition 3.5. (Cas Périodique) : On considère une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui est continue et T -périodique en t . On appelle fonction moyennée de f

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

4 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^n , $t_0 < t \leq t_0 + T$, $x \in D$ et $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4.1. On dit que f satisfait la condition de Lipschitz par rapport à x si

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

où $x_1, x_2 \in D$, et L est une constante.

Nous pouvons maintenant formuler un théorème bien connu d'existence et d'unicité pour des problèmes à valeur initiale.

Théorème I.4.2. (existence et unicité) On considère le problème à valeur initiale

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

I.4 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t_0 < t \leq t_0 + T$. On suppose que :

a) $f(t, x)$ est continue par rapport à t, x sur $G = [t_0, t_0 + T] \times D$.

b) $f(t, x)$ satisfait la condition de Lipschitzienne en x .

Alors le problème à valeur initiale admet une solution unique.

Chapitre II

Théorie de moyennisation

La méthode de moyennisation est une des méthodes classiques qui donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Cette méthode consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome. Dans cette section, on présente une introduction à la théorie de moyennisation du premier ordre.

1 Un théorème de moyennisation de Fatou

On considère le problème de Cauchy de l'équation perturbée

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \quad (\text{II.1})$$

On suppose que $F(t, x)$ est une fonction T -périodique en t . On introduit l'équation moyennée et le problème de Cauchy associé

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (\text{II.2})$$

avec

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

Théorème II.1.3. [24] *On considère les deux problèmes de Cauchy (II.1) et (II.2) avec $x, y, x_0 \in D$ un ensemble ouvert de $R^n, t \geq 0$. Supposons que :*

II.2 Second théorème de moyennisation du premier ordre

1. Les fonctions F , G et $D_x F$ sont continues et bornées par une constante M indépendante de ε sur un domaine $[0, \infty[\times D$.
2. La fonction G est Lipschitzienne par rapport à x pour $x \in D$.
3. La fonction $F(t, x)$ est T -périodique en t avec une moyenne $f^0(x)$, T est une constante indépendante de ε .
4. La solution $y(t)$ ne quitte pas D pendant un temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors, la différence $x(t) - y(t)$ est de l'ordre de ε pendant un temps de l'ordre de $1/\varepsilon$.

2 Second théorème de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{II.3})$$

avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, x)$ et $G(t, x, \varepsilon)$ sont T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (II.3) est défini par

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (\text{II.4})$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (\text{II.5})$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (II.4) fournissent des solutions périodiques du système (II.3).

Théorème II.2.4. [28] *Soit le système (II.3), on suppose que*

- 1) F , G , $D_x F$, $D_x^2 F$, et $D_x G$ sont des fonctions continues et bornées par une constante M dans $[0; \infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.
- 2) F et G sont T -périodiques en t , avec T indépendante de ε .

II.2 Second théorème de moyennisation du premier ordre

a) Si le point p est un point singulier du système moyenné (II.4) tel que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (\text{II.6})$$

Alors pour $|\varepsilon| > 0$, suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (II.3) telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(0) = p.$$

b) Si le point singulier $y = p$ du système moyenné (II.4) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$, suffisamment petit, l'orbite périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$, du système (II.3) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .

Exemple 2.1. Soit l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0.$$

Elle s'écrit comme système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

On veut la mettre sous la forme du système (II.3).

On utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

le système (II.7) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \cos \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta). \end{cases}$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{-1 + \varepsilon \sin \theta \cos \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta)}.$$

II.2 Second théorème de moyennisation du premier ordre

On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x^2), \quad |x| < 1.$$

On pose $x = \varepsilon \sin \theta \cos \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta)$.

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta - \varepsilon^2 r (1 - r^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^3 \theta \cos \theta + o(\varepsilon^3).$$

On applique la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta,$$

ce qui implique que

$$f^0(r) = \frac{1}{8} r (r^2 - 4).$$

$$f^0(r) = \frac{1}{8} r (r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r = 2, r > 0.$$

On a $f^{0'}(r) = \frac{1}{8} (3r^2 - 4)$.

D'où $f^{0'}(2) = 1 \neq 0$, d'après le théorème [II.2.4](#), le système [\(II.7\)](#) pour $|\varepsilon| > 0$, suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé [\(II.7\)](#) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $f^{0'}(2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable.

Exemple 2.2. Soit le système de Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (a_1 x + \dots + a_n x^n), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Pour ε suffisamment petit et $a_n \neq 0$, ce système admet au plus $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ cycles limites.

On utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \\ \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2}. \end{cases}$$

II.2 Second théorème de moyennisation du premier ordre

On trouve

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r(a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta(a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta), \end{cases}$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta)}{1 - \varepsilon \sin \theta(a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta)}.$$

On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x^2), \quad |x| < 1,$$

on pose $x = \varepsilon \sin \theta(a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta)$.

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r(a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) \\ &\quad + \varepsilon^2 r \sin \theta \cos \theta (a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta)^2 + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

On applique la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) d\theta.$$

On a

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon f^0(r).$$

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_{n-1} r^{n-2} \cos^n \theta + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) d\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon r}{2\pi} \left(a_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + a_3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta + \dots + a_{n-1} r^{n-2} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + a_n r^{n-1} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1} \theta d\theta \right). \end{aligned}$$

Si n est impair

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \dots + a_n r^{n-1} I_{n+1}).$$

II.2 Second théorème de moyennisation du premier ordre

On cherche les points d'équilibre de $f^0(r)$, on a $r > 0$, on pose $X = r^2$

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow (a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \dots + a_n I_{n+1} X^{\frac{n-1}{2}}) = 0.$$

Ce polynôme possède au plus $\frac{n-1}{2}$ racines positives.

Si n est pair

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \dots + a_n r^{n-2} I_n) d\theta.$$

On cherche les points d'équilibre de $f^0(r)$, on a $r > 0$, on pose $X = r^2$

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow (a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \dots + a_n I_n X^{\frac{n-2}{2}}) = 0.$$

Ce polynôme possède au plus $\frac{n-2}{2}$ racines positives.

Alors le système (II.8) possède au plus $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ cycles limites.

Exemple 2.3. Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x - x^3), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

On utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \\ \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2}. \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (\cos^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta (\cos \theta - r^2 \cos^3 \theta). \end{cases}$$

II.2 Second théorème de moyennisation du premier ordre

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon r(\cos^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta)}{1 - \varepsilon \sin \theta(\cos \theta - r^2 \cos^3 \theta)}.$$

On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x^2), \quad |x| < 1.$$

On pose $x = \sin \theta(\cos \theta - r^2 \cos^3 \theta)$, d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(\cos^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta) - \varepsilon^2 r \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - r^2 \cos^3 \theta)^2.$$

On applique la méthode de moyennisation

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta) d\theta.$$

Ce qui implique que

$$f^0(r) = \frac{r}{8} (4 - 3r^2), \quad r > 0.$$

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On a

$$f^{0'}(r) = \frac{1}{2} - \frac{9}{8}r^2.$$

Pour $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $f^{0'}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -1 \neq 0$, d'après le théorème [II.2.4](#), le système [\(II.9\)](#) pour $|\varepsilon| > 0$, suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$ du système non perturbé [\(II.9\)](#) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $f^{0'}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -1 < 0$, ce cycle limite est stable.

3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre

On considère la question de la bifurcation des solutions T -périodiques du système différentiel

$$\dot{x}(t) = F_0(x, t) + \varepsilon F_1(x, t) + \varepsilon^2 F_2(x, t, \varepsilon), \quad (\text{II.10})$$

de $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^2 , T -périodiques en t et Ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . L'une des principales hypothèses est que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(x, t), \quad (\text{II.11})$$

admet une sous-variété de solutions périodiques de dimension k . Une réponse à cette question est apportée par le théorème de la moyennisation. Soit $x(t, z)$ la solution du système non perturbé (II.11) telle que $x(0, z) = z$. Nous écrivons le linéarisé du système non perturbé le long de la solution périodique $x(t, z)$ comme

$$\dot{y} = D_x F_0(x(t, z), t)y. \quad (\text{II.12})$$

Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (II.12) et par $\zeta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées, c.à.d $\zeta(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Théorème II.3.5. [4]. *Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ ouvert et borné et $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de C^2 . Nous supposons que*

- i) $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$ et que pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (II.11) est T -périodique.
- ii) Pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ il y a une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (II.12), telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit une matrice $k \times (n - k)$ nulle, et dans le coin inférieur droit, la matrice Δ_α $(n - k) \times (n - k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathfrak{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \zeta\left(\frac{1}{T} \int_0^T M^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt\right). \quad (\text{II.13})$$

II.3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre

S'il existe un $a \in V$ avec $\mathfrak{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathfrak{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il y a une solution isolée T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (II.10) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 5. Voir Malkin [15] et Roseau [21]. Pour une preuve courte voir aussi l'article [4].

Si $k = n$, on a le corollaire suivant

Corollaire II.3.1. (*Perturbation d'un système isochrone*) Nous supposons qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $\bar{V} \subset D$ et tel que pour chaque $z \in \bar{V}$, $x(t, z, 0)$ est T -périodique et on considère la fonction $\mathfrak{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt.$$

S'il existe un $a \in V$ avec $\mathfrak{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathfrak{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il y a une solution isolée T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (II.10) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 3.1. On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon (2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \quad (\text{II.14})$$

Si

$$y = \dot{x}, \quad z = \ddot{x}.$$

L'équation (II.14) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon (2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

L'origine est l'unique point singulier du système (II.15) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (II.15) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

II.3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\pm i$ et 1.

On va faire un changement de variable linéaire

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T,$$

telle que dans les nouvelles variables (X, Y, Z) , le système (II.15) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan, c.à.d $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T$, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.16})$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0,$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$, c.à.d

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

II.3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}. \quad (\text{II.18})$$

On remplace (II.15) et (II.18) dans (II.17), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t).$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution du système (II.19) _{$\varepsilon=0$} est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

On utilise la notation du théorème II.3.5. D'après le système (II.19), on a

$$x = (X, Y, Z), \quad F_1(x, t) = \left(0, \tilde{F}, \tilde{F}\right) \quad \text{et} \quad F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Soit $x(t; X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ la solution du système (II.19) telle que

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Il est clair que, le système non perturbé (II.19) avec $\varepsilon = 0$ admet un centre à l'origine dans le plan (X, Y) . Les solutions 2π -périodiques correspondantes sont $x(t; X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$

II.3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre

telle que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour notre système, V et α du théorème II.3.5 sont $V = \{(X, Y, 0), 0 < X^2 + Y^2 < \rho\}$ pour certains ρ arbitraires et $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$.
2. La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (II.19) _{$\varepsilon=0$} est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

Comme $1 - e^{-2\pi} \neq 0$, toutes les hypothèses du théorème II.3.5 sont vérifiées. Par conséquent, nous allons étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes de la fonction $\mathfrak{F}(\alpha)$ donnée par

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \zeta \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(t) F_1(x(t), z_\alpha, t) dt \right), \quad \zeta(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c.à.d

$$\mathfrak{F}(\alpha) = (\mathfrak{F}_1(\alpha), \mathfrak{F}_2(\alpha)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \tilde{F}(x(t; X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt, \end{aligned} \tag{II.20}$$

II.3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F}(x(t; X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt,
 \end{aligned} \tag{II.21}$$

On pose $\mathfrak{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$.

On intègre (II.20) et (II.21), on obtient

$$\begin{cases} f_1(X_0, Y_0) = \frac{-1}{16} (Y_0 + X_0) (6X_0^2 + X_0 + 6Y_0^2 - Y_0), \\ f_2(X_0, Y_0) = \frac{3}{8} (-Y_0X_0^2 + Y_0^2X_0) - \frac{3}{8} (-Y_0^3 + X_0^3) + \frac{1}{8} (Y_0^2 + X_0^2) - \frac{1}{8} Y_0X_0. \end{cases}$$

Si $f_1(X_0^*, Y_0^*) = f_2(X_0^*, Y_0^*) = 0$, on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

On a

$$\det(\partial(f_1, f_2)/\partial(X_0, Y_0))|_{(X_0, Y_0)=(X_0^*, Y_0^*)} = \frac{3}{2048} \neq 0.$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il y a une solution isolée 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle (II.14) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{4},$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

II.3 Troisième théorème de moyennisation du premier ordre

On utilise le **Maple**, pour tracer les cycles limites

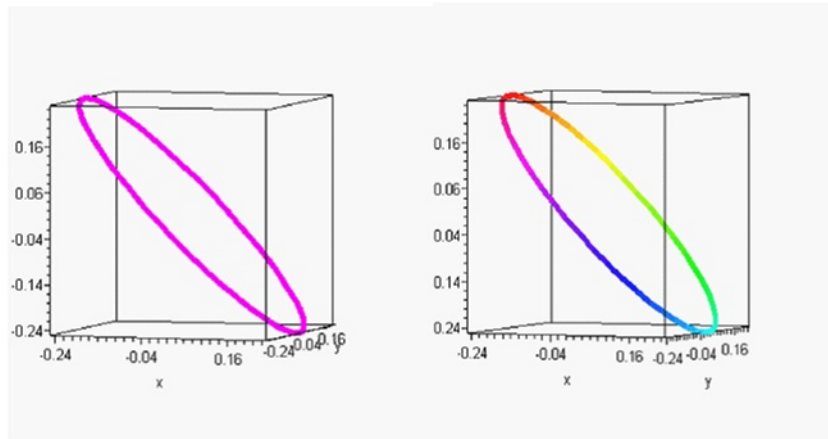


Figure II.1 – Système perturbé pour $\varepsilon = 0.001$ (gauche) et système non perturbé pour $\varepsilon = 0$ (droite)

Si on trace les deux graphes dans un même espace, on trouve que les deux orbites coïncident.

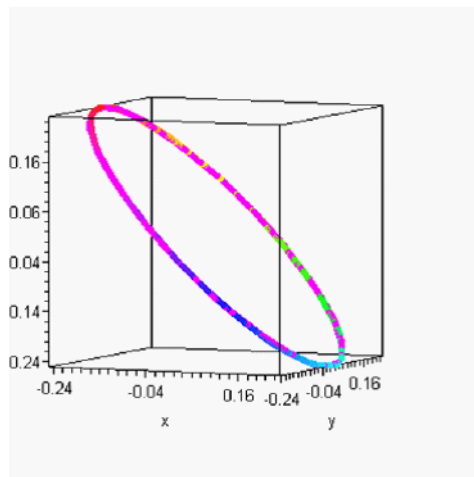


Figure II.2 – Système perturbé. Système non perturbé

Chapitre III

Cycles limites pour une classe d'équations différentielles du troisième ordre

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la théorie de moyennisation pour étudier les cycles limites de l'équation différentielle du troisième ordre de la forme suivante

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0, \quad (\text{III.1})$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et $F \in C^2$ est une fonction 2π -périodique en t . En outre, nous donnons une application aux oscillateurs de mémoire "memory oscillators".

2 Résultat principal

Le but ici est d'utiliser le corollaire [II.3.1](#) du troisième théorème [II.3.5](#) de moyennisation du premier ordre cité dans le chapitre 2, pour étudier les cycles limites de la classe d'équations différentielles du troisième ordre de la forme

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0, \quad (\text{III.2})$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et $F \in C^2$ est une fonction 2π -périodique en t . Notre résultat est le suivant :

Théorème III.2.6. *Nous définissons*

$$\mathfrak{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t - 1) F(A(t), B(t), C(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(A(t), B(t), C(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_3(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(A(t), B(t), C(t), t) dt,$$

où

$$A(t, x_0, y_0, z_0) = x_0 + y_0 \sin t + z_0(1 - \cos t),$$

$$B(t, x_0, y_0, z_0) = y_0 \cos t + z_0 \sin t,$$

$$C(t, x_0, y_0, z_0) = -y_0 \sin t + z_0 \cos t.$$

Si pour tout $(x_0^*, y_0^*, z_0^*) \in \mathbb{R}^3 - \{(x_0^*, 0, 0)\}$ solution du système

$$\mathfrak{F}_k(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (\text{III.3})$$

on a

$$\det \left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*)} \neq 0, \quad (\text{III.4})$$

l'équation différentielle (III.2) admet une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution 2π -périodique $x_0(t)$ donnée par

$$x_0(t) = x_0^* + y_0^* \sin t + z_0^*(1 - \cos t),$$

de $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration. Si $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, l'équation (III.2) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + \varepsilon F(x, y, z, t), \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

$(x, 0, 0)$, $x \in R$ sont les points singuliers du système (III.5) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (III.5) avec $\varepsilon = 0$ est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\pm i$ et 0.

Soit $(x(t), y(t), z(t))$ la solution du système non perturbé (III.5) pour $\varepsilon = 0$, telle que $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$. Elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + y_0 \sin t + z_0(1 - \cos t), \\ y(t) &= y_0 \cos t + z_0 \sin t, \\ z(t) &= -y_0 \sin t + z_0 \cos t. \end{aligned} \tag{III.6}$$

Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période 2π .

On utilise la notation du théorème II.3.5. D'après le système (III.5), on a

$$x = (x, y, z), \quad z = (x_0, y_0, z_0), \quad F_0(x, t) = (y, z, -y),$$

$$F_1(x, t) = (0, 0, -F), \quad \text{et } F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Comme $k = n = 3$, on applique le corolaire II.3.1. La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (III.5) $_{\varepsilon=0}$ pour la solution de (III.6) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin t & 1 - \cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

et

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t & 1 - \cos t \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

D'après le corollaire II.3.1, la fonction $\mathfrak{F}(\alpha)$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(t) F_1(x(t), z_\alpha, t) dt.$$

On trouve

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} (\cos t - 1) F(A(t), B(t), C(t), t) dt, \\ \int_0^{2\pi} \sin t F(A(t), B(t), C(t), t) dt, \\ -\int_0^{2\pi} \cos t F(A(t), B(t), C(t), t) dt, \end{pmatrix}.$$

où

$$\begin{aligned} A(t, x_0, y_0, z_0) &= x_0 + y_0 \sin t + z_0(1 - \cos t), \\ B(t, x_0, y_0, z_0) &= y_0 \cos t + z_0 \sin t, \\ C(t, x_0, y_0, z_0) &= -y_0 \sin t + z_0 \cos t. \end{aligned}$$

On pose $\mathfrak{F}(\alpha) = (\mathfrak{F}_1(x_0, y_0, z_0), \mathfrak{F}_2(x_0, y_0, z_0), \mathfrak{F}_3(x_0, y_0, z_0))$, où les fonctions \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 et \mathfrak{F}_3 sont données par

$$\mathfrak{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t - 1) F(x(t), y(t), z(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(x(t), y(t), z(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_3(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(x(t), y(t), z(t), t) dt,$$

où

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + y_0 \sin t + z_0(1 - \cos t), \\y(t) &= y_0 \cos t + z_0 \sin t, \\z(t) &= -y_0 \sin t + z_0 \cos t.\end{aligned}$$

D'après le corollaire [II.3.1](#), s'il existe $\alpha = (x_0^*, y_0^*, z_0^*) \in \mathbb{R}^3 - \{(x_0^*, 0, 0)\}$ avec

$$\mathfrak{F}(\alpha) = 0 \iff \mathfrak{F}_1(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = \mathfrak{F}_2(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = \mathfrak{F}_3(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = 0,$$

et

$$\det((\partial\mathfrak{F}/\partial\alpha)(\alpha)) \neq 0 \Rightarrow \det(\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3)/\partial(x_0, y_0, z_0))|_{(x_0, y_0, z_0)=(x_0^*, y_0^*, z_0^*)} \neq 0,$$

alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle ([III.2](#)) admet une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution 2π -périodique $x_0(t)$ donnée par

$$x_0(t) = x_0^* + y_0^* \sin t + z_0^*(1 - \cos t),$$

de $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. □

3 Application

Dans le livre [\[25\]](#), l'auteur étudie de systèmes différentiels chaotiques dont les solutions ont des exposants de Lyapunov positifs. En particulier, dans la page 82, il considère les familles des systèmes différentiels simples chaotiques de la forme

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \dot{x} = b_0 + b_1x + b_2x^2, \tag{III.7}$$

qu'il appelle oscillateurs mémoire "memory oscillators". Ici, on s'intéresse à l'étude des solutions périodiques des équations ([III.7](#)) de la forme

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \dot{x} = \varepsilon f(t)(b_0 + b_1x + b_2x^2), \tag{III.8}$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et $f(t)$ est une fonction 2π -périodique en t . On appelle cette classe des équations différentielles du troisième ordre ([III.8](#)) les oscillateurs de

mémoire non-autonomes "the non-autonomous memory oscillators".

Proposition 3.1. *On considère les oscillateurs mémoire généralisés donnés par l'équation différentielle suivante*

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = \varepsilon \sin t (b_0 + b_1 x + b_2 x^2). \quad (\text{III.9})$$

Si $b_2 \neq 0$, $4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2 > 0$ et $-4 + b_1^2 - 4b_0b_2 > 0$, alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle (III.9) admet quatre solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$ pour $k = 1, \dots, 4$, qui tendent vers les solutions 2π -périodiques $x_k(t)$ données par

$$x_1(t) = \frac{-b_1 - 2\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2} - \frac{2}{b_2} \sin t + \frac{\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{b_2} (1 - \cos t),$$

$$x_2(t) = \frac{-b_1 + 2\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2} - \frac{2}{b_2} \sin t - \frac{\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{b_2} (1 - \cos t),$$

$$x_3(t) = -\frac{b_1}{2b_2} - \frac{2 + \sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}}{3b_2} \sin t,$$

$$x_4(t) = -\frac{b_1}{2b_2} - \frac{2 - \sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}}{3b_2} \sin t,$$

de $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration. On applique le théorème III.2.6 avec

$$F(x, y, z, t) = z - \sin t (b_0 + b_1 x + b_2 x^2).$$

Pour le système de cet exemple, les $\mathfrak{F}_k(x_0, y_0, z_0)$, pour $k = 1, \dots, 3$ du théorème III.2.6 sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4}(2b_1y_0 + 2z_0 + b_2y_0(4x_0 + 5z_0)), \\ \mathfrak{F}_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{8}(-4b_0 - 4y_0 - 4b_1(x_0 + z_0) - b_2(4x_0^2 + 3y_0^2 + 8x_0z_0 + 5z_0^2)), \\ \mathfrak{F}_3(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4}(2 + b_2y_0)z_0. \end{array} \right.$$

Si $\mathfrak{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \mathfrak{F}_2(x_0, y_0, z_0) = \mathfrak{F}_3(x_0, y_0, z_0) = 0$, on trouve six valeurs (x_0^*, y_0^*, z_0^*) données

par

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-b_1 - 2\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2}, \frac{-2}{b_2}, \frac{\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{b_2} \right), \\ & \left(\frac{-b_1 + 2\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2}, \frac{-2}{b_2}, \frac{-\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{b_2} \right), \\ & \left(-\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2}, 0, 0 \right), \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2}, 0, 0 \right), \\ & \left(-\frac{b_1}{2b_2}, -\frac{2 + \sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}}{3b_2}, 0 \right), \left(-\frac{b_1}{2b_2}, \frac{-2 + \sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}}{3b_2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Les valeurs 3 et 4 sont des points d'équilibre de l'équation différentielle $\ddot{x} + \dot{x} = 0$. On ne les considère pas. Le jacobien

$$\det \left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*)},$$

pour ces quatre autres valeurs (x_0^*, y_0^*, z_0^*) est respectivement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(-4 + b_1^2 - 4b_0b_2), \\ & \frac{1}{8}(-4 + b_1^2 - 4b_0b_2), \\ & \frac{1}{72}(4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2)\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}\right), \\ & \frac{1}{72}(4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2)\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}\right). \end{aligned}$$

Si $b_2 \neq 0$, $4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2 > 0$, et $-4 + b_1^2 - 4b_0b_2 > 0$, alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle (III.9) admet quatre solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$ pour $k = 1, \dots, 4$, qui tendent vers les solutions 2π -périodiques $x_k(t)$ données par

$$x_1(t) = \frac{-b_1 - 2\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2} - \frac{2}{b_2} \sin t + \frac{\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{b_2} (1 - \cos t),$$

$$x_2(t) = \frac{-b_1 + 2\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2} - \frac{2}{b_2} \sin t - \frac{\sqrt{-4 + b_1^2 - 4b_0b_2}}{b_2} (1 - \cos t),$$

$$x_3(t) = -\frac{b_1}{2b_2} - \frac{2 + \sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}}{3b_2} \sin t,$$

$$x_4(t) = -\frac{b_1}{2b_2} - \frac{2 - \sqrt{4 + 3b_1^2 - 12b_0b_2}}{3b_2} \sin t,$$

de $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Chapitre IV

Cycles limites pour une première classe d'équations différentielles du sixième ordre

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la théorie de moyennisation pour étudier les cycles limites de l'équation différentielle du sixième ordre de la forme suivante

$$x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)\ddot{x} + (p^2 + q^2 + pq)\dot{x} + pqx = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\dot{x}}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{\dot{x}}}, t), \quad (\text{IV.1})$$

où p et q sont des nombres rationnels différents de 1, 0, -1 , et $p \neq q$, ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction non-linéaire non autonome périodique en t . De plus nous proposons quelques applications.

2 Résultat principal

On considère l'équation différentielle ordinaire du sixième ordre de la forme

$$x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)\ddot{x} + (p^2 + q^2 + p^2q^2)\dot{x} + p^2q^2x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\dot{x}}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{\dot{x}}}, t). \quad (\text{IV.2})$$

Si

$$y = \dot{x}, \quad z = \ddot{x} \quad \text{et} \quad u = \ddot{x}, \quad v = \ddot{\dot{x}}, \quad w = \ddot{\ddot{x}}.$$

L'équation (IV.2) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = -p^2q^2x - (p^2 + q^2 + p^2q^2)z - (1 + p^2 + q^2)w + \varepsilon F(x, y, z, u, v, w, t). \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

L'origine est l'unique point singulier du système (IV.3) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (IV.3) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p^2q^2 & 0 & -p^2 - q^2 - p^2q^2 & 0 & -1 - p^2 - q^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$, $\pm pi$ et $\pm qi$.

On va faire un changement de variable linéaire

$$(X, Y, Z, U, V, W)^T = B(x, y, z, u, v, w)^T,$$

telle que dans les nouvelles variables (X, Y, Z, U, V, W) , le système (IV.3) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan c.à.d $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V}, \dot{W})^T = J(X, Y, Z, U, V, W)^T$.

Si on calcule Jordan, on constate qu'il ya un cas :

**2.1 Cas 1 : p et q sont des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$,
et $p \neq q$.**

Dans ce cas, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.4})$$

On a

$$B_1 A B_1^{-1} = J \Rightarrow B_1 A - J B_1 = 0,$$

d'où

$$B_1 = \begin{pmatrix} -p^2 q^2 & 0 & -p^2 - q^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p^2 q^2 & 0 & p^2 + q^2 & 0 & 1 \\ 0 & q^2 & 0 & 1 + q^2 & 0 & 1 \\ p q^2 & 0 & p(1 + q^2) & 0 & p & 0 \\ 0 & p^2 & 0 & 1 + p^2 & 0 & 1 \\ p^2 q & 0 & q(1 + p^2) & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -p^2q^2\dot{x} + (-p^2 - q^2)\dot{z} - \dot{v}, \\ \dot{Y} = p^2q^2\dot{y} + (p^2 + q^2)\dot{u} + \dot{w}, \\ \dot{Z} = q^2\dot{y} + (1 + q^2)\dot{u} + \dot{w}, \\ \dot{U} = pq^2\dot{x} + p(1 + p^2)\dot{z} + p\dot{v}, \\ \dot{V} = p^2\dot{y} + (1 + p^2)\dot{u} + \dot{w}, \\ \dot{W} = p^2q\dot{x} + q(1 + p^2)\dot{z} + q\dot{v}. \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B_1^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \frac{1}{pq}[pq(p-q)(p+q)X + q(q-1)(q+1)U + p(p-1)(1+p)W] \\ (p-q)(p+q)Y + (q-1)(q+1)Z - (p-1)(p+1)V \\ -(p-q)(p+q)X + q(p-1)(p+1)W - p(q-1)(q+1)U \\ -(p-q)(p+q)Y - p^2(q-1)(q+1)Z + q^2(p-1)(p+1)V \\ (p-q)(p+q)X + p^3(q-1)(q+1)U + q^3(p-1)(p+1)W \\ (p-q)(p+q)Y + p^4(q-1)(q+1)Z - q^4(p-1)(p+1)V \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.6})$$

où

$$K = \frac{1}{(-1 + p^2)(-1 + q^2)(p^2 - q^2)}.$$

On remplace (IV.3) et (IV.6) dans (IV.5), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X - \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, W, t), \\ \dot{Z} = -pU + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, W, t), \\ \dot{U} = pZ, \\ \dot{V} = -qW + \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, W, t), \\ \dot{W} = qV, \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, W, t) = F(x, y, z, u, v, w, t).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = -pU, \\ \dot{U} = pZ, \\ \dot{V} = -qW, \\ \dot{W} = qV. \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

La solution du système (IV.8) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = e^{Jt} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix},$$

telle que

$$e^{Jt} = M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{r}{s}t) & -\sin(\frac{r}{s}t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\frac{r}{s}t) & \cos(\frac{r}{s}t) \end{pmatrix},$$

avec $p = m/n, q = r/s$, où m, n, s, r sont des nombres entiers positifs, $p \neq q$, $(m, n) = (r, s) = 1$, d'où

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 \cos(\frac{m}{n}t) - U_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ U_0 \cos(\frac{m}{n}t) + Z_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ V_0 \cos(\frac{r}{s}t) - W_0 \sin(\frac{r}{s}t) \\ W_0 \cos(\frac{r}{s}t) + V_0 \sin(\frac{r}{s}t) \end{pmatrix},$$

sauf à son origine. Par conséquent, la dimension de l'ensemble des orbites périodiques est $6 \Rightarrow k = 6$.

Pour énoncer le résultat principal de ce cas, nous avons besoin de quelques préliminaires. Nous définissons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \cos(\frac{m}{n}t) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \sin(\frac{m}{n}t) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \cos(\frac{r}{s}t) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_6(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \sin(\frac{r}{s}t) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \end{aligned} \tag{IV.9}$$

avec $p = m/n, q = r/s$, où m, n, s, r sont des nombres entiers positifs, $p \neq q$, $(m, n) = (r, s) = 1$,

soit k est le plus petit commun multiple de n et s , et

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \frac{pq(p-q)(p+q)X + q(q-1)(q+1)U + p(p-1)(1+p)W}{pq(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)}, \\
 b(t) &= \frac{(p-q)(p+q)Y + (q-1)(q+1)Z - (p-1)(p+1)V}{(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)}, \\
 c(t) &= \frac{-(p-q)(p+q)X + q(p-1)(p+1)W - p(q-1)(q+1)U}{(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)}, \\
 d(t) &= \frac{-(p-q)(p+q)Y - p^2(q-1)(q+1)Z + q^2(p-1)(p+1)V}{(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)}, \\
 e(t) &= \frac{(p-q)(p+q)X + p^3(q-1)(q+1)U + q^3(p-1)(p+1)W}{(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)}, \\
 f(t) &= \frac{(p-q)(p+q)Y + p^4(q-1)(q+1)Z - q^4(p-1)(p+1)V}{(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)},
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 X(t) &= X_0 \cos t - Y_0 \sin t, & Y(t) &= Y_0 \cos t + X_0 \sin t, \\
 Z(t) &= Z_0 \cos(pt) - U_0 \sin(pt), & U(t) &= U_0 \cos(pt) + Z_0 \sin(pt), \\
 V(t) &= V_0 \cos(qt) - W_0 \sin(qt), & W(t) &= W_0 \cos(qt) + V_0 \sin(qt).
 \end{aligned}$$

Notre résultat principal de ce cas est le théorème suivant

Théorème IV.2.7. *On suppose que p et q sont des nombres rationnels différents de 1, 0, -1, et $p \neq q$. Si la fonction F est $2\pi k$ -périodique en t , tels que pour tout $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$ solution du système,*

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 6, \tag{IV.10}$$

et

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5, \mathfrak{F}_6)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*)} \neq 0, \tag{IV.11}$$

l'équation différentielle (IV.2) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution

$x_0(t)$ de $x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)x^{(4)} + (p^2 + q^2 + p^2q^2)x^{(2)} + p^2q^2x = 0$ donnée par

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{pq(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)} (qU_0^* \cos(pt)) + qZ_0^* \sin(pt) - q^3U_0^* \cos(pt) \\ & -q^3Z_0^* \sin(pt) - p^3qX_0^* \cos t + p^3qY_0^* \sin t + pq^3X_0^* \cos t - pq^3Y_0^* \sin t \\ & -pW_0^* \cos(qt) - pV_0^* \sin(qt) + p^3W_0^* \cos(qt) + p^3V_0^* \sin(qt), \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi k$.

Démonstration. On utilise la notation du théorème II.3.5, d'après le système (IV.7), on a

$$\begin{aligned} x &= (X, Y, Z, U, V, W), \quad F_1(x, t) = \left(0, -\tilde{F}, \tilde{F}, 0, \tilde{F}, 0\right), \\ \text{et } F_2(x, t, \varepsilon) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \Omega = \mathbb{R}^6. \end{aligned}$$

Soit $x(t; X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, \varepsilon)$ la solution du système (IV.7) telle que

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0).$$

Pour $\varepsilon = 0$, le système (IV.7) a un centre linéaire à l'origine. En utilisant la notation du corollaire II.3.1, la solution périodique $x(t, z)$ de ce centre avec $z = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0)$ est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 \cos(\frac{m}{n}t) - U_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ U_0 \cos(\frac{m}{n}t) + Z_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ V_0 \cos(\frac{r}{s}t) - W_0 \sin(\frac{r}{s}t) \\ W_0 \cos(\frac{r}{s}t) + V_0 \sin(\frac{r}{s}t) \end{pmatrix},$$

Cet ensemble de solutions périodiques est de dimension 6, ayant toutes une période $2\pi k$.

La matrice fondamentale le long d'une solution périodique $M(t)$ du système (IV.7) avec $\varepsilon = 0$

est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(pt) & -\sin(pt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(pt) & \cos(pt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(qt) & -\sin(qt) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(qt) & \cos(qt) \end{pmatrix},$$

La matrice inverse de cette matrice est

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(pt) & \sin(pt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(pt) & \cos(pt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(qt) & \sin(qt) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(qt) & \cos(qt) \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant les zéros $\alpha = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*)$ du système $\mathfrak{F}(\alpha) = 0$, la fonction $\mathfrak{F}(\alpha)$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} M^{-1}(t) F_1(x(t), z_\alpha, t) dt.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \cos\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \sin\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \cos\left(\frac{r}{s}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_6(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \sin\left(\frac{r}{s}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \end{aligned}$$

avec $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)$ et $f(t)$ sont comme dans l'énoncé du théorème [IV.2.7](#).

Pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, si les zéros $\alpha = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*) \in \mathbb{R}^6 - \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$ du système $\mathfrak{F}(\alpha) = 0$ sont simple alors elles donnent des orbites pério-

diques, c'est à dire si

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5, \mathfrak{F}_6)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0)=(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*)} \neq 0, \quad (\text{IV.13})$$

pour chaque racine simple $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*)$ du système $\mathfrak{F}(\alpha) = 0$, on obtient une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution $x_0(t)$ de $x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)x^{(4)} + (p^2 + q^2 + p^2q^2)x^{(2)} + p^2q^2x = 0$ donnée par

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{pq(-1+p^2)(-1+q^2)(p^2-q^2)} (qU_0^* \cos(pt)) + qZ_0^* \sin(pt) - q^3U_0^* \cos(pt) \\ & -q^3Z_0^* \sin(pt) - p^3qX_0^* \cos t + p^3qY_0^* \sin t + pq^3X_0^* \cos t - pq^3Y_0^* \sin t \\ & -pW_0^* \cos(qt) - pV_0^* \sin(qt) + p^3W_0^* \cos(qt) + p^3V_0^* \sin(qt), \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi k$. \square

Exemple 2.1. On suppose que $p = 2$, $q = 3$, et la fonction F dans le système (IV.3) est

$$F(x, y, z, u, v, w, t) = (x^2 - 1) \sin t ,$$

Pour le système de cet exemple, les $\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0)$, pour $k = 1, \dots, 6$, du théorème IV.2.7 sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = -\frac{1}{57600}W_0^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{57600}V_0^2 - \frac{1}{1536}Y_0^2 - \frac{1}{3600}U_0^2 \\ \quad - \frac{1}{4608}X_0^2 - \frac{1}{3600}Z_0^2 + \frac{1}{11520}X_0W_0 - \frac{1}{11520}Y_0V_0, \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{1}{2304}X_0Y_0 - \frac{1}{11520}Y_0W_0 - \frac{1}{11520}X_0V_0, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{1}{1440}U_0Y_0 + \frac{1}{14400}U_0V_0 - \frac{1}{14400}Z_0W_0, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{1}{1440}U_0W_0 - \frac{1}{1440}Z_0Y_0 + \frac{1}{14400}Z_0V_0, \\ \mathfrak{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{1}{2304}X_0Y_0 - \frac{1}{5760}Y_0W_0 + \frac{1}{3600}U_0Z_0, \\ \mathfrak{F}_6(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = -\frac{1}{4608}Y_0^2 + \frac{1}{7200}U_0^2 - \frac{1}{4608}X_0^2 - \frac{1}{7200}Z_0^2 + \frac{1}{5760}Y_0V_0. \end{array} \right.$$

Si $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6 = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
 & (16\sqrt{3}, 0, 0, 20\sqrt{3}, 0, 0), \quad (-16\sqrt{3}, 0, 0, -20\sqrt{3}, 0, 0), \\
 & (16\sqrt{3}, 0, 0, -20\sqrt{3}, 0, 0), \quad (-16\sqrt{3}, 0, 0, 20\sqrt{3}, 0, 0), \\
 & (24\sqrt{2}, 8\sqrt{6}, 0, 0, 20\sqrt{6}, 60\sqrt{2}), \quad (-24\sqrt{2}, 8\sqrt{6}, 0, 0, 20\sqrt{6}, -60\sqrt{2}), \\
 & (24\sqrt{2}, -8\sqrt{6}, 0, 0, -20\sqrt{6}, 60\sqrt{2}), \quad (-24\sqrt{2}, -8\sqrt{6}, 0, 0, -20\sqrt{6}, -60\sqrt{2}), \\
 & \left(0, \frac{32}{7}\sqrt{42}, 0, 0, -\frac{40}{7}\sqrt{42}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{32}{7}\sqrt{42}, 0, 0, \frac{40}{7}\sqrt{42}, 0\right), \\
 & \left(0, \frac{16}{7}\sqrt{21}, 0, 20\sqrt{3}, -\frac{160}{7}\sqrt{21}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{16}{7}\sqrt{21}, 0, 20\sqrt{3}, \frac{160}{7}\sqrt{21}, 0\right), \\
 & \left(0, \frac{16}{7}\sqrt{21}, 0, -20\sqrt{3}, -\frac{160}{7}\sqrt{21}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{16}{7}\sqrt{21}, 0, -20\sqrt{3}, \frac{160}{7}\sqrt{21}, 0\right), \\
 & \left(0, \frac{16}{11}\sqrt{33}, \frac{60}{11}\sqrt{33}, 0, \frac{160}{11}\sqrt{33}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{16}{11}\sqrt{33}, -\frac{60}{11}\sqrt{33}, 0, -\frac{160}{11}\sqrt{33}, 0\right), \\
 & \left(0, \frac{16}{11}\sqrt{33}, -\frac{60}{11}\sqrt{33}, 0, \frac{160}{11}\sqrt{33}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{16}{11}\sqrt{33}, \frac{60}{11}\sqrt{33}, 0, -\frac{160}{11}\sqrt{33}, 0\right).
 \end{aligned}$$

Le déterminant (IV.13) en ces solutions prend les valeurs

$$\begin{aligned}
 & \frac{-1}{1433272320000}, \frac{-1}{1433272320000}, \frac{-1}{1433272320000}, \frac{-1}{1433272320000}, \frac{-1}{955514880000}, \\
 & \frac{-1}{955514880000}, \frac{-1}{955514880000}, \frac{-1}{955514880000}, \frac{1}{278691840000}, \frac{1}{278691840000}, \\
 & \frac{1}{30098718720000}, \frac{1}{30098718720000}, \frac{1}{30098718720000}, \frac{1}{30098718720000}, \\
 & \frac{1}{19269550080000}, \frac{1}{19269550080000}, \frac{1}{19269550080000}, \frac{1}{19269550080000}.
 \end{aligned}$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle du sixième ordre (IV.2) admet dix-huit solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$ pour $k = 1, \dots, 18$, qui tendent vers les solutions 2π -périodiques $x_k(t)$ données par

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(t), \quad x_2(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) - \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos t, \\
 x_3(t) &= \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(t), \quad x_4(t) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) - \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos t, \\
 x_5(t) &= \sqrt{2}\cos t - \frac{1}{3}\sqrt{6}\sin t + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(3t) + \frac{1}{6}\sqrt{6}\sin(3t), \\
 x_6(t) &= -\sqrt{2}\cos t - \frac{1}{3}\sqrt{6}\sin t - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(3t) + \frac{1}{6}\sqrt{6}\sin(3t), \\
 x_7(t) &= \sqrt{2}\cos t + \frac{1}{3}\sqrt{6}\sin t + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(3t) - \frac{1}{6}\sqrt{6}\sin(3t), \\
 x_8(t) &= \sqrt{2}\cos t + \frac{1}{3}\sqrt{6}\sin t - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(3t) - \frac{1}{6}\sqrt{6}\sin(3t), \\
 x_9(t) &= -\frac{4}{21}\sqrt{42}\sin t - \frac{1}{21}\sqrt{42}\sin(3t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{10}(t) &= \frac{4}{21}\sqrt{42}\sin t + \frac{1}{21}\sqrt{42}\sin(3t), \\
x_{11}(t) &= -\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) - \frac{2}{21}\sqrt{21}\sin t - \frac{4}{21}\sqrt{21}\sin(3t), \\
x_{12}(t) &= -\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) + \frac{2}{21}\sqrt{21}\sin t + \frac{4}{21}\sqrt{21}\sin(3t), \\
x_{13}(t) &= \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) - \frac{2}{21}\sqrt{21}\sin t - \frac{4}{21}\sqrt{21}\sin(3t), \\
x_{14}(t) &= \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(2t) + \frac{2}{21}\sqrt{21}\sin t + \frac{4}{21}\sqrt{21}\sin(3t), \\
x_{15}(t) &= -\frac{2}{11}\sqrt{33}\sin(2t) - \frac{2}{33}\sqrt{33}\sin t + \frac{4}{33}\sqrt{33}\sin(3t), \\
x_{16}(t) &= \frac{2}{11}\sqrt{33}\sin(2t) + \frac{2}{33}\sqrt{33}\sin t - \frac{4}{33}\sqrt{33}\sin(3t), \\
x_{17}(t) &= \frac{2}{11}\sqrt{33}\sin(2t) - \frac{2}{33}\sqrt{33}\sin t + \frac{4}{33}\sqrt{33}\sin(3t), \\
x_{18}(t) &= -\frac{2}{11}\sqrt{33}\sin(2t) + \frac{2}{33}\sqrt{33}\sin t - \frac{4}{33}\sqrt{33}\sin(3t),
\end{aligned}$$

de $x^{(6)} + 14x^{(4)} + 49x^{(2)} + 36x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, $q = 2$, et la fonction F dans le système (IV.3) est

$$F(x, y, z, u, v, w, t) = (x - 1)\sin(t).$$

Pour le système de cet exemple, les $\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0)$, pour $k = 1, \dots, 6$ du théorème IV.2.7 sont

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{90}W_0, \\
\mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = -\frac{1}{90}V_0, \\
\mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{8}{45}Z_0, \\
\mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = -\frac{8}{45}U_0, \\
\mathfrak{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{-1}{9}Y_0, \\
\mathfrak{F}_6(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = \frac{1}{9}X_0.
\end{array} \right.$$

Si

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 6.$$

On trouve

$$(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*) = (0, 0, 0, 0, 0, -45).$$

Le déterminant (IV.13) en cette solution prend le valeur

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5, \mathfrak{F}_6)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*)} = \frac{-16}{332150625}.$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il y a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du sixième ordre (IV.2).

Enfin, on remplace les solutions $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*)$ dans (IV.12), on obtient

$$x_1(t) = -2 \cos(2t),$$

de $x^{(6)} + \frac{21}{4}x^{(4)} + \frac{21}{4}x^{(2)} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 6. Notons que le théorème II.3.5 de moyennisation ne peut pas être appliqué aux deux cas suivants

1. Cas $p = q$, et $p, q \in \mathbb{Q} - \{1, 0, -1\}$.
2. Cas $p = q = 1$, ou $p = q = 0$.

Chapitre VI

Solutions périodiques pour une deuxième classe d'équations différentielles du sixième ordre

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la théorie de moyennisation pour étudier les cycles limites de l'équation différentielle du sixième ordre de la forme suivante

$$x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + A\ddot{x} - B\ddot{x} + C\dot{x} + Sx + \lambda\mu p^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, x^{(5)}, t),$$

avec $A = p^2 + 1 + \lambda\mu$, $B = \mu + (\mu + \lambda)p^2 + \lambda$, $C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2)$, $S = p^2(\lambda + \mu)$, où λ et μ sont deux paramètres réels, p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction non-linéaire, non autonome et T -périodique en t . De plus nous proposons quelques applications.

2 Résultat principal

On considère l'équation différentielle ordinaire du sixième ordre de la forme

$$x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + A\ddot{x} - B\ddot{x} + C\dot{x} + Sx + \lambda\mu p^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, x^{(5)}, t), \quad (\text{VI.1})$$

où $A = p^2 + 1 + \lambda\mu$, $B = \mu + (\mu + \lambda)p^2 + \lambda$, $C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2)$, $S = p^2(\lambda + \mu)$.

Si

$$y = \dot{x}, \quad z = \ddot{x} \quad \text{et} \quad u = \ddot{x}, \quad v = \ddot{x}, \quad w = x^{(5)}.$$

L'équation (VI.1) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = -\lambda\mu p^2 x - Sy - Cz + Bu - Av + (\lambda + \mu)w + \varepsilon F(x, y, z, u, v, w, t). \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

où

$$A = p^2 + 1 + \lambda\mu, \quad B = \mu + (\mu + \lambda)p^2 + \lambda, \quad C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2), \quad S = p^2(\lambda + \mu).$$

L'origine est l'unique point singulier du système (VI.2) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (VI.2) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda\mu p^2 & -S & -C & B & -A & \lambda + \mu \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.3})$$

où $A = p^2 + 1 + \lambda\mu$, $B = \mu + (\mu + \lambda)p^2 + \lambda$, $C = p^2 + \lambda\mu(1 + p^2)$, $S = p^2(\lambda + \mu)$.

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$, $\pm pi$, λ et μ .

On va faire un changement de variable linéaire

$$(X, Y, Z, U, V, W)^T = B(x, y, z, u, v, w)^T,$$

telle que dans les nouvelles variables (X, Y, Z, U, V, W) , le système (VI.2) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan c.à.d $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V}, \dot{W})^T = J(X, Y, Z, U, V, W)^T$.

Si on calcule Jordan, on constate qu'il ya trois cas :

2.1 Cas 1 : p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda\mu \neq 0$.

Dans ce cas, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.4})$$

On a

$$B_1 A B_1^{-1} = J \Rightarrow B_1 A - J B_1 = 0,$$

d'où

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\lambda\mu p & p\mu + \lambda p & -\lambda\mu p - p & p\mu + \lambda p & -p & 0 \\ 0 & \mu\lambda & -\mu - \lambda & 1 + \mu\lambda & -\mu - \lambda & 1 \\ 0 & \lambda\mu p^2 & -p^2\mu - \lambda p^2 & p^2 + \mu\lambda & -\mu - \lambda & 1 \\ \lambda\mu p^2 & -p^2\mu - \lambda p^2 & p^2 + \mu\lambda & -\mu - \lambda & 1 & 0 \\ p^2\mu & -p^2 & \mu + \mu p^2 & -1 - p^2 & \mu & -1 \\ -p^2\lambda & p^2 & -\lambda p^2 - \lambda & 1 + p^2 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -\lambda\mu pq^2\dot{x} + pq^2(\mu + \lambda)\dot{y} - p(\lambda\mu + q^2)\dot{z} + p(\mu + \lambda)\dot{u} - p\dot{v}, \\ \dot{Y} = \lambda\mu q^2\dot{y} - q^2(\mu + \lambda)\dot{z} + (q^2 + \mu\lambda)\dot{u} - (\mu + \lambda)\dot{v} + \dot{w}, \\ \dot{Z} = \lambda\mu p^2\dot{y} - p^2(\mu + \lambda)\dot{z} + (p^2 + \lambda\mu)\dot{u} - (\mu + \lambda)\dot{v} + \dot{w}, \\ \dot{U} = \lambda\mu p^2 q\dot{x} - qp^2(\mu + \lambda)\dot{y} + q(\lambda\mu + p^2)\dot{z} - q(\mu + \lambda)\dot{u} + q\dot{v}, \\ \dot{V} = \mu p^2 q^2\dot{x} - p^2 q^2\dot{y} + \mu(p^2 + q^2)\dot{z} - (p^2 + q^2)\dot{u} + \mu\dot{v} - \dot{w}, \\ \dot{W} = -\lambda p^2 q^2\dot{x} + q^2 p^2\dot{y} - \lambda(q^2 + p^2)\dot{z} + (p^2 + q^2)\dot{u} - \lambda\dot{v} + \dot{w}. \end{cases} \quad (\text{VI.5})$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B_1^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(\lambda\mu - p^2)X}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)p} - \frac{(\lambda + \mu)Y}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} + \frac{(\lambda + \mu)Z}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)} \\ &\quad + \frac{(\lambda\mu - 1)U}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)}, \\ y(t) &= -\frac{p(\lambda + \mu)X}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} - \frac{(\lambda\mu - p^2)Y}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} + \frac{(\lambda\mu - 1)Z}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)} \\ &\quad - \frac{(\lambda + \mu)U}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)}, \\ z(t) &= -\frac{(\lambda\mu - p^2)pX}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} + \frac{(\lambda + \mu)p^2Y}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} - \frac{(\lambda + \mu)Z}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)} \\ &\quad + \frac{(\lambda\mu - 1)U}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)}, \\ u(t) &= \frac{p^3(\lambda + \mu)X}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} + \frac{p^2(\lambda\mu - p^2)Y}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} - \frac{(\lambda\mu - 1)Z}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)} \\ &\quad - \frac{(\lambda + \mu)U}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)}, \\ v(t) &= \frac{p^3(\lambda\mu - p^2)X}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)p} - \frac{p^4(\lambda + \mu)Y}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} + \frac{(\lambda + \mu)Z}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)} \\ &\quad + \frac{(\lambda\mu - 1)U}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)}, \\ w(t) &= -\frac{p^5(\lambda + \mu)X}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} - \frac{p^4(\lambda\mu - p^2)Y}{(\mu^2 + p^2)(-1 + p^2)(p^2 + \lambda^2)} + \frac{(\lambda\mu - 1)Z}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)} \\ &\quad - \frac{(\lambda + \mu)U}{(\mu^2 + 1)(-1 + p^2)(\lambda^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

On remplace (VI.2) et (VI.6) dans (VI.5), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \\ \dot{Z} = -pU + \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \\ \dot{U} = pZ, \\ \dot{V} = \lambda V - \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \\ \dot{W} = \mu W + \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \end{cases} \quad (\text{VI.7})$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, W, t) = F(x, y, z, u, v, w, t).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = -pU, \\ \dot{U} = pZ, \\ \dot{V} = \lambda V, \\ \dot{W} = \mu W. \end{cases} \quad (\text{VI.8})$$

La solution du système (VI.8) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = e^{Jt} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix},$$

telle que

$$e^{Jt} = M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

avec $p = m/n$, où m, n , sont des nombres entiers positifs, d'où

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 \cos(\frac{m}{n}t) - U_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ U_0 \cos(\frac{m}{n}t) + Z_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.9})$$

sauf à son origine. Par conséquent, la dimension de l'ensemble des orbites périodiques est $4 \Rightarrow k = 4$. Pour énoncer le résultat principal de ce cas, nous avons besoin de quelques préliminaires. Nous définissons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos(\frac{m}{n}t) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin(\frac{m}{n}t) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \end{aligned} \quad (\text{VI.10})$$

avec $p = m/n$, où m, n sont des nombres entiers positifs, et

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \frac{(\lambda\mu-p^2)X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)p} - \frac{(\lambda+\mu)Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} + \frac{(\lambda+\mu)Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)} \\
 &+ \frac{(\lambda\mu-1)U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)}, \\
 b(t) &= -\frac{p(\lambda+\mu)X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} - \frac{(\lambda\mu-p^2)Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} + \frac{(\lambda\mu-1)Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)} \\
 &- \frac{(\lambda+\mu)U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)}, \\
 c(t) &= -\frac{(\lambda\mu-p^2)pX}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} + \frac{(\lambda+\mu)p^2Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} - \frac{(\lambda+\mu)Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)} \\
 &+ \frac{(\lambda\mu-1)U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)}, \\
 d(t) &= \frac{p^3(\lambda+\mu)X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} + \frac{p^2(\lambda\mu-p^2)Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} - \frac{(\lambda\mu-1)Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)} \\
 &- \frac{(\lambda+\mu)U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)}, \\
 e(t) &= \frac{p^3(\lambda\mu-p^2)X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)p} - \frac{p^4(\lambda+\mu)Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} + \frac{(\lambda+\mu)Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)} \\
 &+ \frac{(\lambda\mu-1)U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)}, \\
 f(t) &= -\frac{p^5(\lambda+\mu)X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} - \frac{p^4(\lambda\mu-p^2)Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)} + \frac{(\lambda\mu-1)Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)} \\
 &- \frac{(\lambda+\mu)U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)(\lambda^2+1)},
 \end{aligned} \tag{VI.11}$$

où

$$\begin{aligned}
 X(t) &= X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \quad Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t, \\
 Z(t) &= Z_0 \cos(pt) - U_0 \sin(pt), \quad U(t) = U_0 \cos(pt) + Z_0 \sin(pt).
 \end{aligned}$$

Notre résultat principal de ce cas est le théorème suivant

Théorème VI.2.8. *On suppose que p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda\mu \neq 0$. Si la fonction F est $2\pi n$ -périodique en t , tels que pour tout $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) \in \mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$ solution du système*

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 4, \tag{VI.12}$$

et

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0)=(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \neq 0, \tag{VI.13}$$

l'équation différentielle (VI.1) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution

$x_0(t)$ de $x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + Ax'''' - Bx''' + Cx'' + Sx' + \lambda\mu p^2x = 0$ donnée par

$$\begin{aligned}
 x_0(t) = & \frac{1}{(\mu^2+p^2)(\lambda^2+p^2)(\mu^2+1)(\lambda^2+1)(-1+p^2)^p} (-p^2U_0\mu^2\lambda^2 \cos t + p^2Y_0\mu^2\lambda^2 \sin t & (VI.14) \\
 & -pY_0\mu^3\lambda^2 \cos t - p^5U_0 \cos(pt) - p^3Z_0\lambda^3 \cos(pt) - pX_0\mu \sin(t) \\
 & -pY_0\lambda^3\mu^2 \cos t - p^5U_0\lambda \sin(pt) - p^5U_0\mu \sin(pt) + pZ_0\mu^3\lambda^2 \cos(pt) \\
 & -pY_0\lambda\mu^2 \cos t - pU_0\lambda^2\mu^2 \cos(pt) - pZ_0\mu^2\lambda^2 \sin(pt) - p^3U_0\lambda^3 \sin(pt) \\
 & -p^3Z_0\lambda^2 \sin(pt) - p^3Z_0\mu^2 \sin(pt) - p^3U_0\lambda^2 \cos(pt) - p^3U_0\mu^3 \sin(pt) \\
 & +p^5Z_0\lambda \cos(pt) + p^5Z_0\mu \cos(pt) + p^3Z_0\mu^3 \cos(pt) - pY_0\mu^3 \cos t \\
 & +p^3Z_0\mu\lambda^2 \cos(pt) - pU_0\mu^3\lambda^2 \sin(pt) - p^3U_0\mu\lambda^2 \sin(pt) + pZ_0\mu^2\lambda^3 \cos(pt) \\
 & +p^3U_0\mu\lambda^3 \cos(pt) - pU_0\mu^2\lambda^3 \sin(pt) - p^3U_0\mu^2\lambda \sin(pt) + pU_0\mu^3\lambda^3 \cos(pt) \\
 & +p^3Z_0\mu\lambda^3 \sin(pt) - pX_0\mu^2\lambda^3 \sin t - Y_0\mu\lambda^3 \sin(t) - pX_0\mu^3 \sin t - p^3U_0\mu^2 \cos(pt) \\
 & +p^3U_0\mu^3\lambda \cos(pt) + p^5U_0\mu\lambda \cos(pt) + pZ_0\lambda^3\mu^3 \sin(pt) + p^3Z_0\mu^3\lambda \sin(pt) \\
 & +p^3Z_0\mu^2\lambda \cos(pt) + p^5Z_0\mu\lambda \sin t - pY_0\mu\lambda^2 \cos t - pX_0\mu^3\lambda^2 \sin t \\
 & +X_0\mu\lambda^3 \cos t - Y_0\mu^3\lambda \sin t + X_0\mu\lambda \cos t + X_0\mu^3\lambda^3 \cos t + p^2Y_0\lambda^2 \sin t \\
 & +X_0\mu\lambda^3 \cos t + p^2Y_0\mu^2 \sin t - p^2X_0\lambda^2 \cos t - pY_0\mu \cos t - pX_0\mu \sin t \\
 & -pY_0\lambda^3 \cos t - p^2X_0 \cos t + p^2Y_0 \sin t - pY_0\lambda \cos t - pX_0\lambda^3 \sin t),
 \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$.

Démonstration. On utilise la notation du théorème II.3.5. D'après le système (VI.7), on a

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}, \quad F_0(x, t) = \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ -\frac{m}{n}U \\ \frac{m}{n}Z \\ \lambda V \\ \mu W \end{pmatrix}, \quad F_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F} \\ \tilde{F} \\ 0 \\ -\tilde{F} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}.$$

Soit $x(t; X_0, Y_0, Z_0, U_0, \varepsilon)$ la solution du système (VI.7) telle que

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0).$$

Il est clair que, le système non perturbé (VI.7) avec $\varepsilon = 0$ admet un centre à l'origine dans le plan (X, Y, Z, U) . Les solutions périodiques correspondantes sont

$$x(t; X_0, Y_0, Z_0, U_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t), W(t)),$$

où les fonctions $(X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t), W(t))$ sont données par (VI.9). Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$.

Pour notre système, V et α du théorème II.3.5 sont

$$V = \{(X, Y, Z, U, 0, 0), 0 < X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 < \rho\} \text{ pour certains } \rho \text{ arbitraires et } \alpha = (X_0, Y_0, Z_0, U_0) \in V.$$

La matrice fondamentale $M(t)$ de l'équation variationnelle du système non perturbé (VI.7) $_{\varepsilon=0}$ pour la solution de (VI.9) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

et

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & \sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$MI(0) - MI(2\pi n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi n\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi n\mu} \end{pmatrix},$$

on a $(1 - e^{-2\pi n\lambda})(1 - e^{-2\pi n\mu}) \neq 0$, car $\lambda\mu \neq 0$. Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème [II.3.5](#) sont vérifiées. D'après le théorème [II.3.5](#), la fonction $\mathfrak{F}(\alpha)$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} M^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, & (VI.15) \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \end{aligned}$$

les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$, $f(t)$ sont données par [\(VI.11\)](#). D'après le théorème [II.3.5](#), s'ils existent $\alpha = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\} \in V$ avec

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 4,$$

et

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \neq 0,$$

alors, l'équation différentielle [\(VI.1\)](#) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution $x_0(t)$ de $x^{(6)} - (\lambda + \mu)x^{(5)} + Ax'''' - Bx''' + Cx'' + Sx' + \lambda\mu p^2x = 0$ donnée par [\(VI.14\)](#).

Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$. \square

Exemple 2.1. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, $\mu = 2$, $\lambda = 4$ et la fonction F dans le système (VI.2) est

$$F(x, y, z, u, v, w, t) = (1 + \sin t)(\dot{x} - 1).$$

Pour le système de cet exemple, les $\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0)$, pour $k = 1, \dots, 4$, du théorème VI.2.8 sont

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = -\frac{1}{2} - \frac{32}{1105}Y_0 + \frac{248}{3315}X_0, \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{248}{3315}Y_0 + \frac{32}{1105}X_0, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{19}{255}U_0 - \frac{8}{255}Z_0, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = -\frac{1}{51}Z_0 - \frac{4}{51}U_0. \end{cases} \quad (\text{VI.16})$$

Si $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_4 = 0$, on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) = \left(\frac{93}{16}, \frac{-9}{4}, 0, 0 \right).$$

Le déterminant (VI.13) de cette solution prend le valeur

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} = \frac{64}{2535975}.$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il y a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du sixième ordre (VI.1).

Enfin, on remplace la solution $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)$ dans (VI.14), on obtient

$$x_1(t) = -2 \cos t,$$

de $x^{(6)} - 6x^{(5)} + \frac{37}{4}\ddot{x} - \frac{15}{2}\ddot{x} + \frac{41}{4}\ddot{x} + \frac{3}{2}\dot{x} + 2x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.2 Cas 2 : p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ (ou $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$).

Dans ce cas, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est donnée par (VI.3) avec $\lambda = 0$. On a B_2 est B_1 avec $\lambda = 0$,

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & p\mu & -p & p\mu & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 1 & -\mu & 1 \\ 0 & 0 & -p^2\mu & p^2 & -\mu & 1 \\ 0 & -p^2\mu & p^2 & -\mu & 1 & 0 \\ p^2\mu & -p^2 & \mu + \mu p^2 & -1 - p^2 & \mu & -1 \\ 0 & p^2 & 0 & 1 + p^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire inversible

$$(X, Y, Z, U, V, W)^T = B(x, y, z, u, v, w)^T,$$

c.à.d

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = pq^2\mu\dot{y} - pq^2\dot{z} + p\mu\dot{u} - p\dot{v}, \\ \dot{Y} = -q^2\mu\dot{z} + q^2\dot{u} - \mu\dot{v} + \dot{w}, \\ \dot{Z} = -p^2\mu\dot{z} + p^2\dot{u} - \mu\dot{v} + \dot{w}, \\ \dot{U} = -qp^2\mu\dot{y} + qp^2\dot{z} - q\mu\dot{u} + q\dot{v}, \\ \dot{V} = \mu p^2 q^2 \dot{x} - p^2 q^2 \dot{y} + \mu(p^2 + q^2)\dot{z} - (p^2 + q^2)\dot{u} + \mu\dot{v} - \dot{w}, \\ \dot{W} = q^2 p^2 \dot{y} + (p^2 + q^2)\dot{u} + \dot{w}. \end{cases} \quad (\text{VI.17})$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B_1^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)p} - \frac{\mu Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)p^2} + \frac{\mu Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{V}{p^2\mu}, \\ y(t) &= -\frac{\mu X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)p} + \frac{Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{\mu U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ z(t) &= \frac{pX}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{\mu Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{\mu Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} + \frac{U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ u(t) &= \frac{p\mu X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{p^2 Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{\mu U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ v(t) &= -\frac{p^3 X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{p^2 \mu Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{\mu Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ w(t) &= -\frac{p^3 \mu X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{p^4 Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{\mu U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

On remplace (VI.2) et (VI.18) dans (VI.17), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \\ \dot{Z} = -pU + \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \\ \dot{U} = pZ, \\ \dot{V} = \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \\ \dot{W} = \mu W + \varepsilon \tilde{F}(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t), t), \end{cases} \quad (\text{VI.19})$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, W, t) = F(x, y, z, u, v, w, t).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = -pU, \\ \dot{U} = pZ, \\ \dot{V} = 0, \\ \dot{W} = \mu W. \end{cases} \quad (\text{VI.20})$$

La solution du système (VI.20) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = e^{Jt} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix},$$

telle que

$$e^{Jt} = M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

avec $p = m/n$, où m, n , sont des nombres entiers positifs, d'où

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 \cos(\frac{m}{n}t) - U_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ U_0 \cos(\frac{m}{n}t) + Z_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ V_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.21})$$

sauf sur l'axe V (c.à.d $\{(0, 0, 0, 0, V)\}$) qui est remplie de points singuliers). Par conséquent, la dimension de l'ensemble des orbites périodiques est $5 \Rightarrow k = 5$. Pour énoncer le résultat principal de ce cas, nous avons besoin de quelques préliminaires. Nous définissons

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\ \mathfrak{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,\end{aligned}\tag{VI.22}$$

avec $p = m/n$, où m, n sont des nombres entiers positifs, et

$$\begin{aligned}a(t) &= -\frac{X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)p} - \frac{\mu Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)p^2} + \frac{\mu Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{V}{p^2\mu}, \\ b(t) &= -\frac{\mu X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)p} + \frac{Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{\mu U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ c(t) &= \frac{pX}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{\mu Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{\mu Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} + \frac{U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ d(t) &= \frac{p\mu X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{p^2 Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{\mu U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ e(t) &= -\frac{p^3 X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{p^2 \mu Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{\mu Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}, \\ f(t) &= -\frac{p^3 \mu X}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} + \frac{p^4 Y}{(\mu^2+p^2)(-1+p^2)} - \frac{Z}{(\mu^2+1)(-1+p^2)} - \frac{\mu U}{(\mu^2+1)(-1+p^2)}.\end{aligned}\tag{VI.23}$$

Théorème VI.2.9. *On suppose que p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. Si la fonction F est $2\pi n$ -périodique en t , tels que pour tout $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*) \in \mathbb{R}^5 - \{(0, 0, 0, 0, V_0^*)\}$ solution du système*

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 5,$$

et

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)} \neq 0,$$

l'équation différentielle (VI.1) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution

$x_0(t)$ de $x^{(6)} - \mu x^{(5)} + (p^2 + 1) \ddot{x} - \mu(p^2 + 1) \ddot{x} + p^2 \ddot{x} + p^2 \mu \dot{x} = 0$ donnée par

$$\begin{aligned} x_0(t) = & \frac{1}{p^2(p^2-1)(\mu^2+p^2)(\mu^2+1)} (p\mu X_0 \cos t + p\mu^3 X_0 \cos t - p\mu Y_0 \sin t & (VI.24) \\ & - p\mu^3 Y_0 \sin t - \mu^2 Y_0 \cos t + \mu^3 Y_0 \cos t - \mu^2 X_0 \sin t + \mu^4 X_0 \sin t \\ & - Z_0 \mu^2 p^2 \cos(pt) - p^4 \mu^2 Z_0 \cos(pt) + p^2 \mu^4 U_0 \sin(pt) \\ & + p^4 \mu^2 U_0 \sin(pt) + p^2 \mu^3 U_0 \cos(pt) - p^2 \mu U_0 \cos(pt) + p^2 \mu^3 Z_0 \sin(pt) \\ & p^4 \mu Z_0 \sin(pt) - V_0 \mu^4 p^2 + V_0 p^4 + V_0 \mu^2 p^4 - V_0 \mu^2 - V_0 \mu^4 - V_0 p^2), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$.

Démonstration. On utilise la notation du théorème II.3.5. D'après le système (VI.19), on a

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}, \quad F_0(x, t) = \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ -\frac{m}{n}U \\ \frac{m}{n}Z \\ 0 \\ \mu W \end{pmatrix}, \quad F_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F} \\ \tilde{F} \\ 0 \\ \tilde{F} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}.$$

Soit $x(t; X_0, Y_0, Z_0, U_0, \varepsilon)$ la solution du système (VI.19) telle que

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0).$$

Il est clair que, le système non perturbé (VI.19) avec $\varepsilon = 0$ admet dans l'espace (X, Y, Z, U, V) un centre à l'origine de tout plan $V = \text{constant}$. Les solutions périodiques correspondantes sont

$$x(t; X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t), W(t)),$$

où les fonctions $(X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t), W(t))$ sont données par (VI.21). Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$.

Pour notre système, V et α du théorème II.3.5 sont

$$V = \{(X, Y, Z, U, V, 0), 0 < X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 + V^2 < \rho\} \text{ pour certains } \rho \text{ arbitraires et } \alpha = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) \in V.$$

La matrice fondamentale $M(t)$ de l'équation variationnelle du système non perturbé (VI.19) _{$\varepsilon=0$} pour la solution de (VI.21) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

et

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & \sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$MI(0) - MI(2\pi n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi n\mu} \end{pmatrix},$$

on a $(1 - \exp(-2\pi n\mu)) \neq 0$, car $\mu \neq 0$. Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème II.3.5 sont vérifiées. D'après le théorème II.3.5, la fonction $\mathfrak{F}(\alpha)$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} M^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt.$$

On trouve

$$\mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt;$$

les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$, $f(t)$ sont données par (VI.23). D'après le théorème II.3.5, s'ils existent $\alpha = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*) \in \mathbb{R}^5 - \{(0, 0, 0, 0, V_0^*)\} \in V$ avec

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 5,$$

et

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)} \neq 0,$$

alors, l'équation différentielle (VI.1) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution $x_0(t)$ de $x^{(6)} - \mu x^{(5)} + (p^2 + 1) \ddot{x} - \mu(p^2 + 1) \ddot{x} + p^2 \dot{x} + p^2 \mu x = 0$ donnée par (VI.24) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$. \square

Exemple 2.2. On suppose que $p = 2$, $\mu = 5$, $\lambda = 0$, et la fonction F dans le système (VI.2) est

$$F(x, y, z, u, v, w, t) = (x^2 - 1) \cos t.$$

Pour le système de cet exemple, les $\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)$, pour $k = 1, \dots, 5$ du théorème VI.2.9

sont

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{5}{242208}X_0^2 - \frac{5}{242208}Y_0^2 + \frac{7}{161472}Y_0X_0 + \frac{1}{3120}V_0Z_0 + \frac{1}{624}V_0U_0, \\
 \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{936}Z_0^2 + \frac{1}{936}U_0^2 + \frac{37}{968832}X_0^2 + \frac{79}{968832}Y_0^2 + \frac{5}{121104}Y_0X_0 \\
 &\quad - \frac{1}{624}V_0Z_0 + \frac{1}{3120}V_0U_0, \\
 \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{25}{54288}Y_0Z_0 + \frac{1}{2784}V_0Y_0 + \frac{1}{27144}X_0U_0 - \frac{5}{27144}X_0Z_0 + \frac{1}{6960}V_0X_0, \\
 \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{5}{54288}Y_0Z_0 + \frac{1}{6960}V_0Y_0 - \frac{25}{54288}Y_0U_0 - \frac{5}{27144}X_0U_0 \\
 &\quad - \frac{1}{27144}X_0Z_0 - \frac{1}{2784}V_0X_0, \\
 \mathfrak{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{3}{6032}Y_0Z_0 + \frac{1}{1392}V_0Y_0 - \frac{5}{54288}Y_0U_0 + \frac{3}{6032}X_0U_0 \\
 &\quad - \frac{1}{54288}X_0Z_0 + \frac{1}{3480}V_0X_0.
 \end{aligned}$$

Si

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 5.$$

Ce système $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_5 = 0$ admet dix solutions $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)$, données par

$$\begin{aligned}
 &(16\sqrt{3}, 40\sqrt{3}, 0, 0, 0), \quad (-16\sqrt{3}, -40\sqrt{3}, 0, 0, 0), \quad (-12\sqrt{6}, 28\sqrt{6}, 6\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \frac{20}{3}\sqrt{3}) \\
 &(12\sqrt{6}, -28\sqrt{6}, 6\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \frac{20}{3}\sqrt{3}), \quad (-12\sqrt{6}, 28\sqrt{6}, -6\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, -\frac{20}{3}\sqrt{3}), \\
 &(12\sqrt{6}, -28\sqrt{6}, -6\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, -\frac{20}{3}\sqrt{3}), \quad (12\sqrt{6}, 28\sqrt{6}, 6\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, -\frac{20}{3}\sqrt{3}), \\
 &(-12\sqrt{6}, -28\sqrt{6}, 6\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, -\frac{20}{3}\sqrt{3}), \quad (12\sqrt{6}, 28\sqrt{6}, -6\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \frac{20}{3}\sqrt{3}), \\
 &(-12\sqrt{6}, -28\sqrt{6}, -6\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \frac{20}{3}\sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

Le déterminant (VI.13) de ces solutions prend les valeurs

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{703572480}\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{703572480}\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{703572480}\sqrt{6}, \quad \frac{1}{703572480}\sqrt{6} \\
 &-\frac{1}{703572480}\sqrt{6}, \quad \frac{1}{703572480}\sqrt{6}, \quad -\frac{1}{703572480}\sqrt{6}, \quad \frac{1}{703572480}\sqrt{6} \\
 &-\frac{1}{703572480}\sqrt{6}, \quad \frac{1}{703572480}\sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle du sixième ordre (VI.1) admet dix solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$ pour $k = 1, \dots, 10$, qui tendent vers les

solutions 2π -périodiques $x_k(t)$ données par

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{2}{3}\sqrt{3} \cos t, & x_2(t) &= -\frac{2}{3}\sqrt{3} \cos t, \\
 x_3(t) &= -\frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t + \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\
 x_4(t) &= \frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t - \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\
 x_5(t) &= -\frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t + \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t - \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\
 x_6(t) &= \frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t - \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t - \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\
 x_7(t) &= -\frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t - \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t - \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\
 x_8(t) &= \frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t + \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t - \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\
 x_9(t) &= -\frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t - \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\
 x_{10}(t) &= \frac{1}{3}\sqrt{6} \cos t + \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin t + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(2t) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \sin(2t) - \frac{1}{3}\sqrt{3},
 \end{aligned}$$

de $x^{(6)} - 5x^{(5)} + 5\ddot{x} - 25\ddot{x} + 4\ddot{x} + 20\dot{x} = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.3 Cas 3 : p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda = \mu \neq 0$.

Dans ce cas, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{VI.25}$$

On a

$$B_3 A B_3^{-1} = J \Rightarrow B_3 A - J B_3 = 0,$$

d'où

$$B_3 = \begin{pmatrix} -\lambda^2 p & 2\lambda p & -(\lambda^2 + 1)p & 2\lambda p & -p & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -2\lambda & 1 + \lambda^2 & -2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 p^2 & -2p^2 \lambda & p^2 + \lambda^2 & -2\lambda & 1 \\ \lambda^2 p^2 & -2\lambda p^2 & p^2 + \lambda^2 & -2\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda p^2 + p^2 & p^2 & 1 + p^2 - \lambda - \lambda p^2 & p^2 + 1 & -\lambda + 1 & 1 \\ -p^2 \lambda & p^2 & -\lambda p^2 - \lambda & 1 + p^2 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = B_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = B_3 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -\lambda^2 p \dot{x} + 2p\lambda \dot{y} - p(\lambda^2 + 1)\dot{z} + 2p\lambda \dot{u} - p\dot{v}, \\ \dot{Y} = \lambda^2 \dot{y} - 2\lambda \dot{z} + (1 + \lambda^2)\dot{u} - 2\lambda \dot{v} + \dot{w}, \\ \dot{Z} = \lambda^2 p^2 \dot{y} - 2p^2 \lambda \dot{z} + (p^2 + \lambda^2)\dot{u} - 2\lambda \dot{v} + \dot{w}, \\ \dot{U} = \lambda^2 p^2 \dot{x} - 2p^2 \lambda \dot{y} + (\lambda^2 + p^2)\dot{z} - 2\lambda \dot{u} + \dot{v}, \\ \dot{V} = p^2(\lambda + 1)\dot{x} - p^2 \dot{y} + (\lambda p^2 + p^2 + \lambda + 1)\dot{z} - (p^2 + 1)\dot{u} + (\lambda + 1)\dot{v} - \dot{w}, \\ \dot{W} = -\lambda p^2 \dot{x} + p^2 \dot{y} - \lambda(p^2 + 1)\dot{z} + (p^2 + 1)\dot{u} - \lambda \dot{v} + \dot{w}. \end{cases} \quad (\text{VI.26})$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B_1^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{(\lambda^2 - p^2)X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2 p} - \frac{2\lambda Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{2\lambda Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} + \frac{(\lambda^2-1)U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 y(t) &= -\frac{2p\lambda X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{(\lambda^2-p^2)Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{(\lambda^2-1)Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} - \frac{2\lambda U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 z(t) &= -\frac{(\lambda^2-p^2)pX}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{2\lambda p^2 Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{2\lambda Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} + \frac{(\lambda^2-1)U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 u(t) &= \frac{2p^3\lambda X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{p^2(\lambda^2-p^2)Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{(\lambda^2-1)Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} - \frac{2\lambda U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 v(t) &= \frac{p^2(\lambda^2-p^2)X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{2p^4\lambda Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{2\lambda Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} + \frac{(\lambda^2-1)U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 w(t) &= -\frac{2p^5\lambda X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{p^4(\lambda^2-p^2)Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{(\lambda^2-1)Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} - \frac{2\lambda U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}.
 \end{aligned} \tag{VI.27}$$

On remplace (VI.2) et (VI.27) dans (VI.26), on trouve

$$\begin{cases}
 \dot{X} = -Y, \\
 \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t), \\
 \dot{Z} = -pU + \varepsilon \tilde{F}(t, a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t), \\
 \dot{U} = pZ, \\
 \dot{V} = \lambda V + W + \varepsilon \tilde{F}(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t), \\
 \dot{W} = \lambda W + \varepsilon \tilde{F}(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t),
 \end{cases} \tag{VI.28}$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, W, t) = F(x, y, z, u, v, w, t).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve

$$\begin{cases}
 \dot{X} = -Y, \\
 \dot{Y} = X, \\
 \dot{Z} = -pU, \\
 \dot{U} = pZ, \\
 \dot{V} = \lambda V + W, \\
 \dot{W} = \lambda W.
 \end{cases} \tag{VI.29}$$

La solution du système (VI.29) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = e^{Jt} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix},$$

telle que

$$e^{Jt} = M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

avec $p = m/n$, où m, n , sont des nombres entiers positifs, d'où

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 \cos(\frac{m}{n}t) - U_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ U_0 \cos(\frac{m}{n}t) + Z_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.30})$$

sauf à son origine. Par conséquent, la dimension de l'ensemble des orbites périodiques est $4 \Rightarrow k = 4$. Pour énoncer le résultat principal de ce cas, nous avons besoin de quelques

préliminaires. Nous définissons

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\
 \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\
 \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt, \\
 \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,
 \end{aligned} \tag{VI.31}$$

avec $p = m/n$, où m, n sont des nombres entiers positifs, et

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \frac{(\lambda^2 - p^2)X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2 p} - \frac{2\lambda Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{2\lambda Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} + \frac{(\lambda^2-1)U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 b(t) &= -\frac{2p\lambda X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{(\lambda^2-p^2)Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{(\lambda^2-1)Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} - \frac{2\lambda U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 c(t) &= -\frac{(\lambda^2-p^2)pX}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{2\lambda p^2 Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{2\lambda Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} + \frac{(\lambda^2-1)U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 d(t) &= \frac{2p^3\lambda X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{p^2(\lambda^2-p^2)Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{(\lambda^2-1)Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} - \frac{2\lambda U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 e(t) &= \frac{p^2(\lambda^2-p^2)X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{2p^4\lambda Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{2\lambda Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} + \frac{(\lambda^2-1)U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}, \\
 f(t) &= -\frac{2p^5\lambda X}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} - \frac{p^4(\lambda^2-p^2)Y}{(-1+p^2)(p^2+\lambda^2)^2} + \frac{(\lambda^2-1)Z}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2} - \frac{2\lambda U}{(-1+p^2)(\lambda^2+1)^2}.
 \end{aligned} \tag{VI.32}$$

Théorème VI.2.10. *On suppose que p est un nombre rationnel différent de $-1, 0, 1$, et $\lambda = \mu \neq 0$. Si la fonction F est $2\pi n$ -périodique en t , tels que pour tout $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) \in \mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$ solution du système,*

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 4,$$

et

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \neq 0,$$

l'équation différentielle (VI.1) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution

$x_0(t)$ de $x^{(6)} - 2\lambda x^{(5)} + A\ddot{x} - B\dot{x} + Cx + Sx + \lambda^2 p^2 x = 0$, avec $A = p^2 + 1 + 2\lambda$, $B = 2\lambda p^2 + 2\lambda$, $C = p^2 + \lambda^2(1 + p^2)$, $S = 2p^2\lambda$, donnée par

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{1}{(\lambda^2 + p^2)^2 (\lambda^2 + 1)^2 (-1 + p^2)p} (-4p^3 Z_0 \lambda^3 \cos(pt) + 2pY_0 \lambda \cos t & (VI.33) \\
 & -2pZ_0 \lambda^5 \cos(pt) + 2pU_0 \lambda^5 \cos t - p^5 Z_0 \lambda^2 \sin(pt) + pU_0 \lambda^4 \cos(pt) \\
 & -p^5 U_0 \lambda^2 \cos(pt) + 2p^3 Z_0 \lambda^2 \sin(pt) + pZ_0 \lambda^4 \sin(pt) - 2p^3 Z_0 \lambda^4 \sin(pt) \\
 & + 2pU_0 \lambda^5 \sin(pt) - pU_0 \lambda^6 \cos(pt) + 2p^3 U_0 \lambda^2 \cos(pt) + 2pX_0 \lambda \sin t \\
 & + 4pY_0 \lambda^3 \cos t + 2p^5 U_0 \lambda \sin(pt) + 2pX_0 \lambda^5 \sin t - 2p^2 Y_0 \lambda^2 \sin t \\
 & + 2p^2 X_0 \lambda^2 \cos t + p^2 X_0 \lambda^4 \cos t + 4pX_0 \lambda^3 \sin t - p^2 Y_0 \lambda^4 \sin t \\
 & -pZ_0 \lambda^6 \sin(pt) + 4p^3 U_0 \lambda^3 \sin(pt) - 2p^5 Z_0 \lambda \cos(pt) + p^5 U_0 \cos(pt) \\
 & -2X_0 \lambda^4 \cos t + p^2 X_0 \cos t + 2Y_0 \lambda^4 \sin t - p^2 Y_0 \sin t + X_0 \lambda^6 \cos t \\
 & -X_0 \lambda^2 \cos t + Y_0 \lambda^2 \sin t + Y_0 \lambda^6 \sin t + p^5 Z_0 \sin(pt) - 2p^3 U_0 \lambda^4 \cos(pt))
 \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$.

Démonstration. On utilise la notation du théorème [II.3.5](#). D'après le système [\(VI.28\)](#), on a

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}, \quad F_0(x, t) = \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ -\frac{m}{n}U \\ \frac{m}{n}Z \\ \lambda V + W \\ \lambda W \end{pmatrix}, \quad F_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F} \\ \tilde{F} \\ 0 \\ \tilde{F} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}.$$

Soit $x(t; X_0, Y_0, Z_0, U_0, \varepsilon)$ la solution du système [\(VI.28\)](#) telle que

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0).$$

Il est clair que, le système non perturbé [\(VI.28\)](#) avec $\varepsilon = 0$ admet un centre à l'origine dans le

plan (X, Y, Z, U) . Les solutions périodiques correspondantes sont

$$x(t; X_0, Y_0, Z_0, U_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t), W(t)),$$

où les fonctions $(X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t), W(t))$ sont données par (VI.30). Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$.

Pour notre système, V et α du théorème II.3.5 sont

$$V = \{(X, Y, Z, U, 0, 0), 0 < X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 < \rho\} \text{ pour certains } \rho \text{ arbitraires et } \alpha = (X_0, Y_0, Z_0, U_0) \in V.$$

La matrice fondamentale $M(t)$ de l'équation variationnelle du système non perturbé (VI.28) $_{\varepsilon=0}$ pour la solution de (VI.30) est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

et

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{m}{n}t) & \sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda t} & -te^{-\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda t} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi n\lambda} & 2\pi n e^{-2\pi n\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi n\lambda} \end{pmatrix},$$

on a $1 - \exp(-2\pi n\lambda) \neq 0$, car $\lambda \neq 0$. Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème [II.3.5](#) sont vérifiées. D'après le théorème [II.3.5](#), la fonction $\mathfrak{F}(\alpha)$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} M^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt.$$

On trouve

$$\mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos t F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

$$\mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin\left(\frac{m}{n}t\right) F(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t), t) dt,$$

les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$, $f(t)$ sont données par [\(VI.32\)](#). D'après le théorème [II.3.5](#), s'ils existent $\alpha = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\} \in V$ avec

$$\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \quad k = 1, \dots, 4,$$

et

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \neq 0,$$

alors, l'équation différentielle [\(VI.1\)](#) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la

solution $x_0(t)$ de $x^{(6)} - 2\lambda x^{(5)} + A\ddot{x} - B\ddot{x} + C\ddot{x} + S\dot{x} + \lambda^2 p^2 x = 0$, avec $A = p^2 + 1 + 2\lambda$, $B = 2\lambda p^2 + 2\lambda$, $C = p^2 + \lambda^2(1 + p^2)$, $S = 2p^2\lambda$, donnée par (VI.33). Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période $2\pi n$. \square

Exemple 2.3. On suppose que $p = 2$, $\mu = \lambda = 5$ et la fonction F dans le système (VI.2) est

$$F(x, y, z, u, v, w, t) = (2 + \sin t)(1 + x).$$

Pour le système de cet exemple, les $\mathfrak{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0)$, pour $k = 1, \dots, 4$, du théorème VI.2.10 sont

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{1}{2} + \frac{160}{289}Y_0 + \frac{256}{867}X_0, \\ \mathfrak{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{256}{867}Y_0 - \frac{160}{289}X_0, \\ \mathfrak{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = -\frac{19}{75}Z_0 - \frac{8}{75}U_0, \\ \mathfrak{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = \frac{16}{75}Z_0 - \frac{13}{75}U_0. \end{cases}$$

Si $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_4 = 0$, on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) = \left(-\frac{3}{8}, \frac{-45}{64}, 0, 0 \right).$$

Le déterminant (VI.13) de cette solution prend le valeur

$$\det\left(\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0)}\right)\Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} = \frac{1024}{39015}.$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il y a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du sixième ordre (VI.1). Enfin, on remplace la solution $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)$ dans (VI.33), on obtient

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} \sin t,$$

de $x^{(6)} - 4x^{(5)} + 6\ddot{x} - 8\ddot{x} + 9\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 7. 1. Dans le cas où p est un nombre rationnel différent de 1, 0, -1, et $\lambda = \mu = 0$, nous ne pouvons pas appliquer le théorème II.3.5 pour étudier les orbites périodiques.

2. Dans le cas où $p = 1$ et $\lambda \neq \mu \neq 0$, (respectivement $p = 1$ et $\lambda = \mu \neq 0$, respectivement $p = 1$ et $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$), nous ne pouvons pas appliquer le théorème II.3.5 pour étudier les orbites périodiques.

Conclusion et Perspectives

La recherche des cycles limites des équations différentielles dépendant d'un petit paramètre peut être étudiée au moyen de la méthode de moyennisation. L'utilisation de cette méthode nous a permis d'écrire les systèmes sous la forme standard des théorèmes de moyennisation. On a étudié les cycles limites d'une classe d'équations différentielles ordinaires du troisième et sixième ordre par une nouvelle version de la méthode de moyennisation.

Nous continuons à travailler sur la recherche des cycle limites des équations différentielles ordinaires. On se propose d'étudier les cycles limites pour une classe d'équations différentielles du sixième ordre de la forme

$$x^{(6)} + (1 + p^2 + q^2)\ddot{x} + (p^2 + q^2 + pq)\dot{x} + pqx + H(t) = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\dot{x}}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{\dot{x}}}, t), \quad (\text{I.34})$$

où p et q sont des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$, et $p \neq q$, ε est un paramètre suffisamment petit et F, H sont des fonctions périodiques en t . F est une fonction non linéaire.

Références bibliographiques

- [1] A. U. Afuwape, Remarks on Barbashin-Ezeilo problem on third-order nonlinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 317 (2006), 613–619. [4](#)
- [2] J. Andres, Existence, uniqueness, and instability of large-period harmonics to the third-order nonlinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 199 (1996), 445–457. [4](#)
- [3] C. E. Berhail, A. Makhlouf, On the limit cycles of the sixth-order non-autonomous differential equation, *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, Vol. 5, Issue. 4, 2013, pp. 59-77. [4](#)
- [4] A. Buica, J. P. Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, *Comm. Pure Appl. Anal.* 6 (2006), 103–111. [2](#), [20](#), [21](#)
- [5] I. Bogololiubov and Yu. A. Mitropolskii, *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*, Gordon and Breach, New York, 1961. [2](#)
- [6] J. Chaparova, L. Peletier, S. Tersian, Existence and nonexistence of nontrivial solutions of semilinear sixth order ordinary differential equations, *Appl. Math. Lett.* 17 (2004) 1207–1212. [4](#)
- [7] H. Dulac, sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. France* 51(1923), 45-188. [2](#)
- [8] T. Ercan, Periodic solutions of a certain vector differential equation of sixth order, *Arab. J. Sci. Eng. Section* 33 (1) (2008) 107–112. [4](#)
- [9] T. Garbuza, On solutions of one 6-th order nonlinear boundary value problem, *Math. Model. Anal.* 13 (3) (2008) 349–355. [4](#)
- [10] T. Garbuza, Results for sixth order positively homogeneous equations, *Math. Model. Anal.* 14 (1) (2009) 25–32. [4](#)
- [11] S. P. Hastings, On the uniqueness and global asymptotic stability of periodic solutions for a third order system, *Rocky Mountain J. Math* 7 (1977), 513–538. [4](#)

- [12] D. Hilbert, Mathematische Probleme, Lecture, in : Second Internat. Congr. Math., Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Goett. Math-Phys. Kl. (1900) 253-297; English transl : Bull. Amer. Math. Soc. 8(1902) 437-479. [1](#)
- [13] N. M. Krylov and N. N. Bogoliubov, Introduction à la mécanique non-linéaire : les méthodes approchées et asymptotiques, vol. 1-2 de Ukrainiska Akad. (1937). Nauk Inst Mec. Paris : Chaire de Phys. Math. Annales. [2](#)
- [14] J. Llibre, C. E. Berhail, and A. Makhlof, Periodic solutions of the third-order differential equation $\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$. submitted to the journal " Canadian Applied Mathematics Quarterly ". [4](#)
- [15] I. G. Malkin, Some Problems of the theory of nonlinear oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit. Moscow, 1956 (in Russian). [2](#), [21](#)
- [16] A. Makhlof, C. E. Berhail, Limit cycles of the sixth-order non-autonomous differential equation, Arab. J. Math. Sci, 18 (2012), pp. 177-187. [4](#)
- [17] F. Minhos, Periodic solutions for a third order differential equation under conditions on the potential, Portugal. Math. 55 (1998), 475–484. [4](#)
- [18] J. F. Navarro, Computation of periodic solutions in perturbed second-order ODEs, Appl. Math. Comput. 202(2008) 171-177. [4](#)
- [19] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. J. Math. Pures. Appl. (3) 7 (1881), 375-422. [1](#)
- [20] J. I. Ramos, Approximate methods based on order reduction for the periodic solutions of nonlinear third-order ordinary differential equations, Appl. Math. Comput, 215(2010) 4304-4319.
- [21] J. I. Ramos and C. M. Garcia-Lopez, A Volterra integral formulation for determining the periodic solutions of some autonomous, nonlinear third-order ordinary differential equation, Appl. Math. Comput. 206(2010) 2635-2644. [4](#), [21](#)
- [22] R. Reissig, Periodic solutions for a third order nonlinear differential equation, Ann. Mat. pura Appl. 92 (1972), 193–198. [4](#)
- [23] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer, New York, 1985. [2](#)
- [24] J. A. Sanders and F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, 1985. [2](#), [13](#)
- [25] J. C. Sprott, Elegant Chaos, Algebraically Simply Chaotic Flows, World Scientific, 2010. [31](#)

- [26] C. Tunç, On the instability of solutions to a certain class of non-autonomous and non-linear ordinary vector differential equations of sixth order, *Albanian J. Math.* 2 (1) (2008) 7–13. [4](#)
- [27] C. Tunç, A further result on the instability of solutions to a class of non-autonomous ordinary differential equations of sixth order. *Appl. Appl. Math.*, 2008, 3(1) : 69 - 76. [4](#)
- [28] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer, New York, 1996. [2](#), [14](#)
- [29] G. Villari, Criteri di esistenza di soluzioni periodiche per particolari class di equazioni differenziali del terz'ordine non lineari, *Matematiche (Catania)* 19 (1964), 96–113. [4](#)