

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA  
BADJI MOKHTAR -ANNABA  
UNIVERSITY



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2017

Département de Mathématiques

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques

Propagation Des Singularités Des Opérateurs  
Hyperboliques, Elliptiques et Holomorphes

Option

Equations aux Dérivées Partielles

Par

**Naouel BENTIBA**

<b>DIRECTEUR DE THÈSE :</b>	H. SISSAOUI	Prof.	U.B.M. ANNABA
<b>CO- DIRECTEUR DE THÈSE :</b>	A. BENTRAD	Prof.	U. REIMS C.A.

Devant le jury

<b>PRESIDENT :</b>	B. KHODJA	Prof.	U.B.M. ANNABA
<b>EXAMINATEUR :</b>	R. GHANEM	Prof.	U.B.M. ANNABA
<b>EXAMINATEUR :</b>	M. Z. AISSAOUI	Prof.	U. GUELMA
<b>EXAMINATEUR :</b>	H. HAMLAOUI	M.C.A.	U. GUELMA

## *Remerciements*

*Je tiens tout d'abord à remercier infiniment le Pr. Sissaoui Hecine, pour m'avoir fait confiance, guidé, encouragé et conseillé tout au long de ces années.*

*Mes sincères remerciements vont également au Pr. Bentrad Ali pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais sur le domaine, mais aussi pour m'avoir guidé et conseillé.*

*Je réserve un remerciement chaleureux au Pr. B. Khodja, Professeur à l'université d'Annaba, qui a accepté de présider cette soutenance.*

*Je remercie aussi les professeurs R. Ghanem, M. Z. Aissaoui et H. Hamsaoui, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de soutenance.*

*J'ai enfin une pensée toute particulière pour chaque personne que je n'ai pas citée et qui ont participé à l'aboutissement de cette thèse.*

## ملخص

تمت دراسة الحلول الفريدة (الشاذة) لمشكلة كوشي لبعض الفئات المعينة للمعادلات التفاضلية الجزئية الشاذة مزدوجة الخطية و غير الخطية في المجال المعقد. اذ نبني الحلول الصريحة التي تم إنشاؤها بواسطة الدوال فوق الهندسية و التي تسمح بوصف الشذوذ للحل.

و قد أظهرت بالفعل النتائج الأخيرة المتوصل اليها، أن المعادلات التي تقع خارج نطاق النتائج العامة لديها حلول فوق الهندسية، و يبدو أن هذه هي الطريقة الوحيدة للحل التي لديها معلومات عن الشذوذ، من الحل مع العلم أنه لا توجد طرق منهجية لنزع الشذوذ بهدف الحصول على نظريات عامة. لنبرهن في الأخير أن الحل في الحالة العامة هو متشعب حول المميزات (الخواص).

**الكلمات المفتاحية:** مشكلة كوشي ، التمديد التحليلي ، الدوال فوق الهندسي الفردية التقارب ، المعادلة التفاضلية الجزئية.

# Résumé

Nous étudions dans cette thèse la propagation des singularités de la solution du problème de Cauchy pour certaines classes d'équations aux dérivées partielles singulières à caractéristiques doubles linéaires et non linéaires dans le domaine complexe.

On construit explicitement des solutions engendrées par des fonctions hypergéométriques qui permettent de décrire les singularités de la solution. En effet des résultats récents ont montré que des équations qui ne relèvent pas du champ d'application de résultats généraux possèdent des solutions hypergéométriques et il semblerait que c'est le seul moyen d'avoir des informations sur les singularités de la solution vu qu'on ne dispose pas de méthodes de désingularisation systématique permettant d'obtenir des théorèmes généraux.

On montre que la solution est en général ramifiée autour des caractéristiques.

**Mots-clés :** Problème de Cauchy, fonction hypergéométrique, prolongement analytique, singularité, convergence, Equation aux dérivées partielles.

# Abstract

We study the singularities propagation of the solution of the Cauchy problem for certain classes of singular partial differential equations with double linear and non-linear characteristics in the complex field.

We construct explicit solutions generated by hypergeometric functions that describe the singularities of the solution. Indeed recent results have shown that equations that fall outside the general scope results have hypergeometric solutions and it seems that this is the only way to have information on the singularities of the solution seen that there is no systematic desingularization methods for obtaining general theorems.

It is shown that the solution is in general about characteristics branched.

**Keywords** : Cauchy problem, hypergeometric function, analytical extension, singularity, convergence, partial differential equation.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1	Fonctions spéciales . . . . .	7
1.1.1	Fonctions Hypergéométriques de Gauss . . . . .	7
1.1.2	Fonctions hypergéométriques généralisées . . . . .	12
1.1.3	Fonction Gamma . . . . .	14
1.2	Estimations de la fonction hypergéométrique : . . . . .	16
1.3	Principe de superposition : . . . . .	18
1.4	Surfaces caractéristiques . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Les singularités de la solution du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes en involution</b>	<b>22</b>
2.1	Introduction . . . . .	22
2.2	Etude du problème de Cauchy linéaire homogène . . . . .	27
2.2.1	La solution du problème homogène . . . . .	28
2.2.2	Singularités de la solution . . . . .	31
2.2.3	La convergence de la solution . . . . .	36
2.3	Etude du problème de Cauchy linéaire non homogène . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Les singularités de la solution du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes non involutives</b>	<b>44</b>

3.1	Introduction . . . . .	44
3.2	Solution hypergéométrique . . . . .	46
3.2.1	Etude du problème linéaire homogène . . . . .	46
3.2.2	Etude du problème linéaire non homogène . . . . .	54
4	<b>Solutions exactes d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires</b>	<b>66</b>
4.1	Introduction . . . . .	66
4.2	Solution de l'équation non homogène . . . . .	68
4.2.1	Position du problème . . . . .	68
4.2.2	Construction des fonctions $V_h$ et $V_p$ . . . . .	70
4.3	Problème de Cauchy avec des données de Cauchy homogènes . .	73
4.3.1	Application numérique . . . . .	76
4.4	Problème de Cauchy avec des conditions de Cauchy non homogènes	87
4.4.1	Solution du problème homogène : . . . . .	89
4.4.2	Solution du problème non homogène : . . . . .	90
4.4.3	La convergence . . . . .	92
4.5	Bibliographie . . . . .	95

## 0.1 Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des singularités de la solution du problème de Cauchy pour des classes d'opérateurs linéaires et non linéaires à caractéristiques doubles dans le domaine complexe.

L'étude du problème de Cauchy linéaire holomorphe remonte aux travaux de Jean Leray [16] dans les années 50 et 60. En supposant que la surface  $S$ , qui porte les données, est caractéristique en certains points [12, 35]. Il a montré que la solution se ramifie autour d'un ensemble analytique tangent à la surface initiale et peut-être uniformisée, sauf dans des cas exceptionnels. Il s'agit d'un cas sans analogue en théorie des équations différentielles ordinaires.

Depuis lors, plusieurs auteurs de l'école de Leray ( J.Vaillant, C.Wagschal, D.Schiltz, J.C. de Paris, A.Bentrads...) et celle de l'école japonaise (Y.Hamada ,G. Nakamura, J.Urabe...) ont étudié le problème de Cauchy linéaire non caractéristique à données singulières. Ils ont montré que la solution est ramifiée autour des hypersurfaces caractéristiques issues des données.

Les thématiques développées dans cette thèse s'articulent autour de deux axes :

1) Problème de Cauchy linéaire non caractéristique pour une classe d'opérateurs à coefficient singulier et à caractéristiques doubles.

2) Problème de Cauchy d'une famille d'opérateurs non linéaires à caractéristiques doubles.

D'une manière générale, pour étudier les singularités [19, 23, 24, 30, 31] de la solution, on a besoin de la représentation explicite de la solution [1, 6]. Ce qui n'est pas évident car on ne dispose pas de méthodes de désingularisation systématique permettant d'obtenir des théorèmes généraux. L'étude est très complexe et les situations ne sont pas simples.

Pour traiter ces problèmes, on développe des méthodes utilisant les fonctions hypergéométriques qui permettent d'écrire explicitement la solution et de décrire ses singularités.

Dans cet esprit, la thèse est divisée en quatre chapitres :

Le premier chapitre a pour sujet les fonctions hypergéométriques [2, 3, 5, 17, 21] de Gauss. On rappelle quelques définitions, propriétés, etc..., sur les fonctions spéciales et précisément les fonctions hypergéométriques qui seront utilisées dans la suite.

Le deuxième chapitre porte sur l'étude des singularités de la solution du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes en involution :

$$LV = apV(t^2 - 4x)^{-1} + f(t, x), \quad p > 1 \quad (1)$$

avec les données de Cauchy :

$$\begin{cases} V(0, x) = v_0(x), \\ V_t(0, x) = v_1(x). \end{cases}$$

où

$$L = D_t^2 - xD_x^2 + CD_x.$$

et les fonctions :  $v_0(x)$  et  $v_1(x)$  sont supposées analytiques et  $f(t, x)$  vérifie certaines conditions :

$$1/ f = 0, \quad (2)$$

$$2/ f(t, x) = (4x)^i t^m.$$

On montre que la solution est singulière sur  $K = K_1 \cup K_2$ , où

$$K_1 = \{(t, x) \in \Omega / x = 0.\}$$

$$K_2 = \{(t, x) \in \Omega / 4x - t^2 = 0.\}$$

Nous avons obtenu l'équation (1) par linéarisation autour de la solution particulière suivante :

$$U_0(t, x) = (t^2 - 4x)^{-\frac{1}{p-1}}$$

de l'équation non linéaire :

$$LU = aU^p + f(t, x)$$

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode développée par A. Bentradi et S. Kichenassamy [13, 14], qui consiste à réduire l'étude de l'équation aux dérivées partielles à celle d'une équation différentielle hypergéométrique.

Dans le troisième chapitre, nous abordons un problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes non involutive de la forme :

$$\partial_t^2 U + 2t\partial_t\partial_x U + C\partial_x U - apU(x - t^2)^{-1} = f(t, x)$$

On utilise la même méthode que le second chapitre et on montre que la solution se ramifie autour de

$$K = K_1 \cup K_2$$

où

$$K_1 = \{(t, x) \in \Omega / x - t^2 = 0\}$$

$$K_2 = \{(t, x) \in \Omega / x = 0\}$$

Nous allons également étudier le problème non homogène dans les cas suivants :

$$1/f_{tt} + 2tf_{tx} + Cf_x - \frac{2t}{(x - t^2)}f_t - \frac{4t^2}{(x - t^2)}f_x = 0$$

$$2/f_{tt} + 2tf_{tx} + Cf_x + \frac{4}{t}f_t + 4f_x - \frac{ap}{x - t^2}f = 0$$

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéresserons aux solutions exactes d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires pour les deux problèmes :

$$LU = 4x\partial_x^2 U - \partial_t^2 U + e^U f \quad (3)$$

$$LU = \partial_t^2 U - 2\partial_t \partial_x U + e^U f \quad (4)$$

tel que  $L := \partial_t^2 + 2t\partial_t \partial_x + C\partial_x$ , où on étudiera trois cas :

*1<sup>er</sup> cas* : Résolution de l'équation différentielle partielle (3), en utilisant les fonctions hypergéométriques.

*2<sup>ème</sup> cas* : Nous étudions le problème de Cauchy associé à l'équation (3) avec des données de Cauchy homogènes et  $f$  est sous la forme

$$1/ f(t, x) = x^p t^m \text{ où}$$

$$2/ f(t, x) = x^p t^m (x - t^2)^{\tau-1} / p, m \text{ et } \tau \text{ sont des constantes.}$$

*3<sup>ème</sup> cas* : On s'intéresse au problème de Cauchy associé à l'équation (4) avec des données de Cauchy non homogènes.

On donne, pour chaque cas, une représentation explicite de la solution.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions fondamentales théoriques et des relations concernant quelques fonctions spéciales [7] qui seront nécessaires pour les prochains chapitres. Parmi ces fonctions, on en trouve un grand nombre qui sont des solutions d'équations différentielles du second ordre.

Ces fonctions sont très utiles, car elles apparaissent souvent, dès que l'on cherche à résoudre des équations différentielles du second ordre dont les coefficients ne sont pas constants.

Plus spécifiquement, nous allons rappeler quelques définitions, propriétés, notations et résultats des fonctions hypergéométriques [2, 3, 5, 17, 21, 29], par l'intermédiaire de la fonction Gamma  $\Gamma$  [7].

### 1.1 Fonctions spéciales

#### 1.1.1 Fonctions Hypergéométriques de Gauss

Gauss a donné le nom de série hypergéométrique, à la série :

$$1 + \frac{ab}{c.1}z + \frac{a(a+1).b(b+1)}{c(c+1).1.2}z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

que l'on note par  $F(a, b; c; z)$  (ou  ${}_2F_1(a, b; c; z)$ ) qui converge pour  $|z| < 1$ .

Le symbole  $(d)_n$  est la notation de Pochhammer, où  $d$  désigne un nombre quelconque et  $n$  un entier positif ou nul. Il a le sens suivant :

$$(d)_n = \frac{\Gamma(d+n)}{\Gamma(d)} = d(d+1)(d+2)\dots(d+n-1)$$

et en particulier :

$$\begin{aligned} (d)_0 &= 1 \\ (1)_n &= 1.2.3\dots n = n! \end{aligned}$$

Dans la série hypergéométrique précédente, les trois premiers éléments  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres, et le quatrième  $z$  est la variable, ces quatre quantités pouvant d'ailleurs prendre des valeurs complexes; on doit seulement exclure pour  $c$  les valeurs entières et négatives.

**Définition 1.1**

La fonction hypergéométrique de Gauss [33, 34] est définie par :

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{1.1}$$

elle converge pour  $|z| < 1$ , où  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $c \notin \mathbb{Z}^-$ .

Ses dérivées [3] satisfont la relation :

$$\frac{d^n}{dx^n} F(a, b; c; z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; z) \tag{1.2}$$

### Remarque 1.1

Si  $a$  ou  $b$  est un entier négatif, la série hypergéométrique est un polynôme de degré  $n$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

$$F(-n, b; c; z) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (b)_i}{(c)_i} z^i$$
$$F(a, -n; c; z) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (a)_i}{(c)_i} z^i$$

Par exemple, on suppose que  $a = -2$ ; on obtient alors la série :

$$F(-2, b; c; z) = 1 + \frac{(-2)b}{c} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{(-2)(-1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + 0$$

ainsi

$$F(-2, b; c; z) = 1 - \frac{2b}{c}z + \frac{b(b+1)}{c(c+1)}z^2$$

C'est un polynôme d'ordre 2.

Les polynômes orthogonaux s'expriment tous comme des cas particuliers de  ${}_2F_1$  [33, 34] avec au moins un des paramètres  $a$  et  $b$  entier négatif.

-  $P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-z}{2}\right)$  est un polynôme de Legendre.

-  $T_n(x) = F\left(-n, n, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$  est un polynôme de Chebyshev.

-  $C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(2\alpha)_n}{n!} F\left(-n, n+2\alpha, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$  est un polynôme de Gegenbauer.

-  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\left(-n, 1+n+\alpha+\beta, \alpha+1, \frac{1-z}{2}\right)$  est un polynôme de Jacobi.

### Propriétés 1.1

1/- On observe que  $F(a, b; c; z)$  est symétrique par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$  :

$$F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z)$$

2/- On considère :

$$F(a, b; c; z) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \quad \text{telle que } C_0 = 1$$

Le rapport d'un terme au précédent étant égal à :  $\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(k+1)}$ .

### Equation différentielle de Gauss :

La fonction hypergéométrique de Gauss (1.1), est définie comme étant la solution de l'équation différentielle (appelée équation de Gauss) linéaire du second ordre suivante :

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0, \quad (1.3)$$

où  $w$  est la fonction inconnue,  $z$  désigne la variable et  $a, b$  et  $c$  sont des constantes.

Si  $c, a-b$  et  $c-a-b$  ne sont pas entiers négatifs, la solution générale de cette équation est :

$$w = AF(a, b, c; z) + Bz^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z). \quad (1.4)$$

Les  $A$  et  $B$  désignent des constantes arbitraires.

## Solutions au niveau des points singuliers

L'équation de Gauss (1.3) possède comme points singuliers réguliers, les trois points :

$$0, 1, \infty.$$

On cherche à déterminer des séries vérifiant formellement cette équation [2], donc :

- Autour du point  $z = 0$ , deux solutions sont indépendantes, si  $c$  n'est pas un nombre entier :

$${}_2F_1(a, b; c; z),$$

et

$$z^{1-c} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z).$$

- Autour de  $z = 1$ , si  $c - a - b$  n'est pas un entier, on a deux solutions indépendantes :

$${}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-z),$$

et

$$(1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z).$$

- Autour de  $z = \infty$ , si  $a - b$  n'est pas un entier, on a deux solutions indépendantes :

$$z^{-a} {}_2F_1(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1}),$$

et

$$z^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c; 1+b-a; z^{-1}).$$

## Remarques 1.2

1/ Toute équation différentielle du second ordre avec trois points singuliers réguliers peut se ramener, grâce à un changement de variable, à une équation différentielle hypergéométrique de Gauss.

2/ Dans le cas où  $a$ ,  $b$  ou  $c$  sont des entiers, on peut réduire la fonction hypergéométrique à une fonction transcendante plus simple.

3/ Si  $c$  est égal à un entier, la solution hypergéométrique de l'équation (1.2) contient des termes logarithmiques.

## Cas particuliers des fonctions de Gauss

Voici, quelques propriétés de fonctions qui sont des cas particuliers des séries hypergéométriques [33, 34].

$$\text{a/ } F(a, b, b; z) = (1 - z)^{-a}$$

$$\text{b/ } F(1, 1, 2; z) = -\frac{\ln(1 - z)}{z}$$

$$\text{c/ } F(1, 1, 2; -z) = \log(1 + z)$$

$$\text{d/ } F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2z} \log \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$\text{e/ } F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{\arctan z}{z}$$

$$\text{f/ } \lim_{b \rightarrow 0} F\left(1, b, 1; \frac{z}{b}\right) = e^z$$

### 1.1.2 Fonctions hypergéométriques généralisées

Les fonctions hypergéométriques généralisées sont définies de la manière suivante :

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (1.5)$$

où, on a utilisé la notation de Pochhammer

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)}$$

## Equations différentielles de Gauss non homogènes

On considère, dans cette partie, des équations différentielles linéaires non homogènes [3] de la forme :

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = f(z) \quad (1.6)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes.

1. Si  $f(z) = z^{\sigma-1}$ , où  $\sigma$  est une constante, la solution particulière  $y_p$  de cette équation est sous la forme :

$$y_p = f_{\sigma}(a, b; c; z) = \frac{z^{\sigma}}{\sigma(\sigma+c-1)} {}_3F_2(1, \sigma+a, \sigma+b; \sigma+1; \sigma+c; z) \quad (1.7)$$

Sa dérivée satisfait la relation suivante :

$$\frac{d}{dz} f_{\sigma}(a, b; c; z) = (\sigma-1) f_{\sigma-1}(a+1, b+1; c+1; z)$$

2. Si  $f(z) = z^{\sigma-1}(1-\rho z)^{\tau-1}$ , où  $\sigma, \rho$  et  $\tau$  sont des constantes, la solution particulière  $y_p$  de l'équation (1.6) est sous la forme

$$y_p = C_{\rho, \sigma}^{(\tau)}(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\tau)\rho^n}{\Gamma(1-\tau).n!} f_{\sigma+n}(a, b; c; z) \quad (1.8)$$

Sa dérivée satisfait la relation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} C_{\rho, \sigma}^{(\tau)}(a, b; c; z) &= (\sigma-1) C_{\rho, \sigma-1}^{(\tau)}(a+1, b+1; c+1; z) \\ &\quad + \rho(1-\tau) C_{\rho, \sigma}^{(\tau-1)}(a+1, b+1; c+1; z). \end{aligned}$$

### Remarque 1.3

*La fonction  $f(z)$  peut prendre d'autres formes en fonction de  $z$ , et pour chaque forme cela change la solution de l'équation non homogène [3].*

Voici deux transformations importantes nécessaires pour l'étude de la convergence dans les prochains chapitres.

### Transformation de Pfaff :

Voici les deux formules de la transformation de Pfaff :

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right) \quad (1.9)$$

$$= (1-z)^{-b} F\left(c-a, b, c, \frac{z}{z-1}\right) \quad (1.10)$$

### Transformation d'Euler :

Nous utilisons (1.9) et (1.10) pour trouver la transformation d'Euler suivante :

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, z) \quad (1.11)$$

## 1.1.3 Fonction Gamma

### Définition 1.2

La fonction Gamma, notée  $\Gamma(x)$ , est définie par la formule d'Euler ci-dessous :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{pour } x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0 \quad (1.12)$$

### Propriétés 1.2

1/ La fonction Gamma vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall x, \operatorname{Re}(x) > 0; \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (1.13)$$

2/ La fonction Gamma est liée avec les symboles de Pochhammer comme suit :

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (1.14)$$

**Valeurs particulières de  $\Gamma(x)$**

1/  $\Gamma(1) = \int_0^1 e^{-t} dt = 1$

2/ Pour  $x = n \in \mathbb{N}^*$ , on applique la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2), \\ &= (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\dots 3.2.1\Gamma(1), \end{aligned}$$

on obtient :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (1.15)$$

3/ Pour  $x = \frac{1}{2}$  :

En effectuant, dans un premier temps, le changement de variable dans la formule d'Euler suivante :  $t = u^2$ ,  $dt = 2u \cdot du$  afin d'obtenir :

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du.$$

En remplaçant  $x$  par  $\frac{1}{2}$ , on obtient la valeur particulière suivante :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.16)$$

**4/ Formule de Stirling**

La formule de Stirling particulière à la fonction Gamma est la suivante :

$$\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}. \quad (1.17)$$

## 1.2 Estimations de la fonction hypergéométrique :

Dans cette partie, on donne un lemme important pour l'estimation de la fonction hypergéométrique, qui nous aidera pour l'étude de la convergence des solutions construites.

**Lemme 1.1** [14, 13] Si  $a \geq b > c > 0$ ,  $d = a + b - c$ , alors

$$F(a, b; c; z) \ll \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{-d}.$$

**Preuve.**

Pour estimer la fonction hypergéométrique  $F$ , nous allons tout d'abord montrer que la suite  $\frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (d)_n}$  est croissante.

En effet, d'après la condition :  $d = a + b - c$  et pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(d+n)} &= \frac{(a+n)(b+n) + (c+n)(d+n) - (c+n)(d+n)}{(c+n)(d+n)} \\ &= \frac{(c+n)(d+n)}{(c+n)(d+n)} + \frac{(a+n)(b+n) - (c+n)(d+n)}{(c+n)(d+n)} \\ &= 1 + \frac{ab - cd + n(a+b) - n(c+d)}{(c+n)(d+n)} \end{aligned}$$

et comme  $a + b = c + d$ , on obtient :

$$\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(d+n)} = 1 + \frac{ab - cd}{(c+n)(d+n)}$$

d'autre part, on a :

$$ab - cd = ab - c(a + b - c) = ab - ca - cb + c^2 = (c - a)(c - b)$$

donc :

$$ab - cd = (c - a)(c - b) > 0$$

car  $a \geq b \geq c > 0$ .

Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(d+n)} = 1 + \frac{(c-a)(c-b)}{(c+n)(d+n)} > 1$$

En utilisant, par la suite, la propriété suivante de la fonction Gamma [7] :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z-1}}{(z)_n}$$

Nous avons :

$$\text{la limite de } \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (d)_n} \text{ qui tend vers } \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Ce qui nous conduit à

$$\frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (d)_n} \leq \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}$$

Nous aboutissons finalement à :

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(d)_n (a)_n (b)_n}{(1)_n (c)_n (d)_n} z^n \\ &\ll \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{n \geq 0} \frac{(d)_n}{(1)_n} z^n \\ &\ll \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{-d} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F(a, b; c; z) \ll \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{-d} \quad (1.18)$$

### 1.3 Principe de superposition :

Nous considérons une équation différentielle linéaire sous la forme :

$$LU = g \tag{1.19}$$

où le second membre  $g$  est la somme de deux fonctions  $g_1 + g_2$ .

On peut chercher une solution particulière  $S_1$  de l'équation différentielle du second membre  $g_1$  :

$$LU = g_1$$

puis une solution particulière  $S_2$  de l'équation différentielle du second membre  $g_2$  :

$$LU = g_2$$

Alors, la somme  $S = S_1 + S_2$  de ces deux solutions particulières est solution particulière de l'équation de départ :  $LU = g$ .

Ce principe se généralise facilement au cas où  $g$  est la somme de plus de deux fonctions.

En effet, si  $S(t)$  est la solution d'un système linéaire produit par différentes fonctions du second membre  $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$  agissant simultanément, alors celle-ci est égale à la somme des solutions produites par chacune des fonctions agissant séparément. Ainsi, si  $S_i(t)$  est la solution produite par la fonction  $g_i(t)$ , alors :

$$S(t) = \sum_{i=0}^n S_i(t) \tag{1.20}$$

## 1.4 Surfaces caractéristiques

On note par  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , un point de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ est un multi-indice de } \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha| &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \text{ est le module de } \alpha \end{aligned}$$

$$D^\alpha = D_0^{\alpha_0} \cdot D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \quad \text{où } D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ pour } 0 \leq j \leq n$$

donc

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.21}$$

désigne un opérateur différentiel linéaire d'ordre deux à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine [35, 12].

### Définition 1.3

La partie principale de l'opérateur (1.21) est :

$$P_2(x, D) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.22}$$

### Exemple 1.1

La partie principale de l'opérateur :

$$P(x, D) = D_1^2 + \sin(x_1, x_2) D_2^2 - x_2^2 D_1 D_2 + x_1 D_2 + e^{x_2}$$

est :

$$P_2(x, D) = D_1^2 + \sin(x_1, x_2) D_2^2 - x_2^2 D_1 D_2$$

### Exemple 1.2

La partie principale de l'opérateur :

$$P(x, D) = a_1(x) D_1 + a_2(x) D_2 + C(x)$$

est :

$$P_1(x, D) = a_1(x) D_1 + a_2(x) D_2$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  est un vecteur non nul appartenant à  $\mathbb{R}^n$ , il définit une direction dans  $\mathbb{R}^n$ .

Une direction définie par le vecteur  $\xi \in \mathbb{R}_*^n$  est appelée "**caractéristique**" sur le point  $x \in \mathbb{R}^n$ , en respectant l'opérateur différentiel partiel  $P(x, D)$  donné par (1.21), si

Si

$$P_2(x, \xi) = 0. \tag{1.23}$$

où  $P_2(x, D)$  donné par (1.22) est la partie principale de  $P(x, D)$ .

L'équation (1.23) est appelée "**équation caractéristique**" de  $P(x, D)$ . On obtient cette équation, en remplaçant les dérivées des divers ordres  $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$  par  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , ainsi :

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a^\alpha(x) \xi^\alpha \quad \text{où } m = 2.$$

**Exemple 1.3**

On considère dans  $\mathbb{R}^2$  l'opérateur d'Onde suivant :

$$P(D) = D_1^2 - D_2^2$$

L'équation caractéristique est :

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$$

qui est satisfaite si  $\xi_2 = \pm \xi_1$

Les surfaces caractéristiques sont les deux droites :

$$x_2 = x_1 + c_1$$

$$x_2 = -x_1 + c_2$$

**Exemple 1.4**

On considère dans  $\mathbb{R}^2$  l'opérateur de Chaleur :

$$P(D) = D_1^2 - D_2$$

La partie principale est :

$$P_2(D) = D_1^2$$

Alors l'équation caractéristique est :

$$\xi_1^2 = 0$$

donc, les surfaces caractéristiques sont les droites  $x_1 = K$  (  $K$  est une constante )

# Chapitre 2

## Les singularités de la solution du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes en involution

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des singularités et la convergence des solutions du problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles linéaires dans  $\mathbb{C}^2$  :

$$U_{tt} - xU_{xx} + CU_x = apU (t^2 - 4x)^{-1} + f(t, x), \quad p > 1 \quad (2.1)$$

avec des données de Cauchy analytiques.

$$U(0, x) = u_0(x),$$

$$U_t(0, x) = u_1(x).$$

Où la fonction  $f(t, x)$  est analytique dans un voisinage  $\Omega$  de l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , et dans lequel les fonctions  $u_0(x), u_1(x)$  sont analytiques sur

$$\Omega \cap \{(t, x) : t = 0\}.$$

Dans cette optique, on va s'appuyer sur les travaux d'A. Bentrard et S. Kichenassamy [14, 13], qui ont construit les solutions de l'équation suivante en utilisant les fonctions hypergéométriques :

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{Au}{r^2 - t^2} = 0, \quad \text{pour } 0 < t < r < R, \quad (2.2)$$

où  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $R$  est une constante positive.

La constante  $A$  est un réel inférieur ou égale à  $\frac{1}{4}(N-1)^2$  et  $N \geq 1$ .

Nous avons pour but de donner une représentation explicite des solutions sous la forme d'une série de fonctions hypergéométriques et on montre que cette solution est singulière autour de  $K = K_1 \cup K_2$ .

On note :

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(t, x) \in \Omega / x = 0\}, \\ K_2 &= \{(t, x) \in \Omega / 4x - t^2 = 0\}. \end{aligned}$$

L'équation (2.1) provient de la linéarisation de l'équation non linéaire suivante :

$$V_{tt} - xV_{xx} + CV_x = aV^p + f(t, x), \quad (2.3)$$

autour de la solution particulière :

$$V_0(t, x) = (t^2 - 4x)^{-\frac{1}{p-1}},$$

avec

$$a = \frac{1}{p-1} \left( 4C - 2 + \frac{4}{p-1} \right).$$

Par la suite, nous cherchons la solution dans les cas où  $f$  vérifie :

$$\begin{aligned} 1/ f(t, x) &= 0, \text{ ou} \\ 2/ f(t, x) &= (4x)^i t^m. \end{aligned}$$

Avant de commencer à chercher la solution de notre problème, on doit linéariser le problème non linéaire (2.3) et pour cela, on cherche la solution particulière de cette équation.

### **Théorème 2.1**

*L'équation non linéaire suivante :*

$$U_{tt} - xU_{xx} + CU_x = aU^p \quad (2.4)$$

*a une solution particulière sous la forme :*

$$U_0(t, x) = (t^2 - 4x)^{-\frac{1}{p-1}} \quad (2.5)$$

En effet, Pour montrer ce résultat, nous avons posé :

$$U(t, x) = V(S) \quad / \quad S = t^2 - 4x \quad (2.6)$$

Après dérivation, on trouve :

$$\begin{aligned} U_{tt} &= S_{tt}V' + S_t^2V'' \\ U_{xx} &= S_{xx}V' + S_x^2V'' \\ U_x &= S_xV' \end{aligned}$$

Ensuite, on substitue les dérivées ci-dessus dans (2.4), pour obtenir l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$4SV'' + (2 - 4C)V' = aV^p \quad (2.7)$$

L'équation différentielle ordinaire de second ordre non linéaire précédente a une solution particulière sous la forme :

$$V(S) = S^{-\frac{1}{p-1}}$$

Par conséquent,  $U_0 = (t^2 - 4x)^{-\frac{1}{p-1}}$  est une solution particulière de :

$$D_t^2 U_0 - x D_x^2 U_0 + C D_x U_0 = a U_0^p \quad (2.8)$$

où

$$a = \frac{1}{p-1} \left( 4C - 2 + \frac{4p}{p-1} \right)$$

## Linéarisation de l'équation

Dans cette partie, on s'intéresse à la linéarisation de l'équation homogène (2.4).

Pour la linéariser, nous allons présenter deux méthodes différentes. Dans la première, on va utiliser la définition de la dérivée. Pour la seconde, on se sert de la formule du Binôme de Newton. En effet :

Soit  $U = U_0 + \varepsilon V$ , telle que  $0 < \varepsilon < 1$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ )

### La première méthode

On substitue  $U$  dans (2.4) comme suit,

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 (U_0 + \varepsilon V) - x \partial_x^2 (U_0 + \varepsilon V) + C \partial_x (U_0 + \varepsilon V) &= a (U_0 + \varepsilon V)^p, & (2.9) \\
 \partial_t^2 U_0 - x \partial_x^2 U_0 + C \partial_x U_0 + \varepsilon (\partial_t^2 V - x \partial_x^2 V + C \partial_x V) &= a (U_0 + \varepsilon V)^p, \\
 a U_0^p + \varepsilon (\partial_t^2 V - x \partial_x^2 V + C \partial_x V) &= a (U_0 + \varepsilon V)^p, \\
 \partial_t^2 V - x \partial_x^2 V + C \partial_x V &= \frac{a (U_0 + \varepsilon V)^p - a U_0^p}{\varepsilon}. & (2.10)
 \end{aligned}$$

On applique la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 aux deux membres de (2.10) et ensuite la définition de la Dérivation, alors l'équation non linéaire (2.4) devient linéaire sous la forme

$$\partial_t^2 V - x \partial_x^2 V + C \partial_x V = apV (t^2 - 4x)^{-1}. \quad (2.11)$$

### La deuxième méthode

On applique la *Formule du Binôme de Newton* sur le deuxième membre de l'équation (2.4) comme suit :

$$\begin{aligned}
 (U_0 + \varepsilon V)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (U_0)^{p-k} (\varepsilon V)^k, \\
 &= (U_0)^p + p (U_0)^{p-1} (\varepsilon V) + \frac{p(p-1)}{2} (U_0)^{p-2} (\varepsilon V)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

pour arriver à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon (\partial_t^2 V - x \partial_x^2 V + C \partial_x V) &= a (U_0 + \varepsilon V)^p - a U_0^p, \\
 &= a \left( p (U_0)^{p-1} (\varepsilon V) + \frac{p(p-1)}{2} (U_0)^{p-2} (\varepsilon V)^2 + \dots \right).
 \end{aligned}$$

on divise les deux membres par  $\varepsilon$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned}\partial_t^2 V - x\partial_x^2 V + C\partial_x V &= ap(U_0)^{p-1}V + \frac{p(p-1)}{2}a(U_0)^{p-2}\varepsilon(V)^2 + \dots \\ &= ap(U_0)^{p-1}V + o(\varepsilon) \quad / \quad o(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.\end{aligned}$$

Finalement, parvient à l'équation linéaire :

$$\partial_t^2 V - x\partial_x^2 V + C\partial_x V = apV(t^2 - 4x)^{-1}.$$

## 2.2 Etude du problème de Cauchy linéaire homogène

On considère, dans un voisinage  $\Omega$  de l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} LU = \partial_t^2 U - x\partial_x^2 U + C\partial_x U - ap(t^2 - 4x)^{-1}U = f(t, x) & \text{sur } \Omega \\ U(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \cap \{t = 0\} \\ U_t(0, x) = u_1(x) & \end{array} \right. \quad (2.12)$$

dans lequel,  $u_0(x)$  et  $u_1(x)$  sont analytiques sur  $\Omega \cap \{t = 0\}$  et  $f(t, x)$  est analytique sur  $\Omega$ .

L'étude de ce problème est équivalente à celle des deux problèmes conjoints :

$$\left\{ \begin{array}{l} LU = 0 \\ U(0, x) = u_0(x) \\ U_t(0, x) = u_1(x) \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} LU = f(t, x) \\ U(0, x) = 0 \\ U_t(0, x) = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

### 2.2.1 La solution du problème homogène

D'après le principe de superposition, il suffit d'étudier les problèmes de Cauchy linéaires ci-dessous :

$$\begin{cases} LV = 0 \\ V(0, x) = x^l \\ V_t(0, x) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} LW = 0 \\ W(0, x) = 0 \\ W_t(0, x) = x^l \end{cases} \quad (2.16)$$

Dans le paragraphe suivant, on construit les deux fonctions  $V$  et  $W$ . Solutions, respectivement, des problèmes (2.15) et (2.16).

On énonce maintenant le théorème principal de ce chapitre :

#### **Théorème 2.2**

Le problème de Cauchy (2.12) homogène a une unique solution sous la forme :

$$U(t, x) = \sum_{l \geq 0} (a_l V_{l, \beta} + b_l W_{l, \beta'}),$$

où  $a_l$  et  $b_l$  sont des constantes et

$$\begin{aligned} V(t, x) &= V_{l, \beta}(t, x) = \\ &= (4)^{-\beta} (x)^{l-\beta} (4x - t^2)^\beta F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

telle que  $\beta$  vérifie :

$$\beta \left(2l - \beta - C - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}B.$$

$$\begin{aligned}
W(t, x) &= W_{l, \beta'}(t, x) = \\
&= (4)^{-\beta'} (x)^{l-\beta'} (4x - t^2)^{\beta'} t F \left( \beta' - l, C + \beta' - l + 1, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{4x} \right) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

telle que  $\beta'$  vérifie :

$$\beta' \left( \beta' - l + \frac{C}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}B.$$

où  $F$  est la fonction hypergéométrique de Gauss.

**Preuve.**

On pose  $V(t, x) = V_l(t, x) = x^l v(z)$  telle que  $z = \frac{t^2}{4x}$ . On a alors :

$$V_x = lx^{l-1}v + x^l z_x v',$$

$$V_{xx} = l((l-1)x^{l-2}v + x^{l-1}z_x v') + lx^{l-1}z_x v' + x^l z_{xx} v' + x^l (z_x)^2 v'',$$

$$V_{tt} = x^l (z_t)^2 v'' + x^l z_{tt} v'.$$

Donc,  $LV = 0$  est équivalent à :

$$z(1-z)v'' + \left( \frac{1}{2} - (C + 2(l-l))z \right) v' + \left( l(C-l+1) - \frac{1}{4}ap \left( \frac{1}{z-1} \right) \right) v = 0. \quad (2.19)$$

Afin de construire l'équation de Gauss, il faut effectuer un autre changement de variable :

$$v = (1-z)^\beta y$$

Alors,

$$v' = (1-z)^\beta y' - \beta(1-z)^{\beta-1} y$$

$$v'' = (1-z)^\beta y'' - 2\beta(1-z)^{\beta-1} y' + \beta(\beta-1)(1-z)^{\beta-2} y$$

On remplace ces dérivées dans l'équation (2.19), pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& z(1-z)^{\beta+1}y'' - 2\beta z(1-z)^\beta y' + \beta(\beta-1)z(1-z)^{\beta-1}y \\
& + \left(\frac{1}{2} - (C+2(1-l))z\right)(1-z)^\beta y' - \beta\left(\frac{1}{2} - (C+2(1-l))z\right)(1-z)^{\beta-1}y \\
& + l(C-l+1)(1-z)^\beta y + \frac{1}{4}ap\left((1-z)^{\beta-1}y\right) = 0. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Si

$$\beta\left(2l - \beta - C - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}ap.$$

Par conséquent, (2.20) est équivalent à l'équation de Gauss suivante :

$$z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - (C+2(1-l+\beta))z\right)y' + (l(C-l+1) + \beta(\beta+C+1-2l))y = 0. \tag{2.21}$$

Comme  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , un système fondamental [3] de solutions est :

$$\begin{aligned}
y_1 &= F\left(\beta-l, C+\beta-l+1, \frac{1}{2}; z\right). \\
y_2 &= z^{\frac{1}{2}}F\left(\beta-l+\frac{1}{2}, C+\beta-l+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; z\right).
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (2.21) soit :

$$y = AF\left(\beta-l, C+\beta-l+1, \frac{1}{2}; z\right) + Bz^{\frac{1}{2}}F\left(\beta-l+\frac{1}{2}, C+\beta-l+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; z\right). \tag{2.22}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Pour les trouver, il suffit d'appliquer les conditions de Cauchy. Cette solution est convergente pour  $|z| < 1$ , et divergente pour  $|z| > 1$ .

D'après les données de Cauchy, nous avons trouvé  $A = 1$  et  $B = 0$ .

La solution générale du problème (2.15) est :

$$V(t, x) = V_{l\beta}(t, x) = (4)^{-\beta} (x)^{l-\beta} (4x - t^2)^\beta F\left(\beta-l, C+\beta-l+1, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right). \tag{2.23}$$

Pour (2.16), de manière analogue, on obtient la solution :

$$W(t, x) = (4)^{-\beta'} (x)^{l-\beta'} (4x - t^2)^{\beta'} tF \left( \beta' - l, C + \beta' - l + 1, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{4x} \right), \quad (2.24)$$

avec

$$\beta' \left( \beta' - l + \frac{C}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}B.$$

### 2.2.2 Singularités de la solution

Nous avons étudié les singularités de la solution  $U$ .

L'application

$$z = \frac{t^2}{4x}$$

transforme :

$$\begin{aligned} t &= 0, \text{ en } z = 0 \\ K_1 &: x = 0 \text{ en } z = \infty \\ K_2 &: t^2 - 4x = 0 \text{ en } z = 1 \end{aligned}$$

La solution  $U$  est composée d'une fonction hypergéométrique qui est holomorphe sur  $D - (0, 1, \infty)$ , où  $D$  est la sphère de Riemann.

Ainsi, l'étude des singularités de la solution se réduit à celle des propriétés bien connues des fonctions de Gauss.

#### Remarques 2.1

Pour  $\beta - l = -n$  où  $C + \beta - l + 1 = -n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$F \left( -n, C + \beta - l + 1; \frac{1}{2}; z \right) = \sum_{i=0}^n a_i \left( \frac{t^2}{4x} \right)^i \text{ avec le terme général } \left( \frac{t^2}{4x} \right)^n \quad (2.25)$$

La forme générale de la solution  $V(t, x)$  est :

$$V(t, x) = (4)^{l-n} (x)^n (4x - t^2)^{l-n} \left( \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (b)_i}{(c)_i} \left( \frac{t^2}{4x} \right)^i \right) \quad (2.26)$$

où

$$c = \frac{1}{2}, \text{ et } b = c - n - 1$$

son dernier terme est

$$C_n t^{2n} x^{-n} \left( (x^n) (4x - t^2)^{l-n} \right)$$

$$C_n t^{2n} (4x - t^2)^{l-n}$$

tel que  $C_n$  dépend des paramètres  $C, l$  et  $\beta$ .

Par conséquent, nous avons certains résultats :

*Si  $l - n < 0$  (c'est à dire que  $l < n$  ou  $\beta < 0$ ), alors la solution est singulière sur les surfaces caractéristiques  $K_2 : 4x - t^2 = 0$ .*

*Sinon, la solution  $V(t, x)$  est un polynôme (fonction polynomiale).*

*Nous trouvons pour  $W(t, x)$ , le dernier terme :*

$$C'_n t^{2n+1} (4x - t^2)^{l-n}$$

Pour illustrer le théorème nous donnons quelques exemples.

## Exemples

### Exemple 2.1

On considère le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 V - x \partial_x^2 V + 2 \partial_x V - 28 (t^2 - 4x)^{-1} V = 0, \\ V(0, x) = x^4, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

La solution  $V(t, x)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \frac{1}{4^2} x^2 (4x - t^2)^2 F\left(-2, 1; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \\ &= \frac{1}{4^2} (4x - t^2)^2 \left(x^2 - t^2 x + \frac{t^4}{6}\right). \end{aligned}$$

C'est un polynôme.

### Exemple 2.2

Soit le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 V - x \partial_x^2 V - 2 \partial_x V - 12 (t^2 - 4x)^{-1} V = 0, \\ V(0, x) = x, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Une solution de ce problème est donnée par :

$$V(t, x) = \frac{1}{16} x^{-1} (4x - t^2)^2.$$

Cette solution est singulière seulement sur  $K_1 : x = 0$ .

**Exemple 2.3**

Le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 V - x\partial_x^2 V + \partial_x V + 6(t^2 - 4x)^{-1} V = 0, \\ V(0, x) = x, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

a comme solution :

$$V(t, x) = 4x^2 (4x - t^2)^{-1}.$$

qui est singulière seulement sur  $K_2 : 4x - t^2 = 0$ .

**Exemple 2.4**

On considère le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 V - x\partial_x^2 V - \partial_x V - 4(t^2 - 4x)^{-1} V = 0, \\ V(0, x) = x, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

$V(t, x)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \frac{1}{16} x^{-1} (4x - t^2)^2 F\left(1, 1; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \\ &= \frac{1}{4} \left[ t\sqrt{(4x - t^2)} \arcsin\left(\frac{t}{2\sqrt{x}}\right) + (4x - t^2) \right]. \end{aligned}$$

$V$  est singulière sur  $K_1 : x = 0$  et  $K_2 : 4x - t^2 = 0$ .

**Conclusion :** Voici quelques conclusions :

1) Si  $\beta - l = -n$ ,  $l < n$  et  $\beta < 0$ , la solution :

$$V(t, x) = 4^{-n} x^n (4x - t^2)^\beta F\left(-n, C + 1 - n; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \quad (2.31)$$

est singulière sur  $K_2 : 4x - t^2 = 0$ .

2) Si  $\beta - l = -n$ ,  $l > n$  et  $\beta > 0$ , la solution :

$$V(t, x) = 4^{-n} x^n (4x - t^2)^\beta F\left(-n, C + 1 - n; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \quad (2.32)$$

est un polynôme.

3) Si  $C + \beta - l + 1 = -n$ , alors

$$V(t, x) = 4^{-\beta} x^{n+C+1} (4x - t^2)^{l-C-n-1} F\left(-(n+C+1), -n; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right). \quad (2.33)$$

on en déduit que :

i) Si  $C < -n - 1$  ( $C + n + 1 < 0$ )  $\Rightarrow l - (n + C + 1) > 0$ , alors  $V$  est singulière sur  $K_1$ .

ii) Si  $C > -n - 1$  et  $l - (n + C + 1) < 0$ , donc  $V$  est singulière sur  $K_2$ .

iii) Si  $C > -n - 1$  et  $l - (n + C + 1) > 0$ , donc  $V$  est un polynôme.

4) Pour  $l > C$ ,  $l$  et  $C$  paires et sous la forme :

$$l = 2k + 4, C = 2k + 2 \text{ avec } a = 14 + 8k, \beta = 2 \left( \text{ou } \beta = \frac{4k + 7}{2} \right) \text{ et } p = 2.$$

la solution est un polynôme.

5) Pour  $l < C$ ,  $l$  et  $C$  paires et sous la forme :

$$l = 2k, C = 2k + 6 \text{ avec } a = 14 + 4k \text{ et } \beta = 2k - 3$$

la solution est singulière sur  $K_2$ .

### 2.2.3 La convergence de la solution

La convergence de la solution est basée sur les fonctions hypergéométriques et pour cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 2.1**

Si  $a \geq b > c > 0$ , et  $d = a + b - c$ , pour  $|z| < 1$

$$F(a, b; c; z) \ll (1 - z)^{-d} \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \quad (2.34)$$

**Démonstration** : voir [27]

**Théorème 2.3**

Les séries  $\sum_{l \geq 0} a_l V_l$  et  $\sum_{l \geq 0} b_l W_l$  convergent pour :

$$|x| < \frac{R}{4} \quad (2.35)$$

où  $R$  est le rayon de convergence de  $u_0$  et  $u_1$ .

**Preuve.**

Nous avons la solution

$$V_l(t, x) = (x)^l \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^\beta F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{4x}\right) \quad (2.36)$$

Pour  $\beta = \beta_2 = \frac{2l - C - \frac{1}{2} + \sqrt{\Delta}}{2}$ . Telle que  $\beta_2$  est une racine de l'équation

$$\beta \left( 2l - \beta - C - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}B. \quad (2.37)$$

où  $\Delta$  est le discriminant de (2.37) :

$$\Delta = \left( 2l - C - \frac{1}{2} \right)^2 - B.$$

On pose

$$a = \beta - l, b = C + \beta - l + 1 \text{ et } c = \frac{1}{2}$$

Nous obtenons :

$$d = a + b - c = 2\beta - 2l + C + \frac{1}{2} = \sqrt{\Delta} > 0$$

A présent, nous appliquons le lemme 2.1.

En posant :

$$M = \frac{\Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \text{ et } 2y = \sqrt{\Delta}$$

On aboutit alors à :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2y)}{\Gamma\left(y - \frac{2C+1}{4}\right) \Gamma\left(y + \frac{2C+3}{4}\right)} \\ &= 2^{2y-1} \frac{\Gamma(y) \Gamma\left(y + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(y - \frac{2C+1}{4}\right) \Gamma\left(y + \frac{2C+3}{4}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{où } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2y) = 2^{2y-1} \Gamma(y) \Gamma\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

On utilise la *formule de Stirling* pour chaque fonction comme suit :

$$\begin{aligned}
\Gamma(y) &= \Gamma(y-1+1) \approx \sqrt{2\pi}(y-1)^{y-1/2} e^{-y+1} \approx \sqrt{2\pi}y^y \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y e^{-y+1} \\
&\approx \sqrt{2\pi}y^y e^{-y} \\
\Gamma\left(y + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(y - \frac{1}{2} + 1\right) \approx \sqrt{2\pi}\left(y - \frac{1}{2}\right)^y e^{-y+1/2} \approx \sqrt{2\pi}y^y e^{-y} \\
\Gamma\left(y + \frac{2C+3}{4}\right) &= \Gamma\left(y + \frac{2C-1}{4} + 1\right) \approx \sqrt{2\pi}\left(y + \frac{2C-1}{4}\right)^{y+\frac{2C-1}{4}+\frac{1}{2}} e^{-y-\frac{2C-1}{4}} \\
&\approx \sqrt{2\pi}y^y e^{-y} \\
\Gamma\left(y - \frac{2C+1}{4}\right) &= \Gamma\left(y - \frac{2C+5}{4} + 1\right) \approx \sqrt{2\pi}\left(y - \frac{2C+5}{4}\right)^{y-\frac{2C+5}{4}} e^{-y+\frac{2C+5}{4}} \\
&\approx \sqrt{2\pi}y^y e^{-y}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
M &\approx 2^{2y-1} \frac{\sqrt{2\pi}(y-1)^{y-1/2} e^{-y+1} \sqrt{2\pi}\left(y - \frac{1}{2}\right)^y e^{-y+1/2}}{\sqrt{2\pi}\left(y + \frac{2C-1}{4}\right)^{y+\frac{2C-1}{4}+\frac{1}{2}} e^{-y-\frac{2C-1}{4}} \sqrt{2\pi}\left(y - \frac{2C+5}{4}\right)^{y-\frac{2C+5}{4}} e^{-y+\frac{2C+5}{4}}} \\
&\approx 2^{2y-1} \frac{\sqrt{2\pi}(y)^y e^{-y} \sqrt{2\pi}(y)^y e^{-y}}{\sqrt{2\pi}(y)^y e^{-y} \sqrt{2\pi}(y)^y e^{-y}} \approx 2^{2y-1} \text{ pour } l \text{ assez grand ( } y \text{ assez grand)}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$M \approx 2^{2l} \text{ si } l \text{ assez grand}$$

On aboutit donc à :

$$\begin{aligned}
|V_l(t, x)| &\ll 2^{2y-1} |x|^l \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{\beta_2} \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{-\sqrt{\Delta}} \\
&\ll 2^{2y-1} |x|^l \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{\beta_2 - \sqrt{\Delta}} \\
&\ll 2^{2y-1} |x|^l \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{\beta_1} \quad \text{sachant que } \beta_1 \rightarrow 0 \text{ pour } l \text{ assez grand}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} |V_l|^{\frac{1}{l}} \leq 4|x|$$

Par conséquent,  $V_l$  converge pour :

$$|x| < \frac{R}{4}$$

- Pour  $\beta = \beta_1$  :

$$\beta_1 = \frac{2l - C - \frac{1}{2} - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \mathbf{c}'\text{est la deuxième racine de l'équation (2.37).}$$

Dans ce cas, on doit d'abord utiliser la *transformation d'Euler* à  $F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right)$  pour arriver à :

$$F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^{\sqrt{\Delta}} F\left(l - \beta + \frac{1}{2}, l - C - \beta - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right).$$

- Pour  $l$  large,  $l - \beta_1 = l + o(1)$  et ensuite on applique le lemme ci-dessus à  $F\left(l - \beta + \frac{1}{2}, l - C - \beta - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right)$  pour arriver à :

$$F\left(l - \beta + \frac{1}{2}, l - C - \beta - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right) \ll \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^{-\sqrt{\Delta}} M.$$

ensuite, en procédant de la même manière que pour  $\beta = \beta_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
|V_l| &\leq 2^{2y-1} |x|^l \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{\beta_1} \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{\sqrt{\Delta}} \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{-\sqrt{\Delta}}, \\
&= 2^{2y-1} |x|^l \left( \left| 1 - \frac{t^2}{4x} \right| \right)^{\beta_1}.
\end{aligned}$$

Comme  $\beta_1 \rightarrow 0$  pour  $l$  large, on en déduit que :

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} |V_l|^{\frac{1}{l}} \leq |x|.$$

Par conséquent,  $\sum_{l \geq 0} a_l V_l$  converge pour

$$|x| < \frac{R}{4}$$

Et, de la même manière, on montre que  $\sum_{l \geq 0} b_l W_l$  converge pour  $|x| < \frac{R}{4}$ .

## 2.3 Etude du problème de Cauchy linéaire non homogène

Nous étudions, dans cette section, notre problème de Cauchy (2.12) non homogène suivant :

$$\begin{cases} LU = \partial_t^2 U - x \partial_x^2 U + C \partial_x U - ap(t^2 - 4x)^{-1} U = f(t, x), \\ U(0, x) = u_0(x), \\ U_t(0, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (2.38)$$

On suppose que  $f(t, x)$  est analytique et sous la forme :

$$f(t, x) = x^i \left(\frac{t}{2}\right)^m. \quad (2.39)$$

D'après le *principe de superposition*, il suffit d'étudier le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} LV = x^i \left(\frac{t}{2}\right)^m, \\ V(0, x) = x^l, \\ V_t(0, x) = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

On énonce maintenant le théorème principal de cette partie :

### **Théorème 2.4**

Le problème (2.40) a une unique solution sous la forme :

$$V = V_o + V_p \quad \text{où} \quad (2.41)$$

$$V_o(t, x) = x^l (1-z)^\beta F\left(\beta-l, C+\beta-l+1, \frac{1}{2}; z\right) \quad (2.42)$$

$$V_p(t, x) = x^l (1-z)^\beta C_{p,\sigma}^{(\tau)}\left(\beta-l, C+\beta-l+1, \frac{1}{2}; z\right) \quad (2.43)$$

avec :  $l = \frac{m}{2} + i + 1$ .

Preuve.

En posant  $z = \frac{t^2}{4x}$  et  $V(t, x) = x^l G(z)$ , alors  $LV = f$  est équivalent à :

$$\begin{aligned} x^{l-1} \left( z(1-z)G'' + \left( \frac{1}{2} - (C+2(1-l))z \right) G' + \left( l(C-l+1) - \frac{1}{4}ap \left( \frac{1}{z-1} \right) \right) G \right) \\ = x^i \left( \frac{t}{2} \right)^m. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ainsi,

$$z(1-z)G'' + \left( \frac{1}{2} - (C+2(1-l))z \right) G' + \left( l(C-l+1) - \frac{1}{4}ap \left( \frac{1}{z-1} \right) \right) G = \frac{(t^2)^{\frac{m}{2}}}{x^{l-1-i} (4)^{\frac{m}{2}}}.$$

Pour  $l = \frac{m}{2} + i + 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} z(1-z)G'' + \left( \frac{1}{2} - (C+2(1-l))z \right) G' + \left( l(C-l+1) - \frac{1}{4}ap \left( \frac{1}{z-1} \right) \right) G \\ = z \frac{m}{2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

On pose  $G = (1-z)^\beta \Phi$  pour obtenir l'équation de Gauss non homogène suivante :

$$\begin{aligned} z(1-z)\Phi'' + \left( \frac{1}{2} - (C+2(1-l+\beta))z \right) \Phi' - (l(l-C-1) + \beta(\beta+C+1-2l))\Phi \\ = z \frac{m}{2} \left( (1-z)^{-\beta} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

avec la condition

$$\beta \left( 2l - \beta - C - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}ap. \quad (2.47)$$

La solution générale de cette équation est :

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_p(z). \quad (2.48)$$

où  $\Phi_0$  est la solution générale de l'équation homogène, et  $\Phi_p$  est la solution particulière.

$$\Phi_0(z) = DF \left( \beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; z \right) + Ez^{\frac{1}{2}} F \left( \beta - l + \frac{1}{2}, C + \beta - l + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; z \right). \quad (2.49)$$

où  $D$  et  $E$  sont des constantes arbitraires.

La solution particulière de l'équation de Gauss non homogène est

$$\Phi_p(z) = C_{\rho, \sigma}^{(\tau)}(a, b; c; z) = C_{1, \frac{m}{2}+1}^{(\tau)} \left( \beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; z \right), \quad (2.50)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \beta)}{\Gamma(\beta) n!} f_{n + \frac{m}{2} + 1} \left( \beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; z \right). \quad (2.51)$$

En tenant compte des conditions initiales, on prend  $D = 1$  et  $E = 0$ .

Donc la solution générale de (2.40) est :

$$V(t, x) = x^{\frac{m}{2} + i + 1} \left( 1 - \frac{t^2}{4x} \right)^{\beta} (\Phi_0 + \Phi_p). \quad (2.52)$$

# Chapitre 3

## Les singularités de la solution du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes non involutives

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons dans  $\mathbb{C}^2$ , le problème de Cauchy à données analytiques suivant :

$$LU = \partial_t^2 U + 2t\partial_t\partial_x U + C\partial_x U - apU (x - t^2)^{-1} = f(t, x), \quad p > 1 \quad (3.1)$$

Ce problème est similaire au problème du chapitre précédent. Et pour cela, on va passer par les mêmes étapes pour linéariser et résoudre ce problème.

L'équation homogène (3.1) a les mêmes géométries que l'équation homogène du pro-

blème (2.12) du chapitre précédent :

$$\partial_t^2 u - x \partial_x^2 u + C \partial_x u - ap (t^2 - 4x)^{-1} u = 0. \quad (3.2)$$

En effet les deux opérateurs ont la même géométrie au niveau des surfaces caractéristiques. La différence réside dans l'holomorphie des racines caractéristiques. Dans le premier problème elles sont holomorphes et dans le deuxième, elles ne le sont pas.

La méthode pour résoudre (3.1) est la même que le problème (2.12). Nous allons étudier également la convergence et la singularité de la solution de ce problème.

Nous allons construire les solutions de celui-ci, lesquelles sont données en terme des équations hypergéométriques. Puis, on va montrer que ces solutions peuvent être singulières sur les surfaces caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(t, x) \in \Omega / x - t^2 = 0\}. \\ K_2 &= \{(t, x) \in \Omega / x = 0\}. \end{aligned}$$

On va ainsi étudier (3.1) dans les cas suivants :

$$1. f(t, x) = 0, \quad (3.3)$$

$$2. \text{ si } f \text{ vérifie : } f_{tt} + 2t f_{tx} + C f_x - \frac{2t}{(x-t^2)} f_t - \frac{4t^2}{(x-t^2)} f_x = 0, \quad (3.4)$$

$$3. \text{ si } f \text{ vérifie : } f_{tt} + 2t f_{tx} + C f_x + \frac{4}{t} f_t + 4 f_x - \frac{ap}{(x-t^2)} f = 0. \quad (3.5)$$

Le but de ce chapitre est de voir que notre méthode, en utilisant les fonctions hypergéométriques pour résoudre les deux problèmes, est la même malgré qu'elles n'ont pas les mêmes polynômes caractéristiques.

## 3.2 Solution hypergéométrique

### 3.2.1 Etude du problème linéaire homogène

L'équation  $LU = 0$ , provient de la linéarisation autour de la solution particulière suivante :

$$u_0(t, x) = (x - t^2)^{-\frac{1}{p-1}}$$

avec la condition

$$a = \frac{2-C}{p-1} / C \neq 2$$

#### Théorème 3.1

Le problème de Cauchy :

$$LU = \partial_t^2 U + 2t\partial_t\partial_x U + C\partial_x U - apU (x - t^2)^{-1} = 0$$

admet une solution unique sous la forme :

$$U(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l V_{l,\beta} + b_l W_{l,\beta'}),$$

où

$$V(x, t) = V_{l,\beta}(x, t) = (x)^{l-\beta} (x - t^2)^\beta F\left(\beta - l, \beta + \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right),$$

avec

$$\beta \left(\beta - l + \frac{C}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}ap.$$

$$\text{et } W(t, x) = W_{l,\beta'}(x, t) = t(x)^{l-\beta'} (x - t^2)^{\beta'} F\left(\beta' - l, \beta' + \frac{C}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{x}\right),$$

ainsi que

$$\beta' \left(\beta' - 1 - l + \frac{C}{4}\right) = \frac{1}{4}ap.$$

Cette solution est singulière autour de  $K = K_1 \cup K_2$ .

Preuve.

D'après le principe de superposition, il suffit d'étudier les problèmes de Cauchy linéaires ci-dessous :

$$\begin{cases} LV = 0 \\ V(0, x) = x^l \\ V_t(0, x) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} LW = 0 \\ W(0, x) = 0 \\ W_t(0, x) = x^l \end{cases} \quad (3.7)$$

En posant  $z = \frac{t^2}{x}$  et  $V(x, t) = V_l(x, t) = x^l v(z)$ , alors  $LV = 0$  est équivalent à :

$$z(1-z)v'' + \left(\frac{1}{2} - \left(1-l + \frac{C}{4}\right)z\right)v' + \frac{1}{4}\left(Cl - ap\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)v = 0.$$

Mais cette équation n'est pas Gaussienne, il faut effectuer un autre changement de variable.

Donc, pour  $v = (1-z)^\beta y$ , nous obtenons l'équation de Gauss suivante :

$$z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - \left(2\beta - l + \frac{C}{4} + 1\right)z\right)y' + \frac{1}{4}(Cl - 2\beta - ap)y = 0,$$

avec la condition :

$$\beta\left(\beta - l + \frac{C}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}ap.$$

Comme  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , un système fondamental de solutions est :

$$\begin{aligned} y_1 &= F\left(\beta - l, \beta + \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right). \\ y_2 &= z^{\frac{1}{2}}F\left(\beta - l + \frac{1}{2}, \beta + \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{t^2}{x}\right). \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation de Gauss est sous la forme :

$$y = Ay_1 + By_2.$$

En tenant compte des conditions de Cauchy, on prend  $A = 1$  et  $B = 0$ , et ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{l\beta}(x, t) = (x)^{l-\beta} (x - t^2)^\beta (Ay_1 + By_2), \\ &= (x)^{l-\beta} (x - t^2)^\beta F\left(\beta - l, \beta + \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right). \end{aligned}$$

Pour la solution  $W(t, x)$  du (3.7), il suffit de poser  $W(t, x) = tx^l G(z)$  telle que  $z = \frac{t^2}{x}$ , puis  $G = (1 - z)^{\beta'}$   $y$  pour obtenir l'équation de Gauss suivante :

$$z(1 - z)y'' + \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} - l + \frac{C}{4} + 2\beta'\right)z\right)y' - \left[\beta' \left(\beta' + \frac{1}{2} - l + \frac{C}{4}\right) - \frac{1}{4}(cl + 2l)\right]y = 0,$$

où

$$\beta' \left(\beta' - 1 - l + \frac{C}{4}\right) = \frac{1}{4}ap.$$

Alors, la solution  $W$  est :

$$W(t, x) = W_{l,\beta'}(x, t) = t(x)^{l-\beta'} (x - t^2)^{\beta'} F\left(\beta' - l, \beta' + \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{t^2}{x}\right).$$

Pour illustrer le théorème, on donne quelques exemples :

### Exemple 3.1

On prend  $p = 2$ ,  $C = -2$  et  $a = 4$ ,

$$l = 0 \Rightarrow \beta = -1.$$

Pour obtenir

$$V(t, x) = \frac{x + 3t^2}{(x - t^2)}.$$

Elle est la solution de problème du Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{tt} + 2tV_{tx} - 2V_x - 8(x - t^2)^{-1}V = 0, \\ V(0, x) = 1, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right.$$

qui est singulière sur  $K_2$ .

### Exemple 3.2

On pose  $P = 2, C = 0$  et  $a = 2$ ,

$$l = 1 \Rightarrow \beta = 2.$$

On obtient

$$V(t, x) = \left( x + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2} \frac{tx}{\sqrt{x-t^2}} \sin^{-1} \left( \frac{t}{\sqrt{x}} \right) \right).$$

Elle est la solution de ce problème

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{tt} + 2tV_{tx} - 4(x - t^2)^{-1}V = 0, \\ V(0, x) = x, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right.$$

qui est singulière sur  $K_1$  et  $K_2$ .

### Exemple 3.3

Pour  $P = 2, C = \frac{14}{3}$  et  $a = \frac{-8}{3}$ ,

$$l = 3 \Rightarrow \beta = 1.$$

On peut vérifier aisément que :

$$V(t, x) = (x - t^2) \left( x^2 - \frac{26}{3}t^2x + \frac{247}{27}t^4 \right).$$

c'est un polynôme et une solution de

$$\begin{cases} V_{tt} + 2tV_{tx} + \frac{14}{3}V_x + \left(\frac{16}{3}\right)(x-t^2)^{-1}V = 0, \\ V(0, x) = x^3, \\ V_t(0, x) = 0. \end{cases}$$

### Etude des singularités

Nous avons la solution  $V(t, x)$

$$V(t, x) = (x)^{l-\beta} (x-t^2)^\beta F\left(\beta-l, \beta + \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right).$$

Sachant que la fonction hypergéométrique  $F$ , dans le cas général est :

$$\begin{aligned} F(-n, b; c; z) &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (b)_i}{(c)_i} z^i \quad \text{et} \\ F(a, -n; c; z) &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (a)_i}{(c)_i} z^i, \quad \text{telle que } z = \frac{t^2}{x}. \end{aligned}$$

Où le terme de degré "n" de  $F$  s'écrit sous la forme :

$$\alpha_n z^n = \alpha_n \left(\frac{t^2}{x}\right)^n = \alpha_n x^{-n} t^{2n}.$$

Alors voici quelques résultats :

1/ Pour :  $\beta - l = -n$ .

La fonction :  $F\left(-n, l - n + \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right)$  est un polynôme de degré "n".

Le dernier terme de  $V(t, x) = (x)^{l-\beta} (x - t^2)^\beta F\left(-n, l - n + \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right)$  est sous la forme :

$$C_n t^{2n} x^{-n} \left( (x^n) (x - t^2)^{l-n} \right),$$

$$C_n t^{2n} (x - t^2)^{l-n}.$$

Alors

i) Lorsque  $l - n < 0$ , la solution est singulière sur les surfaces caractéristiques  $K_2$  :  $x - t^2 = 0$ .

ii) Sinon, la solution  $V(t, x)$  est un polynôme (fonction polynomiale).

2/ Pour  $\beta + \frac{C}{4} = \frac{1}{2}$  et  $\beta - l = -n$ , la solution générale  $V(t, x)$  est sous la forme :

$$V(t, x) = x^n (x - t^2)^\beta F\left(-n, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right) \quad / \quad F\left(-n, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^n,$$

$$= (x - t^2)^l.$$

Alors  $V$  est un polynôme.

## La convergence

Pour la convergence on utilise le même lemme que le chapitre précédent.

D'après la condition :

$$\beta \left( \beta - l + \frac{c}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{ap}{4}$$

Nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 \text{ tend vers } 0 \\ \beta_2 \text{ tend vers } l \end{array} \right\} \text{ quand } l \text{ assez grand.}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{l - \frac{c}{4} + \frac{1}{2} - \sqrt{\Delta}}{2}, \text{ on pose } \gamma = -\frac{c}{4} + \frac{1}{2}, \\ &= \frac{1}{2} \left[ (l + \gamma) - (l + \gamma) \sqrt{1 + \frac{ap}{(l + \gamma)^2}} \right], \\ &= \frac{1}{2} (l + \gamma) \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{ap}{(l + \gamma)^2}} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la partie  $\left( 1 - \sqrt{1 + \frac{ap}{(l + \gamma)^2}} \right)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \beta_1 &\simeq \frac{1}{2} (l + \gamma) \left( 1 - \left( 1 + \frac{ap}{2(l + \gamma)^2} - \frac{ap^2}{8(l + \gamma)^2} + \dots + O\left(\frac{ap^{n+1}}{8(l + \gamma)^{2n+2}}\right) \right) \right), \\ &\simeq \frac{1}{2} (l + \gamma) \left( -\frac{ap}{2(l + \gamma)^2} + \frac{ap^2}{8(l + \gamma)^4} + \dots + O\left(\frac{ap^{n+1}}{8(l + \gamma)^{2n+2}}\right) \right), \\ &\simeq \left( -\frac{ap}{4(l + \gamma)} + \frac{ap^2}{16(l + \gamma)^2} + \dots + O\left(\frac{ap^{n+1}}{8(l + \gamma)^{2n+1}}\right) \right) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

donc

$$\beta_1 \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

De la même manière, on montre que :

$$\beta_2 \rightarrow l \text{ pour } l \text{ assez grand}$$

### **Théorème 3.2**

*Les séries*

$$\sum_{l \geq 0} (a_l V_l) \text{ et } \sum_{l \geq 0} (b_l W_l)$$

*convergent pour*

$$|x| < R \tag{3.8}$$

*où  $R$  est le Rayon de Convergence.*

**Preuve.**

Nous avons la solution :

$$V_l(t, x) = (x)^l \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^\beta F\left(\beta - l, \beta + \frac{C}{4}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right)$$

Si  $\beta = \beta_1$ , alors :  $d = -l + 2\beta + \frac{C}{4} - \frac{1}{2} = -\sqrt{\Delta} < 0$ .

Dans ce cas, on applique la transformation d'Euler pour obtenir

$$F\left(\beta - l, \beta + \frac{C}{4}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^{\sqrt{\Delta}} F\left(l - \beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \beta - \frac{C}{4}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right)$$

On applique ensuite le lemme (2.1) précédent, pour avoir l'estimation :

$$F\left(l - \beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \beta - \frac{C}{4}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x}\right) \ll M (1 - z)^{-\sqrt{\Delta}},$$

telle que

$$M = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(\sqrt{\Delta})}{\Gamma\left(l - \beta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta - \frac{C}{4}\right)}.$$

En appliquant la formule de Stirling, nous obtenons :

$$M^{\frac{1}{l}} \rightarrow 1 \text{ quand } l \rightarrow \infty$$

D'où

$$|V(t, x)|^{\frac{1}{l}} \ll |M|^{\frac{1}{l}} |x| \left| 1 - \frac{t^2}{x} \right|^{\frac{\beta}{l}},$$

par conséquent :

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} |V(t, x)|^{\frac{1}{l}} \ll |x|$$

On en conclut que les séries  $\sum_{l \geq 0} (a_l V_l)$  (ou  $\sum_{l \geq 0} (b_l W_l)$ ) converge pour  $|x| < R$ .

### 3.2.2 Etude du problème linéaire non homogène

Dans la suite, on va dresser des cas particuliers où la fonction  $f(t, x)$  dépend de certaines conditions.

#### 1er cas

Ici, on va étudier le problème de Cauchy linéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} LU = \partial_t^2 U + 2t \partial_{xt}^2 U + C \partial_x U - ap(x - t^2)^{-1} U = f(t, x), \\ U(0, x) = u_0(x), \\ U_t(0, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $u_0$  et  $u_1$  sont analytiques.

#### **Théorème 3.3**

Si  $f$  satisfait :

$$f_{tt} + 2t f_{tx} + C f_x - \frac{2t}{(x - t^2)} f_t - \frac{4t^2}{(x - t^2)} f_x = 0,$$

alors :

$$U = \sum_{l \geq 0} (a_l V_l + b_l W_l). \quad (3.10)$$

C'est une solution de  $LU = f$ , avec

$$\begin{aligned} V(t, x) &= V_l(t, x) = \frac{1}{C-2-ap} (x-t^2) x^l (1-z)^\beta v(z), \\ &= \frac{1}{C-2-ap} (x-t^2) x^l (1-z)^\beta F\left(\beta-l, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{1}{2}, z\right), \end{aligned}$$

où

$$\beta \left( \beta + \frac{C}{4} + \frac{1}{2} \right) = l(\beta + 1),$$

et  $W$  est la même solution que le problème (3.7).

**Preuve.**

D'après le principe de superposition, pour étudier le problème de Cauchy linéaire (3.9), il faut l'appréhender de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} LV = f(t, x), \\ V(0, x) = x^l, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} LW = 0, \\ W(0, x) = 0, \\ W_t(0, x) = x^l. \end{array} \right.$$

On pose  $V(t, x) = \frac{1}{C-2-ap} (x-t^2) f(t, x)$ , alors

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{1}{C-2-ap} (-2tf + (x-t^2) f_t), \\ V_{tt} &= \frac{1}{C-2-ap} ((x-t^2) f_{tt} - 4tf_t - 2f), \\ V_x &= \frac{1}{C-2-ap} (f + (x-t^2) f_x), \\ V_{tx} &= \frac{1}{C-2-ap} (f_t + (x-t^2) f_{xt} - 2tf_x). \end{aligned}$$

donc

$$LV = \frac{(x-t^2)}{C-2-ap} \left\{ f_{tt} + 2tf_{xt} + cf_x - \frac{2t}{(x-t^2)} f_t - \frac{4t^2}{(x-t^2)} f_x \right\} + f,$$

pour que  $LV = f(t, x)$ , il est nécessaire que

$$f_{tt} + 2tf_{xt} + cf_x - \frac{2t}{(x-t^2)}f_t - \frac{4t^2}{(x-t^2)}f_x = 0.$$

Cette équation a une solution sous la forme :

$$f(t, x) = x^l (1-z)^\beta v(z) \quad \text{où } z = \frac{t^2}{x}$$

telle que

$$v(z) = (AF \left( \beta - l, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{1}{2}, z \right) + Bz^{1/2} F \left( \beta - l + \frac{1}{2}, \beta + \frac{C}{4} + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, z \right))$$

avec la condition

$$\beta \left( \beta + \frac{C}{4} + \frac{1}{2} \right) = l(\beta + 1)$$

$A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires.

Par conséquent, la solution générale est :

$$\begin{aligned} V(t, x) &= V_l(t, x) = \frac{1}{C-2-ap} (x-t^2) x^l (1-z)^\beta v(z), \\ &= \frac{1}{C-2-ap} (x-t^2) x^l (1-z)^\beta F \left( \beta - l, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{1}{2}, z \right). \end{aligned}$$

La solution  $W$  est la même que celle du problème (3.5).

## 2ème cas

### Théorème 3.4

Si  $f$  satisfait l'équation :

$$f_{tt} + 2tf_{tx} + Cf_x + \frac{4}{t}f_t + 4f_x - \frac{ap}{x-t^2}f = 0.$$

alors,

$$V(z) = \frac{1}{2}t^2x^l(1-z)^\beta y(z) = \frac{1}{2}t^2x^l(1-z)^\beta F\left(\beta-l, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{5}{2}, z\right),$$

C'est une solution de  $LV = f$ , où

$$\beta\left(\beta-l + \frac{C}{4} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}ap.$$

### Preuve

On pose  $V(t, x) = \frac{1}{2}t^2f(t, x)$ , alors

$$\begin{aligned}V_t &= \frac{1}{2}(2tf + t^2f_t), \\V_{tt} &= \frac{1}{2}(t^2f_{tt} + 4tf_t + 2f), \\V_x &= \frac{1}{2}(t^2f_x), \\V_{tx} &= \frac{1}{2}(t^2f_{xt} + 2tf_x).\end{aligned}$$

donc

$$LV = \frac{t^2}{2}\left\{f_{tt} + 2tf_{tx} + Cf_x + \frac{4}{t}f_t + 4f_x - \frac{ap}{x-t^2}f\right\} + f,$$

$LV = f(t, x)$  est équivalent à :

$$LV = \frac{t^2}{2}\left\{f_{tt} + 2tf_{tx} + Cf_x + \frac{4}{t}f_t + 4f_x - \frac{ap}{x-t^2}f\right\} + f = f. \quad (3.11)$$

Pour trouver  $V$ , il suffit de résoudre l'équation :

$$f_{tt} + 2tf_{tx} + Cf_x + \frac{4}{t}f_t + 4f_x - \frac{ap}{x-t^2}f = 0.$$

Ce type d'équation a été étudié dans la section précédente, donc la solution générale est :

$$V(z) = \frac{1}{2}t^2x^l(1-z)^\beta y(z) = \frac{1}{2}t^2x^l(1-z)^\beta F\left(\beta-l, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{5}{2}, z\right).$$

## Application

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} LV = \partial_t^2 V + 2t\partial_{xt}^2 V - \frac{20}{11} \partial_x V - \frac{84}{11} (x - t^2)^{-1} V = f(t, x) / \quad f(t, x) = x(1 - z)^{-\frac{6}{11}}, \\ V(0, x) = x, \\ V_t(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La solution  $V(t, x)$  :

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \frac{1}{2} t^2 x (1 - z)^{\frac{7}{2}} F\left(\frac{5}{2}, \frac{89}{22}, \frac{5}{2}, z\right) = \frac{1}{2} t^2 x (1 - z)^{\frac{7}{2}} (1 - z)^{-\frac{89}{22}}, \\ &= \frac{1}{2} t^2 x (1 - z)^{-\frac{6}{11}}, \end{aligned}$$

est la solution de (3.12).

En effet

$$\begin{aligned} \text{Si } V(t, x) &= \frac{1}{2} t^2 x (1 - z)^{-\frac{6}{11}}, \\ \text{alors } V_t &= xt(1 - z)^{-\frac{6}{11}} + \frac{6}{11} t^3 (1 - z)^{-\frac{6}{11}-1}, \\ V_{tt} &= x(1 - z)^{-\frac{6}{11}} + \frac{30}{11} t^2 (1 - z)^{-\frac{6}{11}-1} + \left(\frac{12 \times 17}{11^2}\right) \frac{t^4}{x} (1 - z)^{-\frac{6}{11}-2}, \\ V_{tx} &= t(1 - z)^{-\frac{6}{11}} - \frac{6}{11} tz(1 - z)^{-\frac{6}{11}-1} - \frac{6 \times 17}{11^2} tz^2 (1 - z)^{-\frac{6}{11}-2}, \\ V_x &= \frac{1}{2} t^2 (1 - z)^{-\frac{6}{11}} - \frac{3}{11} t^2 z (1 - z)^{-\frac{6}{11}-1}. \end{aligned}$$

On les remplace dans le problème :

$$\begin{aligned}
LV &= x(1-z)^{\frac{-6}{11}} + \frac{30}{11}t^2(1-z)^{\frac{-6}{11}-1} + \left(\frac{12 \times 17}{11^2}\right) \frac{t^4}{x}(1-z)^{\frac{-6}{11}-2} + 2t^2(1-z)^{\frac{-6}{11}} - \\
&\quad - \frac{12}{11}t^2z(1-z)^{\frac{-6}{11}-1} - \frac{12 \times 17}{11^2}t^2z^2(1-z)^{\frac{-6}{11}-2} - \frac{10}{11}t^2(1-z)^{\frac{-6}{11}} + \\
&\quad + \frac{60}{11^2}t^2z(1-z)^{\frac{-6}{11}-1} - \frac{42}{11}(x-t^2)^{-1}t^2x(1-z)^{\frac{-6}{11}}, \\
&= x(1-z)^{\frac{-6}{11}} \left[ 1 + \frac{30}{11}z(1-z)^{-1} + \left(\frac{12 \times 17}{11^2}\right) z^2(1-z)^{-2} + 2z - \frac{12}{11}z^2(1-z)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{12 \times 17}{11^2}z^3(1-z)^{-2} - \frac{10}{11}z + \frac{60}{11^2}z^2(1-z)^{-1} - \frac{42}{11}z(1-z)^{-1} \right], \\
&= x(1-z)^{\frac{-6}{11}} \left[ 1 - \frac{12}{11}z(1-z)^{-1} - \left(\frac{12 \times 11}{11^2}\right) z^2(1-z)^{-1} + \frac{60}{11^2}z^2(1-z)^{-1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{12}{11}z + \frac{12 \times 17}{11^2}z^2(1-z)^{-2}(1-z) \right], \\
&= x(1-z)^{\frac{-6}{11}} \left[ 1 - \frac{12}{11}z(1-z)^{-1} + \left(\frac{132}{11^2}\right) z^2(1-z)^{-1} + \frac{12}{11}z \right], \\
&= x(1-z)^{\frac{-6}{11}} \left[ 1 - \frac{12}{11}z(1-z)^{-1} + \left(\frac{12}{11}\right) z^2(1-z)^{-1} + \frac{12}{11}z \right], \\
&= x(1-z)^{\frac{-6}{11}} \left[ 1 - \frac{12}{11}z + \frac{12}{11}z \right], \\
&= x(1-z)^{\frac{-6}{11}} = f(t, x).
\end{aligned}$$

Pour obtenir :

$$LV = x(1-z)^{\frac{-6}{11}} = f(t, x) \quad (3.13)$$

Donc  $V$  est la solution de :

$$LV = f(t, x)$$

### 3ème cas

Dans cette partie, on va voir un cas général, pour trouver la solution, dans lequel nous allons utiliser directement la méthode de Frobénius-Fuchs, afin de trouver la solution car nous ne pouvons pas trouver les paramètres  $a, b$  et  $c$  aisément.

En effet, en posant  $z = \frac{t^2}{x}$  et  $V(t, x) = xf(t, x)$ , alors  $LV = f$  est équivalent à :

$$LV = xf_{tt} + 2tf_t + 2txf_{xt} + cf + cxf_x - ap(x - t^2)^{-1}xf = f.$$

Pour que  $V$  soit une solution du problème de Cauchy  $LV = f$ , il suffit que l'on ait :

$$xf_{tt} + 2txf_{xt} + cxf_x + 2tf_t + cf - ap(1 - z)^{-1}xf - f = 0.$$

Nous cherchons à présent la solution  $f(t, x)$  de l'équation ci-dessus.

On pose :

$$f(t, x) = x^l v(z). \quad \text{où } z = \frac{t^2}{x}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} f_t &= 2tx^{l-1}v', \\ f_{tt} &= 2x^{l-1}v' + 4zx^{l-1}v'', \\ f_x &= \alpha x^{l-1}v - zx^{l-1}v', \\ f_{xt} &= \frac{2tl}{x}x^{l-1}v' - \frac{2t}{x}x^{l-1}v' - \frac{2t}{x}zx^{l-1}v''. \end{aligned}$$

Nous arrivons à l'équation :

$$z(1 - z)v'' + \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{C}{4} - l\right)z\right)v' + \frac{1}{4}\left(Cl + C - 1 - \frac{ap}{1 - z}\right)v = 0.$$

On effectue un autre changement de variable, en posant  $v(z) = (1 - z)^\beta y$ .

Nous obtenons l'équation de Gauss suivante :

$$z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{C}{4} - l + 2\beta\right)z\right)y' - \left(\beta\left(\frac{C}{4} - l + \beta - 1\right) - \frac{1}{4}(Cl + C - 1)\right)y = 0. \quad (3.14)$$

avec la condition :

$$\beta\left(\beta - l + \frac{C}{4} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}ap.$$

Et pour trouver sa solution, on utilise la méthode de Frobénius-Fuchs [25].

D'après le théorème de Fuchs, il existe au moins une solution sous la forme

$$\begin{aligned} y(z) &= z^\sigma \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\sigma}. \end{aligned}$$

Où  $\sigma$  est un nombre réel ou complexe choisi de sorte que  $a_0 \neq 0$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y'(z) &= \sum_{n \geq 0} (n + \sigma) a_n z^{n+\sigma-1}, \\ zy'(z) &= \sum_{n \geq 0} (n + \sigma) a_n z^{n+\sigma}, \\ y''(z) &= \sum_{n \geq 0} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) a_n z^{n+\sigma-2}, \\ zy''(z) &= \sum_{n \geq 0} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) a_n z^{n+\sigma-1}, \\ z^2y''(z) &= \sum_{n \geq 0} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) a_n z^{n+\sigma}. \end{aligned}$$

On substitue les dérivées précédentes dans l'équation ci-dessus, pour obtenir l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) a_n z^{n+\sigma-1} - \sum_{n \geq 0} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) a_n z^{n+\sigma} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (n + \sigma) a_n z^{n+\sigma-1} - A \sum_{n \geq 0} (n + \sigma) a_n z^{n+\sigma} - B \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\sigma} = 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{4} - l + 2\beta, \\ B &= \left( \beta \left( \frac{C}{4} - l + \beta - 1 \right) - \frac{1}{4} (Cl + C - 1) \right). \end{aligned}$$

Nous simplifions cette équation, pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \sigma(\sigma - 1) a_0 z^{\sigma-1} + \sum_{n \geq 1} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) a_n z^{n+\sigma-1} - \sum_{n \geq 0} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) a_n z^{n+\sigma} + \\ & + \frac{1}{2} \sigma a_0 z^{\sigma-1} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (n + \sigma) a_n z^{n+\sigma-1} - A \sum_{n \geq 0} (n + \sigma) a_n z^{n+\sigma} - B \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Ce système équivaut à :

$$\begin{aligned} & \sigma \left( \sigma - 1 + \frac{1}{2} \right) a_0 z^{\sigma-1} + \sum_{m \geq 0} (m + \sigma)(m + \sigma + 1) a_{m+1} z^{m+\sigma} - \sum_{m \geq 0} (m + \sigma)(m + \sigma - 1) a_m z^{m+\sigma} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} (m + 1 + \sigma) a_{m+1} z^{m+\sigma} - A \sum_{m \geq 0} (m + \sigma) a_m z^{m+\sigma} - B \sum_{m \geq 0} a_m z^{m+\sigma} = 0. \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} & \sigma \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) a_0 z^{\sigma-1} + \sum_{m \geq 0} [(m + \sigma)(m + \sigma + 1) a_{m+1} - (m + \sigma)(m + \sigma - 1) a_m + \\ & + \frac{1}{2} (m + 1 + \sigma) a_{m+1} - A(m + \sigma) a_m - B a_m] z^{m+\sigma} = 0. \end{aligned}$$

En confrontant les coefficients de  $z^n$ , nous avons ce système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) a_0 = 0, \\ (m + \sigma) (m + \sigma + 1) a_{m+1} + \frac{1}{2} (m + 1 + \sigma) a_{m+1} = (m + \sigma) (m + \sigma - 1) a_n \\ + A (m + \sigma) a_m + B a_m. \end{array} \right.$$

On suppose que  $a_0 = 1$ . Alors, on a :

$$\sigma \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) = 0 \implies \sigma = 0 \text{ ou } \sigma = \frac{1}{2}.$$

D'autre part,

$$a_{m+1} = \frac{((m + \sigma) (m + \sigma - 1) + A (m + \sigma) + B)}{((m + \sigma) (m + \sigma + 1) + \frac{1}{2} (m + 1 + \sigma))} a_m, \quad m \geq 0$$

Donc la solution de l'équation de Gauss, en appliquant la méthode de Frobénius, s'écrit sous la forme :

$$y(z) = z^\sigma \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

On en conclut que :

Si  $\sigma = 0$ , on obtient la solution :

$$y_1(z) = \sum_{m \geq 0} a_m z^m \quad \text{où } a_0 = 1,$$

telle que

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \frac{(m(m-1) + Am + B)}{(m(m+1) + \frac{1}{2}(m+1))} a_m, \\ &= \frac{(m(m-1) + (\frac{C}{4} - l + 2\beta)(m+\beta) - \frac{1}{4}(Cl + C - 1))}{(m+1)(m + \frac{1}{2})} a_m. \end{aligned} \quad m \geq 0$$

Si  $\sigma = \frac{1}{2}$  et  $m \geq 0$ , on obtient la solution :

$$y_2(z) = z^{\frac{1}{2}} \sum_{m \geq 0} a_m z^m,$$

$$\begin{aligned} \text{où } a_{m+1} &= \frac{\left( (m + \frac{1}{2}) (m - \frac{1}{2}) + A (m + \frac{1}{2}) + B \right)}{\left( (m + \frac{1}{2}) (m + \frac{3}{2}) + \frac{1}{2} (m + \frac{3}{2}) \right)} a_m \\ &= \frac{\left( (m + \frac{1}{2}) (m - \frac{1}{2} + \frac{C}{4} - l + 2\beta) + (\beta (\frac{C}{4} - l + \beta - 1) - \frac{1}{4} (Cl + C - 1)) \right)}{(m + 1) (m + \frac{3}{2})} a_m \end{aligned}$$

Dès lors, les deux solutions précédentes existent et sont linéairement indépendantes.

La solution est sous la forme :

$$y(z) = A_1 y_1(z) + A_2 y_2(z).$$

Et la solution générale du problème  $LV = f$  est :

$$V(t, x) = x^{l+1} (1 - z)^\beta (A_1 y_1(z) + A_2 y_2(z)).$$

# Chapitre 4

## Solutions exactes d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on cherche les solutions exactes d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires et non homogènes sous la forme :

$$LU = U_{tt} + 2tU_{tx} + CU_x = g(t, x, U_x, U_t, U_x^2, U_t^2, f). \quad (4.1)$$

Plus précisément, nous allons d'abord chercher la solution dans le cas général sans conditions de Cauchy de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$U_{tt} + 2tU_{tx} + CU_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = e^U f.$$

Puis, lors du second cas, nous étudierons le problème de Cauchy qui est muni de l'équation ci-dessus et avec des données de Cauchy nulles.

Par la suite, on considère le problème de Cauchy suivant avec des conditions de Cauchy analytiques non nulles :

$$\begin{cases} U_{tt} + 2tU_{tx} + CU_x - 2tU_tU_x - U_t^2 = e^U f(t, x), \\ U(0, x) = 0, \\ U_t(0, x) = U_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Tel que  $f(t, x)$  soit sous la forme  $x^p t^m (x - t^2)^{\tau-1}$  où  $c, p$  et  $\tau$  sont des constantes et  $m \in \mathbb{N}$ .

Nous allons construire la solution générale, pour chacun de ces problèmes, en utilisant les séries hypergéométriques. On explique comment résoudre un problème de Cauchy en exploitant sa solution par des fonctions hypergéométriques [3].

Notre objectif, dans chaque cas, est de donner une représentation explicite des solutions sous la forme d'une série de fonctions hypergéométriques.

Avant de développer la théorie, on commence par quelques exemples illustratifs :

#### **Exemple 4.1**

On considère dans  $\mathbb{C}^2$ , l'équation différentielle partielle non linéaire et non homogène suivante :

$$U_{tt} + 2tU_{tx} + 4U_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = xt^2 e^U.$$

Une solution exacte de cette équation est donnée par :

$$U(t, x) = -\ln \left( -\frac{1}{4}x^3 \left( 1 + 12 \left( \frac{t^2}{x} \right) + \frac{25}{3} \left( \frac{t^2}{x} \right)^2 \right) \right).$$

### Exemple 4.2

On considère dans  $\mathbb{C}^2$  le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} U_{tt} + 2tU_{tx} - 2U_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = f(t, x)e^U \\ U(0, x) = 0 \\ U_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

Une solution de ce problème est donnée par :

$$\begin{aligned} U(t, x) &= -\ln\left(\frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{x}\right)^2 + 1\right) = \ln 3 - \ln\left(\left(\frac{t^2}{x}\right)^2 + 3\right) \quad \text{si } f(t, x) = -4x^{-3}t^2(x - t^2) \\ U(t, x) &= -\ln\left(2\left(\frac{t^2}{x}\right) + 1\right) \quad \text{si } f(t, x) = -4x^{-2}(x - t^2) \end{aligned}$$

## 4.2 Solution de l'équation non homogène

### 4.2.1 Position du problème

Dans ce paragraphe, on déduit les solutions de l'équation différentielle partielle non linéaire et non homogène suivante :

$$LU = U_{tt} + 2tU_{tx} + CU_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = e^U f \quad (4.3)$$

Telle que  $C$  soit une constante.

$$f(t, x) = x^p t^m (x - \rho t^2)^{\tau-1} \quad / \quad p, m, \rho \text{ et } \tau \text{ sont des constantes.} \quad (4.4)$$

Pour la suite, on prend  $\rho = 1$ .

**Théorème 4.1**

Si  $f$  vérifie (4.4), alors l'équation (4.3) admet une solution sous la forme :

$$U(t, x) = -\ln \left( \frac{-1}{4} x^l V \left( \frac{t^2}{x} \right) \right),$$

avec  $l = \frac{m}{2} + p + \tau$ .

- Pour  $\tau = 1$  :

$$\begin{aligned} V &= AF \left( -l, \frac{C}{4} - l; \frac{1}{2}; z \right) + Bz^{\frac{1}{2}} F \left( -l + \frac{1}{2}, \frac{C}{4} - l + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z \right) \\ &\quad + f_{\frac{m}{2}+1} \left( -l, \frac{C}{4} - l, \frac{1}{2}, z \right), \\ &= AF \left( -l, \frac{C}{4} - l; \frac{1}{2}; z \right) + Bz^{\frac{1}{2}} F \left( -l + \frac{1}{2}, \frac{C}{4} - l + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z \right) + \\ &\quad + \frac{z^{l-p}}{(l-p)(l-p-1+C)} {}_3F_2 \left( 1, -p, \frac{C}{4} - p, l-p+1, l-p+\frac{1}{2}; z \right). \end{aligned}$$

- Pour  $\tau \neq 1$  :

$$\begin{aligned} V &= AF \left( -l, \frac{C}{4} - l; \frac{1}{2}; z \right) + Bz^{\frac{1}{2}} F \left( -l + \frac{1}{2}, \frac{C}{4} - l + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z \right) \\ &\quad + C_{\frac{m}{2}+1}^{\tau} \left( -l, \frac{C}{4} - l; \frac{1}{2}; z \right), \\ &= AF \left( -l, \frac{C}{4} - l; \frac{1}{2}; z \right) + Bz^{\frac{1}{2}} F \left( -l + \frac{1}{2}, \frac{C}{4} - l + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z \right) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\tau)}{\Gamma(1-\tau) \cdot n!} f_{\frac{m}{2}+1+n} \left( -l, \frac{C}{4} - l, \frac{1}{2}, z \right). \end{aligned}$$

**Preuve.**

En posant  $U(t, x) = -\ln\left(\frac{-1}{4}x^l V(z)\right)$  où  $z = \frac{t^2}{x}$ , alors :

$$\begin{aligned} U_t &= -\frac{2t V'}{x V}, \\ U_{tt} &= -\frac{2 V'}{x V} - \frac{4t^2 V''}{x^2 V} + \frac{4t^2 V'^2}{x^2 V^2}, \\ U_x &= -\frac{l}{x} + \frac{t^2 V'}{x^2 V}, \\ U_{tx} &= \frac{2t V'}{x^2 V} + \frac{2t V''}{x^2 z V} - \frac{2t V'^2}{x^2 z V^2}. \end{aligned}$$

On applique  $L$  à  $U$ , pour obtenir l'équation hypergéométrique non homogène suivante :

$$z(1-z)V''' + \left(\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{C}{4} - 2l\right)z\right)V' - \left(l^2 - \frac{Cl}{4}\right)V = x^{1-l}f. \quad (4.5)$$

Sa solution générale [3] s'écrit sous la forme :

$$V = V_h + V_p.$$

Cette solution se compose d'une solution homogène  $V_h$  et d'une solution particulière  $V_p$ .

#### 4.2.2 Construction des fonctions $V_h$ et $V_p$

On commence d'abord par construire  $V_h$ , la solution de l'équation de Gauss homogène suivante :

$$z(1-z)V''' + \left(\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{C}{4} - 2l\right)z\right)V' - \left(l^2 - \frac{Cl}{4}\right)V = 0. \quad (4.6)$$

Ce type d'équation a été étudiée dans la sous-section précédente.

Donc d'après la théorie des fonctions hypergéométriques [2, 3] :

Comme  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , un système fondamental de solutions de l'équation homogène ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned}
y_1(z) &= F\left(-l, \frac{C}{4} - l; \frac{1}{2}; z\right), \\
y_2(z) &= z^{\frac{1}{2}} F\left(-l + \frac{1}{2}, \frac{C}{4} - l + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution homogène  $V_h$  est sous la forme :

$$V_h = AF\left(-l, \frac{C}{4} - l; \frac{1}{2}; z\right) + Bz^{\frac{1}{2}}F\left(-l + \frac{1}{2}, \frac{C}{4} - l + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right),$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires.

Passons maintenant à la solution particulière  $V_p$  de l'équation hypergéométrique non homogène.

Si  $\tau = 1$ , l'équation hypergéométrique non homogène (4.5) est équivalente à :

$$\begin{aligned}
z(1-z)V'' + \left(\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{C}{4} - 2l\right)z\right)V' - \left(l^2 - \frac{Cl}{4}\right)V &= x^{1-l}f, \\
&= x^{1-l}x^p t^m, \\
&= \frac{t^m}{x^{l-p-1}} = z^{\frac{m}{2}}.
\end{aligned}$$

où  $l = \frac{m}{2} + p + 1$ .

D'après [3], nous avons donc la solution particulière suivante :

$$\begin{aligned}
V_p &= f_{\frac{m}{2}+1}\left(-\frac{m}{2} - p - 1, \frac{C}{4} - \frac{m}{2} - p - 1, \frac{1}{2}, z\right), \\
&= \frac{z^{\frac{m}{2}+1}}{\left(\frac{m}{2} + 1\right)\left(\frac{m}{2} + C\right)} {}_3F_2\left(1, -p, \frac{C}{4} - p; \frac{m}{2} + 2, \frac{m}{2} + \frac{3}{2}; z\right).
\end{aligned}$$

Si  $\tau \neq 1$ , l'équation hypergéométrique (4.3) analogue à :

$$\begin{aligned} z(1-z)V'' + \left(\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{C}{4} - 2l\right)z\right)V' - \left(l^2 - \frac{Cl}{4}\right)V &= x^{1-l}f, \\ &= x^{1-l}x^p t^m (x-t^2)^{\tau-1}, \\ &= z^{\frac{m}{2}}(1-z)^{\tau-1}. \end{aligned}$$

où  $l = \frac{m}{2} + p + \tau$  et  $p, m$  et  $\tau$  sont des constantes, donc la solution particulière est :

$$\begin{aligned} V_p &= C_{1, \frac{m}{2}+1}^{(\tau)} \left(-l, \frac{C}{4} - l, \frac{1}{2}, z\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\tau)}{\Gamma(1-\tau).n!} f_{\frac{m}{2}+1+n} \left(-\frac{m}{2} - p - \tau, \frac{C}{4} - \frac{m}{2} - p - \tau, \frac{1}{2}; z\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution générale de (4.3) sera :

$$U(t, x) = -\ln \left( -\frac{1}{4}x^l \left( V_h \left( \frac{t^2}{x} \right) + V_p \left( \frac{t^2}{x} \right) \right) \right).$$

### 4.3 Problème de Cauchy avec des données de Cauchy homogènes

On considère, dans un voisinage  $\Omega$  de l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , le problème de Cauchy non linéaire, avec des données de Cauchy homogènes, suivant :

$$\begin{cases} LU = U_{tt} + 2tU_{tx} + CU_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = e^u f(t, x), & (t, x) \in \Omega \\ U(0, x) = 0, \\ U_t(0, x) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Où  $C$  est une constante réelle et  $f$  est sous la forme  $-4x^i t^m (x - t^2)^{\tau-1}$ .

**Théorème 4.2 :** le problème (4.7) admet une solution sous la forme

$$\begin{aligned} U(t, x) &= -\ln\left((1-z)^{\beta+1} y(z)\right), \\ &= -\ln\left((1-z)^{\frac{2-C}{4}} \left(F\left(\frac{2-C}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) + y_p\left(\frac{2-C}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right)\right)\right). \end{aligned}$$

telle que  $y = y_h + y_p$  soit la solution de l'équation hypergéométrique non homogène suivante :

$$z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - \left(3 + \frac{C}{4} + 2\beta\right)z\right)y' - (\beta+1)\left(\beta+1 + \frac{C}{4}\right)y = -\frac{1}{4}x(1-z)^{-\beta-1}f. \quad (4.8)$$

Où

- Si  $\tau = 1$ , et pour  $i = -\frac{m}{2} - 1$

La solution particulière de l'équation (4.8) est :

$$y_p = C_{1, \frac{m}{2}+1}^{(-\beta)} \left(\beta+1, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{1}{2}; z\right).$$

- Si  $\tau \neq 1$ , et pour  $i = -\frac{m}{2} - \tau$ .

La solution particulière est :

$$y_p = C_{1, \frac{m}{2}+1}^{(\tau-\beta-1)} \left( \beta + 1, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{1}{2}; z \right).$$

**Preuve.**

En posant  $z = \frac{t^2}{x}$  et  $U(t, x) = -\ln \left( \left( 1 - \frac{t^2}{x} \right) V \left( \frac{t^2}{x} \right) \right)$ , alors  $LU = e^u f$  ce qui est équivalent à :

$$z(1-z)V'' + \left( \frac{1}{2} - \left( 3 + \frac{C}{4} \right) z \right) V' - \left( \frac{\frac{1}{2} - \left( \frac{C}{4} + 1 \right)}{1-z} \right) V = -\frac{1}{4}x(1-z)^{-1}f$$

Puis, on pose  $V(z) = (1-z)^\beta y(z)$ , pour trouver l'équation de Gauss suivante :

$$\begin{aligned} & z(1-z)^{\beta+1}y'' + \left( \frac{1}{2} - \left( 3 + \frac{C}{4} + 2\beta \right) z \right) (1-z)^\beta y' - \\ & - \left[ \left( \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left( \beta \left( \beta + 2 + \frac{C}{4} \right) + \frac{C}{4} + 1 \right) z \right] (1-z)^{\beta-1}y = -\frac{1}{4}x(1-z)^{-1}f. \end{aligned}$$

C'est une équation hypergéométrique non homogène, où  $\beta$  vérifie la condition :

$$(\beta + 1) \left( \beta + \frac{C}{4} + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \beta = -1 \text{ ou} \\ \beta = -\left( \frac{C}{4} + \frac{1}{2} \right). \end{cases}$$

Si  $\beta = -1$ , on obtient l'équation suivante :

$$z(1-z)y'' + \left( \frac{1}{2} - \left( 1 + \frac{C}{4} \right) z \right) y' = -\frac{1}{4}xf.$$

Si  $\beta = -\left(\frac{C}{4} + \frac{1}{2}\right)$ , on obtient :

$$z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - \left(2 - \frac{C}{4}\right)z\right)y' - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{C}{4}\right)y = -\frac{1}{4}x(1-z)^{\frac{C}{4}-\frac{1}{2}}f.$$

Dans le cas général, on obtient l'équation hypergéométrique non homogène suivante :

$$z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - \left(3 + \frac{C}{4} + 2\beta\right)z\right)y' - (\beta+1)\left(\beta+1 + \frac{C}{4}\right)y = -\frac{1}{4}x(1-z)^{-\beta-1}f.$$

Sa solution est sous la forme :

$$y = y_h + y_p,$$

telle que  $y_h$  soit la solution de l'équation de Gauss homogène :

$$y_h = AF\left(\beta+1, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{1}{2}; z\right) + Bz^{\frac{1}{2}}F\left(\beta + \frac{3}{2}, \beta + \frac{C}{4} + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; z\right),$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires.

La solution particulière  $y_p$  de l'équation hypergéométrique non homogène est :

$$y_p = C_{1, \frac{m}{2}+1}^{(\tau-\beta-1)}\left(\beta+1, \beta + \frac{C}{4} + 1, \frac{1}{2}; z\right) \quad \text{si } f = -4x^i t^m (x-t^2)^{\tau-1}.$$

où  $\frac{m}{2} = -i - \tau$ .

Ainsi, la solution générale de (4.7) est sous la forme :

$$U(t, x) = -\ln\left((1-z)^{\beta+1}(y_h + y_p)\right).$$

En tenant compte des conditions de Cauchy, on prend  $A = 1$  et  $B = 0$ , et ainsi on obtient la solution générale du problème (4.7) :

$$U(t, x) = -\ln \left( (1-z)^{\frac{2-C}{4}} \left( F \left( \frac{2-C}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z \right) + y_p \left( \frac{2-C}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z \right) \right) \right).$$

### 4.3.1 Application numérique

Dans cette section, on va chercher la solution générale dans le cas où  $C = -2$ , en utilisant le logiciel Maple.

On pose, dans la suite,  $\sigma = \frac{m}{2} + 1$ .

Si  $C = -2$ , la solution de (4.7) est sous la forme :

$$\begin{aligned} U(t, x) &= -\ln(1-z)V(z), \\ &= -\ln \left( \frac{2 \left( \frac{t^2}{x} \right)^\sigma + 2\sigma^2 - \sigma}{\sigma(2\sigma - 1)} \right), \\ \text{et } U_t(t, x) &= \frac{-4\sigma \left( \frac{t^2}{x} \right)^\sigma}{t \left( 2 \left( \frac{t^2}{x} \right)^\sigma + 2\sigma^2 - \sigma \right)}. \end{aligned}$$

telle que  $V$  soit la solution de l'équation hypergéométrique non homogène suivante :

$$z(1-z)V'' + \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{2}z \right) V' - \frac{1}{2}V = -\frac{1}{4}x(1-z)^{-1}f. \quad (4.9)$$

Si  $f = -4x^{-\sigma-1}t^{2\sigma-2}(x-t^2)$ , la solution générale de l'équation de Gauss précédente est :

$$\begin{aligned} V &= V_h + V_p = \left( F \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x} \right) + f_\sigma \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{x} \right) \right), \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{z^\sigma}{2\sigma(2\sigma-1)(1-z)}, \\ &= \frac{2z^\sigma + 2\sigma^2 - \sigma}{\sigma(2\sigma-1)(1-z)} \quad / \quad z = \frac{t^2}{x}. \end{aligned}$$

Et d'après les conditions de Cauchy on a,  $\forall \sigma \geq 1$  :

$$\begin{aligned} U(0, x) &= -\ln \left( \frac{2\sigma^2 - \sigma}{\sigma(2\sigma-1)} \right) = -\ln(1) = 0, \\ U_t(0, x) &= 0. \end{aligned}$$

#### Remarque 4.1

Si  $m < 0$ ,  $U_t$  n'est pas définie, on applique alors la limite pour trouver la condition de Cauchy (voir [25]) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U_t(0, x) = 0.$$

Voici l'exemple (4.2), en utilisant le logiciel Maple :

**Exemple :** On pose :  $C=-2$ .

$h$  : la solution hypergéométrique complète  $y$ .

$yp=h2$  : la solution particulière.

$Yh=h3$  : la solution homogène.

$u$  : la solution générale de problème.

**> sigma:=2;**

$s:=2$

**> h1:=(z^sigma)/(sigma\*(sigma-(1/2)))\*(hypergeom([1,sigma+1,sigma+(1/2)],[sigma+1,sigma+(1/2)],(z) ));**

$$h1 := \frac{1}{3} z^2 \text{hypergeom}([1], [], z)$$

**> h2:=simplify(h1);**

$$h2 := -\frac{z^2}{3(-1+z)}$$

**> h3:=simplify(hypergeom([1,1/2],[1/2],(z) ));**

$$h3 := -\frac{1}{-1+z}$$

**> h:=(h2)+(h3);**

$$h := -\frac{z^2}{3(-1+z)} - \frac{1}{-1+z}$$

**> simplify(h);**

$$-\frac{z^2+3}{3(-1+z)}$$

**> (z\*(1-z)\*diff(diff(h,z),z))+((1/2)-(5/2)\*z)\*(diff(h,z))-((1/2)\*h);**

$$z(1-z) \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{2}{3(-1+z)} + \frac{4z}{3(-1+z)^2} - \frac{2z^2}{3(-1+z)^3} - \frac{2}{(-1+z)^3} \right) + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}z \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{2z}{3(-1+z)} + \frac{z^2}{3(-1+z)^2} + \frac{1}{(-1+z)^2} \right) + \frac{z^2}{6(-1+z)} + \frac{1}{2(-1+z)}$$

```
> simplify((z*(1-z)*diff(diff(h,z),z))+((1/2)-
(5/2)*z)*(diff(h,z)))-((1/2)*h));
```

$z$

```
> u:=-ln((1-z)*(simplify(h)));
```

$$u := -\ln\left(\frac{(1-z)(z^2+3)}{3(-1+z)}\right)$$

```
> simplify(u);
```

$$\ln(3) - \ln(z^2 + 3)$$

```
> L:=subs(z=(t^2)/x,u);
```

$$L := -\ln\left(\frac{1 - \frac{t^2}{x} + 3}{3\left(-1 + \frac{t^2}{x}\right)}\right)$$

```
> simplify(L);
```

$$uL := \ln(3) - \ln\left(\frac{t^4 + 3x^2}{x^2}\right)$$

> LU:=utt+2\*t\*(utx)-2\*(ux)+4\*x\*((ux)^2)-((ut)^2);

$$LU := -\frac{12t^2}{t^4+3x^2} + \frac{48t^4x}{(t^4+3x^2)^2} + \frac{2\frac{6}{x} - \frac{2(t^4+3x^2)^0}{x^3}}{t^4+3x^2} x^2 + \frac{4x^5\frac{6}{x} - \frac{2(t^4+3x^2)^0}{x^3}}{(t^4+3x^2)^2}$$

> simplify(LU);

$$\frac{12(-x+t^2)t^2}{x(t^4+3x^2)}$$

> simplify(exp(u));

$$\frac{3}{z^2+3}$$

> fe^u:=simplify(exp(u))\*(-4)\*(x^(-sigma-1))\*(t^(2\*sigma-2))\*(x-t^2);

$$\frac{12(-x+t^2)t^2}{x(t^4+3x^2)}$$

## Exemples d'application

Voici quelques exemples qui illustrent la remarque (4.1).

### Exemple 4.3

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U_{tt} + 2tU_{tx} - 2U_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = -4(x-t^2)^{-1}e^u, & (t, x) \in \Omega \\ U(0, x) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} U_t(t, x) = 0. \end{cases}$$

Une solution de ce problème est donnée par :

$$U(t, x) = -\ln \left( \sqrt{\frac{t^2}{x}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{t^2}{x}}}{1 - \sqrt{\frac{t^2}{x}}} \right) + 1 \right).$$

telle que les solutions de la fonction hypergéométrique soient définies par :

$$\begin{aligned} V_h &= \frac{1}{1-z} \text{ étant la solution homogène,} \\ \text{et } V_p &= \sqrt{z} \left( \ln \left( \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \right) \right) (1-z)^{-1} \text{ la solution particulière.} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$V = V_h + V_p = \sqrt{z} \left( \ln \left( \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \right) \right) (1-z)^{-1} + \frac{1}{1-z}. \quad (4.10)$$

#### Exemple 4.4

Pour le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U_{tt} + 2tU_{tx} - 2U_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = -4t^2x^{-1}(x-t^2)^{-1}e^u, & (t, x) \in \Omega \\ \lim_{t \rightarrow 0} U(0, x) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} U_t(t, x) = 0. \end{cases}$$

La solution est donnée par :

$$U(t, x) = -\ln \left( \frac{\frac{t^2}{x} \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{t^2}{x}} \right) - \frac{t^2}{x} \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{t^2}{x}} \right) - 2 \ln \left( 1 - \frac{t^2}{x} \right) \sqrt{\frac{t^2}{x}} + \sqrt{\frac{t^2}{x}}}{\sqrt{\frac{t^2}{x}}} \right),$$

où

$$\begin{aligned} V &= V_h + V_p = \frac{z \ln(1 - \sqrt{z}) - z \ln(1 + \sqrt{z}) - 2 \ln(1 - z) \sqrt{z} + \sqrt{z}}{\sqrt{z}(1 - z)}, \\ V_h &= \frac{1}{1 - z} \text{ et } V_p = \left( z^2 \left( \frac{3(\ln(1 - \sqrt{z}) - \ln(1 + \sqrt{z}))}{z^{\frac{3}{2}}} - \frac{6 \ln(1 - z)}{z^2} \right) \right) (3 - 3z)^{-1}. \end{aligned}$$

### Exemple 4.5

On considère dans  $\mathbb{C}^2$  le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U_{tt} + 2tU_{tx} - 2U_x + 4xU_x^2 - U_t^2 = \frac{-4}{x}e^u, & (t, x) \in \Omega \\ \lim_{t \rightarrow 0} U(t, x) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} U_t(t, x) = 0. \end{cases}$$

La solution est donnée par :

$$U(t, x) = -\ln \left( \frac{2t^2 \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{t^2}{x}} \right) - 2t^2 \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{t^2}{x}} \right) - 2 \ln \left( 1 - \frac{t^2}{x} \right) \sqrt{\frac{t^2}{x}} x - \sqrt{\frac{t^2}{x}} x}{\sqrt{\frac{t^2}{x}} x} \right),$$

où

$$\begin{aligned} V &= V_h + V_p = -\frac{2z \ln(1 - \sqrt{z}) - 2z \ln(1 + \sqrt{z}) - 2 \ln(1 - z) \sqrt{z} - \sqrt{z}}{\sqrt{z}(1 - z)}, \\ V_h &= \frac{1}{1 - z} \quad \text{et} \quad V_p = 2z \left( \frac{\ln(1 + \sqrt{z}) - \ln(1 - \sqrt{z})}{\sqrt{z}} + \frac{\ln(1 - z)}{z} \right) (1 - z)^{-1}. \end{aligned}$$

Voici l'exemple 4.3, ci-dessus résolu avec Maple :

**Exemple 4.3 :** On pose :  $C=-2$ .

w : la solution hypergéométrique complète y.

k : la solution homogène.

u : la solution générale de problème.

```
> sigma:=1;
```

$$s := 1$$

```
> tau:=-1;
```

$$t := -1$$

```
> (f(sigma+n)):= (z^(sigma+n))/((sigma+n)*((sigma+n)-(1/2)))*hypergeom(
[1,(sigma+n)+1,(sigma+n)+(1/2)],[(sigma+n)+1,(sigma+n)+(1/2)],(z)
));
```

$$f(1+n) := \frac{z^{(1+n)} \operatorname{hypergeom}([1], [], z)}{(1+n) \begin{matrix} a & 1 \\ c & 2 \\ e & n \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}$$

```
> simplify(f(sigma+n));
```

$$-\frac{2 z^{(1+n)}}{(1+n)(1+2n)(-1+z)}$$

```
> h:=((((GAMMA(n+1-tau))*(simplify(f(sigma+n)))))/((GAMMA(1-tau))*((n)!)))));
```

$$h := -\frac{2 G(2+n) z^{(1+n)}}{(1+n)(1+2n)(-1+z) n!}$$

```
> K:=simplify(hypergeom( [1,1/2],[1/2],(z) ));
```

$$K := -\frac{1}{-1+z}$$

> P:=sum(h,n=0..infinity)+K;

$$P := -\frac{\sqrt{z} \ln\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)}{-1+z} - \frac{1}{-1+z}$$

> w:=simplify(P);

$$w := -\frac{\sqrt{z} \ln\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right) + 1}{-1+z}$$

> simplify((z\*(1-z)\*diff(diff(K,z),z))+((1/2)-(5/2)\*z)\*(diff(K,z)))-((1/2)\*K));

0

> simplify((z\*(1-z)\*diff(diff(w,z),z))+((1/2)-(5/2)\*z)\*(diff(w,z)))-((1/2)\*w));

$$\frac{1}{(1+\sqrt{z})^2(-1+\sqrt{z})^2}$$

> ug:=-ln((1-z)\*w);

$$ug := -\ln\left((1-z) \sqrt{z} \ln\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right) + 1\right) - \frac{1}{-1+z}$$

> u:=simplify(subs(z=(t^2)/x,ug));

$$u := -\ln\left(\sqrt{\frac{t^2}{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{t^2}{x}}}{-1+\sqrt{\frac{t^2}{x}}}\right) + 1\right) - \frac{1}{-1+z}$$

## Conclusions

I) Pour  $\sigma > 0, \tau \leq 0$ , nous avons les résultats suivants :

i) Si  $\sigma \geq 1, \tau \leq 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(t, x) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} U_t(t, x) = 0.$$

ii) Si  $\sigma = 1, \tau = -1$ , on a

$$U(0, x) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} U_t(t, x) = 0.$$

II) Si  $\sigma \leq 0, \tau > 0$ , on n'a pas de solution car la solution particulière n'est pas définie, (voir les exemples ci-dessus).

On aboutit aux même conclusion pour  $\sigma \leq 0, \tau < 0$ .

## 4.4 Problème de Cauchy avec des conditions de Cauchy non homogènes

On considère, dans un voisinage  $\Omega_r$  de l'origine de  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{C}^2$ ) le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U_{tt} + 2tU_{tx} + CU_x - 2tU_tU_x - U_t^2 = e^u f, \\ U(0, x) = 0. \\ U_t(0, x) = U_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

tel que  $U_0$  soit une fonction analytique et

$$\Omega_r = \{(t, x) \in \mathbb{C}^2; |t| < r, |x| < r, |x - t^2| < r\}.$$

Nous allons étudier deux cas de  $f$  :

a)  $f$  vérifie l'équation suivante :

$$tf_{tt} + 2t^2f_{tx} + (4 + C)tf_x + 4f_t = 0. \quad (4.12)$$

b)  $f$  est un polynôme sous la forme  $f = x^p t^m$ .

### **Théorème 4.3**

Soit  $z = \frac{t^2}{x}$ , alors le problème de Cauchy (4.11) admet une unique solution  $U$  telle que :

- Si  $f$  vérifie l'équation  $tf_{tt} + 2t^2f_{tx} + (4 + C)tf_x + 4f_t = 0$ , alors :

$$\begin{aligned} U &= -\ln(1 - u) = -\ln\left(1 - \sum_l (a_l V_l + b_l W_l)\right) \quad \text{où} \\ V(z) &= V_l(z) = tx^l F\left(-l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right), \\ \text{et } W(z) &= W_l(z) = \frac{1}{2}t^2 x^l \left(AF\left(-l, \frac{C}{4} + 1; \frac{5}{2}; z\right)\right). \end{aligned}$$

- Si  $f(t, x) = x^p t^m$ , où  $p \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ , alors :

$$U = -\ln \left( 1 - W(t, x) - \sum_{l \geq 0} a_l V_l \right),$$

où

$$V(t, x) = V_l(t, x) = t x^l F \left( -l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z \right),$$

$$\text{et } W(t, x) = \frac{x^p t^{2+m}}{(m+1)(m+2)} {}_3F_2 \left( 1, -p, \frac{C}{4} + \frac{m+2}{2}; \frac{m+3}{2}, \frac{m+4}{2}; z \right).$$

## Preuve

On pose :

$$u = 1 - e^{-U} \quad \Longleftrightarrow \quad U = -\ln(1 - u)$$

On remplace  $U$  dans le problème (4.11) pour obtenir le problème de Cauchy linéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + 2tu_{tx} + Cu_x = f, \\ u(0, x) = 0, \\ u_t(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

L'étude de ce problème est équivalente à l'étude des deux problèmes :

$$\begin{cases} u_{tt} + 2tu_{tx} + Cu_x = 0, \\ u(0, x) = 0, \\ u_t(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{tt} + 2tu_{tx} + Cu_x = f, \\ u(0, x) = 0, \\ u_t(0, x) = 0. \end{cases}$$

D'après le principe de superposition, pour étudier les problèmes ci-dessus, il faut les appréhender de la manière suivante :

$$(1) \begin{cases} LV = V_{tt} + 2tV_{tx} + CV_x = 0, \\ V(0, x) = 0, \\ V_t(0, x) = x^l. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} LW = W_{tt} + 2tW_{tx} + CW_x = f, \\ W(0, x) = 0, \\ W_t(0, x) = 0. \end{cases}$$

#### 4.4.1 Solution du problème homogène :

En posant  $z = \frac{t^2}{x}$  et  $V(z) = tx^l y(z)$  alors  $LV = 0$  est équivalent à :

$$z(1-z)y'' + \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{C}{4} + \frac{3}{2} - l\right)z\right)y' + \left(\frac{l}{2} + \frac{Cl}{4}\right)y = 0.$$

Comme  $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$  un système fondamental de solutions est :

$$y_1(z) = F\left(-l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right),$$

$$y_2(z) = z^{-\frac{1}{2}} F\left(-l - \frac{1}{2}, \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; z\right).$$

Donc la solution générale de l'équation de Gauss homogène est :

$$y(z) = A_1 F\left(-l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) + B_1 z^{-\frac{1}{2}} F\left(-l - \frac{1}{2}, \frac{C}{4}; \frac{1}{2}; z\right) \quad \text{pour } |z| < 1$$

telle que  $A_1$  et  $B_1$  soient des constantes arbitraires, et d'après les conditions de Cauchy, nous trouvons  $A_1 = 1$  et  $B_1 = 0$ .

Par conséquent :

$$V(z) = V_l(z) = tx^l F\left(-l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right).$$

#### 4.4.2 Solution du problème non homogène :

1° Cas : Si  $f$  vérifie l'équation suivante :

$$t f_{tt} + 2t^2 f_{tx} + (4 + C) t f_x + 4 f_t = 0.$$

On pose  $W(z) = \frac{1}{2} t^2 f$ , On substitue  $W$  dans le problème (2) pour trouver :

$$\frac{1}{2} t^2 \left[ f_{tt} + 2t f_{tx} + (4 + C) f_x + \frac{4}{t} f_t \right] + f = f.$$

Par conséquent,  $LW = f$ , si et seulement si

$$\begin{aligned} f_{tt} + 2t f_{tx} + (4 + C) f_x + \frac{4}{t} f_t &= 0, \\ \iff t f_{tt} + 2t^2 f_{tx} + (4 + C) t f_x + 4 f_t &= 0. \end{aligned}$$

Cette équation est de type Fuchs [13, 25]. Ses coefficients sont analytiques et le coefficient de  $f_t$  est positifs, alors d'après le théorème de Baouendi-Goulaonic [9], cette équation admet une unique solution analytique sous la forme :

$$f(t, x) = x^l v(z) = A x^l F \left( -l, \frac{C}{4} + 1; \frac{5}{2}; z \right).$$

Ainsi la solution générale est :

$$W(z) = W_l(z) = \frac{1}{2} t^2 x^l \left( A F \left( -l, \frac{C}{4} + 1; \frac{5}{2}; z \right) \right)$$

**2<sup>ème</sup> Cas** : Si  $f$  est analytique sous la forme  $f(t, x) = x^p t^m$ .

On considère la solution formelle  $W(t, x) = \sum_{j \geq 0} w_j(x) t^j$ , par conséquent :

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{j \geq 0} (j+1) w_{j+1} t^j, \\ W_{tt} &= \sum_{j \geq 0} (j+1)(j+2) w_{j+2} t^j, \\ W_{tx} &= \sum_{j \geq 1} j w'_j t^{j-1} \text{ et } 2tW_{tx} = \sum_{j \geq 1} 2j w'_j t^j, \\ CW_x &= \sum_{j \geq 0} C w'_j(x) t^j. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $LW = f$  implique :

$$2w_2 + Cw'_0 + \sum_{j \geq 1} [(j+1)(j+2)w_{j+2} + (2j+C)w'_j] t^j = x^p t^m.$$

En comparant les coefficients  $t^j$  des premier et deuxième membres de cette équation, on obtient les résultats suivants :

1/ Pour  $j = \overline{0, m+1}$ ,  $w_j = 0$ .

2/ Pour  $j = m$ , on a :

$$w_{m+2} = \frac{x^p}{(m+1)(m+2)}.$$

3/ Pour  $j \geq m+1$ , on a :

$$w_{j+2} = -\frac{(2j+C)}{(j+1)(j+2)} w'_j,$$

On conclut que la solution est :

$$W(t, x) = \frac{x^p t^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \left( 1 - \frac{p(c+2m+4)}{(m+4)(m+3)} z + \frac{p(p-1)(c+2m+4)(c+2m+8)}{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)} z^2 - \dots \right).$$

D'après la définition générale de l'équation de Gauss, on peut constater que :

$$\left(1 - \frac{p(c+2m+4)}{(m+4)(m+3)}z + \frac{p(p-1)(c+2m+4)(c+2m+8)}{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}z^2 - \dots\right) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

$$= {}_3F_2\left(1, -p, \frac{C}{4} + \frac{m+2}{2}; \frac{m+3}{2}, \frac{m+4}{2}; z\right),$$

où

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(n-p)\left(n + \frac{c}{4} + \frac{m+2}{2}\right)(n+1)}{\left(n + \frac{m+3}{2}\right)\left(n + \frac{m+4}{2}\right)(n+1)}. \end{cases}$$

Laquelle converge pour  $|z| < 1$ .

Par conséquent, on en déduit que

$$W(t, x) = \frac{x^p t^{2+m}}{(m+1)(m+2)} {}_3F_2\left(1, -p, \frac{C}{4} + \frac{m+2}{2}; \frac{m+3}{2}, \frac{m+4}{2}; z\right).$$

### 4.4.3 La convergence

Nous estimons d'abord  $V$ , en utilisant le lemme (2.1).

#### **Théorème 4.4**

La série  $\sum_{l \geq 0} a_l V_l$  converge pour

$$|x - t^2| \leq R$$

où  $R$  est le rayon de convergence.

**Preuve.**

Nous avons la solution :

$$\begin{aligned}
 U(t, x) &= \sum_{l \geq 0} a_l V_l + \sum_{l \geq 0} b_l W_l \quad \text{telle que} \\
 V(t, x) &= V_l(t, x) = tx^l F\left(-l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right), \\
 W(t, x) &= W_l(t, x) = \frac{1}{2} t^2 x^l AF\left(-l, \frac{C}{4} + 1; \frac{5}{2}; z\right).
 \end{aligned}$$

On commence par  $V(z)$ .

On applique tout d'abord la transformation d'Euler à la fonction hypergéométrique  $F\left(-l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right)$ , nous obtenons :

$$F\left(-l, \frac{C}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = (1-z)^{l-\frac{C}{4}+1} F\left(l + \frac{3}{2}, 1 - \frac{C}{4}; \frac{3}{2}; z\right)$$

Puis, on applique une autre transformation, celle de Pfaff, pour arriver à :

$$F\left(l + \frac{3}{2}, 1 - \frac{C}{4}; \frac{3}{2}; z\right) = (1-z)^{-l-\frac{3}{2}} F\left(l + \frac{3}{2}, \frac{C+2}{4}; \frac{3}{2}; \frac{z}{z-1}\right).$$

Alors

$$V(t, x) = tx^l (1-z)^{l-\frac{C}{4}+1} (1-z)^{-l-\frac{3}{2}} F\left(l + \frac{3}{2}, \frac{C+2}{4}; \frac{3}{2}; \frac{z}{z-1}\right).$$

D'autre part, il est évident que :

$$F\left(l + \frac{3}{2}, \frac{C+2}{4}; \frac{3}{2}; \frac{z}{z-1}\right) \leq F\left(l + \frac{3}{2}, \frac{|C|+2}{4}; \frac{3}{2}; \frac{z}{z-1}\right).$$

Ensuite, d'après le lemme (2.1), on a :

$$F\left(l + \frac{3}{2}, \frac{|C|+2}{4}; \frac{3}{2}; \frac{z}{z-1}\right) \ll \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(l + \frac{|C|+2}{4}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|C|+2}{4}\right)} \left(1 - \frac{z}{z-1}\right)^{-l - \frac{|C|+2}{4}}.$$

$$\text{où } C_l = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(l + \frac{|C|+2}{4}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|C|+2}{4}\right)},$$

On montre facilement, en utilisant la **formule de Stirling** que  $C_l$  est borné quand  $l$  très large.

D'où

$$V(t, x) \ll C_l t x^l (1-z)^{l - \frac{c}{4} + 1} (1-z)^{-l - \frac{3}{2}} \left(1 - \frac{z}{z-1}\right)^{-l - \frac{|C|}{4} - \frac{1}{2}},$$

donc

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} |V|^{1/l} \leq |x - t^2|.$$

Par conséquent, la série  $\sum_{l \geq 0} a_l V_l$  converge pour

$$|x - t^2| \leq R.$$

On trouvera le même résultat pour  $W(z)$ .

## 4.5 Bibliographie

- [1] S. Anco and S. Liu, *Exact solutions of semilinear radial wave equation in  $n$  dimensions*, J. Math. Anal. Appl. 297 (1) (2004) 317-342.
- [2] P. Appell, J. Kampé De Fériet, *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques*, Paris (1926).
- [3] A. W. Babister, *Transcendental Functions Satisfying Nonhomogeneous Linear Differential Equations*. Collier-Macmillan, Ltd., London, (1967).
- [4] J. Barros-Neto and F. Cardoso. *Bessel integrals and fundamental solutions for a generalized Tricomi operator*. J Funct. Anal. 183 (2001), 472-497.
- [5] J. Barros-Neto and F. Cardoso. *Hypergeometric functions and the Tricomi operator*. Adv. Differential Equations 10 (2005), 445-461.
- [6] R. Beals, Y. Kannai, *Exact solutions and branching of singularities for some hyperbolic equations in two variables*, J. Differential Equations 246 (2009), no. 9, 3448-3470.
- [7] R. Beals, R. Wong, *Special Functions*, A Graduate Text, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).
- [8] A. Bentrads, *Exact solutions for a different version of the nonhomogeneous E.D.P. equation*, Complex variables and Elliptic Equations, Vol.51, No. 3, (March 2006), 243-253.
- [9] A. Bentrads, *On the solutions of the Cauchy problem for a class of partial differential equations with double characteristic at a point*, J. Differential Equations 250 (2011), no. 9, 3652-3667.
- [10] A. Bentrads, *Représentation hypergéométrique de la solution pour une classe d'opérateurs d'ordre deux*, Publ. Math. Dbrecen 48(1996) 1-11.
- [11] A. Bentrads. *Singularities of solution to some second-order partial differential equations*, Appl. Anal. 83 (12) (2004) 1265-1278.
- [12] A. Bentrads, *Thèse de doctorat*, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).
- [13] A. Bentrads and S. Kichenassamy, *A linear Fuchsian equation with variable indices*, J. Differential Equations 190 (1) (2003) 64-80.

- [14] A. Bentrard and S. Kichenassamy. *Hypergeometric functions and singular solutions of wave equations with Lorentz-invariant potential*, Comm. In Contemporary Math. Vol.11, No.3 (2009) 447-458.
- [15] S. Delache and J. Leray. *Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur d'Euler-Poisson- Darboux et de l'opérateur de Tricomi-Clairaut, hyperbolique d'ordre 2*. Bull. Soc. Math. France 99 (1971), 313-336.
- [16] J. B. Diaz and A. Weinstein. *On the fundamental solutions of a singular Beltrami operator*. In : Studies in Mathematics and Mechanics presented to Richard von Mises, Academic Press, New York, (1954), 97-102.
- [17] J. Dutka, *The Early History of the Hypergeometric Function*, Arch. Hist. Exact Sci. 31 (1984), no. 1, 15-34.
- [18] C.O.M. El-hafedh, M. V. Ould Moustapha, *Problèmes de Cauchy avec des conditions modifiées pour les équations d'Euler-Poisson-Darboux*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 349 (2011), 23-24, 1219-1224.
- [19] S. Fujiié, *Singular Cauchy problems of higher order with characteristic initial surface*, J. Math. Kyoto Univ. 33 (1993), no. 1-27.
- [20] L. Garding, T. Kotake, J. Leray, *Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964) 263-361.
- [21] I. M. Gelfand and G.E. Shilov. *Generalized Functions*, Vol. I : Properties and Operation, Academic Press, New York, (1964).
- [22] R. P. Gilbert, *On the analytic properties of solutions for a generalized, axially symmetric Schrödinger equation*, J. Differential Equations 3, (1967), 59-77.
- [23] Y. Hamada. *The singularities of the solutions of the Cauchy problem*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. , Vol. 5(1969), 21-40.
- [24] Y. Hamada, G. Nakamura, *On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristic*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 4 (1977), 725-755.

- [25] M. Mohamed Amine Kerker, *Thèse de doctorat sur le problème de Cauchy singulier*, Université de Reims Champagne Ardennes, (2013).
- [26] H. Liu, *The Cauchy problem for an axially symmetric equation and the Schwarz potential conjecture for the torus*, J.Math.Anal.Appl, 250 (2000), 387-405.
- [27] S. Ponnusamy and M. Vuorinen; *Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric functions*; Mathematika, 44 (1997), pp. 278-301.
- [28] I.J. RAMOS, *Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations*, Applied mathematics and computation, (2005), vol. 161, no2, pp. 525-542, Elsevier, New York.
- [29] L.J. Salter, *Generalized Hepergeometric Functions*. Combridge :Combridge University Press ( 1966).
- [30] T. Watanabe et J. Urabe, *A singular Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation*, J. Math. Pures Appl. (9) 93 (2010), no. 3, 223-239.
- [31] A. Weinstein. *The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations*. Comm. Pur Appl. Math. 7 (1954), 105-116.
- [32] A. Weinstein, *On a class of partial differential equations of even order*, Ann. Mat. Pura Appl. 39 (1955) 245-254.
- [33] [http://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric_function).
- [34] Wolfram, [functions.wolfram.com](http://functions.wolfram.com).
- [35] E.C. Zachmanoglou and Dale W. Thoe. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover Publications, Inc., New York (1986).

Article publié

## SINGULARITIES OF SOLUTIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A COMPLEX DOMAIN

NAOUEL BENTIBA

ABSTRACT. We give an explicit representation of the solution of the following singular Cauchy problem with analytic data,

$$u_{tt} - xu_{xx} + Cu_x - B(t^2 - 4x)^{-1}u = 0.$$

We also study the singularities of this solution.

Theorem[section] [theorem]Lemma [theorem]Remark [theorem]Example

### 1. INTRODUCTION

In this article, we study the singularities of the solution to the following Cauchy problem with analytic data in the complex domain

$$\begin{aligned}LU &= \partial_t^2 U - x\partial_x^2 U + C\partial_x U - B(t^2 - 4x)^{-1}U = 0, \\ U(0, x) &= U_0(x), \\ U_t(0, x) &= U_1(x),\end{aligned}\tag{1.1}$$

where  $C$  and  $B$  are real numbers. The variables  $t, x$  and the unknown  $U$  are complex numbers. Our aim is to give an explicit representation of the solution in terms of Gauss hypergeometric functions and study its singularities.

Equation (1.1) arises naturally by linearizing the nonlinear partial differential equation with double characteristics in involution

$$\partial_t^2 U - x\partial_x^2 U + C\partial_x U = aU^p,$$

around its self-similar solution  $U = (t^2 - 4x)^{\frac{-1}{p-1}}$ , where  $a$  is real number,  $p > 1$  and  $B = ap$ .

In the complex domain, the study of the singularities of the solutions of the nonlinear Cauchy problem is very complicated. Especially if the roots of the characteristic polynomial are double and not holomorphic at the origin (as is in our case). Indeed the technical difficulties are such that even in the linear case there are no methods for obtaining general theorems.

However in the case of second order equations, many authors showed that the solutions of certain evolution or degenerate linear equations can be expressed in terms of hypergeometric functions. Since these hypergeometric functions have intrinsic singularities, they permit the analysis of the structure of the solutions and therefore to describe their singularities; see [2, 3, 4, 5, 7].

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. 35A20, 35C10, 33C05, 33B15.

*Key words and phrases*. Cauchy problem; singular solutions; hypergeometric equation.

©2016 Texas State University.

Submitted May 4, 2016. Published June 28, 2016.

We will show that the solution, depending on various parameters, might have singularities on the characteristic surfaces:

$$K_1 : x = 0, \quad K_2 : 4x - t^2 = 0. \quad (1.2)$$

Before developing the theory and to get some insight to the problem, we present four concrete examples.

**Example 1.** In  $\mathbb{C}^2$  consider the Cauchy problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - x \partial_x^2 U + 2 \partial_x U - 28(t^2 - 4x)^{-1} U &= 0, \\ U(0, x) &= x^4, \\ U_t(0, x) &= 0. \end{aligned}$$

The solution is

$$U(t, x) = \frac{1}{4^2} (4x - t^2)^2 (x^2 - t^2 x + \frac{t^4}{6}).$$

We observe that  $U$  is polynomial.

**Example 2.** The Cauchy problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - x \partial_x^2 U - 2 \partial_x U - 12(t^2 - 4x)^{-1} U &= 0, \\ U(0, x) &= x, \\ U_t(0, x) &= 0, \end{aligned}$$

has solution

$$U(t, x) = \frac{1}{16} x^{-1} (4x - t^2)^2.$$

Thus it is singular only on  $K_1 : x = 0$ .

**Example 3.** In  $\mathbb{C}^2$  consider the Cauchy problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - x \partial_x^2 U + \partial_x U + 6(t^2 - 4x)^{-1} U &= 0, \\ U(0, x) &= x, \\ U_t(0, x) &= 0. \end{aligned}$$

Its solution is

$$U(t, x) = 4x^2 (4x - t^2)^{-1}.$$

Thus,  $U(t, x)$  is singular only on  $K_2 : 4x - t^2 = 0$ .

**Example 4.** Consider the Cauchy problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U - x \partial_x^2 U - \partial_x U - 4(t^2 - 4x)^{-1} U &= 0, \\ U(0, x) &= x, \\ U_t(0, x) &= 0. \end{aligned}$$

Its solution is

$$U(t, x) = \frac{1}{4} \left[ t \sqrt{(4x - t^2)} \arcsin\left(\frac{t}{2\sqrt{x}}\right) + (4x - t^2) \right].$$

Thus,  $U(t, x)$  is singular both on  $K_1 : x = 0$  and on  $K_2 : 4x - t^2 = 0$ .

## 2. STATEMENT OF THE PROBLEM

In a neighborhood  $\Omega$  of the origin of  $\mathbb{C}^2$ , we consider the Cauchy problem with analytic data:

$$\begin{aligned} LU &= \partial_t^2 U - x \partial_x^2 U + C \partial_x U - B(t^2 - 4x)^{-1} U = 0, \\ U(0, x) &= u_0(x), \\ U_t(0, x) &= u_1(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

where

$$u_0(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l, \quad u_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l$$

are analytic and  $C, B$  are real numbers.

Our purpose is to construct an exact solution in terms of hypergeometric functions and to show that the solution might have singularities on the characteristic surfaces (1.2). We denote

$$\begin{aligned} \Omega_R &= \{(t, x) \in \mathbb{C}^2 : |t| < R, |x| < R\}, \\ K_1 &= \{(t, x) \in \Omega_R : x = 0\}, \\ K_2 &= \{(t, x) \in \Omega_R : 4x - t^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Using these notation, we have the following theorems.

**Theorem 1.** *The Cauchy problem (2.1) has a unique solution of the form :*

$$U(t, x) = \sum_{l \geq 0} (a_l V_{l, \beta} + b_l W_{l, \beta'}),$$

with

$$\begin{aligned} V(t, x) &= V_{l, \beta}(t, x) \\ &= (4)^{-\beta} (x)^{l-\beta} (4x - t^2)^{\beta} F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

where  $\beta$  satisfies

$$\beta(2l - \beta - C - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}B,$$

$$\begin{aligned} W(t, x) &= W_{l, \beta'}(t, x) = \\ &= (4)^{-\beta'} (x)^{l-\beta'} (4x - t^2)^{\beta'} t F\left(\beta' - l, C + \beta' - l + 1, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

where

$$\beta'(2l - \beta' - C + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}B,$$

and  $F$  denotes the Gauss hypergeometric function. This solution might have singularities on  $K = K_1 \cup K_2$ .

**2.1. Construction of the solutions.** According to the principle of superposition, it is sufficient to study the following two Cauchy problems:

$$\begin{aligned} LV &= 0, \\ V(0, x) &= x^l, \\ V_t(0, x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

and

$$\begin{aligned} LW &= 0, \\ W(0, x) &= 0, \\ W_t(0, x) &= x^l. \end{aligned} \tag{2.5}$$

First we solve (2.4). Setting the Characteristics equations  $x = \xi_1$  and  $4x - t^2 = \xi_2$ . Let  $V(t, x) = V_l(t, x) = \xi_1^l v(z)$  with  $z = 1 - \frac{\xi_2}{4\xi_1}$ . Substituting  $\xi_1^l v(z)$  for  $V$ ,  $LW = 0$  becomes

$$\begin{aligned} LV &= \frac{1}{2}\xi_1^{l-1}V' + z\xi_1^{l-1}V''^2\xi_1^{l-1}V'' - 2z\xi_1^{l-1}V' + lz\xi_1^{l-1}V' \\ &+ zl\xi_1^{l-1}V' - l(l-1)\xi_1^{l-1}V + C(l\xi_1^{l-1}V - z\xi_1^{l-1}V') + \frac{B}{\xi_2}\xi_1^lV = 0. \end{aligned}$$

Simplifying this equation and replacing  $\frac{\xi_1}{\xi_2}$  by  $\frac{1}{4(1-z)}$ , we have

$$\begin{aligned} z(1-z)v'' + \left(\frac{1}{2} - (C + 2(1-l))z\right)v' \\ + (l(C-l+1) - \frac{1}{4}B(\frac{1}{z-1}))v = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

The substitution  $v = (1-z)^\beta y$  leads to

$$\begin{aligned} z(1-z)y'' + \left(\frac{1}{2} - (C + 2(1-l+\beta))z\right)y' \\ + (l(C-l+1) + \beta(\beta+C+1-2l))y = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Therefore (2.7) is equivalent to a Gauss differential equation with parameters

$$\left(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}\right),$$

if and only if

$$\beta(2l - \beta - C - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}B. \tag{2.8}$$

According to hypergeometric equation theory, we have: A first solution of Gauss equation for  $|z| < 1$  is

$$y_1(z) = F(a, b; c; z) = F(\beta - l, C + \beta - l + 1; \frac{1}{2}; z).$$

A second solution is

$$\begin{aligned} y_2(z) &= z^{1/2}F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z) \\ &= z^{1/2}F(\beta - l + \frac{1}{2}, C + \beta - l + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; z). \end{aligned}$$

A complete solution of the Gauss equation is

$$\begin{aligned} y &= DF(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; z) \\ &+ Ez^{1/2}F(\beta - l + \frac{1}{2}, C + \beta - l + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; z), \end{aligned} \tag{2.9}$$

with  $z = \frac{t^2}{4x}$ , for  $|z| < 1$ , where  $D$  and  $E$  are constants.

It follows that  $V = x^l(1-z)^\beta y$  is a solution of  $LW = 0$ . Taking into account the Cauchy data

$$V(0, x) = x^l, \quad V_t(0, x) = 0.$$

we have to choose  $D = 1$  and  $E = 0$ . Hence  $V(t, x)$  reduces to

$$V(t, x) = V_{l, \beta}(t, x) = x^l \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^\beta F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right). \quad (2.10)$$

In a similar way, we solve the second Cauchy problem (2.4) by setting

$$W(t, x) = tx^l \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^{\beta'} y;$$

we obtain

$$\begin{aligned} W(t, x) &= W_{l, \beta'}(t, x) \\ &= t(4)^{-\beta'} x^{l-\beta'} (4x - t^2)^{\beta'} F\left(\beta' - l, C + \beta' - l + 1, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{4x}\right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

where  $\beta'$  and  $l$  satisfy

$$\beta' \left(\frac{1}{2} + 2l - C - \beta'\right) = \frac{B}{4}.$$

**Remark 1.** When  $\beta - l = -n$  or  $C + \beta - l + 1 = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , the solution  $V$  of (2.4) is

$$\begin{aligned} V(t, x) &= (4)^{l-n} (x)^n (4x - t^2)^{l-n} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \left(\frac{t^2}{4x}\right)^i\right), \\ &= (4)^{l-n} (4x - t^2)^{l-n} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i x^{n-i} \left(\frac{t^2}{4}\right)^i\right); \end{aligned}$$

its last term is

$$c_n t^{2n} (4x - t^2)^{l-n},$$

where  $c_n$  depends on parameters  $C, l$  and  $\beta$ .

Therefore, we have some results for  $V$ .

- (1) When  $l - n \geq 0$ , the solution  $V(t, x)$  is a polynomial.
- (2) When  $l - n < 0$ , the solution is singular on the surface  $K_2 : 4x - t^2 = 0$ .
- (3) When  $C + \beta - l + 1 = -n$ , we have the following results:
  - (i) For  $C < -n - 1$ , the solution is singular on the surface  $K_1$ .
  - (ii) For  $C > -n - 1$  and  $l - (C + n + 1) < 0$ , the solution is singular on the surface  $K_2$ .
  - (iii) For  $C > -n - 1$  and  $l - (C + n + 1) > 0$ , the solution is polynomial.

**2.2. Singularities.** In this section, we study the singularities of the solution. The mapping

$$z = \frac{t^2}{4x},$$

transforms

$$\begin{aligned} t = 0, & \text{ into } z = 0, \\ K_2 : t^2 - 4x = 0, & \text{ into } z = 1, \\ K_1 : x = 0, & \text{ into } z = \infty. \end{aligned}$$

By construction, the solution  $U$  is composed of a hypergeometric function which is holomorphic on  $D - (0, 1, \infty)$ , where  $D$  is the Riemann sphere. So, the study of the singularities of the solution is reduced to those corresponding well known properties of Gauss functions. It follows that  $U$  is ramified around  $K_1 \cup K_2$ .

**2.3. Convergence of the solution.** The study of the convergence of this solution is reduced to estimate the Gauss functions. For this, we apply the following result.

**Lemma 2.** *If  $a \geq b > c > 0$  and  $d = a + b - c$ , then for  $|z| < 1$ ,*

$$F(a, b; c; z) \ll (1 - z)^{-d} \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \tag{2.12}$$

For the proof of this lemma, see [6].

**Theorem 3.** *The series  $\sum_{l \geq 0} a_l V_l$  and  $\sum_{l \geq 0} b_l W_l$  converge for  $|x| < \frac{R}{4}$ , where  $R$  is the radius of convergence of  $u_0$  and  $u_1$ .*

*Proof.* We have

$$V(t, x) = V_l(t, x) = (x)^l \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^\beta F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right).$$

Let

$$\beta = \beta_1 = \frac{2l - C - \frac{1}{2} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

be one of the roots of the equation (2.8), where

$$\Delta = \left(2l - C - \frac{1}{2}\right)^2 - B \tag{2.13}$$

Putting :  $a = \beta - l$ ,  $b = C + \beta - l + 1$ , and  $c = \frac{1}{2}$ , we have

$$d = a + b - c = 2\beta - 2l + C + \frac{1}{2} = -\sqrt{\Delta} < 0.$$

In this case, we recall the Euler transformation

$$F(\alpha, \delta; \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \delta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \delta; \gamma; z).$$

Applying this transformation to  $F(\beta - l, C + \beta - l + 1; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x})$ , we obtain

$$\begin{aligned} &F\left(\beta - l, C + \beta - l + 1; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^{\sqrt{\Delta}} F\left(l - \beta + \frac{1}{2}, l - C - \beta - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right). \end{aligned}$$

For  $l$  large,  $l - \beta = l + o(1)$ , and so by applying Lemma 2 to  $F(l - \beta + \frac{1}{2}, l - C - \beta - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x})$  we have

$$F\left(l - \beta + \frac{1}{2}, l - C - \beta - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{4x}\right) \ll \left(1 - \frac{t^2}{4x}\right)^{-\sqrt{\Delta}} M,$$

where  $y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$  and

$$M = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2y)}{\Gamma(y - \frac{2C+1}{4})\Gamma(y + \frac{2C+3}{4})}.$$

Stirling's formula gives

$$M \sim 2^{2y-1} \frac{\sqrt{2\pi}(y)^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} \sqrt{2\pi}(y)^y e^{-y}}{\left(\sqrt{2\pi}(y)^{y-(\frac{2C+3}{4})} e^{-y}\right) \left(\sqrt{2\pi}(y)^{y+(\frac{2C+1}{4})} e^{-y}\right)};$$

then  $M \sim 2^{2y-1}$ . Therefore,

$$|V(t, x)| \leq 2^{2y-1} |x|^l \left|1 - \frac{t^2}{x}\right|^{\beta_1} \left|1 - \frac{t^2}{x}\right|^{\sqrt{\Delta}} \left|1 - \frac{t^2}{x}\right|^{-\sqrt{\Delta}}$$

$$\leq 2^{2y-1}|x|^l \left| 1 - \frac{t^2}{x} \right|^{\beta_1}.$$

As  $\beta_1 \rightarrow 0$  for  $l$  large, we deduce that

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} |V_l|^{1/l} \leq 4|x|.$$

It follows that  $\sum_{l \geq 0} a_l V_l$  converges for

$$|x| < \frac{R}{4}.$$

In the similar way, we show that  $\sum b_l W_l$  converges for

$$|x| < \frac{1}{4}R.$$

This completes the proof. □

#### REFERENCES

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, (Eds.); *Handbook of Mathematical Function*, National Bureau of Standards, Washington, Tenth printing, 1972.
- [2] Akhmadjon K. Urinov, Akhrorjon I. Ismoilov, Azizbek O. Mamanazarov; *A Cauchy-Goursat problem for the generalized Euler-Poisson-Darboux equation*; Contemp. Anal. Appl. Math, Vol. 4, No.1, 1-22, 2016.
- [3] A. Bentradi; *Exact solutions for a different version of the nonhomogeneous E-P-D equation*. Complex Var. Elliptic Equ., vol. 51. No.3 March 2006, pp. 243-253.
- [4] D. W. Bresters; *On the equation of Euler-Poisson-Darboux*, Siam J.Math.Anal.1973 no.1 pp. 31-41.
- [5] A. Hasanov; *The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation*. Int. J. Appl. Math. Stat., vol. 8, M07, 2007, pp. 30-44.
- [6] S. Ponnusamy, M. Vuorinen; *Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric functions*; Mathematika, 44 (1997), pp. 278-301.
- [7] Rakhila B. Seilkhanova, Anvar H. Hasanov; *Particular Solutions of Generalized Euler-Poisson-Darboux equation*; Electron. J. Differential Equations, Vol. 2015 (2015), No. 09, pp. 1-10.

NAOUEL BENTIBA, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCES, UNIVERSITY BADJI MOKHTAR ANNABA, 23000 ANNABA, ALGERIA  
*E-mail address:* nabn\_math@hotmail.com