وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار عنابة

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de ***MAGISTER*** *en Mathématiques.*

Option

Equations aux Dérivées Partielles & applications.

Présenté par: ***ABDELMALEK Brahim***

Thème

VALEURS PROPRES PRINCIPALES DE PROBLEMES ELLIPTIQUES

Directeur de Recherches:

- *A. Djellit. Prof. U.B.M. Annaba.*

Devant le jury composé par:

S. Mazouzi	*Prof.*	*U.B.M. Annaba*	*Président.*
F.Z Nouri	*Prof.*	*U.B.M. Annaba*	*Examinatrice.*
A. Moumeni	*M. C.*	*U.B.M. Annaba*	*Examinateur.*

Année: 2007.

To my parents.

To Tamrabet Sameh.

To all whom I love and respect.

ملخـــــص

نعتبر المعادلة ذات القيم الذاتية التالية:

$$Au = \lambda Bu \qquad (1)$$

في $\mathbb{R}^n$ حيث $n \geq 3$.

حيث A مؤثر من الدرجة الثانية قرين بنفسه وناقصي منتظم ذو معاملات متغيرة، B مؤثر ضربي؛ المؤثران A و B معرفان في فضاء هلبرت (Hilbert) H.

نعالج أولا حالة أين $A = -\Delta + q$ هو مؤثر شرودينقر Schrödinger، B مؤثر ضربي في دالة g التي تتناقص بسرعة في جوار اللانهاية. اهتمامنا هو تحديد الشروط على الكمون q حتى تقبل المعادلة (1) بنية طيفية متقطعة. لهذا نقوم بتطبيق نظرية Weinberger لإثبات وجود طيف متقطع؛ القيم الذاتية تحقق علاقة Courant-Fischer يدعى مبدأ Min-Max.

وبصفة خاصة متعلقة بالقيمة الذاتية الأولى. باختيار دقيق وحكيم للكمون q، نجد أن القيمة الذاتية الأولى الموجبة (السالبة) تكون أساسية بمعني أن الدالة الذاتية المرافقة لا تغير إشارتها. و في الأخير نقوم بتعميم النتائج السابقة على مؤثر من الدرجة الثانية ذو معاملات متغيرة من الشكل $A = -\sum D^i(a_{ij}D^j)$.

الكلمات المفتاحية:

- قيمة ذاتية رئيسية - مبدأ Min-Max - فضاء Sobolev بوزن - مؤثر Schrödinger - معادلة ذات قيم ذاتية.

Abstract

We consider the following elliptic problem :

$$Au = \lambda Bu \ \text{ dans } \mathbb{R}^n, \ n \geq 3 \tag{1}$$

Where λ is a real parameter, A is a linear operator of second order formally self-adjoint and uniformly elliptic, B is the operator of multiplication. The operators A and B are definited in a real Hilbert space.

First, we consider the case of Schrödinger's operator $:= -\Delta + q$; and B is the operator of multiplication by a function g which decreases rapidly at infinity. We choose the potential q in appropriate spaces. To this end, we apply the Weinberger's theory to show the existence of a discrete spectrum, the eigenvalues are characterized by Courant-Fischer's, formula known as Min-Max's principle.

Then, a particular interest is devoted to the first eigenvalue. By an appropriate choice of the potential q, we obtain that the first positive (resp. negative) eigenvalue is principal i.e., the associated eigenfunction does not change sign. Finally, we treat the general case of the second order operator of the form : $A = -\sum D^i \left(a_{ij}\left(x\right) D^j\right)$.

Keywords :

- Principal eigenvalue - Min-Max's principle - Weighted Sobolev spaces - Schrödinger's operator - Eigenvalue problem.

Résumé

Nous considérons le problème elliptique suivant :

$$Au = \lambda Bu \ \text{ dans } \mathbb{R}^n,\ n \geq 3 \tag{1}$$

où λ est un paramètre réel, A est un opérateur linéaire du second ordre formellement autoadjoint, uniformément elliptique, et B est l'opérateur de multiplication. Les opérateurs A et B sont définis dans un espace de Hilbert réel (ou complexe) $\mathbb{H}$.

Nous commençons par examiner le cas de l'opérateur de Schrödinger $:= -\Delta + q$; et B est l'opérateur de multiplication par une fonction g qui décroit "assez vite" à l'infini. Une première étape consiste à choisir le potentiel q dans des espaces appropriés. A cette fin, nous appliquons la théorie de Weinberger pour montrer l'existence d'un spectre discret ; les valeurs propres sont caractérisées par la formule de Courant-Fischer dit principe du Min-Max. En suite un intérêt particulier est dévoué à la première valeur propre. En choisissant judicieusement le potentiel q, nous obtenons que la première valeur propre positive (resp. négative) est principale c'est-à-dire que la fonction propre associée ne change pas de signe. Finalement nous traitons le cas d'un opérateur d'ordre deux de la forme : $A = -\sum D^i \left(a_{ij}\left(x\right) D^j\right).$

Mots clés :

- Valeur propre principale - Principe du Min-Max - Espaces de Sobolev à poids - Opérateur de Schrödinger - Problème aux valeurs propres.

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur, ***Ali Djellit,*** *professeur à l'université d'Annaba, pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.*

Mes remerciements vont également à Monsieur, ***S. Mazouzi****, professeur à l'université d'Annaba, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.*

De même je remercie vivement,Mme ***F.Z. Nouri,*** professeur à l'université d'Annaba, et ***A. Moumeni****, maître de conférence à l'université d'Annaba, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.*

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connu au département de mathématiques et qui ont rendu mes séjours au département agréables.

Brahim A.

Table des matières

0.1 Introduction

Nous nous intéressons à l'existence des valeurs propres principales des problèmes aux limites elliptiques de la forme :

$$Au = \lambda Bu, \text{ dans } \mathbb{R}^n, n \geq 3 \tag{*}$$

où λ est un paramètre réel, A est un opérateur linéaire uniformément elliptique, formellement autoadjoint du second ordre à coefficients variables, et B est l'opérateur de multiplication par une fonction poids g de signe non constant. Les opérateurs A et B sont définis dans un espace de Hilbert réel (ou complexe) $\mathbb{H}$.

La détermination des valeurs propres et des fonctions propres est en général impossible sauf pour quelques problèmes simples. Il est toute fois possible, par comparaison à des problèmes modèles, d'obtenir une estimation des valeurs propres (réelles). Les chercheurs ont établi deux catégories d'estimations : la première concerne l'estimation des "premières valeurs propres" -valeurs propres "principales"- qui, dans le cas d'un problème aux limites de Dirichlet ou plus généralement d'un opérateur elliptique du second ordre sont associées à des fonctions propres positives ; la deuxième estimation concerne les "grandes valeurs propres", et dans ce cas ils ont étudié le comportement asymptotique des valeurs propres quand λ tend vers l'infini ; ce comportement est représenté par la fonction de comptage $N^+(\lambda, A, g, \mathbb{R}^n)$ (resp. $N^-(\lambda, A, g, \mathbb{R}^n)$) qui détermine le nombre de valeurs propres inférieures ou égale à λ (resp. le nombre de valeurs propres supérieures ou égale à λ). En ce qui nous concerne, notre intérêt est porté sur la première catégorie.

Les problèmes relatifs à l'existence de valeurs propres principales sont étudiés dans [11], [14], [19], [30] et [32] quand le potentiel q est positif ou nul et Ω borné ; les autres résultats dans [13] et [15] concernent les situations où $q = 0$ et Ω non borné.

Le cas $n = 1$ avec q non nécessairement positif est étudié par [35]. Ces problèmes là peuvent admettre des valeurs propres non réelles. En [28], les auteurs ont montré l'existence d'une suite de valeurs propres lorsque $n > 1$ et Ω borné. Allegretto & Mingarelli

[4] ont donné une estimation de la première valeur propre du problème traité dans [28].

Dans [25] et [37] les auteurs ont considéré des potentiels $q \to \infty$ quand $x \to \infty$, tandis que [20] , [21] , [22] et [24] ont utilisé des potentiels décroissant vers zéro à l'infini.

Nous observons une vaste littérature relative aux problèmes posés dans des domaines bornés, notamment les résultats élaborés dans [3] , [29] , [30] et [32] .

Si le problème (*) est considéré dans un domaine borné, les espaces de Sobolev ordinaires conviennent parfaitement pour caractériser les solutions. Cependant dans un domaine non borné, il est nécessaire d'introduire les espaces de Sobolev à poids déjà rencontrés dans [6] , [7] , [9] , [18] et [31] .

Le présent travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons tout d'abord la méthode de Weinberger [38] qui permet d'établir l'existence de valeurs propres. Ces valeurs propres sont caractérisées par le principe du Min-Max.

Le deuxième chapitre est consacré en premier lieu à l'étude des problèmes associés à des opérateurs de type Schrödinger $:= -\Delta + q$. Des considérations sur le potentiel q et le poids g s'avèrent nécessaire pour que le problème associé admette une double suite infinie dénombrable de valeurs propres l'une positive tendant vers plus l'infini, et l'autre négative tendant vers moins l'infini. Nous montrons en particulier que la plus petite valeur propre est principale et simple.

Dans le dernier chapitre, nous traitons des problèmes associés à des opérateurs elliptiques d'ordre deux de la forme : $-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q$. Nous déterminons les conditions sur les coefficients a_{ij}, le potentiel q et le poids g, pour que le problème relatif à cet opérateur admette un spectre discret, puis nous démontrons ici aussi que la première valeur propre est principale et simple. Dans le dernier paragraphe, nous étudions des opérateurs elliptiques d'ordre deux plus généraux.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Introduction

Nous étudions les problèmes aux valeurs propres de la forme

$$Au = \lambda Bu, \tag{1.1}$$

où A et B sont des opérateurs autoadjoints définis dans un espace de Hilbert $\mathbb{V}$ à image dans un autre espace de Hilbert $\mathbb{H}$, avec $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H}$, l'injection étant continue et d'image dense, de plus nous supposons que l'opérateur A est positif de domaine dense. L'opérateur B est supposé $A-$borné :

$$|Bu|_{\mathbb{H}} \leq C\,|Au|_{\mathbb{H}}\,.$$

Pratiquement dans les problèmes aux limites étudiés $A = -\Delta + q$, est un opérateur elliptique positif. B est l'opérateur de multiplication par la fonction poids g de signe non constant. Formellement (1.1) s'écrit $u = \lambda A^{-1}Bu$.

1.2 Formulation variationnelle du problème

Nous supposons que :

$\mathbb{H}$ et $\mathbb{V}$ sont des espaces de Hilbert réels (ou complexes), séparables,

$(.,.)$ et $((.,.))$ désignant leurs produits scalaires respectifs, et $|.|_{\mathbb{H}}$ et $\|.\|_{\mathbb{V}}$ les normes associées.

$a(.,.)$ et $b(.,.)$ sont deux formes hermitiennes sur $\mathbb{V}$ telles que :

$i)$ $a(.,.)$ est continue et coercive sur $\mathbb{V}$ c'est à dire $\exists M > 0$ et $\exists C > 0$, tels que

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} \text{ et } a(u,u) \geq C \|u\|_{\mathbb{V}}^2, \ \forall (u,v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}. \tag{1.2}$$

$ii)$ $b(.,.)$ est continue sur $\mathbb{V}$ c'est à dire $\exists M' > 0$, tel que

$$|b(u,v)| \leq M' \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}, \ \forall u,v \in \mathbb{V}.$$

La résolution du problème aux valeurs propres (1.1) revient à la résolution du problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{V} \ , u \neq 0 \text{ vérifiant :} \\ a(u,v) = \lambda b(u,v), \ \forall v \in \mathbb{V} \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Définition 1.1. *On dit que λ est une valeur propre de (1.3) s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{V}$ non nul qui vérifie (1.3).*

Il résulte de $((1.2), i)$ que la forme quadratique $a(u,u)$ définit sur $\mathbb{V}$ un produit scalaire équivalent à $((.,.))$ et donc, comme la forme $b(u,v)$ est continue sur $\mathbb{V}$, nous pouvons appliquer le théorème de représentation de Riesz ; on en déduit qu'il existe un opérateur T défini sur $\mathbb{V}$ par :

$$b(u,v) = a(Tu,v), \ \forall u \in \mathbb{V}, \ \forall v \in \mathbb{V} \tag{1.4}$$

1.3 L'opérateur T

Proposition 1.1. *L'opérateur T ainsi défini est linéaire, continu et autoadjoint sur* $\mathbb{V}$.

Preuve

La linéarité est évidente ; il résulte de $((1.2), ii)$ que :

$$C\,\|Tu\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a\,(Tu, Tu) = b\,(u, Tu) \leq M'\,\|u\|_{\mathbb{V}}\,\|Tu\|_{\mathbb{V}}$$

et donc en déduisant la continuité

$$\|Tu\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{M'}{C}\,\|u\|_{\mathbb{V}}\,.$$

Enfin T est autoadjoint puisque les formes sont hermitiennes :

$$a\,(Tu, v) = b\,(u, v) = \overline{b\,(v, u)} = \overline{a\,(Tv, u)} = a\,(u, Tv)\,. \tag{1.5}$$

■

Remarque 1.1.

Il est classique d'associer au triplet variationnel $(\mathbb{V}, \mathbb{H}, a\,(.,.))$ sa réalisation : l'opérateur A est autoadjoint, positif et non borné dans $\mathbb{H}$ de domaine $D\,(A)$ défini par :

$$D\,(A) = \{u \in \mathbb{V}, \quad Au \in \mathbb{H}\}\,.$$

$$(Au, v)_{\mathbb{H}} = a\,(u, v)\,; \;\forall u \in D\,(A) \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

D'une manière analogue à la forme $b\,(.,.)$ nous pouvons associer l'opérateur B autoadjoint défini sur $\mathbb{V}$ par :

$$(Bu, v)_{\mathbb{H}} = b\,(u, v) \;\;, \forall u, v \in \mathbb{V}$$

ainsi formellement :

$$T = A^{-1}B.$$

Remarque 1.2.

Le problème (1.3) peut s'écrire, en utilisant l'opérateur T,

$$\lambda a\left(Tu, v\right) = a\left(u, v\right), \forall v \in \mathbb{V}.$$

Soit

$$a\left(\lambda Tu - u, v\right) = 0 \ , \forall v \in \mathbb{V}$$

Il résulte de (1.2) que

$$Tu = \frac{1}{\lambda}u. \tag{1.6}$$

Ainsi, si u est un vecteur propre de (1.3) correspondant à la valeur propre λ non nulle, alors il est aussi un vecteur propre de (1.6) correspondant à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ et réciproquement.

1.4 Spectre de T

Si nous supposons de plus que l'injection de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{H}$ est compacte, alors

$$T \text{ est compact,}$$

et nous pouvons appliquer les résultats de la théorie spectrale classique des opérateurs autoadjoints compacts sur les espaces de Hilbert. Nous avons (Voir [11], [34],...).

Proposition 1.2. *(i) Les valeurs propres de T sont réelles et (sauf peut être 0) sont de multiplicités finies.*

(ii) Si μ_i et μ_j sont deux valeurs propres distinctes de T avec φ_i et φ_j les fonctions

propres associées, alors :

$$a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = 0 \text{ et } b\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = 0$$

(iii) Le spectre de T est constitué par (au plus) deux infinités dénombrables de valeurs propres, une positive et l'autre négative, tendant vers zéro :

$$\mu_1^- < \mu_2^- \leq ... \leq \mu_j^- \leq \mu_{j+1}^- \leq ... \leq 0 \leq ... \leq \mu_{j+1}^+ \leq \mu_j^+ \leq ... \leq \mu_2^+ < \mu_1^+ \tag{1.7}$$

On répète chaque valeur propre selon sa multiplicité (on rappelle que la multiplicité de la valeur propre est la dimension du sous espace propre).

(iv) Les valeurs propres de T sont caractérisées par le principe du "Min-Max" :

$$\begin{aligned} \mu_{j+1}^+ &= \min_{V_j \in U_j} \max_{u \perp V_j} \{b(u,u) / a(u,u) = 1\} \\ \mu_{j+1}^- &= \max_{V_j \in U_j} \min_{u \perp V_j} \{b(u,u) / a(u,u) = 1\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

U_j étant l'ensemble de tous les sous espaces de $\mathbb{V}$ de dimension j

En particulier

$$\mu_1 = \max_{0 \neq u \in \mathbb{V}} \left\{ \frac{b(u,u)}{a(u,u)} \right\}$$

Remarque 1.3.

Les valeurs propres de (1.3) notées $\lambda_j(a, b, \mathbb{V})$ sont égales à $\dfrac{1}{\mu_j}$ et sont réelles ; de plus nous pouvons leur associer des fonctions propres réelles.

Il en résulte de (1.8) les lemmes suivants :

Lemme 1.1. *Si $a_1(u,v)$ et $a_2(u,v)$ sont deux formes hermitiennes continues, coercives sur $\mathbb{V}$ telles que $a_1(u,u) \geq a_2(u,u)$, $\forall u \in \mathbb{V}$ et si $b(u,v)$ est une forme hermitienne continue sur $\mathbb{V}$, alors :*

$$\lambda_j^+(a_1, b, \mathbb{V}) \geq \lambda_j^+(a_2, b, \mathbb{V}).$$

Lemme 1.2. *Si $b_1(u,v)$ et $b_2(u,v)$ sont deux formes hermitiennes continues sur $\mathbb{V}$ telles que $b_1(u,u) \leq b_2(u,u)$, $u \in \mathbb{V}$ et si $a(u,v)$ est une forme hermitienne continue, coercive sur $\mathbb{V}$, alors :*

$$\lambda_j^+(a, b_1, \mathbb{V}) \geq \lambda_j^+(a, b_2, \mathbb{V}).$$

Lemme 1.3. *Si $(\mathbb{V}_1, \mathbb{H}, a)$ et $(\mathbb{V}_2, \mathbb{H}, a)$ sont deux triplets variationnels tels que $\mathbb{V}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}_2$ alors*:

$$\lambda_j^+(a, b, \mathbb{V}_1) \geq \lambda_j^+(a, b, \mathbb{V}_2).$$

Nous introduisons l'inégalité de Hardy qui joue le même rôle que l'inégalité de Poincaré quand le domaine est borné.

Inégalité de Hardy [20] .

Il existe une constante $C = C(n) > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \qquad (n \geq 3)$$

pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.5 Identité de Picone

Pour des fonctions différentiables $u, v, v \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v^2 \left|\nabla\left(\frac{u}{v}\right)\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v} \nabla u . \nabla v dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right) . \nabla v dx \end{aligned}$$

En effet, pour la première équation nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} v^2 \left|\nabla\left(\frac{u}{v}\right)\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} v^2 \left|\frac{1}{v}\nabla u - \frac{u}{v^2}\nabla v\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v}\nabla u.\nabla v dx\end{aligned}$$

Pour aboutir à la deuxième équation, il suffit de multiplier l'équation suivante

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\left(u\frac{u}{v}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v}\nabla u dx + \int_{\mathbb{R}^n} u\nabla\left(\frac{u}{v}\right) dx = 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v}\nabla u dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{v^2}\nabla v dx$$

par $(-\nabla v)$.

Nous étudions dans ce qui suit l'inégalité de Harnack à l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Pour rappel, nous rencontrons les développements concernant cette inégalité dans Stampacchia [36] quand le domaine est borné.

1.6 Inégalité de Harnack dans $\mathbb{R}^n$

Nous considérons l'opérateur elliptique

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} + d_j u\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu\right) \tag{1.9}$$

Nous supposons que l'opérateur L est uniformément elliptique c'est à dire qu'il existe une constante $\gamma > 0$, telle que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \gamma\,|\xi|^2 \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n) \tag{1.10}$$

Nous supposons que

$$\begin{cases} |a_{ij}| \leq M \\ b_i \in L^n(\mathbb{R}^n) \\ d_i \in L^r(\mathbb{R}^n) \\ c \in L^{\frac{r}{2}}(\mathbb{R}^n), \text{ avec } r > n \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

Nous désignons par $Q(x_0, \rho)$ le cube de centre x_0 et de côté ρ.

Théorème 1.1 *Soit u une solution positive de l'équation $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors pour chaque compact G tel que $G \subset \mathbb{R}^n$, il existe une constante positive K indépendante de u, telle que*

$$\max_G u \leq K \min_G u \tag{1.12}$$

avec $K = K(\gamma, M, c, b_i, d_i, G)$

Démonstration

Du lemme 8.4 et du lemme 8.3 (voir [36] p. 240-241) nous déduisons qu'il existe deux constantes positives K et α telles que

$$\min_{Q(x_0,\rho_1)} u \geq K \left(\frac{1}{\rho_1^n} \int_Q u^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1.13}$$

D'autre part, d'après le lemme 8.4, nous avons

$$\max_{Q(x_0,\rho_2)} u \leq K \left(\frac{1}{\rho_2^n} \int_Q |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.14}$$

Pour achever la démonstration il suffit de démontrer l'existence d'une constante K telle que, pour $\rho_2 > \rho_1$ nous avons

$$\left(\frac{1}{\rho_2^n} \int_{Q(x_0,\rho_1)} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq K \left(\frac{1}{\rho_1^n} \int_{Q(x_0,\rho_2)} u^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.15}$$

Si (1.15) est valable nous avons avec une constante convenable K

$$\max_{Q(x_0,\rho_1)} u \leq K \min_{Q(x_0,\rho_2)} u \leq K \min_{Q(x_0,\rho_1)} u; \tag{1.16}$$

Le passage de (1.16) à (1.12) se fait alors de façon standard par recouvrement fini.

Pour montrer (1.15), nous posons $\chi = \dfrac{n}{n-2} = \dfrac{2^*}{2}$ et nous supposons que l'exposant α à droite de (1.15) soit tel que $\alpha\chi^s \neq 1$ pour s entier (il suffit éventuellement de prendre α un peu plus petit). Soit h un entier tel que $\alpha\chi^h \geq 2$. Nous posons $q_s = \alpha\chi^s$ et $r_s = \rho_2 - s\dfrac{\rho_2 - \rho_1}{h}$ et nous utilisons le lemme 8.1, (voir [36] p. 239) avec $\alpha = 1$ sur $Q(x_0, r_{s+1})$ et $\alpha \equiv 0$ hors de $Q(x_0, r_s)$ et $|\alpha_x| \leq \dfrac{2}{r_{s+1} - r_s} = \dfrac{2h}{\rho_2 - \rho_1}$.

Nous obtenons

$$\left(\int_{Q(x_0,r_{s+1})} u^{q_{s+1}} dx\right)^{\frac{1}{q_{s+1}}} \leq \frac{C}{(\rho_2-\rho_1)^{\frac{2}{q_s}}} \left(\int_{Q(x_0,r_s)} u^{\alpha} dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et en multipliant pour $s = 0, 1, ..., h-1$, nous avons

$$\left(\frac{1}{\rho_1^n}\int_{Q(x_0,\rho_1)} u^{q_h} dx\right)^{\frac{1}{q_h}} \leq \frac{c'\rho_2^{\frac{n}{\alpha}}\rho_1^{-\frac{n}{q_h}}}{(\rho_2-\rho_1)^{\frac{n}{\alpha}(1-\chi^{-n})}} \left(\frac{1}{\rho_2^n}\int_{Q(x_0,\rho_2)} u^{\alpha} dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

d'où (1.15) si $\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2} \geq r > 0$.

■

Théorème 1.2 *Soit u une solution positive dans $\mathbb{R}^n$ de l'équation $Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ où $f_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p > n$. Il existe une constante $K > 0$ telle que, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et ρ est suffisamment petit nous avons*

$$\max_{Q(x_0,\rho)} u \leq K\left(\min_{Q(x_0,\rho)} u + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rho^{1-\frac{n}{p}}\right). \tag{1.17}$$

Preuve

Soit x_0 un point quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Soit R est suffisamment petit de façon que la forme $a(u,v)$ associée à L est coercive sur $H_0^1(Q(x_0,R))$ (voir théorème 3.1 dans [36] p. 200).

Si $2\rho < R$ nous posons $u = v + w$ où w est la solution dans $H_0^1(Q(x_0, 2\rho))$ de l'équation $Lw = \sum (f_i)_{x_i}$; v est une solution de l'équation homogène $Lv = 0$ avec $v = u$ sur $\partial Q(x_0, 2\rho)$. Grâce au principe du maximum (voir théorème 3.6 [36] p. 206) v est positive dans $\partial Q(x_0, 2\rho)$. Alors d'après le théorème 1.1, nous avons

$$\max_{Q(x_0,\rho)} v \leq K \min_{Q(x_0,\rho)} v.$$

Mais nous avons

$$\min v + \min w \leq \min u \leq \max u \leq \min v$$

donc

$$\begin{aligned}
\max_{Q(x_0,\rho)} u &\leq \max_{Q(x_0,\rho)} v + \max_{Q(x_0,\rho)} w \leq K \min_{Q(x_0,\rho)} v + \max_{Q(x_0,\rho)} w \\
&\leq K \left(\min_{Q(x_0,\rho)} u - \min_{Q(x_0,\rho)} w \right) + \max_{Q(x_0,\rho)} w \leq K \min_{Q(x_0,\rho)} u + K \max_{Q(x_0,\rho)} |w|
\end{aligned}$$

Mais d'après le théorème 4.2 (voir [36] p. 215) nous avons

$$\max_{Q(x_0,\rho)} |w| \leq K' \sum \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rho^{1-\frac{n}{p}}$$

■

Corollaire 1.1 *Si l'opérateur L vérifie (1.10) et (1.11), alors les solutions non négatives de $Lu = 0$ sont positives ou identiquement nulles.*

Preuve

Soit Ω' un ouvert tel que $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$. En effet,

Si $\min_{\Omega'} u = 0$, alors $v = u + \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ est une solution de l'équation

$$Lv = \epsilon \left[c - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \right]$$

Nous avons

$$\begin{aligned} Lv &= -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial\left(u+\epsilon\right)}{\partial x_i}+d_j\left(u+\epsilon\right)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial\left(u+\epsilon\right)}{\partial x_i}+c\left(u+\epsilon\right)\right) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}+d_ju+d_j\epsilon\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu+c\epsilon\right) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}+d_ju\right)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}d_j\epsilon+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cv\right)+c\epsilon \end{aligned}$$

$$Lv=\epsilon\left[c-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_i}{\partial x_i}\right]$$

D'après le théorème 1.2, nous avons,

$$\max_{\Omega'} v \leq K\epsilon\left(1+\|c\|_{L^{\frac{r}{2}}(\mathbb{R}^n)}+\|d_i\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\right)$$

Donc

$$\max_{\Omega'} u = 0$$

■

Chapitre 2

Opérateurs de type Schrödinger

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)\, u = \lambda g(x)\, u \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, n \geq 3 \tag{2.1}$$

où q et g sont des fonctions mesurables ; $q \geq 0$ (non identiquement nul) et g de signe non constant et décroit "assez vite" à l'infini.

Notre objectif est de montrer que le problème (2.1) admet un spectre discret. En suite nous montrons que la première valeur propre λ_1 est principale. De plus elle est simple c'est à dire de multiplicité un.

Une première étude a été élaborée par [11], quand $q \equiv 0$ et g à support compact. Des résultats sur la non existence de valeurs propres principales positives figurent dans le travail de [13] quand $q \equiv 0$ et $\int_{\mathbb{R}^2} gdx > 0$. Dans [20], l'auteur a considéré le cas $\int_{\mathbb{R}^2} gdx \gtreqless 0$ et $q \equiv 0$.

Un cas est étudié par [22] où le potentiel q est strictement positif ou nul pour des ouverts non bornés de $\mathbb{R}^2$.

Nous montrons que pour une classe des potentiels q, le problème (2.1) admet un spectre discret. Précisément si $q \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ alors le problème (2.1) admet deux suites infinies dénombrables de valeurs propres tendant vers plus ou moins l'infini.

2.2 Notation

Nous désignons par 2^* le conjugué de Sobolev de 2 i.e. $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$

Nous introduisons les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^n$:

$$\rho(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

et

$$p_\alpha = \rho^{2\alpha}(x), \alpha > 0. \tag{2.3}$$

Nous définissons l'espace :

$$\mathbb{V}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in D'(\mathbb{R}^n);\ (p_1)^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}. \tag{2.4}$$

que l'on munit de la norme usuelle :

$$\|u\|_{\mathbb{V}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + p_1 |u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathbb{V}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert (voir [31] p. 230).

Nous définissons des parties de $\mathbb{V}$ comme suit :

$$\mathbb{V}_\pm = \left\{u \in \mathbb{V} \mid \int_{\mathbb{R}^n} g\,|u|^2 \, dx \gtrless 0\right\}. \tag{2.5}$$

Nous supposons que

$$q \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \quad \exists \alpha > 1,\ \exists K > 0,\ \ |g(x)| \leq \frac{K}{\left(1 + |x|^2\right)^\alpha},\ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.6}$$

Multiplions les deux membres de (2.1) par une fonction test v et intégrons

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\Delta uvdx + \int_{\mathbb{R}^n} quvdx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} guvdx$$

Nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla vdx + \int_{\mathbb{R}^n} quvdx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} guvdx$$

Posons

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla vdx + \int_{\mathbb{R}^n} quvdx \quad \text{et} \quad b(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} guvdx$$

Une formulation variationnelle du problème (2.1) est donnée par

$$\begin{cases} \text{trouver } (u,\lambda) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}, u \neq 0, \text{ tels que} \\ a(u,v) = \lambda b(u,v) \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3 Existence de valeurs propres principales

Définition 2.1. *Soit λ une valeur propre du problème (2.1). λ est dite valeur propre principale si la fonction propre associée ne change pas de signe.*

La forme $a(u,v)$ est continue sur $\mathbb{V}$. En effet,

$$|a(u,v)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla vdx + \int_{\mathbb{R}^n} quvdx \right|$$

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \quad \leq \quad & \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |q(x)|^{\frac{n}{2}} dx \right)^{\frac{2}{n}} \\ & \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \end{aligned}$$

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|q\|_{L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}$$

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}$$

et comme

$$\mathbb{V} \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$$

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} + cc_1c_2 \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}$$

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}$$

d'où la continuité de la forme $a(u,v)$. sur $\mathbb{V}$.

La forme $a(u,v)$ est coercive sur $\mathbb{V}$. En effet,

La coercivité se déduit de l'inégalité de Hardy.

$$a(u,u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} q |u|^2 \, dx$$

Comme $q \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \\ &\geq C \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \end{aligned}$$

et donc la forme bilinéaire $a(u,v)$ est coercive sur $\mathbb{V}$.

Par conséquent la forme bilinéaire $a(u,v)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{V}$ équivalent au produit scalaire usuel. Comme la forme bilinéaire $b(u,v)$ est continue sur $\mathbb{V}$, il existe d'après le théorème de représentation de Riesz, un opérateur linéaire T continu dans $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tel que

$$b(u,v) = a(Tu,v)$$

Les valeurs propres du problème (2.7) sont exactement les inverses de valeurs propres de T, associées aux mêmes fonctions propres.

Proposition 2.1. *L'opérateur T est linéaire, continue et autoadjoint.*

Preuve

La continuité de l'opérateur T est évidente, et la propriété d'être autoadjoint résulte du fait que les formes $a(u,v)$ et $b(u,v)$ sont continues et hermitiennes.

$\blacksquare$

Proposition 2.2. *L'opérateur T est compact.*

Preuve

Soit B_R la boule dans $\mathbb{R}^n$ de centre zéro et de rayon R.

Toute suite (u_n) bornée dans $\mathbb{V}$ reste bornée sur $H^1(B_R)$. Comme l'injection de $H^1(B_R)$ dans $L^2(B_R)$ est compacte, alors (u_n) admet une sous-suite (notée encore (u_n)), de Cauchy dans $L^2(B_R)$. Pour tout m, n nous avons :

$$\begin{aligned} \|T(u_n - u_m)\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \gamma a\left(T(u_n - u_m), T(u_n - u_m)\right) \\ &\leq \gamma' \int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha \left|(u_n - u_m)\right| \left|T(u_n - u_m)\right| dx \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy nous obtenons

$$\|T(u_n - u_m)\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \gamma'^2 \int_{\mathbb{R}^n} p_{2\alpha-1} \left|(u_n - u_m)\right|^2 dx$$

$$\leq \gamma_1 \|u_n - u_m\|_{L^2(B_R)}^2 + \gamma_2 \frac{1}{(1+R^2)^{2(\alpha-1)}} \|u_n - u_m\|_{\mathbb{V}}^2$$

La première quantité du membre de droite tend vers zéro.

Par hypothèse, $\|u_n - u_m\|_{\mathbb{V}}$ est borné et $\dfrac{1}{(1+R^2)^{2(\alpha-1)}}$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini. Par conséquent la suite (Tu_n) est de Cauchy dans $\mathbb{V}$ et donc convergente.

$\blacksquare$

Nous pouvons appliquer à T les résultats de la théorie spectrale classique des opérateurs autoadjoints compacts.

Proposition 2.2. *Le problème (2.1) admet une double infinité dénombrable de valeurs propres l'une positive tendant vers* $+\infty$ et *l'autre négative tendant vers* $-\infty$

$$\lambda_j^+ = \inf_{A\in V_j} \sup_{u\in A\cap\mathbb{V}_+} \left\{ \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + qu^2\right) dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} gu^2 dx} \right\}$$

$$\lambda_j^- = \inf_{A\in V_j} \sup_{u\in A\cap\mathbb{V}_-} \left\{ \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + qu^2\right) dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} gu^2 dx} \right\}$$

où V_j désigne la famille des sous-espaces de $\mathbb{V}$ de dimension j.

Théorème 2.1 *Si le potentiel q est positif et si les hypothèses (2.2), (2.3), (2.4) et (2.6) sont vérifiées, alors les deux premières valeurs propres λ_1^+ et λ_1^- sont les seules valeurs propres principales du problème (2.1).*

Preuve

Remarquons tout d'abord que si λ est une valeur propre du problème (2.1) avec le poids g alors $(-\lambda)$ est une valeur propre du problème (2.1) avec le poids $(-g)$. De ce fait, il suffit d'étudier seulement l'existence des valeurs propres principales positives.

Soit λ_1^+ la première valeur propre du problème (2.1) associée à la fonction propre ϕ dans $\mathbb{V}$

Nous avons :

$$a(\phi, u) = \lambda_1^+ b(\phi, u), \quad \forall u \in \mathbb{V}$$

Supposons que la fonction ϕ change de signe sur $\mathbb{R}^n$ i.e. $\phi = \phi^+ - \phi^-$, où ϕ^+ (resp. ϕ^-) la partie positive (resp. négative) de la fonction ϕ. Donc,

$$
\begin{aligned}
b(\phi,\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} g\,|\phi|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g\left|\phi^+ - \phi^-\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g\left|\phi^+\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} g\left|\phi^-\right|^2 dx \\
&= \beta_1 + \beta_2
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
a(\phi,\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla\phi|^2 + q\,|\phi|^2\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left|\nabla\left(\phi^+ - \phi^-\right)\right|^2 + q\left|\phi^+ - \phi^-\right|^2\right) dx \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 \\
&= a\left(\phi^+,\phi^+\right) + a\left(\phi^-,\phi^-\right)
\end{aligned}
$$

tel que

$$
\lambda_1^+ = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}
$$

Il est clair qu'au moins l'une des fonctions ϕ^+ ou ϕ^- appartient à $\mathbb{V}_+$ car $\phi \in \mathbb{V}_+$. Nous pouvons alors distinguer deux cas :

$$
\beta_1.\beta_2 > 0
$$

ou

$$
\beta_1.\beta_2 < 0
$$

Le premier cas implique que ϕ^+ ainsi que ϕ^- sont dans $\mathbb{V}_+$ et donc

$$\lambda_1^+ \leq \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\} \leq \frac{a(\phi,\phi)}{b(\phi,\phi)} = \lambda_1^+$$

Ce qui implique que

$$\lambda_1^+ = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

Cette dernière équation prouve que ϕ^+ et ϕ^- sont toutes les deux des fonctions propres associées à λ_1^+.

Dans le deuxième cas nous obtenons :

$$\lambda_1^+ \leq \max\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\} \leq \frac{a(\phi,\phi)}{b(\phi,\phi)}$$

donc

$$\lambda_1^+ = \max\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}$$

Ceci veut dire que l'une des fonctions ϕ^+ ou ϕ^- est une fonction propre associée à λ_1^+.
Sans restreindre la généralité, supposons que ϕ^+ est une fonction propre associée à λ_1^+.
Appliquons l'identité de Picone à ϕ, ϕ^+ (voir [4]) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi^+}{\phi}\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla\phi^+\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\phi^+\right)^2 \frac{\Delta\phi}{\phi} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lambda_1^+ g - q\right)\left(\phi^+\right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left(q - \lambda_1^+ g\right)\left(\phi^+\right)^2 dx = 0$$

ce qui implique que $\phi = c\phi^+$.

Montrons que λ_1^+ est la seule valeur propre principale positive du problème (2.1). Soit λ une valeur propre positive du problème (2.1) et soit φ une fonction propre associée à λ_1^+.
Supposons que λ est principale c'est à dire que φ est strictement positive. En appliquant encore une fois l'identité de Picone à φ et ϕ nous trouvons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 \frac{\Delta\varphi}{\varphi} dx \tag{*}$$

$$= \left(\lambda_1^+ - \lambda\right) \int_{\mathbb{R}^n} g\phi^2 dx$$

Comme λ est une valeur propre positive du problème (2.1) nous avons nécessairement :

$$\lambda_1^+ \leq \lambda$$

(d'après le principe du Min-Max). De l'égalité $(*)$ nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)\right|^2 dx = \left(\lambda_1^+ - \lambda\right) \int_{\mathbb{R}^n} g\phi^2 dx = 0$$

ce qui implique que $\varphi = c\phi$ et $\lambda = \lambda_1^+$.

■

Théorème 2.2 *La première valeur propre λ_1^+ du problème (2.1) est simple.*

Preuve.

Nous supposons qu'il existe deux fonctions propres ϕ_1 et ϕ_2 associées à λ_1^+. En appliquant l'identité de Picone à ϕ_1 et ϕ_2 nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)\right| dx = 0$$

ce qui implique que les fonctions propres ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement dépendantes

■

Chapitre 3

Opérateurs du second ordre à coefficients variables

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des problèmes aux valeurs propres associés à des opérateurs formellement autoadjoints, uniformément elliptiques d'ordre deux à coefficients variables de la forme :

$$Au = -\sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} D^i \left(a_{ij}(x) D^j u\right)$$

dans $\mathbb{R}^n$ $n \geq 3$.

Nous commençons par étudier des problèmes de la forme :

$$\begin{cases} Au + q(x) u = \lambda g(x) u, & x \in \mathbb{R}^n \\ u \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est un opérateur linéaire, elliptique et autoadjoint du second ordre de la forme :

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

Nous allons montrer sous certaines conditions sur le potentiel q et les coefficients a_{ij} , le problème ci-dessus admet deux suites infinies dénombrables de valeurs propres, et nous prouvons également que la première est principale et simple.

Nous supposons que les coefficients a_{ij} vérifient l'hypothèse d'uniforme ellipticité c'est à dire :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi|^2 \tag{3.2}$$

avec

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

Nous supposons que les coefficients a_{ij} sont symétriques c'est à dire

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{3.3}$$

De plus

$$a_{ij} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \tag{3.4}$$

Nous considérons la forme intégrodifférentielle :

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + q(x)\,uv\right)dx$$

3.2 Existence de valeurs propres principales

Montrons que la forme $a(u,v)$ est continue sur $\mathbb{V}$.

En effet

$$|a(u,v)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + q(x) uv \right) dx \right|$$

$$|a(u,v)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |q(x) uv| \, dx$$

$$|a(u,v)| \leq c_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + c_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{1}{2^*}}$$

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c_2 \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c_3 \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} + c_4 \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} \\ &\leq c \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

Donc la forme $a(u,v)$ est continue

La coercivité de la forme $a(u,v)$

$$a(u,u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x) u^2 \right) dx$$

Comme q est positif, nous avons

$$a(u,u) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

En vertu de (3.2), nous obtenons

$$a(u,u) \geq c \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u)^2 \, dx.$$

Nous en déduisons, grâce à l'inégalité de Hardy,

$$a\left(u,u\right)\geq M\left\Vert u\right\Vert_{\mathbb{V}}^{2}.$$

Alors la forme $a\left(u,v\right)$ est coercive.

Nous nous intéressons à la plus petite valeur propre.

Théorème 3.1 *Si le potentiel q est positif et si les hypothèses (2.6), (3.2), (3.3) et (3.4) sont vérifiées alors la première valeur propre positive (resp. négative) du problème (3.1) est une valeur propre principale.*

Preuve.

D'après la caractérisation variationnelle de λ_1^+ nous avons :

$$\lambda_1^+=\inf\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+q\left(x\right)u^2\right)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}gu^2dx},\ u\in\mathbb{V},\ \int_{\mathbb{R}^n}gu^2dx>0\right\}$$

Soit ϕ la fonction propre associée à λ_1^+, donc ϕ réalise le minimum,

i.e.

$$\lambda_1^+=\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}+q\left(x\right)\phi^2\right)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}g\phi^2dx},$$

Supposons que ϕ change de signe, alors $\phi=\phi^+-\phi^-$.

Posons

$$J\left(\phi,\phi\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}+q\left(x\right)\phi^2\right)dx$$

$$G\left(\phi,\phi\right)=\int_{\mathbb{R}^n}g\phi^2dx$$

Puisque les supports de ϕ^+ et ϕ^- sont disjoints nous avons :

$$J(\phi,\phi) = J\left(\phi^+,\phi^+\right) + J\left(\phi^-,\phi^-\right)$$

$$G(\phi,\phi) = G\left(\phi^+,\phi^+\right) + G\left(\phi^-,\phi^-\right)$$

Il est clair qu'au moins l'une des fonctions ϕ^+ ou ϕ^- appartient à $\mathbb{V}_+$ car $\phi \in \mathbb{V}_+$. Nous pouvons alors distinguer deux cas :

$$G\left(\phi^+,\phi^+\right).G\left(\phi^-,\phi^-\right) > 0$$

ou

$$G\left(\phi^+,\phi^+\right).G\left(\phi^-,\phi^-\right) < 0$$

Le premier cas implique que ϕ^+ ainsi que ϕ^- sont dans $\mathbb{V}_+$ et donc

$$\lambda_1^+ \leq \min\left\{\frac{J\left(\phi^+,\phi^+\right)}{G\left(\phi^+,\phi^+\right)}, \frac{J\left(\phi^-,\phi^-\right)}{G\left(\phi^-,\phi^-\right)}\right\} \leq \frac{J(\phi,\phi)}{G(\phi,\phi)} = \lambda_1^+$$

Ce qui implique que

$$\lambda_1^+ = \frac{J\left(\phi^+,\phi^+\right)}{G\left(\phi^+,\phi^+\right)} = \frac{J\left(\phi^-,\phi^-\right)}{G\left(\phi^-,\phi^-\right)}$$

Cette dernière équation prouve que ϕ^+ et ϕ^- sont toutes les deux des fonctions propres associées à λ_1^+.

$$\begin{aligned}
\left(-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x) - \lambda_1^+ g(x)\right)\phi^+ &= 0 \\
\left(-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x) - \lambda_1^+ g(x)\right)\phi^- &= 0
\end{aligned}$$

Alors ϕ^+ et ϕ^- sont positives ou identiquement nulles sur $\mathbb{R}^n$.(voir corollaire 1.1). Nous obtenons une contradiction avec ϕ qui change de signe sur $\mathbb{R}^n$.

Dans le deuxième cas nous obtenons :

$$\lambda_1^+ \leq \max\left\{\frac{J\left(\phi^+,\phi^+\right)}{G\left(\phi^+,\phi^+\right)},\frac{J\left(\phi^-,\phi^-\right)}{G\left(\phi^-,\phi^-\right)}\right\} \leq \frac{J\left(\phi,\phi\right)}{G\left(\phi,\phi\right)}$$

donc

$$\lambda_1^+ = \max\left\{\frac{J\left(\phi^+,\phi^+\right)}{G\left(\phi^+,\phi^+\right)},\frac{J\left(\phi^-,\phi^-\right)}{G\left(\phi^-,\phi^-\right)}\right\}$$

Ceci veut dire que l'une des fonctions ϕ^+ ou ϕ^- est une fonction propre associée à λ_1^+. De manière arbitraire, nous considérons que ϕ^+ est la fonction propre associée à λ_1^+.

i.e.

$$J\left(\phi^+,\phi^+\right) = \lambda_1^+ G\left(\phi^+,\phi^+\right)$$

Nous avons

$$J\left(\phi^+,\phi^+\right) + J\left(\phi^-,\phi^-\right) = \lambda_1^+\left[G\left(\phi^+,\phi^+\right) + G\left(\phi^-,\phi^-\right)\right]$$

Alors

$$J\left(\phi^-,\phi^-\right) = \lambda_1^+ G\left(\phi^-,\phi^-\right)$$

Ceci est une contradiction avec le fait que $G\left(\phi^-,\phi^-\right)$ est négatif.

■

Théorème 3.2 *La première valeur propre λ_1^+ du problème (3.1) est simple.*

Preuve.

Nous supposons qu'il existe deux fonctions propres ϕ_1 et ϕ_2 associées à λ_1^+. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\phi_1 + \alpha\phi_2$ est aussi une fonction propre associée à λ_1^+, donc $\phi_1 + \alpha\phi_2$ ne change pas de signe. Soit A et B tels que :

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R},\ \ (\phi_1 + \alpha\phi_2) \geq 0\}\,; \quad B = \{\alpha \in \mathbb{R},\ \ (\phi_1 + \alpha\phi_2) \leq 0\}$$

A et B sont non vides, fermés et $A \cup B = \mathbb{R}$. Par conséquent, il existe $\widetilde{\alpha} \in A \cap B$ tel que $\phi_1 + \widetilde{\alpha}\phi_2 = 0$. Ceci implique que les fonctions propres ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement dépendantes

■

3.3 Cas d'un opérateur général d'ordre deux

Nous étudions maintenant l'existence des valeurs propres associées à des opérateurs uniformément elliptiques et autoadjoints homogènes du second ordre à coefficients variables.

Nous considérons le problème :

$$\begin{cases} Au = \lambda g(x)\, u, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

où

$$A = -\sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} D^i \left(a_{ij}(x)\, D^j\right)$$

Nous supposons que les coefficients a_{ij} sont mesurables, bornés et positifs et qu'ils appartiennent à des espaces appropriés.

Autrement dit

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \text{ si } |i+j|=2 \\ a_{ij} &\in L^{n}(\mathbb{R}^n), \text{ si } |i+j|=1 \\ a_{ij} &\in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n), \text{ si } |i+j|=0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

La forme intégrodifférentielle associée à l'opérateur A est :

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} a_{ij}(x) D^i u D^j v dx$$

Nous retrouvons principalement les résultats du paragraphe précédent.

Proposition 3.1. *Si les hypothèses (2.6), (3.2), (3.3) et (3.6) sont vérifiées. Alors le problème (3.5) admet une double infinité dénombrable de valeurs propres l'une positive tendant vers* $+\infty$ et *l'autre négative tendant vers* $-\infty$.

Théorème 3.3 *Les deux premières valeurs propres* λ_1^+ *et* λ_1^- *sont les seules valeurs propres principales du problème (3.5).*

Théorème 3.4 *La première valeur propre* λ_1^+ *du problème (3.5) est simple.*

Nous reprenons de manière similaire les démonstrations déjà développées précédemment.

■

Conclusion générale

Le travail accompli est une extension des travaux déjà élaborés sur des domaines bornés. Le choix du potentiel s'est avéré d'une importance capitale pour l'établissement des résultats. Nous souhaitons entreprendre le champ d'investigation sur une classe de potentiel plus élargie. D'autre part les résultats obtenus pour le Laplacien peuvent être étendus à des opérateurs d'ordre $2m$ à coefficients variables. Il nous semble que la généralisation des résultats obtenus est possible en choisissant les coefficients de l'opérateur dans des espaces appropriés.

Bibliographie

[1] **R.A. Adams**, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[2] **W. Allegretto**. *Positive Solutions and Spectral Properties of Second Order Elliptic Operators,* Pacific Journal of Math. Vol. 92, N 1, (**1981**).

[3] **W. Allegretto,** *Second Order Elliptic Equations with Degenerate Weight,* Amer Maths. Soc. Volume 107, (1989).

[4] **W. Allegretto & A.B. Mingarelli,** *On the non-existence of positive solutions for a Schrödinger equation with an indefinite weight-function,* C. C. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol.VIII, No 1 (1986), 69-73.

[5] **H. Amann**, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces.* Siam Rev., 18, 60-709 (1976).

[6] **V. Benci & D. Fortunato,** *Some compact embedding theorems for weighted Sobolev spaces,* Bollettino U.M.I. (5) 13-B (1976), 832-843.

[7] **V. Benci & D. Fortunato,** *Weighted Sobolev Spaces and the Nonlinear Dirichlet Problem in Unbounded Domains,* Ann. Mat. Pura. Appl.,(1978), 320-336.

[8] **M.S. Birman, M.Z. Solomyak,** *On Schrödinger operators, standard and non-standard (eds. P.Exner and P.Seba),* world scientific, Singapore (1989), pp 318.

[9] **M.S. Birman, M.Z. Solomyak,** *Quantitative Analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory,* Amer Maths. Soc. translations serie 2 Volume 114, (1980).

[10] **J. Bochenek,** *On some linear eigenvalue problems with indefinite weight function,* Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, Fasciculus XXVII (**1988**).

[11] **A.S. Bonnet,** *Analyse mathématique de la propagation des modes guidés dans les fibres optiques,* Rapport de recherche No 229 (1988).

[12] **H. Brezis,** *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, (1983).

[13] **K.J. Brown, C. Cosner & J. Fleckinger,** *Principal eigenvalue for problems with indefinite weight functions on* $\mathbb{R}^n$, Proc. A.M.S., 109 No 1, (1990), 147-155.

[14] **K.J. Brown & S.S. Lin,** *On the existence of positive eigenfunction an eigenvalue problem with indefinite weight function,* J. Math. Anal. Appl. Vol. 75 (1980), 112-120.

[15] **K.J. Brown & A. Tertikas,** *The existence of principal eigenvalues for problems with indefinite weight function on* $\mathbb{R}^n$; To appear in Proc.Rev. Soc. Edin.

[16] **R. Courant et D. Hilbert,** *Methods of mathematical physics,* vol. 1, English translation, Interscience, New York, N. Y. (1953).

[17] **R. Dautray & J.L. Lions,** *Analyse mathématiques et calcul numérique pour les sciences et les techniques,* Tome 5, Masson, Paris, (1985).

[18] **J. Deny et J.L. Lions,** *Les espaces du type Beppo Levi,* Ann. Inst. Fourier. 5 (1953-54), pp306-370.

[19] **D.G. de Figueiredo,** *Positive solutions of semilinear elliptic problems,* Lectures note in maths No 957, Springer-Verlag, Berlin, pp 34-87.

[20] **A. Djellit,** *Valeurs propres des problèmes elliptiques "indéfinis" sur des ouverts non bornés de* $\mathbb{R}^n$, Thèse de doctorat, Univ.P.S. Toulouse III (1992).

[21] **A. Djellit, N. Benouhiba,** *Existence and uniqueness of positive solution of a semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$, Demonstratio Mathematica Vol XXXV, Num. 1, (2002), 61-73.

[22] **A. Djellit, N. Benouhiba,** *Existence de valeurs propres principales pour un problème elliptique en dimension 2,* Univ Trieste Vol XXXV, (1999), 49-60.

[23] **A. Djellit, J. Fleckinger,** *Valeurs propres des problèmes elliptiques,* B.U.M.I. (7) t 7-B (1993), 857-874.

[24] **A. Djellit, A. Yechoui,** *Existence and non-existence of a principal eigenvalue for some Boundary Value problems,* Maghreb Math. Rev., Vol.6,1(1997), 29-37.

[25] **J. Fleckinger-Pellé,** *Estimations des valeurs propres d'opérateurs de type Schrödinger,* Univ. Bordeaux I. (1981), pp 1-18.

[26] **J.P. Fleckinger,** *Valeurs propres de problèmes elliptiques non définis,* Lille I.R.M.A. Vol. 5 fax 2 (1983).

[27] **J. Fleckinger et M. El Fetnassi,** *Comportement asymptotique des valeurs propres des problèmes elliptiques "non définis à droite"*, C.R. Acad. Sci., Paris, t.299, Série I, No 13, (1984).

[28] **J. Fleckinger-Pellé, & A.B. Mingarelli,** *On the eigenvalue of non-definite elliptic operators,* Math. Studies 92, North, (1984), 219-222.

[29] **D. Gilbarg, & N.S. Trudinger,** *Elliptic partial differential equations of second order,* 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin. (1983). MR 86c :35035.

[30] **J.P. Gossez & E. Lami Dozo,** *On the principal eigenvalue of a second order linear elliptic problem with indefinite weight function,* Arch. Ratio. Mech. Anal., Vol. 89, No2 (1985), 169-175.

[31] **B. Hanouzet,** *Espace de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace,* Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 56 (1971), 227-272.

[32] **P. Hess,** *On the principal eigenvalue of a second order linear elliptic problem with an indefinite weight function*, Math. Zeitschrift. 179. (1982), 237-239.

[33] **A.B. Mingarelli,** *On the existence of non simple real eigenvalues for general Sturm-Liouville problems,* Proc. Amer. Math. Soc.

[34] **M. Reed, B. Simon,** *Methods of modern mathematical physics,* IV Academic press, New York, 1978.

[35] **R.G.D. Richardson,** *Contribution of the oscillation properties of the solutions of linear differential equations of second order,* Amer. J. Math., Vol. 40 (**1918**), 283-316.

[36] **G. Stampacchia,** *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Ann. Inst. Fourier 15 (1965), 189-258.

[37] **E. Titchmarsh**, *Eigenfunctions expansions associated with second order differential equations*, Part II Oxford Univ. Press, London, (1958).

[38] **H.F. Weinberger,** *Variation methods for eigenvalue approximation,* Chap. III, Regional Conference Serie in Applied Mathematic , Vol. 15, Siam, Philadelphia, Penn, (1974).