وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار - عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme
De Doctorat
Filière : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Contrôle Optimal

Quelques Suites résultant dans la création de nouveaux Polynômes 2-Orthogonaux

Présentée par:

MEKHALFA Safia

Directeur de thèse :	Bouras Mohammed Chérif	PROF	U.B.M. ANNABA
Co-directeur de thèse :	Ali Khelil Karima	M.C.A	U.B.M.ANNABA

Devant le jury

PRÉSIDENT :	Haiour Mohamed	PROF	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Ellagoune Fateh	PROF	U.Guelma
EXAMINATEUR :	Taallah Frikh	PROF	U.B.M. ANNABA

Année : 2022/2023

Table des Matières

Résumé

Dans cette thèse, on commence tout d'abord par donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ donnée par

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = B_n(x) + s_n B_{n-1}(x),\ n \geq 0.$$

soit 2-orthogonale dès que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est aussi 2-orthogonale. Nous fournissons également une relation entre les coefficients des relations de récurrence correspondantes.

Par la suite, notre travail a été consacré à l'étude d'une approche simple pour construire récursivement les coefficients de connexion entre deux suites de polynômes $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ telles que

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x), \qquad n \geq 0.$$

ce qui nous a donné une relation entre les coefficients des relations de récurrence correspondantes. Un cas particulier a été développés, plus précisément, le cas d'une suite de polynômes orthogonaux classiques discrets.

Enfin, nous terminons notre travail par la caractérisation de quatres suites dérivées obtenues par l'approche symbolique de la décomposition quadratique des suites d'Appell. De plus, nous prouvons que les deux suites polynomiales normalisés associées à une telle décomposition quadratique sont également des suites d'Appell.

Mots clés: Polynômes Orthogonaux, Polynômes $2-$Orthogonaux, Transformation de Darboux, Equations différentielles, Polynômes Orthogonaux classiques discrets, Suites d'Appell, Décomposition quadratiques, Opérateur de descente.

Abstract

In this thesis, we begin by making explicit some necessary and sufficient conditions for the sequence $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ given by

$$Q_{n+1}(x) + r_{n+1}Q_{n-1}(x) = B_{n+1}(x) + s_{n+1}B_{n-1}(x), \; n \geq 0,$$

to be 2-orthogonal when the sequence $\{B_n\}_{n\geq 0}$ is 2-orthogonal.
We also give a relation between the coefficients of the corresponding recurrence relations.

The second theme, we present a simple approach in order to build up recursively the connection coefficients between a sequence of polynomials $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ and an orthogonal polynomials sequence $\{P_n\}_{n\geq 0}$ such that

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_nQ_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

this yield a relation between the coefficients of the corresponding recurrence relations. Moreover some special cases are developed. More specifically, assuming that $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is a discrete classical orthogonal polynomials sequence.

Finally, we conclude our work by characterizing the four derived sequences obtained by the symbolic approach to the quadratic decomposition of Appll sequences. Moreover, we prove that the two monic polynomial sequences associated to such quadratic decomposition are also Appell sequences.

Key Words: Orthogonal polynomials, $2-$Orthogonal polynomials, Darboux transformations, differential equations, discrete classical orthogonaux polynomials, Appell sequences, Quadratic decomposition, Lowering operator.

ملخص

في هذه الأطروحة نركز اولا على إيجاد الشروط الضرورية والكافية لجعل المتتالية

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = B_n(x) + s_n B_{n-1}(x), \quad n\geq 0$$

من النوع ثنائية التعامد و ذلك نفرض ان المتتالية $\{B_n\}_{n\geq 0}$ هي كذلك ثنائية التعامد. ونعطي كذلك علاقة بين المعاملات المتعلقة بالعبارات التراجعية.

و في مرحلة ثانية العمل تركز على تقديم طرح مبسط و هذا لإنشاء تراجعيا معاملات الارتباط بين متتاليتين لكثيرات الحدود $\{P_n\}_{n\geq 0}$ و $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ بحيث :

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x), \quad n\geq 0.$$

و هذا ما اعطانا علاقة بين المعاملات التراجعية. حالة خاصة لكثيرات الحدود الكلاسيكية المتقطعة قد فصلت .

و في الأخير ننهي هذه الأطروحة بصياغة أربع متتاليات مشتقة تم الحصول عليها بطريقة رمزية لتجزئة تربيعية لمتتالية النداء.

أضف إلى ذلك نبرهن أن المتتاليتين لكثيرات الحدود المعيارية المرفقة إلى هذه التجزئة التربيعية هي كذلك متتاليات نداء.

الكلمات المفتاحية : كثيرات الحدود المتعامدة, كثيرات الحدود ثنائية التعامد, تحويل Darboux المعادلات التفاضلية, كثيرات الحدود الكلاسيكية المتقطعة, متتاليات النداء, التجزئة التربيعية.

Chapitre 1

Introduction

La notion d'orthogonalité est très prisée en analyse numérique, en physique mathématique, en interpolation, pour l'approximation, et encore dans l'étude des approximantes de Padé scalaires, vectoriels et matriciels et surtout au cours de la résolution d'équations aux dérivées partielles (Laplace, Schrödinger) par la méthode de séparation des variables. Ce sont également des outils importants pour résoudre les systèmes dynamiques de Toda-Langmuir et les systèmes de Kac-van Moerbeke et les équations de Korteweg-deVries associés. Les polynômes orthogonaux formels sont également utilisés pour prouver et justifier des algorithmes d'algèbre linéaire, tels que la méthode du gradient conjugué, les algorithmes de Lanczos ou GMRES, etc.

La notion de système orthogonal de fonctions est apparue suite à l'étude de certains problèmes d'analyse fonctionnelle (équations intégrales, séries de Fourier, problème de Sturm-Liouville et, plus généralement, problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles). Ces derniers nous amènent à considérer des espaces hermitiens constitués de fonctions et à déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de certains endomorphismes de ces espaces. Dans le cas d'un opérateur hermitien, les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux. Le problème essentiel consiste alors à chercher des bases hilbertiennes constituées de fonctions propres.

Ces nombreux domaines d'application des systèmes de polynômes orthogonaux fjouissent d'un intérêt particulier. Pour la résolution de certains problèmes de la mécanique céleste, Adrien-Marie Legendre (1752 -1833), a utilisé certains outils de ces systèmes, tel que les fonctions de Legendre, Gauss a transformé son système non linéaire en un système linéaire en utilisant la méthode de quadrature de Gauss. Tchebychev (1821-1894) ainsi que Hermite (1822 - 1901) ont utilisés des polynômes qui portent leurs noms pour la construction des polynômes d'interpolation d'une fonction connue discrètement. Les polynômes orthogonaux ont été aussi utilisés par Hermite et Padé dans l'approximation des fonctions réelles ou complexes ou des séries formelles. Certains problèmes de moments ont étés résolus par Stieljes et Hausdorff. Les problèmes de la physique théorique ont étés modélisés par des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, dont les solutions sont des polynômes orthogonaux.

La notion de l'orthogonalité usuelle a subi beaucoup de généralisations. Ca a commencé par la notion des $1/p$ $(p > 1)$ orthogonalité (A. Boukhemis 1988 [11]), puis la d-orthogonalité (P. Maroni 1989 [19]), vient ensuite notamment la biorthogonalité (Brezinski) et enfin l'orthogonalité multiple (Aptekarev, Van Assche...).

Toutes ces notions ont été introduites afin d'améliorer les méthodes de l'approximation qu'elles soient fonctionnelles ou au sens des Hermite-Padé généralisée, d'augmenter l'ordre des équations differentielles ayant pour solution ces polynômes et par suite rendre plus compréhensibles les phénomènes modélisés par ces équations. Vient en suite la notion de décomposition des polynômes orthogonaux introduite aussi par Maroni [20, 25], ainsi que la transformée de Darboux des polynômes orthogonaux.

Notre thèse se décompose en cinq chapitres. Dans le premier, on commence par détailler notre travail par une introduction. Dans le deuxième chapitre nous commençons par nous outiller en établissant les définitions et notations dont nous aurons besoin par la suite. Cette partie présente l'aspect théorique nécessaire à la compréhension de la thèse.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème inverse et des suites de polynômes 2-orthogonaux. L'objet du chapitre 4 est de mettre en évidence une relation de type $2-2$ pour les polynômes $2-$orthogonaux tout en insistant sur les conditions nécessaires et suffisantes d'orthogonalité . Cette thèse sera clôturé par une application du cas classique discret de la relation de type $1-2$ tout en donnant la caractérisation de l'orthogonalité qui sera consolider par quelques cas particuliers.

Pour terminer nous donnons des perspectives comme prolongement de ce travail.

Chapitre

2 Préliminaires

Nous introduisons dans ce qui suit les notations et définitions de base dont nous aurons besoin tout au cours de notre périple.

2.1 Définitions et Notations

Désignons par $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes à une variable réelle à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n, $n \geq 0$, et par $\mathcal{P} = \underset{n\geq 0}{\cup} \mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales d'une variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Notons par $\mathcal{P}'$ le dual algébrique de l'espace $\mathcal{P}$, i.e. l'espace des formes linéaires $u : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ et par $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, qui désigne l'action de $u \in \mathcal{P}'$ sur un élément $p \in \mathcal{P}$ (ou l'image de p par u) et par $(u)_n := \langle u, x^n \rangle$, $n \geq 0$, le moment d'ordre n de u.

2.1.1 Opérations élémentaires sur $\mathcal{P}'$

Notons par δ_c, $c \in \mathbb{C}$, la masse de Dirac au point c définie par $\langle \delta_c, p\rangle := p(c)$, $p \in \mathcal{P}$.

Par transposition, transformons quelques opérations élémentaires de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}'$. Pour tout $u, v \in \mathcal{P}'$, $p, q \in \mathcal{P}$ et pour tous nombres complexes a, b, c avec $a \neq 0$, on a [22].

- **La multiplication à gauche d'une forme** u **par un polynôme** q, notée qu est définie par

$$\langle qu, p\rangle := \langle u, qp\rangle .$$

- **La multiplication à droite d'une forme** u **par un polynôme** q, notée $uq \in \mathcal{P}$ est définie par

$$(uq) := \left\langle u, \frac{xq\,(x) - yq\,(y)}{x - y} \right\rangle .$$

- **La multiplication de deux formes** u **et** v, notée uv est définie par

$$\langle uv, p \rangle := \langle u, vp \rangle .$$

- **La division d'une forme** u **par un polynôme de degré un** $(x - c)$, notée $(x - c)^{-1} u$ est définie par

$$\left\langle (x-c)^{-1} u, p\,(x) \right\rangle := \langle u, \theta_c p\,(x) \rangle$$

avec l'opérateur θ_c est defini par

$$\theta_c p\,(x) = \frac{p\,(x) - p\,(c)}{x - c} \quad si\ x \neq c$$

- **La dérivée d'une forme** u, notée Du est définie par

$$\langle Du, p \rangle := \ - \langle u, p' \rangle .$$

- **La dilatée d'une forme** u, notée $h_a u \in \mathcal{P}'$ est définie par

$$\langle h_a u, p\,(x) \rangle := \langle u, h_a p\,(x) \rangle ,$$

où h_a est l'homothétie définie par $h_a p(x) = p(ax)$, $p \in \mathcal{P}$.

- **La translatée d'une forme** u, notée $\tau_b u \in \mathcal{P}'$ est définie par

$$\langle \tau_b u, p(x) \rangle := \langle u, \tau_{-b} p(x) \rangle ,$$

où τ_{-b} est la translation définie par $\tau_{-b} p(x) = p(x+b)$, $p \in \mathcal{P}$.

2.1.2 Suite duale

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes normalisés *i.e.* $P_n(x) = x^n + ...$, $n \geq 0$, (SPN) .

Définition 1 *[19] A Toute SPN $\{P_n\}_{n\geq 0}$, on peut lui associer d'une manière unique une suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{P}'$ dite suite duale, vérifiant*

$$\langle u_n, P_m(x) \rangle = \delta_{n,m}, \qquad n, m \geq 0,$$

où $\delta_{n,m}$ désigne le symbole de Kronecker.

La suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ est libre, unique et constitue donc une base universelle de $\mathcal{P}'$.

Lemme 1 *[19] Soit $u \in \mathcal{P}'$ et $\mathrm{p} \geq 1$ un entier. Pour que u vérifie*

$$\begin{cases} \langle u, P_{\mathrm{p}-1}(x) \rangle \neq 0, \\ \langle u, P_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq \mathrm{p}, \end{cases}$$

il faut et il suffit qu'il existe $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$, $0 \leq \nu \leq \mathrm{p}-1$, $\lambda_{\mathrm{p}-1} \neq 0$ tels que

$$u = \sum_{\nu=0}^{\mathrm{p}-1} \lambda_\nu u_\nu.$$

Définition 2 *[13] Soit u une forme linéaire, s'il existe une suite de nombres complexes $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ telle que*

$$\mu_n := \langle u, x^n \rangle = u\left(x^n\right), \qquad n \geq 0,$$

alors u est dite fonctionnelle moment et $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ *ses moments.*

2.1.3 Suite d'Appell

Définition 3 *Une application linéaire* $\mathcal{M}$ *de* $\mathcal{P}$ *dans lui même est dite opérateur de descente si* $\mathcal{M}(1) = 0$ *et* $\deg(\mathcal{M}(x^n)) = n-1$, $n \geq 1$.

Définition 4 *Une suite d'Appell est une SPN* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *telle que* $P_n^{[1]}(x) = \dfrac{1}{n+1} P'_{n+1}(x)$, $n \geq 0$, *[8, 13, 26].*

Définition 5 *Une SPN* $\{P_n\}_{n\succeq 0}$ *est appelée suite de* $\mathcal{M}-$*Appell par rapport à un opérateur de descente* $\mathcal{M}$ *si* $P_n(x) = P_n^{[1]}(x;\mathcal{M})$ *pour tous entier* $n \geq 0$, *[9, 10].*

Définition 6 *L est un opérateur défini sur* $\mathcal{P}$ *dans lui même*

On définit ${}^tL : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}'$ *la transposée de L par*

$$\left\langle {}^tL\left(u\right),\ f\right\rangle = \left\langle u,\ L\left(f\right)\right\rangle, \quad u \in P',\ f \in \mathcal{P}, \tag{2.1}$$

2.2 Propriétés générales des polynômes orthogonaux

Définition 7 *[13] Soit u une forme linéaire et une suite* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *de polynômes vérifiant les conditions suivantes:*

$$\begin{cases} \deg(P_n) = n,\ n \geq 0, \\ \left\langle u, P_n\left(x\right) P_m\left(x\right)\right\rangle = k_n \delta_{n,m}, \quad k_n \neq 0,\ n, m \geq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

est dite SPO relativement à u.

En outre, une forme linéaire u est dite régulière si l'on peut lui associer une suite de *polynômes $\{P_n\}_{n\geq 0}$ vérifiant les conditions ci-dessus.*

Lemme 2 *[13] Soit u une forme linéaire et $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ses moments. u est régulière ou bien quasi-définie si et seulement si les déterminants de Hankel H_n, $n \geq 0$ définis par*

$$H_n = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix}, \quad n \geq 0,$$

sont tous non nuls.

En plus, u est définie positive si et seulement si $H_n > 0$, pour tout $n \geq 0$.

Aussi, toute forme définie positive est régulière.

2.2.1 Formule de récurrence

Proposition 1 *[13] Une suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une SPON par rapport à u s'il existe deux suites de nombres complexes $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ et $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ avec $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$, vérifiant la récurrence d'ordre 2 suivante:*

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x - \beta_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), & n \geq 0, \\ P_{-1}(x) \equiv 0, \qquad P_0(x) = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2.2 Suites symétriques

Définition 8 *[13] Une forme linéaire u est dite symétrique si et seulement si tous ses moments d'ordre impair sont nuls.*

Une SPON $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est dite symétrique si elle vérifie la relation $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $n \geq 0$.

Lemme 3 *[13] Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SPON par rapport à u, alors les énoncés suivants sont équivalents*

i) *u est symétrique.*

ii) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $\quad n \geq 0.$

iii) $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x)$, $\quad n \geq 1$, $(i.e.\ \beta_n = 0,\ n \geq 0)$.

2.3 Polynômes orthogonaux classiques discrets

Les suites de polynômes orthogonaux classiques notamment les suites de polynômes orthogonaux classiques discrets sont les suites les plus connues et les plus utilisées dans beaucoup de domaines, à savoir $\mathcal{C}$harlier, $\mathcal{M}$eixner, $\mathcal{K}$rawtchouk et $\mathcal{H}$ahn. Ce dernier a caractérisé les suites classiques de la manière suivante:

Définition 9 (Critère de Hahn) *[26] Une suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ de polynômes orthogonaux est dite classique si sa suite de dérivées $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est aussi orthogonale.*

Les quatres familles de polynômes orthogonaux normalisés discrets $\mathcal{C}$harlier $C_n^{(a)}$, $\mathcal{M}$eixner $M_n^{(\nu,\mu)}$, $\mathcal{K}$rawtchouk $\mathcal{K}_n^{(p)}(.;N)$ et $\mathcal{H}$ahn $h_n^{(\alpha,\ \beta)}(.;N)$ ont les représentations hypergéométriques suivantes[16]

$$\begin{aligned}
C_n^{(a)}(x) &= (-a)^n\ {}_2F_0\left(\begin{matrix} -n, & -x \\ - & \end{matrix}; -\frac{1}{a}\right), \quad a > 0, \\
M_n^{(\nu,\mu)}(x) &= (\nu)_n \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & -x \\ \nu & \end{matrix}; 1-\frac{1}{\mu}\right), \quad \nu > 0,\ \mu \in \left]0,1\right[, \\
K_n^{(p)}(x;N) &= \frac{(-p)^n\ N!}{(N-n)!}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & -x \\ -N & \end{matrix}; \frac{1}{p}\right), \ p \in \left]0,1\right[,\ N \in \mathbb{Z}^+,\ n \leq N \\
h_n^{(\alpha,\ \beta)}(x;N) &= \frac{(-N+\alpha+1)_n}{(\alpha+\beta+n+1)_n}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n & \alpha+\beta+n+1 & -x \\ -N & \alpha+1 & \end{matrix}; 1\right), \ \alpha > -1,\ \beta > -1.
\end{aligned}$$

où ${}_pF_q$ est une série hypergéométrique définie par

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & ..., & a_p \\ b_1, & b_2, & ..., & b_q \end{array}; z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \ (a_2)_k \ ... (a_p)_k}{(b_1)_k \ (b_2)_k \ ... (b_q)_k} \ \frac{z^k}{k!} $$

avec le symbole de Pochhammer $(a)_n$ défini par

$$ (a)_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0, \\ a(a+1)(a+2)...(a+n-1), & \text{if } n \geq 1. \end{cases} \tag{2.4} $$

Et leurs relations de récurrence peuvent s'écrire comme suit [16]

$$ C_{n+1}^{(a)}(x) = (x - n - a)\, C_n^{(a)}(x) - an\ C_{n-1}^{(a)}(x), \qquad n \geq 0 \tag{2.5} $$

avec les conditions initiales $C_0^{(a)}(x) = 1$, $C_{-1}^{(a)}(x) = 0$ et $a > 0$.

$$ M_{n+1}^{(\nu,\mu)}(x) = \left(x - \frac{n + (n+\nu)\,\mu}{1-\mu}\right) M_n^{(\nu,\mu)}(x) - \frac{n(n+\nu-1)\mu}{(1-\mu)^2}\ M_{n-1}^{(\nu,\mu)}(x)\,, \qquad n \geq 0 \tag{2.6} $$

avec les conditions initiales $M_0^{(\nu,\mu)}(x) = 1$, $M_{-1}^{(\nu,\mu)}(x) = 0$ et $\nu > 0$, $\mu \in \,]0, 1[\,$.

$$ \begin{aligned} K_{n+1}^{(p)}(x;N) \ &= \ (x - n(1-p) - p(N-n))\, K_n^{(p)}(x;N) \\ &\quad -np(1-p)(N-n+1)\ K_{n-1}^{(p)}(x;N), \qquad n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.7} $$

avec les conditions initiales $K_0^{(p)}(x;N) = 1$, $K_{-1}^{(p)}(x;N) = 0$ et $p \in \,]0, 1[\,$, $n \leq N$, $N \in \mathbb{Z}^+$.

$$ \begin{aligned} h_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(x;N) \ &= \ \left(x - \frac{(\alpha+1)\,N\,(\alpha+\beta) + n\,(2N-\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta+2N)}{4\,(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n+2)}\right) h_n^{(\alpha,\,\beta)}(x;N) \\ &\quad - \frac{n\,(N-n-1)\,(\alpha+\beta+n)\,(\alpha+n)\,(\beta+n)\,(\alpha+\beta+N+n+1)}{(\alpha+\beta+2n-1)\,(\alpha+\beta+2n)^2\,(\alpha+\beta+2n+1)}\ h_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x;N), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{2.8} $$

avec les conditions initiales $h_0^{(\alpha,\,\beta)}(x;N) = 1$, $h_{-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x;N) = 0$ et $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

2.4 L'orthogonalité de dimension d

Cette notion de $d-$orthogonalité pour les polynômes, définie et étudiée dans différents contextes, apparaît comme un cas particulier de la notion générale de biorthogonalité. Une caractéristique remarquable des polynômes $d-$orthogonaux est qu'ils satisfont une relation de récurrence standard d'ordre $d+1$, c'est-à-dire une relation entre $d+2$ polynômes consécutifs.

Définition 10 *[19] Une suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est dite orthogonale de dimension d par rapport à $U=(u_0,u_1,...,u_{d-1})^t$ si elle vérifie les conditions suivantes:*

$$\begin{cases} \langle u_\alpha, x^m P_n(x)\rangle = 0, & n \geq md+\alpha+1, \\ \langle u_\alpha, x^m P_{md+\alpha}(x)\rangle \neq 0, & \end{cases} \tag{2.9}$$

pour chaque $0\leq \alpha \leq d-1$ et $m\geq 0$.

Remarque 1 *1) D'après la définition précédente $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une suite libre et on peut toujours la normaliser. Elle est alors unique.*
2) La forme U est dite de dimension d si $U\in (\mathcal{P}')^d$.
3) Lorsque $d=1$, on retrouve bien la notion d'orthogonalité habituelle.

Définition 11 *On dit que la forme U de dimension d est régulière s'il existe une suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ vérifiant (2.9).*

2.4.1 Récurrence d'ordre $d+1$

Théorème 1 *[19, 31] Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ (SPN), alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
i) *$\{P_n\}_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence d'ordre $d+1$ $(d\geq 1)$*

$$P_{m+d+1}(x) = (x-\beta_{m+d})\,P_{m+d}(x) - \sum_{k=0}^{d-1} \gamma_{m+d-k}^{d-1-k} P_{m+d-1-k}(x),\ m\geq 0 \tag{2.10}$$

où

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x - \beta_0, \\
P_n(x) &= (x - \beta_{n-1})\, P_{n-1}(x) - \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_{n-1-k}^{d-1-k} P_{m-2-k}(x), \qquad 2 \leq n \leq d,\ d \geq 2
\end{aligned}$$

avec les conditions de régularité $\gamma_{m+1}^{0} \neq 0$, $m \geq 0$.

ii) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est orthogonale de dimension d par rapport à* $U = (u_0, u_1, ..., u_{d-1})^t$.

iii) *Pour chaque* (n, α), $n \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq d-1$, *il existe d polynômes* $\Lambda^k(n, \alpha)$, $0 \leq k \leq d-1$, *tels que*

$$u_{nd+\alpha} = \sum_{k=0}^{d-1} u_k \left(\Lambda^k (n, \alpha)\right), \quad n \geq 0,\ 0 \leq \alpha \leq d-1$$

et vérifiant

$$\begin{aligned}
&\deg \Lambda^k (n, \alpha) = n, && 0 \leq \alpha \leq d-1,\ d \geq 2, \\
&\deg \Lambda^k (n, \alpha) \leq n, && 0 \leq k \leq \alpha - 1,\ 0 \leq \alpha \leq d-1, \\
&\deg \Lambda^k (n, \alpha) \leq n-1, && \alpha + 1 \leq k \leq d-1,\ 0 \leq \alpha \leq d-2.
\end{aligned}$$

2.4.2 Suites de polynômes d-symétriques $d-$orthogonaux

Définition 12 *[14] Une suite* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est dite* $d-$*symétrique lorsqu'elle vérifie*

$$P_n(\xi_k x) = \xi_k^n P_n(x), \qquad n \geq 0,\ k = 1, 2, ..., d$$

où $\xi_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{d+1}\right)$, $\quad k = \overline{1, d}$, $\xi_k^{d+1} = 1$.

Lorsque $d = 1$, $\xi_1 = -1$, on a le cas symétrique $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Théorème 2 *[14] Soit* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de polynômes d-orthogonaux normalisés, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est* $d-$*symétrique.*

ii) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *satisfait la relation de récurrence d'ordre* $d+1$

$$\begin{cases} P_{n+d+1}(x) = xP_{n+d}(x) - \delta_{n+1}P_n(x), & (\delta_{n+1} \neq 0)\,,\ n \geq 0, \\ P_n(x) = x^n, \quad 0 \leq n \leq d. \end{cases} \tag{2.11}$$

2.4.3 L'orthogonalité de dimension 2

Définition 13 *[19] Une suite* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *normalisée est dite* 2*-orthogonale par rapport à* $U = (u_0, u_1)^t$ *si elle vérifie les conditions suivantes:*

$$\begin{cases} \langle u_0, x^m P_n(x)\rangle = 0, \quad n \geq 2m+1, \quad m \geq 0, \\ \langle u_0, x^m P_{2m}(x)\rangle \neq 0, \quad m \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \langle u_1, x^m P_n(x)\rangle = 0, \quad n \geq 2m+2, \quad m \geq 0, \\ \langle u_1, x^m P_{2m+1}(x)\rangle \neq 0, \quad m \geq 0. \end{cases}$$

Théorème 3 *Une suite* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ 2*-orthogonale normalisés par rapport à* $U = (u_0, u_1)^t$ *vérifie une récurrence d'ordre* 3 *suivante:*

$$\begin{cases} P_{n+3}(x) = (x - \beta_{n+2})P_{n+2} - \gamma_{n+2}P_{n+1}(x) - \delta_{n+1}P_n(x), & n \geq 0, \\ P_0(x) = 1, P_1(x) = x - \beta_0,\ P_2(x) = (x - \beta_1)P_1(x) - \gamma_1, \end{cases} \tag{2.12}$$

avec $\delta_{n+1} \neq 0$*,* $n \geq 0$ *(conditions de régularité).*

Théorème 4 *[14] Soit* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de polynômes* 2*-orthogonaux normalisés, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est* $2-$*symétrique.*

ii) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *satisfait la relation de récurrence d'ordre* 3

$$\begin{cases} P_{n+3}(x) = xP_{n+2}(x) - \delta_{n+1}P_n(x), & n \geq 0, \\ P_0(x) = 1, P_1(x) = x,\ P_2(x) = x^2 \end{cases}$$

avec $\delta_{n+1} \neq 0$*,* $n \geq 0$ *(conditions de régularité).*

2.5 Relations de type fini entre deux suites de polynômes

Définition 14 *[28] La suite* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est dite compatible avec* ϕ *si* $\phi P_n \neq 0$, $n \geq 0$, *avec* ϕ *un polynôme de degré* t.

Remarque 2 *Toute suite de polynômes orthogonaux (respectivement* $2-$*orthogonaux) est compatible avec n'importe quel polynôme normalisé.*

Définition 15 *[28] Soient* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *deux suites normalisées et soit* ϕ *un polynôme normalisé de degré* t. *S'il existe un entier* $p \geq 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\phi(x) P_n(x) = \sum_{k=n-p}^{n+t} \lambda_{n,k} Q_k(x), \qquad n \geq p, \\ &\exists q \geq p : \ \lambda_{q,q-p} \neq 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

on dit que les suites $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ vérifient une relation de type fini par rapport à ϕ. En plus, si $\lambda_{n,n-p} \neq 0$, $n \geq p$, la relation (2.13) est dite relation de type fini stricte.

Théorème 5 *[28] Soient* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *deux suites normalisées dont* $\{u_n\}_{n\geq 0}$, $\{v_n\}_{n\geq 0}$ *sont respectivement les suites duales associées, et soit* ϕ *un polynôme normalisé de degré* t.

Pour toute suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *compatible avec un polynôme normalisé* ϕ, *les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) Il existe un entier positive $p \geq 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\phi(x) Q_n(x) = \sum_{k=n-p}^{n+t} \lambda_{n,k} P_k(x), \qquad n \geq p, \\ &\exists q \geq p : \qquad \lambda_{q,q-p} \neq 0. \end{aligned}$$

ii) Il existe un entier positive $p \geq 0$ *et une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N} : m \mapsto h_m$ *satisfait*

$$\begin{gathered} \max(0, m-t) \leq h_m \leq m+p, \qquad m \geq 0, \\ \exists m_0 \geq 0 : h_m = m_0 + p, \end{gathered}$$

tels que

$$\phi u_m = \sum_{k=m-t}^{h_m} a_{k,m}\chi_\nu(x), \quad m \geq t,$$
$$a_{h_m,m} \neq 0, \quad m \geq 0.$$

Remarque 3 *Lorsque la relation de type fini entre $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est stricte, alors on a*

$$h_m = m + p, \quad m \geq 0.$$

En outre, les relations entre les formes linéaires régulières ont été établies par P. Maroni lorsque les deux suites $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ sont $2-$orthogonales.

Proposition 2 *[28] Soient $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ deux SPN 2-orthogonales par rapport à $U = (u_0, u_1)^t$ (resp $V = (v_0, v_1)^t$). Soit ϕ un polynôme normalisé avec $\phi = t$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe un entier $p \geq 0$ tel que*

$$\begin{aligned} &\phi(x) Q_n(x) = \sum_{\nu=n-p}^{n+t} \lambda_{n,k} P_k(x), \quad n \geq p, \\ &\exists q \geq p : \qquad \lambda_{q,q-p} \neq 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2. *Il existe une matrice polynomiale M_0*

$$M_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

telle que

$$\phi U = M_0 V. \tag{2.16}$$

Notons que les polynômes A_0, B_0 ne sont pas identiquement nuls simultanément.

3. *Il existe un polynôme normalisé $\widetilde{\phi}$ de degré $\tilde{t}$, et une matrice polynomiale $\widetilde{M}_0$, tels que*

$$\widetilde{\phi} V = \widetilde{M}_0 U.$$

4. Il existe un entier $\widetilde{p} \geq 0$ *et un polynôme normalisé* $\widetilde{\phi}$ *de degré* $\tilde{t}$*, tels que*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\phi}\,(x)\,P_n\,(x) = \sum_{\nu=n-\widetilde{p}}^{n+\widetilde{t}} \widetilde{\lambda}_{n,k} Q_k\,(x)\,, \quad n \geq \widetilde{p}, \\
&\exists q \geq \widetilde{p}: \qquad \lambda_{q,q-\widetilde{p}} \neq 0.
\end{aligned}$$

Chapitre

3 Problème inverse et suites de polynômes 2-orthogonaux

Dans ce qui suit, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ soit 2-orthogonale dès qu'une suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est 2-orthogonale. Cela nous donne des relations entre les coefficients de récurrence correspondantes.

Soient $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une suite $2-$orthogonale satisfait la relation (2.12) et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polyômes définie par la relation suivante:

$$Q_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) + r_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales $P_0(x) = Q_0(x) = 1$ et $P_{-1}(x) = Q_{-1}(x) = 0$
où r_n est une suite de nombres complexes telle que $r_n \neq 0$, $n \geq 1$.

3.1 Conditions nécessaires et suffisantes d'orthogonalité

En premier lieu, nous explicitons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ soit 2-orthogonale dès que la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est 2-orthogonale.

Proposition 3 *Soit $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une (SPN) définie par (3.1) alors $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est 2-orthogonales* *si et seulement si*

$$\tilde{\beta}_{n+1} = r_{n+1} - r_{n+2} + \beta_{n+1}, \qquad n \geq 0, \tag{3.2}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \gamma_{n+1} + r_{n+1}\left(\beta_n - \tilde{\beta}_{n+1}\right), \qquad n \geq 0, \tag{3.3}$$

$$\tilde{\delta}_{n+1} = \delta_{n+1} + r_{n+2}\gamma_{n+1} - r_{n+1}\tilde{\gamma}_{n+2}, \qquad n \geq 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\tilde{\delta}_{n+2}}{r_{n+3}} = \frac{\delta_{n+1}}{r_{n+1}}, \qquad n \geq 0, \tag{3.5}$$

avec des CI $\tilde{\beta}_0 = \beta_0 - r_1$.

Preuve 1 *Multiplions les deux membres dans* (3.1) *par* x, *et appliquons* (2.12) *pour* $xP_{n+1}(x)$, $xP_n(x)$, *et encore appliquons* (3.1) . *On obtient*

$$\begin{aligned} xQ_{n+1}(x) = Q_{n+2}(x) + (\beta_{n+1} + r_{n+1} - r_{n+2}) P_{n+1}(x) + (\gamma_{n+1} + r_{n+1}\beta_n) P_n(x) \\ + (\delta_n + r_{n+1}\gamma_n) P_{n-1}(x) + r_{n+1}\delta_{n-1}P_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

D'après (3.1) , *on a*

$$\begin{aligned} & xQ_{n+1}(x) = Q_{n+2}(x) + (\beta_{n+1} + r_{n+1} - r_{n+2}) Q_{n+1}(x) \\ & + (\gamma_{n+1} + r_{n+1}\beta_n - r_{n+1}(\beta_{n+1} + r_{n+1} - r_{n+2})) Q_n(x) \\ & + (\delta_n + r_{n+1}\gamma_n - r_n(\gamma_{n+1} + r_{n+1}\beta_n - r_{n+1}(\beta_{n+1} + r_{n+1} - r_{n+2}))) Q_{n-1}(x) \\ & + [r_{n+1}\delta_{n-1} - (\delta_n + r_{n+1}\gamma_n - r_n(\gamma_{n+1} + r_{n+1}\beta_n - r_{n+1}(\beta_{n+1} + r_{n+1} - r_{n+2}))) r_{n-1}] P_{n-2}(x) \\ & = Q_{n+2}(x) + \tilde{\beta}_{n+1}Q_{n+1}(x) + \tilde{\gamma}_{n+1}Q(x) + \tilde{\delta}_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients on obtient le résultat.

Remarque 4 *La condition de régularité* $\tilde{\delta}_n \neq 0, \forall n \geq 2$, *découle de* (3.5).

La 2-orthogonalité de la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ peut être caractérisée de deux façons avec les paramètres r_{n+1}, β_{n+1}, γ_{n+1}, δ_n et r_{n+1}, $\tilde{\beta}_{n+1}$, $\tilde{\gamma}_{n+1}$, $\tilde{\delta}_n$ respectivement. En effet, on aura les deux expressions suivantes.

corollaire 1 *La suite* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *est 2-orthogonale si et seulement si*

$$\frac{\delta_{n+2}}{r_{n+3}r_{n+2}} - \frac{\delta_{n+1}}{r_{n+1}r_{n+2}} - \left(\frac{\gamma_{n+3}}{r_{n+3}} - \frac{\gamma_{n+2}}{r_{n+2}}\right) + (\beta_{n+3} - \beta_{n+2}) - (r_{n+4} - r_{n+3}) = 0, \ n \geq 0, \quad (3.6)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_{n+1} = r_{n+1} - r_{n+2} + \beta_{n+1}, & n \geq 0, \\ \tilde{\gamma}_{n+1} = \gamma_{n+1} + r_{n+1}\left(\beta_n - \tilde{\beta}_{n+1}\right), & n \geq 0, \\ \tilde{\delta}_{n+1} = \delta_{n+1} + r_{n+2}\gamma_{n+1} - r_{n+1}\tilde{\gamma}_{n+2}, & n \geq 0. \end{cases}$$

Preuve 2 *Si nous remplaçons* (3.2) *dans* (3.3) , *alors on a*

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{n+1} &= \gamma_{n+1} + r_{n+1}\left(\beta_n - \tilde{\beta}_{n+1}\right) \\ &= \gamma_{n+1} + r_{n+1}\left(\beta_n - r_{n+1} + r_{n+2} - \beta_{n+1}\right), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

ou encore,

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \gamma_{n+1} + r_{n+1}\left(r_{n+2} - \beta_{n+1}\right) - r_{n+1}\left(r_{n+1} - \beta_n\right), \ n \geq 0.$$

En suite remplaçons la dernière expression dans (3.4) , *où*

$$\tilde{\delta}_{n+1} = \delta_{n+1} + r_{n+2}\gamma_{n+1} - r_{n+1}\tilde{\gamma}_{n+2}, \quad n \geq 0.$$

On obtient

$$\tilde{\delta}_{n+1} = \delta_{n+1} + r_{n+2}\gamma_{n+1} - r_{n+1}\left(\gamma_{n+2} + r_{n+2}\left(r_{n+3} - \beta_{n+2}\right) - r_{n+2}\left(r_{n+2} - \beta_{n+1}\right)\right), \ n \geq 0,$$

et ceci est équivalent à dire que, pour chaque $n \geq 0$

$$\tilde{\delta}_{n+1} = \delta_{n+1} + r_{n+2}\gamma_{n+1} - r_{n+1}\gamma_{n+2} - r_{n+1}r_{n+2}\left(r_{n+3} - \beta_{n+2}\right) + r_{n+1}r_{n+2}\left(r_{n+2} - \beta_{n+1}\right).$$

D'après (3.5)

$$\tilde{\delta}_{n+1} = \frac{r_{n+2}}{r_n}\delta_n, \quad n \geq 1,$$

et par conséquent, pour tout $n \geq 1$

$$\frac{r_{n+2}}{r_n}\delta_n = \delta_{n+1} + r_{n+2}\gamma_{n+1} - r_{n+1}\gamma_{n+2} - r_{n+1}r_{n+2}\left(r_{n+3} - \beta_{n+2}\right) + r_{n+1}r_{n+2}\left(r_{n+2} - \beta_{n+1}\right),$$

Si l'on divise les deux membres par $r_{n+2}r_{n+1}$, *on aura*

$$\frac{\delta_{n+1}}{r_{n+2}r_{n+1}} - \frac{\delta_n}{r_n r_{n+1}} - \left(\frac{\gamma_{n+2}}{r_{n+2}} - \frac{\gamma_{n+1}}{r_{n+1}} - \right) + (\beta_{n+2} - \beta_{n+1}) - (r_{n+3} - r_{n+2}) = 0,\ n \geq 1.$$

Dans une démarche similaire nous pouvons mettre l'expression suivante:

corollaire 2 *La suite* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *est* 2*-orthogonale si et seulement si*

$$\frac{\tilde{\delta}_{n+2}}{r_{n+3}r_{n+2}} - \frac{\tilde{\delta}_{n+1}}{r_{n+2}r_{n+1}} - \left(\frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{r_{n+2}} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{r_{n+1}}\right) + \left(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n\right) - (r_{n+1} - r_n) = 0,\ n \geq 1, \tag{3.7}$$

et

$$\begin{cases} \beta_{n+1} = \tilde{\beta}_{n+1} + r_{n+2} - r_{n+1}, & n \geq 0, \\ \gamma_{n+1} = \tilde{\gamma}_{n+1} - r_{n+1}\left(\beta_n - \tilde{\beta}_{n+1}\right), & n \geq 0, \\ \delta_{n+1} = \tilde{\delta}_{n+1} - r_{n+2}\gamma_{n+1} + r_{n+1}\tilde{\gamma}_{n+2}, & n \geq 0, \end{cases}$$

avec

$$\frac{\tilde{\delta}_2}{r_3 r_2} - \frac{\tilde{\delta}_1}{r_2 r_1} - \left(\frac{\tilde{\gamma}_2}{r_2} - \frac{\tilde{\gamma}_1}{r_1}\right) + \left(\beta_0 - \tilde{\beta}_1\right) = 0,$$

où

$$\beta_0 = \tilde{\beta}_1 + \left(\frac{\tilde{\gamma}_2}{r_2} - \frac{\tilde{\gamma}_1}{r_1}\right) - \left(\frac{\tilde{\delta}_2}{r_2 r_3} - \frac{\tilde{\delta}_1}{r_1 r_2}\right).$$

Nous montrons aussi que la 2-orthogonalité de la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ peut être caractérisé du fait qu'ils existent deux constantes $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ dépendants seulement des premiers paramètres de la récurrence de $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ respectivement.

corollaire 3 *Soient* $\mathbf{y} = \dfrac{\delta_1}{r_1 r_2} - \dfrac{\gamma_2}{r_2} + \beta_2 - r_3$ *et* $\mathbf{z} = \dfrac{\tilde{\delta}_2}{r_3 r_2} - \dfrac{\tilde{\gamma}_2}{r_2} + \tilde{\beta}_1 - r_1$. *Alors*

$$\frac{\delta_{n+2}}{r_{n+3}r_{n+2}} - \frac{\gamma_{n+3}}{r_{n+3}} + \beta_{n+3} - r_{n+4} = \mathbf{y}, \quad n \geq 0, \tag{3.8}$$

et

$$\frac{\tilde{\delta}_{n+3}}{r_{n+4}r_{n+3}} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+3}}{r_{n+3}} + \tilde{\beta}_{n+2} - r_{n+2} = \mathbf{z}, \quad n \geq 0. \tag{3.9}$$

Preuve 3 *D'après le Corollaire 1, faisant la somme pour tout* n*, on obtient*

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\delta_{k+1}}{r_{k+2}r_{k+1}} - \frac{\delta_k}{r_k r_{k+1}} - \left(\frac{\gamma_{k+2}}{r_{k+2}} - \frac{\gamma_{k+1}}{r_{k+1}} \right) + (\beta_{k+2} - \beta_{k+1}) - (r_{k+3} - r_{k+2}) \right] = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\delta_{n+1}}{r_{n+2}r_{n+1}} - \frac{\delta_1}{r_2 r_1} \right) - \left(\frac{\gamma_{n+2}}{r_{n+2}} - \frac{\gamma_2}{r_2} - \right) + (\beta_{n+2} - \beta_2) - (r_{n+3} - r_3) \right] = 0,$$

$$\frac{\delta_{n+2}}{r_{n+3}r_{n+2}} - \frac{\gamma_{n+3}}{r_{n+3}} + \beta_{n+3} - r_{n+4} = \frac{\delta_1}{r_2 r_1} - \frac{\gamma_2}{r_2} + \beta_2 - r_3 = \mathbf{y}, \quad n \geq 0,$$

et

$$\frac{\tilde{\delta}_{n+3}}{r_{n+4}r_{n+3}} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+3}}{r_{n+3}} + \tilde{\beta}_{n+2} - r_{n+2} = \frac{\tilde{\delta}_2}{r_3 r_2} - \frac{\tilde{\gamma}_2}{r_2} + \tilde{\beta}_1 - r_1 = \mathbf{z}, \quad n \geq 0.$$

Remarque 5 *Notons que les deux expressions* (3.6) *et* (3.7) *sont obtenues de la même proposition; la première est donnée en fonction des coefficients de récurrence de la suite* $\{P_n\}_{n\geq 0}$*, tandis que la seconde est donnée en fonctions de coefficients de récurrence de la suite* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$.

Chapitre 4

Relation de type $2-2$ et les polynômes $2-$orthogonaux

Dans ce chapitre, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ soit 2-orthogonale dès qu'une suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est 2-orthogonale. Ce qui nous donne des relations de récurrence entre les coefficients de récurrence.

Soient $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite $2-$orthogonale satisfaisant la relation (2.12) et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polyômes définie par la relation suivante:

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = B_n(x) + s_n B_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{4.1}$$

avec les conditions initiales $B_0(x) = Q_0(x) = 1$ et $B_{-1}(x) = Q_{-1}(x) = 0$
où r_n et s_n sont deux suites de nombres complexes telles que $r_n \neq 0$, $s_n \neq 0$, $n \geq 1$.

4.1 Conditions nécessaires et suffisantes d'orthogonalité

D'abord, nous énonçons des CNS pour que la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ soit 2-orthogonale dès que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est 2-orthogonale.

Proposition 4 *Soient* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *une* $2-SPON$ *satisfaisant* (2.12) *et* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de polynômes donnée par le relation de structure* (4.1) . *Alors* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *est une* $2-SPON$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_n = \beta_n + s_n - s_{n+1} + r_{n+1} - r_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{\gamma}_n = \gamma_n - s_n(\beta_n - \beta_{n-1} + s_n - s_{n+1}) + r_n(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1} + r_n - r_{n+1}), \quad n \geq 1, \\ \tilde{\delta}_n = \delta_n + s_{n+1}\gamma_n - \tilde{\gamma}_n r_{n+1} - s_n\left[\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n + s_{n+1} - s_{n+2})\right] \\ +r_n(\tilde{\gamma}_{n+1} - r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n + r_{n+1} - r_{n+2}), \quad n \geq 1, \\ \dfrac{\tilde{\delta}_n r_{n+2}}{r_n} = \dfrac{\delta_n s_{n+2}}{s_n}, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Preuve 4 *Soit*

$$\begin{aligned} Q_{n+2}(x) &= B_{n+2}(x) + s_{n+2}B_{n+1}(x) - r_{n+2}Q_{n+1}(x) \\ &= [(x - \beta_{n+1})B_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}B_n(x) - \delta_n B_{n-1}(x)] + s_{n+2}B_{n+1}(x) - r_{n+2}Q_{n+1}(x) \\ &= xB_{n+1}(x) - \beta_{n+1}B_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}B_n(x) - \delta_n B_{n-1}(x) + s_{n+2}B_{n+1}(x) - r_{n+2}Q_{n+1}(x) \\ &= xB_{n+1}(x) - (\beta_{n+1} - s_{n+2})B_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}B_n(x) - \delta_n B_{n-1}(x) - r_{n+2}Q_{n+1}(x) \end{aligned}$$

où

$$xB_{n+1}(x) = xQ_{n+1}(x) - s_{n+1}xB_n(x) + r_{n+1}xQ_n(x)$$

et

$$xB_{n+1}(x) = B_{n+2}(x) + \beta_{n+1}B_{n+1}(x) + \gamma_{n+1}B_n(x) + \delta_n B_{n-1}(x),$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
Q_{n+2}(x) &= xQ_{n+1}(x) - s_{n+1}xB_n(x) + r_{n+1}xQ_n(x) - (\beta_{n+1} - s_{n+2})B_{n+1}(x) \\
&\quad -\gamma_{n+1}B_n(x) - \delta_n B_{n-1}(x) - r_{n+2}Q_{n+1}(x) \\
&= (x - r_{n+2})Q_{n+1}(x) + r_{n+1}xQ_n(x) - s_{n+1}[B_{n+1}(x) + \beta_n B_n(x) + \gamma_n B_{n-1}(x) \\
&\quad +\delta_{n-1}B_{n-2}(x)] - (\beta_{n+1} - s_{n+2})B_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}B_n(x) - \delta_n B_{n-1}(x) \\
&= (x - r_{n+2})Q_{n+1}(x) + r_{n+1}xQ_n(x) - (\beta_{n+1} - s_{n+2} + s_{n+1})B_{n+1}(x) \\
&\quad -(s_{n+1}\beta_n + \gamma_{n+1})B_n(x) - (s_{n+1}\gamma_n + \delta_n)B_{n-1}(x) - s_{n+1}\delta_{n-1}B_{n-2}(x) \\
&= (x - r_{n+2})Q_{n+1}(x) + r_{n+1}xQ_n(x) \\
&\quad -(\beta_{n+1} - s_{n+2} + s_{n+1})\{Q_{n+1}(x) - s_{n+1}B_n(x) + r_{n+1}Q_n(x)\} \\
&\quad -(s_{n+1}\beta_n + \gamma_{n+1})B_n(x) - (s_{n+1}\gamma_n + \delta_n)B_{n-1}(x) - s_{n+1}\delta_{n-1}B_{n-2}(x) \\
&= (x - (\beta_{n+1} - s_{n+2} + s_{n+1}r_{n+2} - r_{n+1}))Q_{n+1}(x) + r_{n+1}\{xQ_n(x) - Q_{n+1}(x)\} \\
&\quad -(\beta_{n+1} - s_{n+2} + s_{n+1})r_{n+1}Q_n(x) - (\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n - s_{n+2} + s_{n+1}))B_n(x) \\
&\quad -(s_{n+1}\gamma_n + \delta_n)B_{n-1}(x) - s_{n+1}\delta_{n-1}B_{n-2}(x),
\end{aligned}$$

posons

$$\tilde{\beta}_{n+1} = \beta_{n+1} + s_{n+1} - s_{n+2} + r_{n+2} - r_{n+1},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
Q_{n+2} &= (x-\tilde{\beta}_{n+1})Q_{n+1}+r_{n+1}((x-\tilde{\beta}_n)Q_n(x)-Q_{n+1}(x))\\
&\quad -r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1}-\tilde{\beta}_n-r_{n+2}+r_{n+1})Q_n(x)\\
&\quad -(\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1}))\{Q_n(x)-s_nB_{n-1}(x)+r_nQ_{n-1}(x)\}\\
&\quad -(s_{n+1}\gamma_n+\delta_n)B_{n-1}(x)-s_{n+1}\delta_{n-1}B_{n-2}(x)\\
&= (x-\tilde{\beta}_{n+1})Q_{n+1}+r_{n+1}((x-\tilde{\beta}_n)Q_n(x)-Q_{n+1}(x))\\
&\quad -\{\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1})+r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1}-\tilde{\beta}_n-r_{n+2}+r_{n+1})\}Q_n(x)\\
&\quad -r_n(\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1}))Q_{n-1}(x)\\
&\quad -\{\delta_n+s_{n+1}\gamma_n-s_n(\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1}))\}B_{n-1}(x)\\
&\quad -s_{n+1}\delta_{n-1}B_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

posons

$$\tilde{\gamma}_{n+1}=\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1})+r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1}-\tilde{\beta}_n-r_{n+2}+r_{n+1})$$

on obtient

$$\begin{aligned}
Q_{n+2} &= (x-\tilde{\beta}_{n+1})Q_{n+1}-\tilde{\gamma}_{n+1}Q_n(x)+r_{n+1}((x-\tilde{\beta}_n)Q_n(x)-Q_{n+1}(x))\\
&\quad -r_n(\tilde{\gamma}_{n+1}-r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1}-\tilde{\beta}_n-r_{n+2}+r_{n+1}))Q_{n-1}(x)\\
&\quad -(\delta_n+s_{n+1}\gamma_n-s_n(\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1})))\\
&\quad (Q_{n-1}(x)-s_{n-1}B_{n-2}(x)+r_{n-1}Q_{n-2}(x))-s_{n+1}\delta_{n-1}B_{n-2}(x)\\
&= (x-\tilde{\beta}_{n+1})Q_{n+1}-\tilde{\gamma}_{n+1}Q_n(x)+r_{n+1}((x-\tilde{\beta}_n)Q_n(x)-\tilde{\gamma}_nQ_{n-1}(x)-Q_{n+1}(x))\\
&\quad (\delta_n+s_{n+1}\gamma_n-s_n(\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1}))\\
&\quad +r_n(\tilde{\gamma}_{n+1}-r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1}-\tilde{\beta}_n-r_{n+2}+r_{n+1}))-r_{n+1}\tilde{\gamma}_n)Q_{n-1}\\
&\quad r_{n+1}(\delta_n+s_{n+1}\gamma_n-s_n(\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1})))Q_{n-2}(x)\\
&\quad -[s_{n+1}\delta_{n-1}-s_{n-1}(\delta_n+s_{n+1}\gamma_n-s_n(\gamma_{n+1}-s_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_n-s_{n+2}+s_{n+1})))]B_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Posons

$$\tilde{\delta}_n = \delta_n + s_{n+1}\gamma_n - s_n(\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n - s_{n+2} + s_{n+1})) + r_n(\tilde{\gamma}_{n+1} - r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n - r_{n+2} + r_{n+1})) - r_{n+1}\tilde{\gamma}_n$$

et

$$a_n = \delta_n + s_{n+1}\gamma_n - s_n(\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n - s_{n+2} + s_{n+1})),$$

$$Q_{n+2}(x) = (x - \tilde{\beta}_{n+1})Q_{n+1} - \tilde{\gamma}_{n+1}Q_n(x) - \tilde{\delta}_n Q_{n-1} - (r_{n-1}a_n - r_{n+1}\tilde{\delta}_{n-1})Q_{n-2}(x) - (s_{n+1}\delta_{n-1} - s_{n-1}a_n)B_{n-2}(x).$$

Le résultat suivant est une conséquence du proposition précédente.

corollaire 4 *La suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est 2- orthogonale si et seulement si*

$$\frac{\delta_n}{s_n s_{n+1}} - \frac{\delta_{n-1}}{s_n s_{n-1}} - \left(\frac{\gamma_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{s_n}\right) + (\beta_{n+1} - \beta_n) - (s_{n+2} - s_{n+1}) = 0, \tag{4.3}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_n = \beta_n + s_n - s_{n+1} + r_{n+1} - r_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{\gamma}_n = \gamma_n - s_n(\beta_n - \beta_{n-1} + s_n - s_{n+1}) + r_n(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1} + r_n - r_{n+1}), \quad n \geq 1, \\ \tilde{\delta}_n = \delta_n + s_{n+1}\gamma_n - \tilde{\gamma}_n r_{n+1} - s_n\left[\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n + s_{n+1} - s_{n+2})\right] \\ +r_n(\tilde{\gamma}_{n+1} - r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n + r_{n+1} - r_{n+2}), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

Preuve 5 *D'après*

$$a_n s_{n-1} = s_{n+1}\delta_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

et

$$a_n = \delta_n + s_{n+1}\gamma_n - s_n(\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n - s_{n+2} + s_{n+1})).$$

par conséquent

$$s_{n-1}(\delta_n + s_{n+1}\gamma_n - s_n(\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n - s_{n+2} + s_{n+1}))) = s_{n+1}\delta_{n-1}$$

Si l'on divise les deux membres par $s_n s_{n-1} s_{n+1}$, on obtient

$$\frac{\delta_n}{s_n s_{n+1}} + \frac{\gamma_n}{s_n} - \frac{\gamma_{n+1}}{s_{n+1}} - \beta_{n+1} - \beta_n - s_{n+2} - s_{n+1} = \frac{\delta_{n-1}}{s_n s_{n-1}}.$$

$$\frac{\delta_n}{s_n s_{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{s_{n+1}} + \beta_{n+1} - s_{n+2} = \frac{\delta_{n-1}}{s_n s_{n-1}} - \frac{\gamma_n}{s_n} + \beta_n - s_{n-1} = c.$$

De même manière, on a le résultat suivant.

corollaire 5 *La suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est 2- orthogonale si et seulement si*

$$\frac{\tilde{\delta}_n}{r_n r_{n+1}} - \frac{\tilde{\delta}_{n-1}}{r_n r_{n-1}} - (\frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{r_{n+1}} - \frac{\tilde{\gamma}_n}{r_n}) + (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) - (r_{n+2} - r_{n+1}) = 0, \tag{4.4}$$

et

$$\begin{cases} \beta_n = \tilde{\beta}_n + s_n - s_{n+1} + r_{n+1} - r_n, \quad n \geq 0, \\ \gamma_n = \tilde{\gamma}_n - s_n(\beta_n - \beta_{n-1} + s_n - s_{n+1}) + r_n(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1} + r_n - r_{n+1}), \quad n \geq 1, \\ \delta_n = \tilde{\delta}_n + s_{n+1}\gamma_n - \tilde{\gamma}_n r_{n+1} - s_n(\gamma_{n+1} - s_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n + s_{n+1} - s_{n+2}) \\ +r_n(\tilde{\gamma}_{n+1} - r_{n+1}(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n + r_{n+1} - r_{n+2}), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

corollaire 6 *Soient $a = \frac{\delta_1}{s_1 s_2} - \frac{\gamma_2}{s_2} + \beta_2 - s_3$, $b = \frac{\tilde{\delta}_1}{r_1 r_2} - \frac{\tilde{\gamma}_2}{r_2} + \tilde{\beta}_2 - r_3$. Alors*

$$\frac{\delta_{n+1}}{s_{n+1} s_{n+2}} - \frac{\gamma_{n+2}}{s_{n+2}} + \beta_{n+2} - s_{n+3} = a, \quad n \geq 1$$

et

$$\frac{\tilde{\delta}_{n+1}}{r_{n+1} r_{n+2}} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{r_{n+2}} + \tilde{\beta}_{n+2} - r_{n+3} = b, \quad n \geq 1$$

Preuve 6 *D'après le Corollaire 4, faisant la somme pour tout n, on obtient*

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{\delta_k}{s_k s_{k+1}}-\frac{\delta_{k-1}}{s_k s_{k-1}}-\left(\frac{\gamma_{k+1}}{s_{k+1}}-\frac{\gamma_k}{s_k}\right)-(\beta_{k+1}-\beta_k)-(s_{k+2}-s_{k+1})\right]=0,$$

$$\left[\frac{\delta_n}{s_n s_{n+1}}-\frac{\delta_1}{s_2 s_1}-\left(\frac{\gamma_{n+1}}{s_{n+1}}-\frac{\gamma_2}{s_2}\right)-(\beta_{n+1}-\beta_2)-(s_{n+2}-s_2)\right]=0,$$

$$\frac{\delta_n}{s_n s_{n+1}}-\frac{\gamma_{n+1}}{s_{n+1}}-\beta_{n+1}-s_{n+2}=\frac{\delta_1}{s_1 s_2}-\frac{\gamma_2}{s_2}-\beta_2-s_3=a.$$

Chapitre

5 Application du cas classique discret de la relation de type 1-2

Dans ce chapitre, on présente une approche simple pour construire récursivement les coefficients de connexion entre une SP $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ et une SPO $\{P_n\}_{n\geq 0}$. Cela nous donne une relation entre les coefficients de récurrence correspondantes. En plus quelques cas particuliers sont développés. Plus précisément, en supposant que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une SPO classiques discrets.

Soient $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une $SPON$ satisfaisant la relation (2.3) et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes définie par la relation suivante:

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{5.1}$$

avec les conditions initiales $P_0(x) = Q_0(x) = 1$ et $P_{-1}(x) = Q_{-1}(x) = 0$
où r_n est une suite de nombres complexes telle que $r_0 = 0$ et $r_n \neq 0$, $n \geq 1$.

5.1 Caractérisation de l'orthogonalité

La proposition suivante nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'orthogonalité de la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$.

Proposition 5 *Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SPON satisfaisant (2.3) , et soit $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes donnée par le relation structurelle (5.1) . Alors, $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est une SPON si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*
(i) $r_{n-1} - \beta_{n-1} + \dfrac{\gamma_n}{r_n} = \mu, \quad n \geq 2,$ *où* $\mu = -\beta_0 + \dfrac{\gamma_1}{r_1}.$
(ii) $\widetilde{\gamma}_n := \gamma_n + r_n(\beta_n - \beta_{n-1} - r_n + r_{n-1}) \neq 0, \ \ n \geq 1.$

Preuve 7 *Soit*

$$Q_n(x) = P_n(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,i} P_{n-i}(x), \quad n \geq 0, \tag{5.2}$$

où $\alpha_{n,i} = (-1)^i \prod\limits_{j=0}^{i-1} r_{n-j},\ 1 \leq i \leq n,\ n \geq 1.$
Multiplions les deux membres par x et appliquons (2.3) pour $xP_n(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} xQ_n(x) &= P_{n+1}(x) + (\beta_n + \alpha_{n,1}) P_n(x) + (\gamma_n + \alpha_{n,1}\beta_{n-1} + \alpha_{n,2}) P_{n-1}(x) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n} \left[\alpha_{n,i-1}\gamma_{n-i+1} + \alpha_{n,i}\beta_{n-i} + \alpha_{n,i+1}\right] P_{n-i}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$xQ_n(x) = P_{n+1}(x) + \widetilde{\beta}_n P_n(x) + \widetilde{\gamma}_n P_{n-1}(x) + \sum_{i=2}^{n} \widetilde{\alpha}_{n,i} P_{n-i}(x) \tag{5.3}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_n \ &: = \beta_n + \alpha_{n,1} \qquad (5.4) \\ \widetilde{\gamma}_n \ &: = \gamma_n + \alpha_{n,1}\beta_{n-1} + \alpha_{n,2} \end{aligned}$$

et

$$\widetilde{\alpha}_{n,i} := \alpha_{n,i-1}\gamma_{n-i+1} + \alpha_{n,i}\beta_{n-i} + \alpha_{n,i+1}, \quad 2 \leq i \leq n \text{ avec } \alpha_{n,n+1} = 0. \tag{5.5}$$

En remplaçant (5.1) *par* (5.3) , *on obtient*

$$\begin{aligned} xQ_n(x) &= Q_{n+1}(x) + \left(\widetilde{\beta}_n + r_{n+1}\right) Q_n(x) + \left(\widetilde{\gamma}_n + r_n\widetilde{\beta}_n\right) Q_{n-1}(x) + \left(\widetilde{\alpha}_{n,2} + r_{n-1}\widetilde{\gamma}_n\right) Q_{n-2}(x) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\widetilde{\alpha}_{n,i+1} + r_{n-i}\widetilde{\alpha}_{n,i}\right) Q_{n-i-1}(x). \end{aligned}$$

Donc, $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *est orthogonale si et seulement si*

$$\widetilde{\gamma}_n = \widetilde{\gamma}_n + r_n\widetilde{\beta}_n \neq 0, \qquad n \geq 1, \tag{5.6}$$

$$\widetilde{\alpha}_{n,2} + r_{n-1}\widetilde{\gamma}_n = 0, \qquad n \geq 1, \tag{5.7}$$

$$\widetilde{\alpha}_{n,i+1} + r_{n-i}\widetilde{\alpha}_{n,i} = 0, \qquad 2 \leq i \leq n. \tag{5.8}$$

D'après (5.7) *et* (5.8) , *on trouve*

$$\widetilde{\alpha}_{n,i} = (-1)^{i+1}\,\widetilde{\gamma}_n \prod_{j=1}^{i-1} r_{n-j}, \;\; 2 \leq i \leq n \tag{5.9}$$

et utilisons (5.5) *et* (5.7) , *on obtient*

$$\alpha_{n,3} + \alpha_{n,2i}\beta_{n-2} + \alpha_{n,1}\gamma_{n-1} = -r_{n-1}\widetilde{\gamma}_n.$$

Remplaçons (5.5) *dans* (5.9) *et d'après* (5.2) , *pour* $2 \leq i \leq n$, *on a*

$$\alpha_{n,i+1} + \alpha_{n,i}\beta_{n-i} + \alpha_{n,i-1}\gamma_{n-i+1} = (-1)^{i+1}\,\widetilde{\gamma}_n \prod_{j=1}^{i-1} r_{n-j} = -\frac{\widetilde{\gamma}_n}{r_n}\alpha_{n,i},$$

divisons cette dernière expression par r_n, *on obtient*

$$r_{n-i} - \beta_{n-i} + \frac{\gamma_{n-i+1}}{r_{n-i+1}} = \frac{\widetilde{\gamma}_n}{r_n}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

utilisons (5.4) , *pour* $2 \leq i \leq n$, *on a*

$$r_{n-i} - \beta_{n-i} + \frac{\gamma_{n-i+1}}{r_{n-i+1}} = r_{n-1} - \beta_{n-1} + \frac{\gamma_n}{r_n}. \tag{5.10}$$

Tenons en compte (5.10), *remplaçons* i *par* n *et* $n-1$ *respectivement, on obtient*

$$-\beta_0 + \frac{\gamma_1}{r_1} = r_1 - \beta_1 + \frac{\gamma_2}{r_2}$$

pour r_1 *est fixé, on en déduit* r_2,

par recurrence, on a

$$r_{n-2} - \beta_{n-2} + \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1}} = r_{n-1} - \beta_{n-1} + \frac{\gamma_n}{r_n}, \quad n \geq 2.$$

Ceci qui implique

$$r_{n-1} - \beta_{n-1} + \frac{\gamma_n}{r_n} = \mu, \quad n \geq 2 \tag{5.11}$$

où $\mu = -\beta_0 + \dfrac{\gamma_1}{r_1}$.
D'autre part, d'après (5.4) *et* (5.6) , *on obtient*

$$\widetilde{\gamma}_n = \gamma_n + r_n\left(\beta_n - \beta_{n-1} - r_n + r_{n-1}\right), \quad n \geq 1, \tag{5.12}$$

divisons les deux membres de l'expression ci-dessus par r_n, *on a*

$$\frac{\widetilde{\gamma}_n}{r_n} = \frac{\gamma_n}{r_n} + \beta_n - \beta_{n-1} - r_n + r_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

er d'après (5.11) , *on obtient*

$$\frac{\widetilde{\gamma}_n}{r_n} = \mu + \beta_n - r_n = \frac{\gamma_{n+1}}{r_{n+1}} \neq 0.$$

Ceci qui complet la preuve.

Soit $\{t_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes, telle que

$$t_1 = 1 \text{ et } r_n = \frac{t_n}{t_{n+1}}.$$

Alors, la relation (5.11) devient

$$\frac{t_{n-1}}{t_n} - \beta_{n-1} + \frac{t_{n+1}}{t_n}\gamma_n = \mu, \quad n \geq 2,$$

par conséquent,

$$t_{n-1} - \beta_{n-1}t_n + \gamma_n t_{n+1} = \mu t_n, \quad n \geq 2. \tag{5.13}$$

Le résultat suivant donne la solution de l'équation différentielle linéaire ci-dessus.

Proposition 6 *Soit*

$$\begin{aligned} \gamma_{2n+1}t_{2n+2} &= R_{2n+1}(\mu), \qquad n \geq 0, \\ \gamma_{2n}t_{2n+1} &= S_{2n}(\mu), \qquad n \geq 1, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} R_{2n+1}(\mu) = (\mu + \beta_{2n})\,\gamma_{2n}^{-1}S_{2n}(\mu) - \gamma_{2n-1}^{-1}R_{2n-1}(\mu), \qquad n \geq 1, \\ R_1(\mu) = \mu + \beta_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} S_{2n}(\mu) = (\mu + \beta_{2n-1})\,\gamma_{2n-1}^{-1}R_{2n-1}(\mu) - \gamma_{2n-2}^{-1}S_{2n-2}(\mu), \qquad n \geq 2, \\ S_0 = 1, \qquad S_2(\mu) = (\mu + \beta_1)\,\gamma_1^{-1}R_1(\mu) - 1. \end{cases}$$

Preuve 8 *D'après la relation* (5.13) , *on a*

$$\gamma_n t_{n+1} = (\mu + \beta_{n-1})t_n - t_{n-1}, \qquad n \geq 2$$

pour $n = 1$, *on obtient*

$$\gamma_1 t_2 = \mu + \beta_0 = R_1(\mu)$$

où $t_0 = 0$ *et* R_1 *est un polynôme impair de degré* 1.

D'autre part, pour $n = 2$, *on a*

$$\gamma_2 t_3 = (\mu + \beta_1)t_2 - t_1 = (\mu + \beta_1)\gamma_1^{-1} R_1(\mu) - 1 = S_2(\mu)$$

avec S_2 *est un polynôme pair de degré* 2.

De plus, pour $n = 3$, *on trouve*

$$\gamma_3 t_4 = (\mu + \beta_2)t_3 - t_2 = (\mu + \beta_2)\gamma_2^{-1} S_2(\mu) - \gamma_1^{-1} R_1(\mu) = R_3(\mu)$$

avec R_3 *est un polynôme impair de degré* 3.

Et pour $n = 4$, *on obtient*

$$\gamma_4 t_5 = (\mu + \beta_3)t_4 - t_3 = (\mu + \beta_3)\gamma_3^{-1} R_3(\mu) - \gamma_2^{-1} S_2(\mu) = S_4(\mu)$$

avec S_4 *est un polynôme pair de degré* 4.

Par recurrence,

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(\mu) &= (\mu + \beta_{2n})\,\gamma_{2n}^{-1} S_{2n}(\mu) - \gamma_{2n-1}^{-1} R_{2n-1}(\mu), \qquad n \geq 1, \\ S_{2n}(\mu) &= (\mu + \beta_{2n-1})\,\gamma_{2n-1}^{-1} R_{2n-1}(\mu) - \gamma_{2n-2}^{-1} S_{2n-2}(\mu), \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $R_1(\mu) = \mu + \beta_0$, $S_0(\mu) = 1$, $S_2(\mu) = (\mu + \beta_1)\,\gamma_1^{-1} R_1(\mu) - 1$.

Le résultat suivant est une conséquence du résultat précédent.

Lemme 4 *Soit*

$$\begin{aligned} r_{2n} &= \frac{\gamma_{2n}}{\gamma_{2n-1}} \frac{R_{2n-1}(\mu)}{S_{2n}(\mu)}, \qquad n \geq 1, \\ r_{2n+1} &= \frac{\gamma_{2n+1}}{\gamma_{2n}} \frac{S_{2n}(\mu)}{R_{2n+1}(\mu)}, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

avec $\mu = -\beta_0 + \dfrac{\gamma_1}{r_1}$ *dépend de la condition initiale* r_1.

Dans le résultat suivant, supposons que la suite de polynômes $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est une $SPON$, i.e.

$$Q_{n+1}(x) = \left(x - \widetilde{\beta}_n\right) Q_n(x) - \widetilde{\gamma}_n Q_{n-1}(x), \qquad n \geq 0 \tag{5.14}$$

avec les conditions initiales $Q_0(x) = 1$, $Q_{-1}(x) = 0$ et la condition $\widetilde{\gamma}_n \neq 0$, $n \geq 1$.

Lemme 5 *Soient* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *deux* $SPONs$ *données par* (5.1) , *alors*

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_n = \beta_n - r_n + r_{n+1}, \qquad n \geq 0, \\ \widetilde{\gamma}_n = \gamma_n + r_n(\beta_n - \beta_{n-1} - r_n + r_{n-1}), \quad n \geq 1, \\ \widetilde{\gamma}_n = \dfrac{r_n}{r_{n+1}} \gamma_{n+1}, \qquad n \geq 1. \end{cases} \tag{5.15}$$

5.2 Cas particuliers

Considérons les trois cas particuliers suivants:

$\{P_n\}_{n\geq 0}$ est un polynôme classique discret

Supposons que (5.1) vérifiée avec $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une suite classique discrète de $Hahn$ et

$$Q_n := \frac{1}{n+1} \Delta P_{n+1}, \qquad n \geq 0.$$

La relation de connexion entre les coefficients de récurrence est donnée par:

$$\widetilde{\beta}_n = \beta_{n+1} - 1 - \frac{r_{n+1}}{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{5.16}$$

$$\widetilde{\gamma}_n = \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}, \quad n \geq 1. \tag{5.17}$$

$\{P_n\}_{n\geq 0}$ est symétrique

Supposons que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes orthogonaux symétriques. D'après la Proposition 6 et le lemme 3, on a

$$\begin{cases} R_{2n+1}(\mu) = \mu\gamma_{2n}^{-1}S_{2n}(\mu) - \gamma_{2n-1}^{-1}R_{2n-1}(\mu), & n \geq 1, \\ R_1(\mu) = \mu \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} S_{2n}(\mu) = \mu\gamma_{2n-1}^{-1}R_{2n-1}(\mu) - \gamma_{2n-2}^{-1}S_{2n-2}(\mu), & n \geq 2, \\ S_0 = 1, \qquad S_2(\mu) = \mu\gamma_1^{-1}R_1(\mu) - 1. \end{cases}$$

De plus, d'après le Lemme 5, on obtient

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_n = r_{n+1} - r_n, & n \geq 0, \\ \widetilde{\gamma}_n = \gamma_n + r_n(r_{n-1} - r_n), & n \geq 1, \\ r_n\widetilde{\gamma}_{n-1} = r_{n-1}\gamma_n, & n \geq 2. \end{cases} \tag{5.18}$$

Ce qui nous donne,

$$\frac{\widetilde{\gamma}_n}{r_n} + r_n = \frac{\widetilde{\gamma}_1}{r_1} + r_1, \quad n \geq 2, \text{ et } \frac{\gamma_1}{r_1} + r_1 \neq 0, \tag{5.19}$$

par récurrence,

$$\frac{\gamma_{n+1}}{r_{n+1}} + r_n = \frac{\gamma_1}{r_1}, \quad n \geq 1,$$

D'autre part,

$$\sum_{i=0}^{n}\widetilde{\beta}_i = r_{n+1}, \quad n \geq 0. \tag{5.20}$$

Dans ce cas, on a deux sous cas particuliers.

(i) Si $\widetilde{\beta}_n = \widetilde{\beta}$, $n \geq 0$,

d'après la relation (5.20) , on obtient

$$r_n = n\widetilde{\beta}, \quad n \geq 1.$$

Et la relation (5.19) devient

$$\frac{\widetilde{\gamma}_n}{n} = \widetilde{\gamma}_1 + (1-n)\,\widetilde{\beta}^2, \quad n \geq 1, \text{ et } \widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1 - \widetilde{\beta}^2$$

avec $\gamma_1 \neq \widetilde{\beta}^2$.

Dans ce cas, les coefficients de récurrence de la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ sont donnés par

$$\frac{\gamma_{n+1}}{n+1} = \gamma_1 - n\widetilde{\beta}^2, \quad n \geq 1,$$

(ii) Si $\widetilde{\beta}_n = 1+n$, $n \geq 0$,

de même manière, d'après la relation (5.20) , on obtient

$$r_n = \frac{n(1+n)}{2}$$

Et la relation (5.19) devient

$$\frac{\widetilde{\gamma}_n}{n(1+n)} = \frac{\widetilde{\gamma}_1}{2} - \frac{n(1+n)}{4} + \frac{1}{4}, \quad n \geq 1, \text{ et } \widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1 - 1$$

avec $\gamma_1 \neq 1$.

Dans ce cas, les coefficients de récurrence de la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ sont donnés par

$$\frac{\gamma_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{\gamma_1}{2} - \frac{n(1+n)}{4}, \quad n \geq 1.$$

$\{r_n\}_{n\geq 1}$ est constante

Considérons $r_n = r$, $n \geq 1$, où $r \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$.

D'après le Lemme 5 on obtient

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_n = \beta_n, \quad\quad n \geq 1, \quad \widetilde{\beta}_0 = \beta_0 + r, \\ \widetilde{\gamma}_n = \gamma_n + r(\beta_n - \beta_{n-1}), \quad n \geq 2, \\ \widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1 + r(\beta_1 - \beta_0 - r) \\ \widetilde{\gamma}_n = \gamma_{n+1}, \quad\quad n \geq 1. \end{cases} \tag{5.21}$$

D'après (5.21) , on en deduit

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \gamma_1 + r(\beta_n - \beta_1), \quad n \geq 2, \\ \gamma_2 &= \gamma_1 + r(\beta_1 - \beta_0 - r). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a deux sous cas particuliers.

(i) Considérons $\beta_n = \beta$, $n \geq 0$, $\gamma_n = \gamma$, $n \geq 1$.

D'après (5.21) , on obtient

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_n = \beta, \quad\quad n \geq 1, \quad \widetilde{\beta}_0 = \beta + r, \\ \widetilde{\gamma}_1 = \gamma - r^2, \\ \widetilde{\gamma}_n = \gamma, \quad\quad n \geq 1, \end{cases}$$

par conséquent, $r = 0$

et dans ce cas, $P_n \equiv Q_n, \ \ n \geq 0$.

(ii) Si $\beta_n = \beta$, $n \geq 1$, et $\beta_0 \neq \beta$, $\gamma_n = \gamma$, $n \geq 1$.

D'après (5.21) , on obtient

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_n = \beta, \quad\quad n \geq 1, \quad \widetilde{\beta}_0 = \beta_0 + r, \\ \widetilde{\gamma}_1 = \gamma + r(\beta - \beta_0 - r), \\ \widetilde{\gamma}_n = \gamma, \quad\quad n \geq 1, \end{cases}$$

d'où $r = \beta - \beta_0$

dans ce cas $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ et $\{P_n\}_{n\geq 0}$ ont les mêmes relations de récurrences avec les conditions initiales $Q_1(x) = P_1(x) - r$ et $Q_2(x) = P_2(x) - r(x - \beta_0 - r)$.

5.3 Exemples

Dans cette section, nous illustrons quelques exemples de polynômes orthogonaux classiques discrets ..

$SPON$ de $\mathcal{C}$harlier

D'après (5.15) et (2.5) , les coefficients de récurrence de $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ sont obtenus comme suit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_n &= r_{n+1} - r_n + n + a, \quad n \geq 0, \\
\widetilde{\gamma}_n &= na - \left(\widetilde{\beta}_{n-1} - n - a\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\widetilde{\beta}_k - k - a\right), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

L'expression explicite de cette famille de polynômes est donnée par [33]

$$\frac{\Delta C_{n+1}^{(a)}(x)}{n+1} = C_n^{(a)}(x), \quad n \geq 0$$

si $Q_n(x) = \dfrac{\Delta C_{n+1}^{(a)}(x)}{n+1}$, $n \geq 0$, alors

$$Q_n \equiv C_n^{(a)}.$$

Ainsi, il n'existe pas de nombres complexes r_n tels que la relation (5.1) soit satisfaite.

SPON de $\mathcal{M}$eixner

D'après (5.15) et(2.6) , les coefficients de recurrence de $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ sont obtenus comme suit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_n &= r_{n+1} - r_n + \frac{n + (n+\nu)\,\mu}{1-\mu}, \qquad n \geq 0, \\
\widetilde{\gamma}_n &= \frac{n(n+\nu-1)\mu}{(1-\mu)^2} - \left(\widetilde{\beta}_{n-1} - \frac{n + (n+\nu)\,\mu}{1-\mu}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\widetilde{\beta}_k - \frac{k + (k+\nu)\,\mu}{1-\mu}\right), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Les polynômes de $\mathcal{M}$eixner satisfont la relation suivante [33]:

$$\frac{\Delta M_{n+1}^{(\nu,\mu)}(x)}{n+1} = M_n^{(\nu+1,\mu)}(x), \qquad n \geq 0$$

soit $Q_n(x) = \dfrac{\Delta M_{n+1}^{(\nu,\mu)}(x)}{n+1}$, $n \geq 0$, alors

$$Q_n \equiv M_n^{(\nu+1,\mu)}.$$

Dans le cas discret, on a

$$\widetilde{\gamma}_n = \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}, \quad n \geq 1$$

et comme

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_n &= \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}, \quad n \geq 1 \\
&= \frac{n}{n+1}\frac{(n+1)(n+\nu)\mu}{(1-\mu)^2} \\
&= \frac{n(n+\nu)\mu}{(1-\mu)^2}
\end{aligned}$$

par conséquent, il existe une suite $\{r_n\}_{n\geq 0}$ telle que la relation (5.1) soit satisfaite.

$SPON$ de $\mathcal{K}$rawtchouk

d'après (5.15) et (2.7) , les coefficients de recurrence de $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ sont obtenus comme suit

$$\widetilde{\beta}_n = r_{n+1} - r_n + n(1-p) + p(N-n), \quad n \geq 0,$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_n &= np(1-p)(N-n+1) && n \geq 1,\\ &- \left[\widetilde{\beta}_{n-1} - n(1-p) + p(N-n)\right] \sum_{k=0}^{n-1} \left[\widetilde{\beta}_k - k(1-p) - p(N-k)\right]\end{aligned}$$

Et les polynômes de $\mathcal{K}$rawtchouk satisfont la relation suivante [33]:

$$\frac{\Delta K_{n+1}^{(p)}(x;N)}{n+1} = K_n^{(p)}(x;N-1), \quad n \geq 0$$

si on prend $Q_n(x) = \dfrac{\Delta K_{n+1}^{(p)}(x;N)}{n+1}$, $n \geq 0$, alors

$$Q_n \equiv K_n^{(p)}(.;N-1).$$

et comme

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_n &= \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}, \quad n \geq 1\\ &= \frac{n}{n+1}p(n+1)(1-p)(N-n)\\ &= np(1-p)(N-n)\end{aligned}$$

donc, il existe une suite $\{r_n\}_{n\geq 0}$ telle que la décomposition (5.1) soit satisfaite.

$SPON$ de $\mathcal{H}$ahn

D'après (5.15) et (2.8) , les coefficients de récurrences de $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ sont donnés par

$$\widetilde{\beta}_n = r_{n+1} - r_n + \frac{(\alpha+1)\,N\,(\alpha+\beta) + n\,(2N-\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta+2N)}{4\,(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n+2)}, \qquad n \geq 0,$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_n \;=\;& \frac{n\,(N-n-1)\,(\alpha+\beta+n)\,(\alpha+n)\,(\beta+n)\,(\alpha+\beta+N+n+1)}{(\alpha+\beta+2n-1)\,(\alpha+\beta+2n)^2\,(\alpha+\beta+2n+1)} \\
& -\left[\widetilde{\beta}_{n-1} - \frac{(\alpha+1)\,N\,(\alpha+\beta) + n\,(2N-\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta+2N)}{4\,(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n+2)}\right] \\
& \times \sum_{k=0}^{n-1}\left[\widetilde{\beta}_k - \frac{(\alpha+1)\,N\,(\alpha+\beta) + k\,(2N-\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta+2N)}{4\,(\alpha+\beta+2k)\,(\alpha+\beta+2k+2)}\right], \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Les polynômes de $\mathcal{H}$ahn vérifient la relation suivante [33]:

$$\frac{\Delta h_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(x;N)}{n+1} = h_n^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(x;N-1), \quad n \geq 0,$$

si on prend $Q_n(x) = \dfrac{\Delta h_n^{(\alpha,\,\beta)}(x;N)}{n+1}$, $n \geq 0$, alors $Q_n \equiv h_n^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(.;N-1)$,
et comme

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_n \;\neq\;& \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1} \\
=\;& \frac{n}{n+1}\frac{(n+1)\,(N-n-2)\,(\alpha+\beta+n+1)\,(\alpha+n+1)\,(\beta+n+1)\,(\alpha+\beta+N+n+2)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,(\alpha+\beta+2n+2)^2\,(\alpha+\beta+2n+3)} \\
=\;& \frac{n\,(N-n-2)\,(\alpha+\beta+n+1)\,(\alpha+n+1)\,(\beta+n+1)\,(\alpha+\beta+N+n+2)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,(\alpha+\beta+2n+2)^2\,(\alpha+\beta+2n+3)}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, il n'existe pas de nombres complexes r_n tels que la relation (5.1) soit satisfaite.

Chapitre

6

Approche symbolique de la décomposition quadratique des suites d'Appell

Dans ce chapitre, nous caractérisons les quatres suites dérivées obtenues par l'approche symbolique de la décomposition quadratique des suites d'*Appell*. De plus, nous prouvons que les deux suites polynomiales normalisés associées à une telle décomposition quadratique sont également des suites d'*Appell*.

6.1 Approche symbolique des suites d'*Appell*

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SPN, il est toujours possible de lui associer deux SPN $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ et $\{R_n\}_{n\geq 0}$, et deux suites $\{S_n\}_{n\geq 0}$ et $\{T_n\}_{n\geq 0}$ telles que

$$P_{2n}(x) = Q_n(x^2 + a) + xS_{n-1}(x^2 + a) \tag{6.1}$$

$$P_{2n+1}(x) = T_n(x^2 + a) + xR_n(x^2 + a) \tag{6.2}$$

où $deg\ S_n \leq n$, $deg\ T_n \leq n$, pour tout $n \geq 0$, et $S_{-1}(x) = 0$ [13, 20].
Par conséquent, une SPN $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est symétrique, *i.e.* $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, pour chaque $n \geq 0$, si et seulement si $S_n(x) = T_n(x) = 0$, pour tout $n \geq 0$, [20, 25].

Théorème 6 *Soit* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de polynômes d'Appell satisfaisant* (6.1) *et* (6.2) , *alors les suites* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$, $\{R_n\}_{n\geq 0}$, $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{T_n\}_{n\geq 0}$ *sont données par*

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{1}{(2n+1)(n+1)}\left(L_{-1}Q_{n+1}\right), && n \geq 0, \\ R_n(x) &= \frac{1}{(2n+3)(n+1)}\left(L_{1}R_{n+1}\right), && n \geq 0, \\ S_n(x) &= \frac{1}{(2n+3)(n+2)}\left(L_{1}S_{n+1}\right), && n \geq 0, \\ T_n(x) &= \frac{1}{(2n+3)(n+1)}\left(L_{-1}T_{n+1}\right), && n \geq 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

où l'opérateur L_α *avec* $\alpha = 1$ *ou* $\alpha = -1$ *défini par*

$$L_\alpha = 2L + \alpha D$$

avec $L = D(x-a)D.$

Preuve 9 *En différant* (6.1) , *on a*

$$2nP^{[1]}_{2n-1}(x) = 2xnQ^{[1]}_{n-1}(x^2+a) + S_{n-1}(x^2+a) + 2x^2 S'_{n-1}(x^2+a),$$

puis on remplace n *par* $n+1$, *on obtient*

$$2(n+1)P^{[1]}_{2n+1}(x) = 2x(n+1)Q^{[1]}_{n}(x^2+a) + S_{n}(x^2+a) + 2x^2 S'_{n}(x^2+a),$$

d'après (6.2) , *on trouve*

$$2(n+1)\left[T_n(x^2+a) + xR_{n-1}(x^2+a)\right] = 2x(n+1)Q^{[1]}_{n}(x^2+a) + S_{n}(x^2+a) + 2x^2 S'_{n}(x^2+a),$$

ceci implique le système suivant:

$$\begin{cases} 2(n+1)T_n(x^2+a) = S_n(x^2+a) + 2x^2 S_n^{'}(x^2+a) \\ R_{n-1}(x^2+a) = Q_n^{[1]}(x^2+a) \end{cases}$$

en plus, remplaçons x^2+a *par* x*, nous donne*

$$2(n+1)T_n(x) = S_n(x) + 2(x-a)S_n^{'}(x), \qquad n \geq 0, \tag{6.4}$$

$$R_{n-1}(x) = Q_n^{[1]}(x), \qquad n \geq 0. \tag{6.5}$$

De même manière, en différant (6.2) *, on trouve*

$$(2n+1)\, P_{2n}^{[1]}(x) = 2xT_n^{'}(x^2+a) + R_n(x^2+a) + 2nx^2 R_{n-1}^{[1]}(x^2+a),$$

d'après la relation (6.1) *, on a*

$$(2n+1)\left[Q_n(x^2+a) + xS_{n-1}(x^2+a)\right] = 2xT_n^{'}(x^2+a) + R_n(x^2+a) + 2nx^2 R_{n-1}^{[1]}(x^2+a),$$

ce qui conduit au système suivant:

$$\begin{cases} (2n+1)\, Q_n(x^2+a) = R_n(x^2+a) + 2nx^2 R_{n-1}^{[1]}(x^2+a), \\ (2n+1)\, S_{n-1}(x^2+a) = 2T_n^{'}(x^2+a), \end{cases}$$

on change x^2+a *par* x *dans le système ci-dessus, on obtient*

$$(2n+1)\, Q_n(x) = R_n(x) + 2n(x-a)R_{n-1}^{[1]}(x), \qquad n \geq 0, \tag{6.6}$$

$$(2n+1)\, S_{n-1}(x) = 2T_n^{'}(x), \qquad n \geq 0. \tag{6.7}$$

après de remplacer n par $n+1$ dans (6.6), on a

$$(2n+3)\, Q_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) + 2(n+1)(x-a)R_n^{[1]}(x), \qquad n \geq 0,$$

de plus, par différentiabilité, on obtient

$$(2n+3)\,(n+1)Q_n^{[1]}(x) = R'_{n+1}(x) + 2\left((x-a)R'_{n+1}(x)\right)',$$

et d'après la relation (6.5), on a

$$(2n+3)\,(n+1)R_n(x) = 2\left((x-a)R'_{n+1}(x)\right)' + R'_{n+1}(x). \tag{6.8}$$

Utilisons la relation (6.5), alors la relation (6.6) devient

$$\begin{aligned}
(2n+1)\, Q_n(x) &= Q_n^{[1]}(x) + 2n(x-a)R_{n-1}^{[1]}(x) \\
&= \frac{Q'_{n+1}(x)}{n+1} + 2(x-a)R'_n(x) \\
&= \frac{Q'_{n+1}(x)}{n+1} + 2(x-a)\left(Q_n^{[1]}(x)\right)' \\
&= \frac{Q'_{n+1}(x)}{n+1} + 2(x-a)\left(\frac{Q'_{n+1}(x)}{n+1}\right)'
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (2n+1)\,(n+1)Q_n(x) = Q'_{n+1}(x) + 2(x-a)Q''_{n+1}(x)$$

d'où

$$(2n+1)\,(n+1)Q_n(x) = \left(2(x-a)Q'_{n+1}(x)\right)' - Q'_{n+1}(x). \tag{6.9}$$

On peut reécrire les relations (6.8) et (6.9), comme suit

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{(2n+3)\,(n+1)}\left[2D(x-a)D + D\right] R_{n+1}(x), \\
Q_n(x) &= \frac{1}{(2n+1)\,(n+1)}\left[2D(x-a)D - D\right] Q_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

D'autre part, remplaçons n par $n+1$ dans (6.7), on trouve

$$(2n+3)\, S_n(x) = 2T'_{n+1}(x), \tag{6.10}$$

et remplaçons l'expression ci-dessus dans (6.4), on obtient

$$\begin{aligned} (2n+3)\,(n+1)T_n(x) &= T'_{n+1}(x) + 2(x-a)\left(T'_{n+1}(x)\right)' \\ &= T'_{n+1}(x) + 2\left[\left((x-a)T'_{n+1}(x)\right)' - T'_{n+1}(x)\right] \\ &= 2\left((x-a)T'_{n+1}(x)\right)' - T'_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$T_n(x) = \frac{1}{(2n+3)\,(n+1)} \left[2D(x-a)D - D\right] T_{n+1}(x).$$

Remplaçons n par $n+1$ dans la relation (6.4) et le substituons dans (6.10), on obtient

$$\begin{aligned} (2n+3)\, S_n(x) &= 2T'_{n+1}(x) \\ &= \frac{1}{n+2}\left(S_{n+1}(x) + 2(x-a)S'_{n+1}(x)\right)' \\ &= \frac{1}{(2n+3)\,(n+2)}\left[\left(2(x-a)S'_{n+1}(x)\right)' + S'_{n+1}(x)\right]. \end{aligned}$$

D'où

$$S_n(x) = \frac{1}{(2n+3)\,(n+2)} \left[2D(x-a)D + D\right] S_{n+1}(x).$$

Proposition 7 *Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes d'Appell satisfait (6.1) et (6.2). Si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est symétrique ou il existe un entier $p \geq 0$ telle que $S_p(x) \neq 0$ (respectivement, $T_p(x) \neq 0$), alors*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= 0, \qquad 0 \leq n \leq p-1,\ p \geq 1, \\ T_n(x) &= 0, \qquad 0 \leq n \leq p-1,\ p \geq 1, \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$S_{p+n}(x) = \binom{n+p+1}{n} \frac{(p+\frac{3}{2})_n}{(\frac{3}{2})_n} S_p \widetilde{S}_n(x), \qquad n \geq 0, \tag{6.12}$$

$$T_{p+n}(x) = \binom{n+p}{n} \frac{(p+\frac{3}{2})_n}{(\frac{1}{2})_n} T_p \widetilde{T}_n(x), \qquad n \geq 0, \tag{6.13}$$

où $\widetilde{S}_n$ *et* $\widetilde{T}_n$ *sont deux polynômes normalisés tels que* $\deg \widetilde{S}_n(x) = n$ *et* $\deg \widetilde{T}_n(x) = n$, *pour tout* $n \geq 0$, $(a)_n$ *est donné par* (2.4).

Preuve 10 *Tout d'abord, si* $\{P_n\}_{n\succeq 0}$ *est une suite symétrique alors*

$$S_n(x) = T_n(x) = 0, \qquad n \geq 0.$$

Réciproquement, si $S_n(x) = 0$, $n \geq 0$, *alors d'après* (6.4) , *on obtient*

$$T_n(x) = 0, \qquad n \geq 0.$$

De plus, si $T_n(x) = 0$, $n \geq 0$, *alors d'après* (6.7) , *on trouve*

$$S_n(x) = 0, \qquad n \geq 0.$$

Maintenant, si $\{P_n\}_{n\succeq 0}$ *n'est pas une suite symétrique, alors il existe un plus petit entier* $p \geq 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} S_p(x) &\neq 0 \\ &\text{et} \\ S_n(x) &= 0, \qquad 0 \leq n \leq p-1,\ p \geq 1. \end{aligned}$$

En plus, d'après (6.7), *on a*

$$T_n(x) = constant, \quad 0 \leq n \leq p.$$

D'autre part, en utilisant (6.4) , *on obtient*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 0, \quad 0 \leq n \leq p-1, \\ &\text{et} \\ 2(p+1)T_p &= S_p(x) + 2(x-a)S'_p(x), \end{aligned}$$

ceci conduit à

$$S_p(x) = constant = S_p \neq 0,$$

avec

$$S_p = (p+1)T_p.$$

Tenons en compte (6.4) *et* (6.7) , *on a*

$$\begin{aligned} \deg(S_{n+p}) &= n, \quad n \geq 0 \\ &\text{et} \\ \deg(T_{n+p}) &= n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe deux suites non nulles $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{\nu_n\}_{n\geq 0}$ *telles que*

$$\begin{aligned} S_{n+p}(x) &= \xi_n \widetilde{S}_n(x), \qquad n \geq 0, \\ T_{n+p}(x) &= \nu_n \widetilde{T}_n(x), \qquad n \geq 0, \end{aligned}$$

où $\widetilde{S}_n$ *et* $\widetilde{T}_n$ *sont deux polynômes normalisés de degrés* n, $n \geq 0$, *avec* $\xi_0 = T_p$ *et* $\nu_0 = 2(p+1)T_p$.

Les deux suites $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{\nu_n\}_{n\geq 0}$ *sont définies d'après les relation* (6.4), (6.7) , *comme suit*

$$\begin{aligned} \xi_n &= \binom{n+1+p}{n} \frac{\left(p+\frac{3}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \xi_0, \\ \nu_n &= \frac{n+\frac{1}{2}}{n+p+1} \xi_n, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, étant donné une SPN $\{P_n\}_{n\geq 0}$, construisons la suite $\{P_n^{[1]}(.;\mathcal{M})\}_{n\geq 0}$ qui définie par

$$P_n^{[1]}(x;\mathcal{M}) = \chi_n(\mathcal{M}P_{n+1})(x), \qquad n \geq 0, \tag{6.14}$$

où $\chi_n \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n \geq 0$, est choisi pour rendre $P_n^{[1]}(.;\mathcal{M})$ normalisé.
Ainsi, nous avons

$$P_n^{[1]}(x;L_\alpha) = \frac{1}{(n+1)\,[2(n+1)+\alpha]}(L_\alpha P_{n+1})(x), \qquad n \geq 0. \tag{6.15}$$

avec $\alpha \neq -2(n+1)$, $n \geq 0$.
Par conséquent, les relations (6.14) et (6.15) deviennent

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= Q_n^{[1]}(x;L_{-1}), \qquad n \geq 0, \\ R_n(x) &= R_n^{[1]}(x;L_1), \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

D'après la définition 5, le théorème 6 nous permet de conclure que $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est $L_{-1} -$ *Appell* et $\{R_n\}_{n\geq 0}$ est $L_1 -$ *Appell*.
De plus, d'après les relations (6.11) et (6.12), (6.13) données par la proposition 7, on peut dire que les suites $\{\widetilde{S}_n\}_{n\geq 0}$ et $\{\widetilde{T}_n\}_{n\geq 0}$ sont également L_1 et $L_{-1} -$ *Appell*, respectivement.

6.2 Les suites $L_\alpha - Appell$

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SPN et $\{u_n\}_{n\geq 0}$ sa suite duale, soit $\{u_n^{[1]}(L_\alpha)\}_{n\geq 0}$ la suite duale de $\{P_n^{[1]}(.;L_\alpha)\}_{n\geq 0}$.

D'après la relation (2.1), la transposée ${}^tL_\alpha$ définie par

$$\begin{aligned} \left\langle {}^tL_\alpha u, p\right\rangle &= \langle u, L_\alpha p\rangle = \langle u, (2L+\alpha D)p\rangle \\ &= \left\langle (2{}^tL - \alpha D)u, p\right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

alors

$$ {}^tL_\alpha = 2{}^tL - \alpha D. $$

Et comme ${}^tD = -D$ cela conduit à ${}^tL = L$.

Ainsi, ${}^tL_\alpha := L_{-\alpha}$où L_α est défini sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Maintenant, il est facile de montrer que

$$L_\alpha(pq) = p(L_\alpha q) + q(L_\alpha p) + 4xp'q', \qquad p,\ q \in \mathcal{P}, \tag{6.16}$$

$$L_\alpha(pu) = u(L_\alpha p) + p(L_\alpha u) + 4xp'u', \qquad p \in \mathcal{P},\ u \in \mathcal{P}'. \tag{6.17}$$

Lemme 6 *La suite $\{u_n^{[1]}(L_\alpha)\}_{n\geq 0}$ satisfait*

$$L_{-\alpha}(u_n^{[1]}(L_\alpha)) = (n+1)\left[2(n+1)+\alpha\right] u_{n+1}, \qquad n \geq 0. \tag{6.18}$$

Preuve 11 *D'après (2.2), on a*

$$\begin{aligned} \left\langle u_n^{[1]}(L_\alpha),\ P_m^{[1]}(x;L_\alpha)\right\rangle &= \delta_{n,m} \qquad n,\ m \geq 0, \\ \left\langle u_n^{[1]}(L_\alpha),\ L_\alpha(P_{m+1})\right\rangle &= (n+1)\left[2(n+1)+\alpha\right]\delta_{n,m} \qquad n,\ m \geq 0, \\ \left\langle L_{-\alpha}(u_n^{[1]}(L_\alpha), P_{m+1}\right\rangle &= (n+1)\left[2(n+1)+\alpha\right]\delta_{n,m} \qquad n,\ m \geq 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

En particulier,

$$\left\langle L_{-\alpha}(u_n^{[1]}(L_\alpha)), L_{\alpha m+1}\right\rangle = 0, \qquad m \geq n+1, \qquad n \geq 0$$

Cela implique [26, 36]

$$L_{-\alpha}(u_n^{[1]}(L_\alpha)) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_{n,k}\, u_k, \qquad n \geq 0$$

avec $\mu_{n,k} = \left\langle L_{-\alpha}(u_n^{[1]}(L_\alpha)), P_k \right\rangle$, $0 \leq k \leq n+1$.

Par conséquent, d'après (6.18), on obtient (6.19).

Proposition 8 *Soit* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est une* SPN.

$\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est une suite* L_α *−Appell si et seulement si sa suite duale* $\{u_n\}_{n\geq 0}$ *satisfait*

$$u_n = \frac{1}{n!2^n\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_n} L_{-\alpha}^n(u_0), \qquad n \geq 0. \tag{6.20}$$

Preuve 12 *Tout d'abord, montrons la condition nécessaire,*

d'après (6.18), la suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ *satisfait*

$$L_{-\alpha}(u_n) = (n+1)\left[2(n+1)+\alpha\right] u_{n+1}, \qquad n \geq 0. \tag{6.21}$$

Pour $n = 0$, *on a*

$$u_1 = \frac{1}{2+\alpha} L_{-\alpha} u_0.$$

Par récurrence, on obtient (6.20).

Passons maintenant à la condition suffisante,

d'après (6.20), nous avons (6.21) est satisfaite.

En comparant (6.21) avec (6.18), on obtient

$$L_{-\alpha}(u_n^{[1]}(L_\alpha)) = L_{-\alpha} u_n, \qquad n \geq 0.$$

L'opérateur L_α satisfait $L_\alpha(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et $L_{-\alpha}$ est sur $\acute{\mathcal{P}}$.

Alors

$$u_n^{[1]}(L_\alpha) = u_n, \qquad n \geq 0$$

.

Chapitre 7

Conclusion et Perspectives

Cette thèse s'inscrit dans le domaine des polynômes orthogonaux.
En effet, notre objectif est centré sur la présentation d'une approche simple afin de construire récursivement les coefficients de connexion entre une suite de polynômes $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ et une suite de polynômes orthogonaux $\{P_n\}_{n\geq 0}$ liées par la relation

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Ceci nous a donné la relation entre les paramètres de la suite de récurrence correspondante. Afin de consolider ce travail, certains cas particuliers ont été développés.

Par la suite, nous avons caractérisé les quatre suites dérivées obtenues par l'approche symbolique de la décomposition quadratique des suites d'Appell, comme nous avons aussi prouvé que les deux suites polynomiales normalisés associées à une telle décomposition quadratiques sont également des suites d'Appell.

En perspective, on envisage de généraliser ce travail à l'ordre d.

Bibliography

[1] F. Abdelkarim and P. Maroni, *The D_w−classical orthogonal polynomials*. Result. Math.**,** **32** (1997), 1 − 28.

[2] M. Alfaro, F. Marcellán, A. Peña and M. L. Rezola, *On linearly related orthogonal polynomials and their functionals*. J. Math. Anal. Appl., **287** (2003), 307 − 319.

[3] M. Alfaro, F. Marcellán, A. Peña and M. L. Rezola, *On rational transformations of linear functionals, direct problem*. J. Math. Anal. Appl., **298** (2004), 171 − 183.

[4] M. Alfaro, F. Marcellán, A. Peña and M. L. Rezola, *When do linear combinations of orthogonal polynomials yield new sequences of orthogonal polynomials*. J. comput. Appl. Math., **233** (2010), 1446 − 1452.

[5] M. Alfaro, A. Peña, M. L. Rezola. and F. Marcellán, *Orthogonal polynomials associated with an inverse quadratic spectral transform*. Comput. Math. Appl., **61** (2011), 888 − 900.

[6] M. Alfaro, A. Peña, J. Petronilho and M. L. Rezola, *Orthogonal polynomials generated by a linear structure relation, inverse problem*. J. Math. Anal. Appl., **401:**1 (2013), 182 − 197.

[7] A. Angelescu, *Sur les polynômes orthogonaux en rapport avec d'autres polynômes, Bull. de la Soc. de Sc.de Cluj Roumanie,* ***1*** *(1921–1923), 44–59.*

[8] P. Appell, *Sur une classe de polynômes, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup.,* ***9****(2) (1880), 119–144.*

[9] Y. Ben Cheikh, *On obtaining dual sequences via quasi-monomiality, Georgian Math. J.,* ***9*** *(2002), 413–422.*

[10] Y. Ben Cheikh, *Some results on quasi-monomiality, App. Math. and Comput.,* ***141*** *(2003), 63–76.*

[11] A. Boukhemis and P. Maroni, Une caracterisation des polynômes strictement 1/p orthogonaux de type Scheffer. Etude du cas p=2, J. Approx.Theory. 54 (1988), 67-91.

[12] M. I. Bueno and F. Marcellán, *Darboux transformations and perturbations of linear functionals.* Linear Agebra Appl., **384** (2004), 215 − 242.

[13] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials. Gordon and Breach, New York, 1978.

[14] K. Douak, P. Maroni, *Les polynômes orthogonaux classiques "de dimension deux"*, Analysis **12** (1992), 71-108

[15] W. Hahn, *Über die jacobischen polynome und zwei verwandte polynomklassen, Math. Z.,* ***39*** *(1935), 634–638.*

[16] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues. Springer, Berlin, 2010.

[17] F. Marcellán, J. S. Dehesa and A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials with perturbed recurrence relations.* J. Comput. Appl. Math., **30:**2 (1990), 203 − 212.

[18] F. Marcellán and J. Petronilho, *Orthogonal polynomials and coherent pairs, the classical case.* Indag. Math. (N. S.), **6** (1995), 287 − 307.

[19] P. Maroni, *L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux.* Ann. Fac. Sci. Toulouse **10** (1989), 105-139.

[20] P. Maroni, *Sur la décomposition quadratique d'une suite de polynômes orthogonaux, I, Rivista di Mat. puraed. Appl.,**6** (1990) 19–53.*

[21] P. Maroni, *Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme* $u = \delta_c + \lambda(x - c)^{-1}L$. Period. Math. Hung **21**:3 (1990), 223-248.

[22] P. Maroni, *Variations autour des polynômes orthogonaux classiques*. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. Math. **313** (1991), 209-212.

[23] P. Maroni, Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques. C.Brezinski et al., Eds., "*Orthogonal polynomials and their Applications*" (Baltzer, Basel,). IMACS Ann. Comput. Appl. Math. **9** (1991), 95–130.

[24] P. Maroni, *Variations around classical orthogonal polynomials, Connected problems, Journal of Comput. Appl. Math., **48**(1993), 133–155.*

[25] P. Maroni, *Sur la décomposition quadratique d'une suite de polynômes orthogonaux, II, Portugaliae Mathematica **50** (1993), 305–329.*

[26] P. Maroni, Fonctions eulériennes. Polynômes orthogonaux classiques. Ed. Techniques Ingénieur (1994).

[27] P. Maroni, *Tchebychev forms and their perturbed forms as second degree forms*. Ann. Numer. Math., **2** (1995), 123-143.

[28] P. Maroni, *Semi-classical character and finite-type relation between polynomial sequences*, App. Numer. Math. **31** (1999), 295-330.

[29] S. Mekhalfa, K. Ali khelil, M.C. Bouras, *Application of the discrete classical case to A 1-2 type relation*, J. Math Comput sci. (2022), 12–155.

[30] S. Mekhalfa, M.C. Bouras, *Symbolic approch to the quadratic decomposition of appell sequences*,Advances in Mathematics: Scientific Journal **11** (2022), no.12, 1281–1290.

[31] E. H. I, Mourad, W. Van Assche, Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[32] A. Nasri, A. Boukhemis, F. Marcellàn, Linear combinations of 2- orthogonal polynomials : generation and decomposition problems. Com- munications in Applied Analysis. 22, No. 1 (2018), 97-119.

[33] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov and S. K. Suslov, Classical orthogonal polynomials of a discrete varaiable. Springer-verlag Berlin Heidelberg, 1991.

[34] J. Petronilho, *On the linear functionals associated to linearly related sequences of orthogonal polynomials*. J. Math. Anal. Appl., 315:2 (2006), 379 – 393.

[35] E. D. Rainville, Special Functions: The MacMillan Company. New York, 1960.

[36] S. M. Roman, *G. Rota, The umbral calculus, Adv. Math.,**27** (1978), 95–188.*

[37] A. Ronveaux and W. Van Assche, *Upward extension of the Jacobi matrix for orthogonal polynomials*. J. Approx. Theory, **86** :3 (1996), 335 – 357.

[38] G. Szegö, Orthogonal polynomials. American Mathematical Soc., Vol. 23 (1939).

[39] J. Van Iseghem, Approximants de Padé Vectoriels, Thèse d'état, Univ. des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois, 1987 .

[40] G. J. Yoon, *Darboux transforms and orthogonal polynomials*. Bull. Korean Math. Soc., **39**:3 (2002), 359 – 376.

[41] A. Zhedanov, *Rational spectral transformations and orthogonal polynomials*. J. Comput. Appl. Math., **85**:1 (1997), 67 – 86.