وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar Annaba
Badji Mokhtar University- Annaba

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles

Sur l'existence de solutions non-triviales d'un système d'équations aux dérivées partielles avec l'opérateur p-Laplacien

Par :
SAIFIA Ouarda

Sous la direction de
Prof. Brahim KHODJA

Devant le jury

PRÉSIDENT	**F-Z NOURI**	**PROF**	**U.B.M. Annaba**
CO-ENCADREUR	**J. VELIN**	**PROF**	**U. des Antilles- Guyane**
EXAMINATEUR	**Ali BENTRAD**	**PROF**	**U. de Reims**
EXAMINATEUR	**Abdelkrim MOUSSAOUI**	**M.C.A**	**U. de Béjaia**
EXAMINATEUR	**H. LAOUAR**	**M.C.A**	**U.B.M. Annaba**

Année: 2014-2015

Résumé

En utilisant la méthode de la décomposition (Fibering method)**(F.M)**, on montre l'existence de solutions non-triviales de deux équations de type elliptique avec condition aux limites de type Dirichlet, gouverné par chacune par le $p(x)$ et $q(x)$ Laplacien.
D'autre part, une généralisation des identités de type-Pohožeav et Pucci-Serrin a été utilisée pour obtenir des résultats de non-existence au sens classique (i.e $(u, v) \in [C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})]^2$ pour le problème de Dirichlet relatif à l'opérateur $(p(x), q(x)) - Laplacien$.

Mots clés : Méthode de la décomposition ; Théorème de Non-existence ; $p(x) - Laplacien$; Identité de type Pohožeav généralisée ; Identité de Pucci-Serrin.

Abstract

In view of the fibering method, we prove the existence of nontrivial solutions. Generalization of the well-known Pohožaev and Pucci-Serrin idendities and some nonexistence results for Dirichlet problem involving the $(p(x), q(x)) - Laplacian$ system are obtained.

Keywords : Fibering method ; $p(x) - Laplacian$; Generalized Pohožeav identity ; nonexistence theorem ; Pucci Serrin identity.

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier **Dieu** le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la patience pour pouvoir mener à terme ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mes encadreurs **Professeur. Jean VELIN** et **Professeur**. **Brahim KHODJA** pour leurs encadrements, leurs précieux conseils, leurs encouragements et leurs qualités humaines ainsi pour leur soutien constant le long de l'élaboration de ce projet. Je leur exprime ma profonde gratitude. Ce fut un plaisir de travailler avec eux.

Je remercie **Mme Fatma El Zohra NOURI**, **Professeur** à l'université de Badji Mothtar Annaba d'avoir accepté de présider le jury.

Mes plus vifs remerciements vont également à **Mr. Ali BENTRAD Professeur** à l'université de Reims, **Mr. Abdelkrim MOUSSAOUI** de l'université de Béjaia et **Mr. Hamid LAOUAR** de l'université Badji Motkhtar Annaba, d'avoir aménagé de leurs temps pour pouvoir examiner ma thèse et faire partie du jury. Veuillez accepter l'expression de ma reconnaissance.

Je tiens finalement à remercier toute personne ayant contribué de prés ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Merci à tous...

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$: la frontière de Ω
$divu$: divergence de u
$mes(\Omega)$: mesure de Lebesgue de Ω
$\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n})^t =$ grad u
$C_B^1(\Omega) = \{u \ \in C^1(\Omega) : u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ sont bornés sur $\Omega\}$
$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \big\{u \in C(\Omega), \ \sup\limits_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\big\}$ avec $0 < \alpha < 1$.
$\mathcal{P}(\Omega) = \{p : \Omega \to [1, +\infty[\,; mesurable\}$.
$\Delta_{p(x)}u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\big[|\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\big]$
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}.\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} u \ |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$
$C_0^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur Ω.
$L_+^\infty(\Omega) = \{p \in L^\infty(\Omega), p^- \geq 1\}$
$L^{p(x)}(\Omega)$: Espace de Lebesgue généralisé.
$W^{m,p(.)}(\Omega)$: espace de Sobolev généralisé.
X^* : espace dual de X.
$u_n \to u$ convergence forte de u_n vers u.
$u_n \rightharpoonup u$ convergence faible de u_n vers u.

Table des matières

Introduction générale

Cette thèse a pour objectif d'étudier l'existence et la non existence de solutions d'une classe de système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires gouvernées par l'opérateur $(p(x), q(x)) - Laplacien$ du type :

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = c(x)u|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta+1} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{q(x)} v = c(x)v|v|^{\beta-1}|u|^{\alpha+1} & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$ et α, β sont des nombres réels positifs $p, q \ : \Omega \to [1, +\infty)$ sont deux fonctions mesurables et $c(x)$ est une fonction qui change de signe.

L'opérateur $p(x)$-Laplacien intervient dans de nombreux domaines en sciences expérimentales : la rhéologie, l'écoulement de fluides dans les milieux poreux, le traitement d'image et l'élasticité non linéaire.

Dans la littérature, on trouve de nombreuses études, nous citons : Le travail d'**Orlicz** (1931)[34], où il présente le problème suivant :

Étant données deux suites $\{p_n\}$ et $\{x_n\}$ de nombres réels tels que :

$$\sum_{n\geq 0} x_n^{p_n} \text{converge.}$$

Quelles sont alors les conditions nécessaires et suffisantes sur la série $\{y_n\}$ pour que la série $\sum_{n\geq 0} x_n y_n$ converge ?

La réponse est donnée par l'inégalité de Hölder sur l'espace l^{p_n}. Il suffit de constater que la série $\sum_{n\geq 0} (\lambda y_n)^{p'_n}$ converge pour tout $\lambda > 0$ et $p'_n = \dfrac{p_n}{p_n - 1}$.

Un peu plus tard, Orlicz généralise l'inégalité de Hölder dans l'espace de Lebesgue en dimension un, ce qui lui permet d'introduire les espaces d'Orlicz $L^M(\Omega)$ définis par :

$$L^M(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega M(x, \lambda f(x))dx < +\infty\},$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre positif, Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$ avec $mes(\Omega) > 0$ et $M : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive satisfaisant :

(i) Pour presque partout tout $x \in \Omega$, $M(x, .) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction s.c.i, convexe et paire.

(ii) $\lim\limits_{u \to 0} M(x, u) = M(x, 0) = 0$.

Comme fonction répondant aux conditions (i) et (ii) nous donnons l'exemple suivant :
Soit $p : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction finie presque partout sur Ω et $M(x, u) = |u|^{p(x)}$, et de ce fait, l'espace d'Orlicz $L^M(\Omega)$ se réduit à l'espace de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$.
Nakano[33], durant les années 1950-1951, développa la théorie des espaces modulaires généralisant ainsi les espaces d'Orlicz en donnant comme exemple, l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}$.
Le manque d'application de cette nouvelle théorie n'a pas beaucoup motivé les chercheurs à poursuivre dans cette direction.
Les années 70 et 80 ont vu de nouveau les espaces $L^{p(x)}$ repris par l'école polonaise(**H. Hudzick**[23] et **J. Museielak**)[32], une version plus explicite des espace $L^{p(x)}$ a été donnée.
La période de 60-80 et 80-90, a vu l'école russe s'intéresser aux espaces $L^{p(x)}$ en dimension un indépendamment de l'école polonaise avec respectivement (**Tsenov** (1961)[48], **I. Sharapudinov** (1978)[46] et **V. V. Zhikov** (1987)[53].
Ce n'est qu'en 1991, qu'**O. Kováčik** et **J. Rákosnik** [28] ont donné les propriétés de base des espaces de Lebesgue et de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$.
Motivation : Beaucoup de résultats sur les espaces de Sobolev et de Lebesgue ne sont pas généralisables au cas d'exposant variable notamment les résultats de compacité, de continuité et d'homogénéité ;

La modélisation mathématique de nombreux phénomènes, en particulier physique, fait intervenir les caractéristiques des matériaux qui ne sont pas homogènes.
K. R. Rajagopal et **M. Ružička** [41] ont modélisé l'interaction entre les champs électromagnétiques et les fluides soumis à des déplacements. Ces phé-

nomènes sont modélisés par le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=n}^{3} \frac{\partial E}{\partial x_i} = 0 \text{ curl } E = 0 \\ \\ \displaystyle\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=n}^{3} \frac{\partial S}{\partial x_i}(x, E, E(v)) + [\nabla v]v + \nabla \pi = g(x, E) \\ \\ \displaystyle\sum_{i=n}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

où E est le champs électromagnétique. $v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la vitesse du champs.
$[\nabla v]$ est la partie symétrique du gradient, S est le tenseur défini sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par $S(x, E, z) = \nu(E)(1 + \|z\|)^{\frac{p-2}{2}} z +$ terme ayant même croissance et π la pression.
Avec $p = p(\|E\|)$. Comme E dépend de la position spatiale (x_1, x_2, x_3), alors il en résulte que p dépend également de x i.e $p = p(x)$.
Un autre exemple sur les fluides éléctrorhéologiques est donné par **K. R. Rajagopal** et **M. Růžička**

$$\begin{cases} -div\left[(1 + |\varepsilon(u)|^{\frac{p(x)-2}{2}})\varepsilon(u)\right] + \nabla \pi = f \\ \\ div(u) = 0, \end{cases}$$

où $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la vitesse du champs électromagnétique et π la pression.
1. **Traitement d'image ;**
La régularisation d'images (reconstitution d'images), de maillage ou plus généralement de données discrètes, par des méthodes variationnelles, a été appliquée avec succès pour résoudre différents problèmes intervenant dans les domaines tels que la vision par ordinateur, l'informatique graphique ou encore l'analyse de données.
L'objectif principal de la régularisation (reconstitution) est de fournir une approximation des données réelles à partir des données observées qui ont subi un certains nombres de dégradations provenant de l'environnement ou des méthodes d'acquisition (bruit, quantification, discrétisation....), plus généralement, la régularisation intervient pour fournir une solution à des pro-

blèmes inverse ou mal posés [**Bakushinsky** et **Goncharsky**](1994) (mal-conditionnée)[**Tikhonov** et **Arsenin**, 1977].
L'image observée $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$, (qui est une version dégradée) est alors modélisée par la somme de l'image recherchée $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, convoluée par un opérateur K et d'une image résiduelle $r : \Omega \to \mathbb{R}^N$:

$$f_0 = K(f) + r.$$

L'image f est constituée en minimisant une fonctionnelle de la forme :

$$E(f, f_0, \lambda) = E_{regu}(f) + \lambda E_{approx}(f, f_0)$$

où E_{regu} est un terme de régularisation ou énergie interne mesurant la p-régularité de f sur le domaine Ω de l'image.
E_{approx} est un terme d'approximation, ou énergie externe.
$\lambda \geq 0$ est le paramètre de fidélité, appelé multiplicateur de Lagrange, contrôle la quantité d'approximation mesurée.
La minimisation de l'énergie E revient alors à trouver la fonction f, suffisamment régulière sur Ω, tout en étant suffisamment proche de la fonction observée f_0 .
Soit une famille de modèles variationnels basés sur la p-forme de Dirichlet :

$$\min_{f:\Omega\to\mathbb{R}^N} E(f, f_0, \lambda, p) = \min_{f:\Omega\to\mathbb{R}^N} \int_\Omega \frac{1}{p} \mid \nabla f \mid^p dx + \frac{\lambda}{2} \|f - f_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On se borne au modèle proposé par **Blomgren, Chan, Mulet, Wong, 2000**

$$\min \int_\Omega \mid \nabla f \mid^{p(\nabla f)} dx,$$

où

$$\lim_{s\to 0} p(s) = 2, \quad \lim_{s\to +\infty} p(s) = 1$$

La fonction p est monotone, décroissante et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine de l'image.
2) **Loi de Darcy en milieu poreux.** Le phénomène de filtration d'un gaz de pression $\pi = \rho^{\gamma(\theta(x))}$ dans un milieu poreux non-homogène de densité ρ, θ est une fonction donnée décrivant les caractéristiques du milieu est modélisé grâce à la loi de Darcy par l'équation :

$$-div\big(K(x, \pi)\pi^{p(x)}\nabla\pi\big) = h(x, \pi),$$

$K(x, \pi)$ est une matrice diagonale, $p(x) = \frac{1}{\gamma(x)}$ et h la hauteur de barrage poreux étudiée en fonction de la position horizontale x. Une étude de ce modèle a été faite en particulier par [**Antontsev** et **Shmarev**, 2005][5] et récemment par [**Kandilakis** et **Sidiropoulos** 2011][26].

Chapitre I

Notions - Préliminaires - Notations.

Sommaire

Dans tout ce qui suit Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $p : \Omega \to [1, +\infty[$ une fonction mesurable et bornée.
On désigne par p^- et p^+ respectivement l'essentiel inf $(\inf_{\Omega} p(x))$ et l'essentiel sup $(\sup_{\Omega} p(x))$ de la fonction p. On suppose $p^- \leq p^+ < +\infty$.
On introduit aussi l'espace :

$$L_+^{\infty}(\Omega) = \{p \in L^{\infty}(\Omega), p^- \geq 1\}$$

Définition I.1. ***(voir** [19, 28]) Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit le module de u par la quantité :*

$$\rho_{p(.)}(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx.$$

Propriétés

1. Etant données u et v deux fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$.
   $\forall a, b / a + b = 1$
   $$\rho_{p(.)}(au + bv) \leq a\rho_{p(.)}(u) + b\rho_{p(.)}(v)$$
2. $\rho_{p(.)}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $\rho_{p(.)}(-u) = \rho_{p(.)}(u)$
4. L'application $\lambda \to \rho_{p(.)}(\lambda u)$ est convexe, continue et paire. De plus, elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Définition I.2. ***(voir** [19, 28])Soit p une fonction mesurable de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit et on note $L^{p(x)}(\Omega)$ l'espace de Lebesgue d'exposant variable p :*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, mesurable\,;\ \rho_{p(x)}(u) < +\infty\}.$$

*On définit sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme dite norme de **Luxembourg** par :*

$$\|u\|_{\rho} = \inf \left\{ \lambda > 0;\ \ \rho_{p(.)} = \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

$(L^{p(\cdot)}, \|.\|_{\rho})$ est un espace de Banach séparable.

Si $p^- > 1$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est uniformément convexe donc réflexif.
Les deux résultats suivants montrent la relation existant entre la norme de **Luxembourg** et le module $\rho_{p(.)}$.

Proposition I.1. ***(voir** [19, 28, 45]) Soit $p \in L_+^{\infty}(\Omega)$.*

(i) Si $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*, alors* $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = a \Leftrightarrow \rho(\frac{u}{a}) = 1$

(ii) $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < 1 (= 1, > 1) \Leftrightarrow \rho_{p(.)} < 1 (= 1, > 1)$

(iii) Si $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} > 1$ *alors* $\|u\|^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho_{p(.)} \leq \|u\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$

(iiii) Si $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < 1$ *alors* $\|u\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho_{p(.)} \leq \|u\|^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

Proposition I.2. ***(voir*** *[19, 28, 45]) Soit* $p \in L^\infty_+(\Omega), (u_n) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *et* $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u - u_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_{p(.)}(u - u_n) = 0$

Remarque I.1. *Soit* $p \in L^\infty_+(\Omega), (u_n) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *et* $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u - u_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$ *alors il existe une sous suite* $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ *et une fonction* $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *telles que :*

(i) $u_{n_j} \to u$ *p.p.dans* Ω.

(ii) $|u_{n_j}| \leq g(x)$ *p.p dans* Ω.

Donnons à présent l'analogue du théorème d'interpolation dans les espaces $L^{p(x)}(\Omega)$.

Théorème I.1. ***(voir*** *[28, 45]) Soient* $p, q, r \in L^\infty_+(\Omega)$*,* $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *et* $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ *tels que,*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)} \quad p.p \ dans \ \Omega,$$

alors

$$\|uv\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \leq \left[\frac{1}{(p/r)^-} + \frac{1}{(q/r)^-}\right] \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}$$

Remarque I.2. *Soient* $p \in L^\infty_+(\Omega)$ *et* $p' : \Omega \to [1, +\infty[$ *le conjugué de* p *c'est à dire la fonction telle que :*

$$p'(x) = \begin{cases} \dfrac{p(x)}{p(x) - 1} & si \ p(x) > 1 \\ \\ \infty & si \ p(x) = 1 \end{cases}$$

Pour tout $u \in L^{p(.)}(\Omega)$ et $v \in L^{p'(.)}(\Omega)$, il existe une constante C_p telle que ;

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq C_p \|u\|_{L^{p(.)}(\Omega)} \|v\|_{L^{p'(.)}(\Omega)}$$

Pour les résultats d'injections nous renvoyons le lecteur à ***Kováčik*** *et* ***Rákosnik****[28] et* ***Fan*** *et* ***Zhao****[19].*

Proposition I.3. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$.*
Si $p(x) \leq q(x)$ p.p dans Ω, alors

$$L^{q(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(.)}(\Omega)$$

(i.e $L^{q(.)}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{p(.)}(\Omega)$)

I.1 Espace de Sobolev généralisé (Espace de Sobolev à exposant variable)

Définition I.3. *Pour tout $p \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace de Sobolev généralisé (où encore espace de Sobolev d'exposant variable) par :*

$$W^{m,p(.)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : D^{\alpha} u \in L^{p(.)}(\Omega) \;\; pour\ tous\ \; |\alpha| \leq m \right\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{m,p(.),(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^{p(.)}(\Omega)}$$

L'espace $W^{m,p(.)}(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{m,p(.)}$ est un espace de Banach séparable et réflexif pour $p^- > 1$.
Maintenant, nous donnons un résultat d'injection entre les espaces de Sobolev.

Proposition I.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$.*
Si $p(x) \leq q(x)$ p.p dans Ω, alors

$$W^{m,q(.)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p(.)}(\Omega)$$

est continue.

Définition I.4. ***(voir****[19, 18]) On dit que $p : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est Log-Hölder continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in A$ et $| x - y | \leq \frac{1}{2}$, on a :*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-ln|x - y|} \tag{I.1.1}$$

Théorème I.2. *(**voir**[19, 18]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert à frontière Lipschitzienne et $p \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$.*
Si p est Log-Hölder continue dans $\bar{\Omega}$ alors $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p(.)}(\Omega)$.

la continuité de l'injection de l'espace $W^{m,q(.)}(\Omega)$ dans $L^{p*(.)}(\Omega)$ a été obtenu par **Edmunds** et **Rákosnik** [15], où

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{np(x)}{n - p(x)} & \text{si } p(x) < n \\ \\ \infty & \text{si } p(x) \geq n. \end{cases}$$

Théorème I.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné à frontière Lipschitzienne et $p \in C(\bar{\Omega})$ avec $p^- > 1$ Alors l'injection*

$$W^{m,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega)$$

est continue pour toute fonction $q \in C(\bar{\Omega})$ vérifiant $1 < q(x) < p^*(x)$, $\forall x \in \bar{\Omega}$.

I.2 Principe variationnel d'Ekeland

Définition I.5. *Soit (X, d) un espace métrique. Une fonction f définie de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite semi continue inférieurement si*

$$\forall \epsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0, \ \ \forall x \in B(x_0, \eta); f(x_0) - \epsilon \leq f(x).$$

Proposition I.5. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi continue inférieurement en x_0 si est seulement si*

$$f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \inf f(x)$$

Théorème I.4. *(voir [16]) Soient (X, d) un espace métrique complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi continue inférieurement et bornée inférieurement. Soit $\epsilon > 0$ et $\bar{x} \in X$ tel que ;*

$$f(\bar{x}) \leq \inf_X f(x) + \frac{\epsilon}{2},$$

alors $\forall \lambda > 0$, $\exists x_\lambda \in X$ tel que
- $f(x_\lambda) \leq f(\bar{x})$
- $d(x_\lambda, \bar{x}) \leq \lambda$

- *Pour tout* $x \in X$ *avec* $x \neq \bar{x}$, $f(x_\lambda) < f(x) + \dfrac{\epsilon}{\lambda} d(x, x_\lambda)$

Théorème I.5. *Soit X un espace de Banach, $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi continue inférieurement et bornée inférieurement. On suppose de plus que φ est Gâteaux différentielle en tout point $u \in X$, alors*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists u_\epsilon \in X \ tel \ \ que \ u_\epsilon \leq \inf_X \varphi + \epsilon,$$

et

$$\|D\varphi(u_\epsilon)\| \leq \epsilon.$$

I.3 Suite de Palais -Smale

Définition I.6. *Soit X un espace de Banach, $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ C^1 fonctionnelle et $(u_n) \subset X$ telle que ;*

$$\varphi(u_n) \ est \ \ bornée \ dans \, \mathbb{R}$$

et

$$\varphi'(u_n) \to 0 \ \ dans \ \ X' quand \ \ x \to +\infty$$

alors (u_n) est dite suite de Palais -Smale.

Nous décrivons maintenant les travaux présentés dans cette thèse :
Chapitre 2 : Lorsque Ω est étoilé et en utilisant une identité de type-**Pohožaev** généralisée que sous des hypothèses appropriées sur les puissances α, β, p et q que toute solution au sens classique du système (1) est nécessairement nulle.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous montrons l'existence de solution non-triviale du système (1) en utilisant la technique de la décomposition $(F.M)$ introduite par **Pohožaev**.

Chapitre II

Résultat de non-existence

Sommaire

II.1 Introduction

En 1965, Pohožaev [36] établit une importante identité portant essentiellement sur la résolution de l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{II.1.1}$$

où Ω représente un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, assez régulier de frontière $\partial\Omega \in C^{0,1}$.
Il établit pour $f(u) \in C^{0,\alpha}(0 < \alpha < 1)$ telle que

$$\mid f(u) \mid \leq A + B|u|^m,$$

où A et B sont des constantes arbitraires positives, que le problème (II.1.1) admet, si $0 < m+1 < \dfrac{2N}{N-2}$, une fonction propre $u^* \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ correspondant à une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ donnée.
Si $u^* \in W^{2,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ est une solution positive du problème (II.1.1) alors, on a l'identité appelée **Identité de Pohožaev.**

$$N \int_\Omega \lambda \left[\frac{N-2}{2N} u^* f(u^*) - \int_0^{u^*} f(s)ds \right] dx = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u^*|^2 (x.\nu) d\sigma.$$

De plus, si $\lambda \left[\dfrac{N-2}{2N} u^* f(u^*) - \displaystyle\int_0^{u^*} f(s)ds \right] > 0$, Ω étoilé $u^* \geq 0$ et$f(u^*) \geq 0$ alors u^* ne peut être que la solution triviale.
Ces identités ont permis d'aborder l'étude de l'existence et de la non-existence de solutions non-triviales pour des problèmes quasilinéaires.
Une extension de ces résultats a été obtenue par **Pucci-Serrin** [40] qui ont généralisé l'identité de type Pohožaev pour une équation de type Euler-Lagrange :

$$div[F_{p^k}(x, u, \nabla u)] = F_{u^k}(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega$$

où

$$F_{p^k}(x, u, p) = (\frac{\partial F}{\partial p_1^k}, \frac{\partial F}{\partial p_2^k}, ..., \frac{\partial F}{\partial p_n^k}), \quad F_{u^k} = \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

En particulier, pour

$$F(x, u, \nabla u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |\frac{\partial u_k}{\partial x_i}|^2 - (|u|^{s+1}) - (|u|^2)$$

et

$$n > 2, \; s \geq \frac{n+2}{n-2}$$

est une condition de non-existence pour le système gradient ou potentiel associé.
Thélin et Vélin [47] ont étudié le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta+1} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = v|v|^{\beta-1}|u|^{\alpha+1} & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{II.1.2}$$

Ils ont établi lorsque le domaine est étoilé et moyennant l'identité de Pohožaev généralisée de Pucci Serrin que lorsque ;

$$(\alpha+1)\frac{N-p}{Np} + (\beta+1)\frac{N-q}{Nq} \geq 1, \tag{II.1.3}$$

l'absence de solution non triviale classique.
et lorsque ;

$$(\alpha+1)\frac{N-p}{Np} + (\beta+1)\frac{N-q}{Nq} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} \neq 1, \tag{II.1.4}$$

le problème admet des solution non triviale dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times W_0^{1,q(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Dinca et Isaia [13] ont étendu ces résultats de non-existence pour un problème de Dirichlet avec $p(x)$-Laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{II.1.5}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de classe C^1.
$p \in C^1_B(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ p^- = \min_{x\in\bar{\Omega}} p(x) > 1,\ \Delta_{p(x)} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[\ |\ \nabla u\ |^{p(x)-2}\ \frac{\partial u}{\partial x_i}]$ est le $p(x)$-Laplacien et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Ils ont établi une identité de type Pohožaev qui a permet d'obtenir un résultat de non-existence de la solution classique et faible.

II.2 Identité de type-Pohožaev et résultat de non-existence pour le système (p(x),q(x))-Laplacien :

On considère le système elliptique avec conditions homogènes de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = c(x)u|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta+1} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{q(x)} v = c(x)|u|^{\alpha+1}v|v|^{\beta-1} & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{II.2.1}$$

où

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble ouvert de frontière régulière.
- p, q, sont deux fonctions mesurables de Ω dans $[1, +\infty[$
- c change de signe
- $\Delta_{p(x)} u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$.

On a le résultat suivant ;

Proposition II.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière de classe C^1. On suppose que*

- $p, q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $C^1_B(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $p_-, q_- > 1$,
- $c(.) \in C^1_B(\Omega \setminus \mathcal{C})$, $mes(\mathcal{C}) = 0$
-
$$\langle x, \nabla c(x) \rangle \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } \Omega. \tag{II.2.2}$$

alors, pour toute solution classique $(u, v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\right)^2$ du système (II.2.1), l'identité suivante est vérifiée :

$$\frac{\alpha+1}{N} \int_{\partial\Omega} \frac{1-p(x)}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \langle x, \nu \rangle \mathrm{d}\sigma + \frac{\beta+1}{N} \int_{\partial\Omega} \frac{1-q(x)}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} \langle x, \nu \rangle \mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{\alpha+1}{N} \int_{\Omega} \left(\frac{N-p(x)}{p(x)} - a_1 \right) |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{\beta+1}{N} \int_{\Omega} \left(\frac{N-q(x)}{q(x)} - a_2 \right) |\nabla v|^{q(x)} \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{\alpha+1}{N} \int_{\Omega} \frac{\langle x, \nabla p \rangle}{p^2(x)} (\ln |\nabla u|^{p(x)} - 1) |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{\beta+1}{N} \int_{\Omega} \frac{\langle x, \nabla q \rangle}{q^2(x)} (\ln |\nabla v|^{q(x)} - 1) |\nabla v|^{q(x)} \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{\Omega} \Big\{ (\alpha+1) a_1 + (\beta+1) a_2 - N \Big\} c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} \mathrm{d}x - \int_{\Omega} \langle x, \nabla c \rangle |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} \mathrm{d}x.$$

Pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

On établit la proposition (II.1) à l'aide d'une identité de type Pohožev et généralisée par Pucci et Serrin (voir [40]). Pour cela, on s'inspire des résultats obtenus par [40].

Proposition II.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière de classe C^1. On suppose que ;*

II.2. Identité de type-Pohožaev et résultat de non-existence pour le système (p(x),q(x))-Laplacien :

- $p, q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $C^1_B(\Omega) \cap\ C(\overline{\Omega})$, $p_-, q_- > 1$.
- $c(.) \in C^1_B(\Omega \setminus \mathcal{C})$, $\mathcal{C} \subset \Omega$ $mes(\mathcal{C}) = 0$.

Alors pour chaque solution classique $(u, v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ *du problème (1) l'identité suivante est satisfaite ;*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[x_i\left(\frac{\alpha+1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} + \frac{\beta+1}{q(x)}|\nabla v|^{q(x)} - c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\right) - \right.$$

$$(\alpha+1)\left(x_j\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_1 u\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$\left. -(\beta+1)\left(x_j\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_2 v\right)|\nabla v|^{q(x)-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]$$

$$= (\alpha+1)\left[\frac{N-p(x)}{p(x)} - a_1\right]|\nabla u|^{p(x)} + (\beta+1)\left[\frac{N-q(x)}{q(x)} - a_2\right]|\nabla v|^{q(x)}$$

$$+\frac{\langle x, \nabla p\rangle}{p^2(x)}(\ln|\nabla u|^{p(x)} - 1)|\nabla u|^{p(x)} + \frac{\langle x, \nabla q\rangle}{q^2(x)}(\ln|\nabla v|^{q(x)} - 1)|\nabla v|^{q(x)}$$

$$+\left\{(\alpha+1)a_1 + (\beta+1)a_2 - N\right\}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} - \langle x, \nabla c\rangle|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}, \tag{II.2.3}$$

pour tout a_1 *et* $a_2 \in \mathbb{R}$.

La preuve de la proposition (II.2) peut-être établie par un calcul direct.

Démonstration. ***de la proposition (II.1).***
Tout au long de la preuve $x = (x_i)_{i=1,\cdots,N}, y = (y_i)_{i=1,\cdots,N}$ *désignent deux vecteurs de* $\mathbb{R}^N$, *et on note par* $x_i y_i$ *le produit scalaire des vecteurs* x *et* y *où la notation* Σ *sur les indices* i *et* j *omise sauf ambiguïté.*
Soit $(u, v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\right)^2$ *une solution classique du problème (1).*
Selon la proposition (II.2), (u, v) *satisfait l'identité (II.2.3). L'intégration par*

parties sur Ω nous donne

$$\int_{\partial\Omega}\Bigg[x_i\bigg(\frac{\alpha+1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}+\frac{\beta+1}{q(x)}|\nabla v|^{q(x)}-c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\bigg)$$

$$-(\alpha+1)\bigg(x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_1u\bigg)|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$-(\beta+1)\bigg(x_j\frac{\partial v}{\partial x_j}+a_2v\bigg)|\nabla v|^{q(x)-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Bigg]\nu_i\mathrm{d}\sigma$$

$$=(\alpha+1)\int_\Omega\left(\frac{N-p(x)}{p(x)}-a_1\right)|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x$$

$$+(\beta+1)\int_\Omega\left(\frac{N-q(x)}{q(x)}-a_2\right)|\nabla v|^{q(x)}\mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega\Bigg[\frac{1}{p^2(x)}\langle x.\nabla p\rangle(\ln|\nabla u|^{p(x)}-1)|\nabla u|^{p(x)}+$$

$$\frac{1}{q^2(x)}\langle x,\nabla q\rangle(\ln|\nabla v|^{q(x)}-1)|\nabla v|^{q(x)}\Bigg]\mathrm{d}x$$

$$+\int_\Omega\bigg\{(\alpha+1)a_1+(\beta+1)a_2-N\bigg\}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\mathrm{d}x$$

$$-\int_\Omega\langle x,\nabla c\rangle|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\mathrm{d}x. \tag{II.2.4}$$

Dans (II.2.4), ν désigne la normale extérieure sur la frontière $\partial\Omega$. Ainsi, pour tout x sur la frontière $\partial\Omega$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=(\nabla u.\nu)\nu_i,\ \forall i=1,\cdots,N,\ x\in\partial\Omega,$$

On peut écrire alors ;

$$\begin{aligned}x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}|\nabla u|^{p(x)-2}\nu_i &= x_j\left[(\nabla u.\nu)\nu_j\right]\frac{\partial u}{\partial x_i}|\nabla u|^{p(x)-2}\nu_i\\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}|\nabla u|^{p(x)-2}(x.\nu)\\ &= |\nabla u|^{p(x)}(x.\nu)\ \textit{on}\ \partial\Omega.\end{aligned}$$

En utilisant l'identité (II.2.4) et sachant que $u|_{\partial\Omega} = 0$, *on établit ainsi l'identité annoncée à la proposition (II.1).*

Remarque II.1. *Avant de montrer la proposition (II.2), notons que l'ensemble de fonctions satisfaisant l'hypothèse (II.2.2), est non-vide.*
En effet ; soit $x_0 \in \partial\Omega$ *tel que* $dist(0, \partial\Omega) = dist(0, x_0)$. *On pose* $R_0 = dist(0, \partial\Omega)$.
Évidemment la boule $B(0, R_0)$ *est contenu dans* Ω.
On définit et on pose Ω_1 *comme suit*

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega;\ 0 \leq \|x\| \leq \frac{R_0}{2} \right\}.$$

On définit la fonction c comme suit

$$c(x) = \begin{cases} -e^{\|x\|^2} & si \quad x \in \Omega_1 \\ e^{-\|x\|^2} & si \quad x \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

c change de signe dans Ω *et on a pour tout* $x \in \Omega$, $\langle x, \nabla c(x) \rangle \leq 0$. *De plus,* $c \in L^\infty(\Omega)$.

Théorème II.1. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *un ouvert borné de frontière* $\partial\Omega$ *de classe* C^1.
On suppose que :

- Ω *est un domaine borné de classe* C^1 *et étoilé par rapport à l'origine.*
- p, q *et* c, *sont comme dans la proposition (II.2).*
- $(x.\nabla p) \geq 0, (x \cdot \nabla q) \geq 0, \langle x, \nabla c(x) \rangle \leq 0$ *pour tout* x *dans* Ω
- $$(\alpha + 1)\frac{N - p^+}{Np^+} + (\beta + 1)\frac{N - q^+}{Nq^+} \geq 1. \qquad \text{(II.2.5)}$$

Alors le système (II.2.1) n'admet pas de solutions classiques non triviales $(u, v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\right)^2$ *telle que :*

$$|\nabla u(x)| \geq e^{1/p(x)} \text{ et } |\nabla v(x)| \geq e^{1/q(x)} \quad p.p \quad x \in \Omega, \qquad \text{(II.2.6)}$$

et

$$\int_\Omega c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx > 0.$$

Démonstration. *Suppose qu'il existe une solution classique non-triviale* $(u, v) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *du problème (1).*
Par conséquent (u, v) *vérifié les conditions de la proposition (II.1).*

Puisque $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est strictement étoilé par rapport à l'origine on a* $x.\nu > 0$ *sur* $\partial\Omega$ *ainsi*

$$-\frac{\alpha+1}{N}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\tilde{p}(x)}|\nabla u|^{p(x)} < x,\nu > \mathrm{d}\sigma - \frac{\beta+1}{N}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\tilde{q}(x)}|\nabla v|^{q(x)} < x,\nu > \mathrm{d}\sigma < 0$$

où ; $\dfrac{1}{\tilde{p}(x)} = \dfrac{p(x)-1}{p(x)}$, $\dfrac{1}{\tilde{q}(x)} = \dfrac{q(x)-1}{q(x)}$.
D'autre part, choisissons $a_1 \in \mathbb{R}$ *et* $a_2 \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$(\alpha+1)\frac{a_1}{N} + (\beta+1)\frac{a_2}{N} = 1$$

et utilisons les relations (II.2.5), (II.2.6), on obtient :

$$\frac{\alpha+1}{N}\int_{\partial\Omega}\frac{1-p(x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\langle x,\nu\rangle\mathrm{d}\sigma + \frac{\beta+1}{N}\int_{\partial\Omega}\frac{1-q(x)}{q(x)}|\nabla v|^{q(x)}\langle x,\nu\rangle\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{\alpha+1}{N}\int_{\Omega}\left(\frac{N-p(x)}{p(x)} - a_1\right)|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x + \frac{\beta+1}{N}\int_{\Omega}\left(\frac{N-q(x)}{q(x)} - a_2\right)|\nabla v|^{q(x)}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\Omega}\left\{(\alpha+1)a_1 + (\beta+1)a_2 - N\right\}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\mathrm{d}x - \int_{\Omega}\langle x,\nabla c\rangle|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\mathrm{d}x$$

$$\geq (\alpha+1)\frac{N-p^+}{Np^+}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x + (\beta+1)\frac{N-q^+}{Nq^+}\int_{\Omega}|\nabla v|^{q(x)}\mathrm{d}x$$

$$-(\alpha+1)\frac{a_1}{N}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x - (\beta+1)\frac{a_2}{N}\int_{\Omega}|\nabla v|^{q(x)}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\Omega}\left\{(\alpha+1)a_1 + (\beta+1)a_2 - N\right\}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\mathrm{d}x - \int_{\Omega}\langle x,\nabla c\rangle|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\mathrm{d}x$$

$$\geq \left\{(\alpha+1)\frac{N-p^+}{Np^+} + (\beta+1)\frac{N-q^+}{Nq^+} - (\alpha+1)\frac{a_1}{N} - (\beta+1)\frac{a_2}{N}\right\}\int_{\Omega}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx +$$

$$\geq \left\{(\alpha+1)\frac{N-p^+}{Np^+} + (\beta+1)\frac{N-q^+}{Nq+} - 1\right\}\int_{\Omega}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx$$

$$-\int_{\Omega}\langle x,\nabla c\rangle|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx.$$

Maintenant, on fait l'hypothèse que (u,v) *est une solution du problème. On note alors que* $\displaystyle\int_{\Omega}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx = \int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x = \int_{\Omega}|\nabla v|^{q(x)}\mathrm{d}x > 0$. *De* *ce fait, en combinant cette remarque avec l'hypothèse (II.2.2) dans la dernière inégalité, nous aboutissons à une contradiction, puisque le membre de gauche est négatif tandis que celui de droite demeure positif. La preuve est complète.*

Chapitre III

Résultat d'existence

Sommaire

III.1 Intoduction

Dans ce chapitre, afin d'établir des résultats d'existence pour le système (1), on utilise la fibering méthode **(F.M)** ou encore la méthode de la décomposition ou de sélection, introduite par **S. I. Pohožaev**[38].
Soient X, Y deux espaces de Banach et A un opérateur de X dans Y, en général non-linéaire.
Considérons l'équation

$$A(u) = h. \tag{III.1.1}$$

Dans le cas où l'opérateur A est monotone, semi continu et coercif, plusieurs méthodes ont été envisagées et développées pour des problèmes Physique-Mathématiques de type (III.1.1) **Browder**[7], **Minty**[31], **Lions**[29].
Si A est localement non-inversible, la méthode de **Lyapunov-Schmidt** basée sur la représentation de la solution $u = u_1 + u_2$ où u_1 appartient à un sous espace de X de dimension finie et u_2 dans son complémentaire permet de résoudre (III.1.1).
Pour ce qui est des problèmes non-coercifs, la méthode de Montain Pass obtenue par **Ambrosetti** et **Rabionowitz (1973)**[3] permet de traiter de tels problèmes. la méthode de la décomposition permet de trouver de solutions aux problèmes non-coercif et en l'absence de la continuité de l'opérateur A.

III.1.1 Description de la méthode (F.M)

On se donne
- X un espace de Banach muni de sa norme N_X,
- $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 sur $(X \setminus \{0\})$.
- $\tilde{J} : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{J}(t, v) = J(tv)$.
- I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $S_X = \{v \in X : N_X(v) = 1\}$ la sphère d'unité dans X muni à la norme N_X.

Nous donnons maintenant, un résultat d'existence formulé dans le théorème suivant :

Théorème III.1. *Soit (X, N_X) un espace de Banach.*
Si $(t, z) \in I \times X$ est un point critique sous contrainte de $\tilde{J}$ alors ; $u = tz$, $t \neq 0$, est un point critique de la fonctionnelle J i.e $J'(u) = 0$.

Démonstration. *Si (t, z) est un point critique sous contrainte, alors il existe un réel λ un multiplicateur de Lagrange tel que :*

$$\frac{\partial \tilde{J}(t, z)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial N_X(t, z)}{\partial z} \tag{III.1.2}$$

et

$$\frac{\partial \tilde{J}(t, z)}{\partial t} = 0 \tag{III.1.3}$$

Par conséquent, on a pour $z \in S$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{J}(t,z)}{\partial z}, z \right\rangle_{X^*,X} = \lambda \left\langle \frac{\partial N_X}{\partial z}, z \right\rangle_{X^*,X} \tag{III.1.4}$$

$$\left\langle \frac{\partial N_X(t,z)}{\partial z}, z \right\rangle_{X^*,X} \neq 0. \tag{III.1.5}$$

Or

$$\frac{\partial \tilde{J}(t,z)}{\partial z} = \frac{\partial J(tz)}{\partial u} \times \frac{\partial tz}{\partial z} = t\frac{\partial J(tz)}{\partial u}. \tag{III.1.6}$$

Ainsi,

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{J}(t,z)}{\partial z}, z \right\rangle_{X^*,X} = t \left\langle \frac{\partial J(tz)}{\partial z}, z \right\rangle_{X^*,X} = t\frac{\partial \tilde{J}(t,z)}{\partial t}$$

En utilisant l'équation (III.1.3) ; on obtient $\left\langle \frac{\partial \tilde{J}(t,z)}{\partial z}, z \right\rangle_{X^*,X} = 0$. *En combinant alors avec (III.1.4), on conclut que* $\lambda = 0$. *De ce fait, l'équation (III.1.2) implique* $\frac{\partial \tilde{J}(t,z)}{\partial z} = 0$. *On impose maintenant* $t \neq 0$, *ainsi de la relation (III.1.6), on déduit que* $\frac{\partial J(tz)}{\partial u} = 0$ *et ce qui donne* $J'(tz) = 0$.

Donnons à présent une autre application de la méthode (F.M) :
Soit $H : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ une fonction de décomposition (Fibering-Function), vérifiant la contrainte $H(t,z) = k \neq 0$: k est appelée constante de contrainte de décomposition (Fibering-Constraint)
On a le théorème suivant qui caractérise la fonction H :

Théorème III.2. *On suppose que :*

$$\langle H_z(t,z), z \rangle_{X*,X} - tH_t(t,z) \neq 0 \tag{III.1.7}$$

Si $(t,z) \in I \times X$ *est un point critique de* $\tilde{J}$ *sous la contrainte* $H(t,z) = k \neq 0$.
Alors, $u = tz$, *est un point critique de* J *(avec* $t \neq 0$*)*

III.2 Résultat d'existence via la méthode (F.M)

Tout le long de cette section, Ω désigne un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$ et $X_0(x) = W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times W_0^{1,q(x)}(\Omega)$, l'espace produit des espaces de Sobolev généralisés $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$ munis de la norme de Luxembourg $\|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)}$ et $\|v\|_{W_0^{1,q(x)}(\Omega)}$ respectivement.
On note par :

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)}$$

et

$$\|v\|_{1,q(x)} = \|v\|_{W_0^{1,q(x)}(\Omega)}.$$

Avant de commencer, faisons la remarque suivante :

Remarque III.1. *Sous l'hypothèse* $(\alpha+1)\dfrac{N-p^-}{Np^-}+(\beta+1)\dfrac{N-q^-}{Nq^-}<1$, *on peut prouver que* $\displaystyle\int_\Omega c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx$ *a un sens. La fonction* c *est bornée dans* Ω, *il suffit alors de montrer que* $|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}$ *appartient à* $L^1(\Omega)$.
En effet puisque $\dfrac{\alpha+1}{p^+}+\dfrac{\beta+1}{q^+}>1$, *il existe alors un couple* $(\hat{p},\hat{q})$ *tel que*

1.
$$p^- < \hat{p} < \frac{Np^-}{N-p^-} \tag{III.2.1}$$
et
$$q^- < \hat{q} < \frac{Nq^-}{N-q^-} \tag{III.2.2}$$

2. $\dfrac{\alpha+1}{\hat{p}}+\dfrac{\beta+1}{\hat{q}}=1.$

Pour tout $x\in\Omega$, *on a* $\dfrac{Np^-}{N-p^-}<\dfrac{Np(x)}{N-p(x)}$ *et* $\dfrac{Nq^-}{N-q^-}<\dfrac{Nq(x)}{N-q(x)}$. *De ce fait et de l'hypothèse* $(\alpha+1)\dfrac{N-p^-}{Np^-}+(\beta+1)\dfrac{N-q^-}{Nq^-}<1$, *les relations (III.2.1) et (III.2.2) deviennent, pour tout* $x\in\Omega$:

$$p^- < \hat{p} < \frac{Np(x)}{N-p(x)}$$

et

$$q^- < \hat{q} < \frac{Nq(x)}{N-q(x)}.$$

La continuité des injections $W_0^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{\hat{p}}(\Omega)$ *et* $W_0^{1,q(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{\hat{q}}(\Omega)$ *et l'utilisation de l'inégalité de Hölder permettent d'obtenir l'estimation suivante :*

$$\left|\int_\Omega c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx\right| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^{\alpha+1}_{L^{\hat{p}}(\Omega)}\|v\|^{\beta+1}_{L^{\hat{q}}(\Omega)} \leq Cst\|u\|^{\alpha+1}_{1,p(x)}\|v\|^{\beta+1}_{1,q(x)}.$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat souhaité.

III.2.1 Notations et hypothèses

Notations

Pour $(z,w)\in X_0(x)$, on pose :

$$A(z)=\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx,\quad B(w)=\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx \text{ et } C(z,w)=\int_\Omega c(x)|z|^{\alpha+1}|w|^{\beta+1}dx,$$

ainsi pour tout $(z,w)\in X_0(x)$, $\displaystyle\int_\Omega c(x)|z|^{\alpha+1}|w|^{\beta+1}dx$ est bien défini.
On pose $\gamma^+=\dfrac{\alpha+1}{p^+}+\dfrac{\beta+1}{q^+}$, $\gamma^-=\dfrac{\alpha+1}{p^-}+\dfrac{\beta+1}{q^-}$.

On définit sur $X_0(x)$, la fonctionnelle $\mathbf{J}$ par :

$$\mathbf{J}(u,v) = (\alpha+1)\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + (\beta+1)\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla v|^{q(x)}dx - C(u,v). \quad \text{(III.2.3)}$$

Grâce à la remarque (III.1), la fonctionnelle J est bien définie.

Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes :

$$1 < \gamma^+. \quad \text{(III.2.4)}$$

$$(p,q) \in \left(\mathcal{P}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\right)^2 \text{ vérifiant (I.1.1).} \quad \text{(III.2.5)}$$

et

$$1 < p^- \leq p^+ < +\infty, \qquad 1 < q^- \leq q^+ < +\infty. \quad \text{(III.2.6)}$$

III.2.2 Définition de la solution faible

Commençons par définir la notion de solution faible du système (1)

Définition III.1. *On dit que $(u,v) \in X_0(x)$ est une solution faible de (1) si les identités :*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega c(x)u|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta+1}u \, \phi \, dx$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q(x)-2}\nabla v \nabla \, \psi \, dx = \int_\Omega c(x)|u|^{\alpha+1}v|v|^{\beta-1}u \, \psi \, dx$$

sont vérifiées pour tout $(\phi,\psi) \in X_0(x)$.

III.2.3 Méthode de la décomposition pour un système quasi-linéaire

La méthode de la décomposition appliquée à notre problème (1) consiste à exprimer $(u,v) \in X_0(x)$ sous la forme

$$u = rz, \quad v = \rho w$$

où les fonctions $z \in W_0^{1,p(x)} \setminus \{0\}$, $w \in W_0^{1,q(x)} \setminus \{0\}$ et r, ρ sont des nombres réels non nuls.

Remarque III.2. *Dans [6], la méthode (F.M) a été utilisée pour obtenir l'existence de solutions multiples pour un système analogue à (1), lorsque les exposants $p(x)$ et $q(x)$ sont constants.*
Les paramètres r et ρ dépendent de z et de w, vérifiant $r^p = \rho^q$ pour (z,w) tels que $A(z) = A(z,w) = 1$ et $B(w) = B(z,w) = 1$
Cette démarche est utilisée ici avec $u = rz$ et $v = \rho w$ où $r = t^{1/p^+}$ et $\rho = t^{1/q^+}$, $t > 0$ r et ρ dépendent de z et de w, alors t dépend de z et de w. De ce fait, on définit par $t(z,w)$, ce paramètre associé à z et w.
Les résultats ci-dessous donnent l'existence ainsi que des propriétés de $t(z,w)$.

III.2.4 Existence du paramètre de la décomposition $t(z,w)$

Existence et propriétés

Supposons que (u,v) est un point critique de la fonctionnelle $\mathbf{J}$, alors
$$\frac{\partial J}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial J}{\partial v}(u,v) = 0.$$
Selon la remarque (III.2), le paramètre de la décomposition associé à (z,w) est tel que ;
$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}\left(t^{1/p^+}z, t^{1/q^+}w\right) = 0. \tag{III.2.7}$$
Plus précisément, $t(z,w)$ est défini dans la proposition suivante :

Proposition III.1. *(Existence et localisation) Soit (z,w) un point fixé dans $X_0(x)$ tel que $C(z,w) > 0$.*

1. ***Existence***
   Si (III.2.4) est vérifiée, alors il existe $t(z,w) \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant de (z,w) tel que :
$$\frac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega t(z,w)^{\frac{p(x)}{p^+}}|\nabla z|^{p(x)}dx \quad + \quad \frac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega t(z,w)^{\frac{q(x)}{q^+}}|\nabla w|^{q(x)}dx = t(z,w)^{\gamma^+}C(z,w). \tag{III.2.8}$$

2. **Localisation** *:*
   Soit
$$Q(z,w) = \frac{\dfrac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\displaystyle\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx + \dfrac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx}{C(z,w)}.$$
   Si $Q(z,w) > 1$ (respectivement $Q(z,w) \le 1$) alors $t(z,w) > 1$ (respectivement $t(z,w) \le 1$).
   De plus, on a les estimations suivantes

(a) Si $0 < t(z,w) < 1$:

$$Q(z,w)^{1/(\gamma^+-1)} \leq t(z,w) \leq Q(z,w)^{1/\gamma^+} \tag{III.2.9}$$

(b) Si $1 \leq t(z,w)$:

$$Q(z,w)^{1/\gamma^+} \leq t(z,w) \leq Q(z,w)^{1/(\gamma^+-1)}. \tag{III.2.10}$$

Démonstration. *1.* ***Existence de*** $t(z,w)$:

Grâce à la définition de **J** *(voir III.2.3), la résolution de (III.2.7) équivaut à résoudre l'équation :*

$$\frac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega t^{\frac{p(x)}{p^+}}|\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega t^{\frac{q(x)}{q^+}}|\nabla w|^{q(x)}dx = t^{\gamma^+}C(z,w).$$

Pour ce faire, considérons la fonction $\tilde{f}$ *définie sur* $[0,+\infty[$ *par :*

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) \quad = \quad & \frac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega t^{\frac{p(x)}{p^+}}|\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega t^{\frac{q(x)}{q^+}}|\nabla w|^{q(x)}dx \\ & - t^{\gamma^+}C(z,w).\end{aligned}$$

Pour $0 < t < 1$*, il s'ensuit que*

$$t[Q(z,w) - t^{\gamma^+-1}]C(z,w) \leq \tilde{f}(t). \tag{III.2.11}$$

Maintenant, pour $1 \leq t$*, on peut écrire ;*

$$\tilde{f}(t) \leq t[Q(z,w) - t^{\gamma^+-1}]C(z,w). \tag{III.2.12}$$

Par conséquent, d'une part on a ;

$$\lim_{t\to 0}\tilde{f}(t) \geq 0$$

d'autre part,

$$\lim_{t\to+\infty}\tilde{f}(t) = -\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe $t(z,w) \in \mathbb{R}_+^*$ *dépendant de* z*,* w *tel que* $\tilde{f}(t(z,w)) = 0$*, et par suite* $t(z,w)$ *satisfait (III.2.8).*

2. ***Localisation de*** $t(z,w)$:

Il y a deux cas à envisager, selon que $Q(z,w) < 1$ *où* $Q(z,w) \geq 1$.

(a) *Supposons que* $Q(z,w) < 1$, *il s'ensuit que* $0 < t(z,w) < 1$.
En effet, supposons le contraire i.e $1 \leq t(z,w)$ *alors en vertu de (III.2.12), on obtient* $t(z,w) \leq Q(z,w)$ *c'est à dire* $Q(z,w) \geq 1$ *ce qui contredit l'hypothèse* $Q(z,w) < 1$.

(b) *Maintenant, si* $Q(z,w) \geq 1$ *et de (III.2.11) on obtient* $t(z,w) \geq 1$.
De (III.2.8) et l'hypothèse (III.2.4), la localisation du paramètre de la décomposition est une déduction de ce qui précède.

Lemme III.1. *Si (III.2.4) est satisfaite et* $t(z,w)$ *défini comme dans (III.2.8), alors l'application de* $(z,w) \longmapsto t(z,w)$ *est de classe* C^1 *de* $X_0(x) \setminus \{(0,0)\}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. *Dans l'ouvert* $X_0(x)\setminus\{(0,0)\}\times(]0,1[\cup]1,+\infty[)$, *définissons la fonctionnelle* η *comme suit :*

$$\eta(z,w,t) = \frac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega t^{\frac{p(x)}{p^+}-\gamma^+}|\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega t^{\frac{q(x)}{q^+}-\gamma^+}|\nabla w|^{q(x)}dx - C(z,w).$$

Alors $\eta(z,w,t(z,w)) = 0$ *et* $\dfrac{\partial \eta}{\partial t}(z,w,t(z,w)) < 0$. *Le théorème de la fonction implicite appliqué à* η *permet d'affirmer que l'application* $(z,w) \longmapsto t(z,w)$ *est de classe* C^1 *dans* $X_0(x) \setminus \{(0,0)\}$.

Maintenant, définissons une nouvelle fonctionnelle $\mathcal{J}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(z,w) = \; & \int_\Omega \frac{\alpha+1}{p(x)} t(z,w)^{\frac{p(x)}{p^+}}|\nabla z|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{\beta+1}{q(x)} t(z,w)^{\frac{q(x)}{q^+}}|\nabla w|^{q(x)}dx \\ & - t(z,w)^{\gamma^+} C(z,w).\end{aligned} \tag{III.2.13}$$

III.2.5 Existence du point critique conditionnel

Nous commençons par donner quelques lemmes.

Lemme III.2. *Soit* $(z_0,w_0) \in X_0(x) \setminus \{(0,0)\}$ *tel que* $C(z_0,w_0) \neq 0$.
Alors, il existe $Z_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ *satisfaisant* $C(Z_0,w_0) > 0$.

Démonstration. *Soit* $(z_0,w_0) \in X_0(x) \setminus \{(0,0)\}$ *tel que* $C(z_0,w_0) \neq 0$.
Pour cela, considérons les cas suivants :

- $C(z_0, w_0) > 0$.
  Alors il suffit de prendre $Z_0 = z_0$.
- $C(z_0, w_0) < 0$.
  Dans ce contexte, on note que,

$$\int_\Omega c_+(x)|z_0|^{\alpha+1}|w_0|^{\beta+1}dx < \int_\Omega c_-(x)|z_0|^{\alpha+1}|w_0|^{\beta+1}dx.$$

Supposons que $c_+(x) > 0$, $c_-(x) \geq 0$ *et posons :*

$$Z_0 = z_0\, \chi_{\{c>0\}} - \hat{\varepsilon} z_0\, \chi_{\{c\leq 0\}}$$

où $\hat{\varepsilon}$ *est choisi tel que*

$$0 < \hat{\varepsilon} < \left[\frac{\displaystyle\int_{\{c>0\}} c_+(x)|z_0|^{\alpha+1}|w_0|^{\beta+1}dx}{\displaystyle\int_{\{c\leq 0\}} c_-(x)|z_0|^{\alpha+1}|w_1|^{\beta+1}dx + 1} \right]^{1/\alpha+1}.$$

La quantité $\int_\Omega c(x)|Z_0|^{\alpha+1}|w_0|^{\beta+1}dx > 0$. *La preuve du lemme est terminée.*

Définissons maintenant l'ensemble :

$$E = \left\{ (z, w) \in X_0(x); \quad \int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx = 1, \ \int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx = 1 \right\}. \quad \text{(III.2.14)}$$

E n'est pas vide (voir [28, 19]).
Par suite, on a le lemme suivant.

Lemme III.3. *L'ensemble :*

$$\{(z, w) \in E;\ C(z, w) > 0\}$$

n'est pas vide.

Démonstration. *Soit* $(z_0, w_0) \in X_0(x) \setminus \{(0, 0)\}$ *tel que* $C(z_0, w_0) \neq 0$. *En vertu du lemme (III.2), il existe* $(\mathcal{Z}, w_0) \in X_0(x) \setminus \{(0, 0)\}$ *tel que* $C(\mathcal{Z}, w_0) > 0$.
Si $(\mathcal{Z}, w_0) \in E$ *alors l'assertion du lemme est vérifiée. Sinon,* $(\mathcal{Z}, w_0)$ *n'est pas dans* E.
Soit à présent $\int_\Omega |\nabla \mathcal{Z}|^{p(x)}\, dx > 1$ *et* $\int_\Omega |\nabla w_0|^{q(x)}\, dx < 1$. *Le théorème de valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions*

$$t \mapsto 1 - \int_\Omega |\nabla t\mathcal{Z}|^{p(x)}\, dx, \quad s \mapsto \int_\Omega |\nabla s w_0|^{q(x)}\, dx - 1,$$

met en évidence, un couple $(t_p, s_q) \in (]0,1[\times]1,+\infty[)^2$ *tel que ;*

$$\int_\Omega |\nabla t_p \mathcal{Z}|^{p(x)}\, dx = 1 = \int_\Omega |\nabla s_q w_0|^{q(x)}\, dx.$$

De plus, comme $C(\mathcal{Z}, w_0) > 0$*, alors* $C(t_p\mathcal{Z}, s_q w_0) > 0$.
Les autres situations se traitent de la même manière. Ce qui achève la preuve.

Proposition III.2. $\mathcal{J}$ *étant la fonctionn elle définie par (III.2.13) et pour* $(z,w) \in E$*, sous les hypothèses (III.2.4) et (III.2.6) on a les estimations suivantes :*

$$\frac{\gamma^+}{C(z,w)^{1/\gamma^+-1}} - 1 \quad \leq \mathcal{J}(z,w) \leq \quad \frac{\gamma^- - 1}{C(z,w)^{\min\left(\frac{p^-}{\gamma^+p^+}, \frac{q^-}{\gamma^+q^+}\right)}}, \quad si \quad t \geq 1,$$

$$\frac{\gamma^+ - 1}{C(z,w)^{\min\left(\frac{p^-}{\gamma^+p^+}, \frac{q^-}{\gamma^+q^+}\right)}} \quad \leq \mathcal{J}(z,w) \leq \quad \frac{\gamma^-}{C(z,w)^{1/\gamma^+-1}} - 1, \qquad si \quad 0 < t < 1.$$

Démonstration. *Les estimations (III.2.9) et (III.2.10) impliquent la majoration et la minoration de la fonctionnelle* $\mathcal{J}(z,w)$*.*
En effet :

1. *Si* $t(z,w) \geq 1$*, en vertu de (III.2.13) et (III.2.8), il découle que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z,w) = \;& (\alpha+1)\int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p^+\gamma^+}\right) t(z,w)^{\frac{p(x)}{p^+}} |\nabla z|^{p(x)} dx \\
& \qquad + (\beta+1)\int_\Omega \left(\frac{1}{q(x)} - \frac{1}{q^+\gamma^+}\right) t(z,w)^{\frac{q(x)}{q^+}} |\nabla w|^{q(x)} dx \\
\geq \;& \left[(\alpha+1)\frac{\gamma^+-1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)} dx \right. \\
& \qquad \left. + (\beta+1)\frac{\gamma^+-1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)} dx\right] t(z,w)^{\min\left(\frac{p^-}{p^+}, \frac{q^-}{q^+}\right)} \\
\geq \;& \left[\frac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)} dx + \frac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)} dx\right] (\gamma^+-1) Q(z,w)^{\min\left(\frac{p^-}{\gamma^+p^+}, \frac{q^-}{\gamma^+q^+}\right)}.
\end{aligned}$$

La fonctionnelle $\mathcal{J}(z,w)$ est alors bornée comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z,w) &\leq t(z,w)\left[\frac{\alpha+1}{p^-}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^-}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right] - t(z,w)^{\gamma^+}C(z,w)\\
&\leq \left[\frac{\alpha+1}{p^-}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^-}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right] Q(z,w)^{1/\gamma^+-1}\\
&\qquad - \left[\frac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right].
\end{aligned}$$

2. *Si $t(z,w) < 1$.*
   D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z,w) &\geq t(z,w)\left[\frac{\alpha+1}{p^+}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^+}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right] - t(z,w)^{\gamma^+}C(z,w)\\
&\geq \left[\frac{\alpha+1}{p^+}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^+}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right] Q(z,w)^{1/\gamma^+-1}\\
&\qquad - \left[\frac{\alpha+1}{p^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx + \frac{\beta+1}{q^+\gamma^+}\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right].
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z,w) = &\ (\alpha+1)\int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p^+\gamma^+}\right) t(z,w)^{\frac{p(x)}{p^+}}|\nabla z|^{p(x)}dx\\
&\qquad +(\beta+1)\int_\Omega \left(\frac{1}{q(x)} - \frac{1}{q^+\gamma^+}\right) t(z,w)^{\frac{q(x)}{q^+}}|\nabla w|^{q(x)}dx\\
\leq &\ \left[(\alpha+1)\left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+\gamma^+}\right)\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx\right.\\
&\qquad \left.+(\beta+1)\left(\frac{1}{q^-} - \frac{1}{q^+\gamma^+}\right)\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right] t(z,w)^{\min\left(\frac{p^-}{p^+},\frac{q^-}{q^+}\right)}\\
\leq &\ \left[(\alpha+1)\left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+\gamma^+}\right)\int_\Omega |\nabla z|^{p(x)}dx\right.\\
&\qquad \left.+(\beta+1)\left(\frac{1}{q^-} - \frac{1}{q^+\gamma^+}\right)\int_\Omega |\nabla w|^{q(x)}dx\right] Q(z,w)^{\min\left(\frac{p^-}{p^+\gamma^+},\frac{q^-}{q^+\gamma^+}\right)}.
\end{aligned}$$

En prenant $(z,w)\in E$, $Q(z,w)$ *se réduit à* $Q(z,w)=\dfrac{1}{C(z,w)}$. *Ce qui achève la démonstration de la proposition.*

Considérons à présent le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{\{(z,w)\in E;\ c(z,w)>0\}}\frac{1}{C(z,w)}. \tag{III.2.15}$$

La borne inférieure est atteinte dans E.
Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant.

Lemme III.4. *Sous l'hypothèse (III.2.5), le problème d'optimisation (III.2.15) admet au mois une solution.*

Démonstration. *La résolution de (III.2.15) équivaut à celle du problème de maximisation*

$$\sup\left\{\int_\Omega c(x)|z|^{\alpha+1}|w|^{\beta+1}dx;\ \ (z,w)\in E,\ C(z,w)>0\right\}. \tag{III.2.16}$$

Posons

$$M=\sup\left\{\int_\Omega c(x)|z|^{\alpha+1}|w|^{\beta+1}dx;\ \ (z,w)\in E,\ C(z,w)>0\right\}.$$

Tout d'abord, notons qu'en vertu de la remarque (III.1) que M *est fini.*
En effet, de la fin de la remarque (III.1) et l'utilisation de [28] ou bien [19], on obtient

$$\forall(z,w)\in E,\quad 0<C(z,w)\le\|c\|_\infty K,$$

les constantes $\|c\|_\infty$ *et* K *sont indépendantes de* z *et* w.
On s'inspire de l'idée de [6] et on montre qu'il existe $(z_M,w_M)\in E$ *tel que :*

$$C(z,w)\le C(z_M,w_M)\quad\forall(z,w)\in E.$$

Soit (z_n,w_n) *une suite maximisante de (III.2.16) (i.e* (z_n,w_n) *tel que* $A(z_n)=1,\quad B(w_n)=1$ *et* $C(z_n,w_n)\to M>0$*). Il est est clair que* (z_n,w_n) *est bornée dans* $X_0(x)$*. Il s'ensuit que* $z_n\rightharpoonup\overline{z}$ *faiblement dans* $W_0^{1.p(x)}(\Omega)$ *et grâce à la compacité de l'injection de* $W_0^{1.p(x)}(\Omega)$ *dans* $L^{\hat{p}}(\Omega)$*, on a* $z_n\to\overline{z}$ *fortement dans* $L^{\hat{p}}(\Omega)$.
De même, $w_n\rightharpoonup\overline{w}$ *faiblement dans* $W_0^{1.q(x)}(\Omega)$ *et* $w_n\to\overline{w}$ *fortement dans* $L^{\hat{q}}(\Omega)$.
En utilisant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée, on obtient :

$$C(z_n,w_n)\to C(\bar{z},\bar{w})\ \ p.p.$$

Comme, $z \mapsto \int_\Omega |\nabla z|^{p(x)} dx$ *est semi-module dans le sens de la définition (2.1.1) dans [12], En appliquant le théorème (2.2.8) de [12], on obtient que la fonction* $\varrho(\cdot)$ *est faiblement semi-continue inférieurement.*
Les convergences faibles de $z_n \rightharpoonup \bar{z}$ *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *et de* $w_n \rightharpoonup \bar{w}$ *dans* $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$ *impliquent que*

$$\int_\Omega |\nabla \bar{z}|^{p(x)} dx \leq \liminf_n \int_\Omega |\nabla z_n|^{p(x)} dx = 1$$

et

$$\int_\Omega |\nabla \bar{w}|^{q(x)} dx \leq \liminf_n \int_\Omega |\nabla w_n|^{q(x)} dx = 1.$$

Supposons par l'absurde que $\int_\Omega |\nabla \bar{z}|^{p(x)} dx < 1$ *et* $\int_\Omega |\nabla \bar{w}|^{q(x)} dx < 1$, *alors* $\|\bar{z}\|_{1,p(x)} < 1$ *et* $\|\bar{w}\|_{1,q(x)} < 1$.
Désignons par

$$a = \|\bar{z}\|_{1,p(x)} = \|\nabla \bar{z}\|_{L^{p(x)}} \ \ et \ \ \ b = \|\bar{w}\|_{1,q(x)} = \|\nabla \bar{w}\|_{L^{q(x)}}.$$

Les propriétés de la fonction ϱ *impliquent que*

$$\varrho\left(\left|\nabla\left(\frac{1}{a}\bar{z}\right)\right|\right) = \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{1}{a}\bar{z}\right)\right|^{p(x)} dx = 1$$

et

$$\varrho\left(\left|\nabla\left(\frac{1}{b}\bar{w}\right)\right|\right) = \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{1}{b}\bar{w}\right)\right|^{q(x)} dx = 1.$$

Il est clair que :

$$\left(\frac{1}{a}\bar{z}, \frac{1}{b}\bar{w}\right) \in E.$$

D'autre part

$$C\left(\frac{1}{a}z_n, \frac{1}{b}w_n\right) \ \text{tend vers} \ C\left(\frac{1}{a}\bar{z}, \frac{1}{b}\bar{w}\right) \ \text{lorsque} \ n \to +\infty.$$

On constate alors que :

$$C\left(\frac{1}{a}\bar{z}, \frac{1}{b}\bar{w}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{b}\right)^{\beta+1} C(\bar{z}, \bar{w}) = \left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{b}\right)^{\beta+1} M.$$

Puisque $a < 1$, $b < 1$, *on obtient*

$$C\left(\frac{1}{a}\bar{z}, \frac{1}{b}\bar{w}\right) > M.$$

D'où la contradiction.

Par conséquent, de la proposition (III.2) et du lemme (III.4), on déduit que

$$\inf_{\{(z,w)\in E;\ C(z,w)>0\}} \mathcal{J}(z,w)$$

existe
Dans la section suivante, on montre que la borne inférieure est atteinte en E.

III.2.6 Solution du problème de minimisation

Le problème consiste à chercher $(z,w) \in E$ satisfaisant

$$\inf \mathcal{J}(z,w) : A(z) = 1,\ \ B(w) = 1. \tag{III.2.17}$$

Pour ce faire, on a besoin de quelques outils et quelques lemmes.

Lemme III.5. *Soit E un ensemble défini comme dans (III.2.14). Supposons que les fonctions p et q satisfont l'hypothèse (III.2.5). Alors, pour tout $(z,w) \in X_0(x)$, il existe $\delta(z) > 0$ et $\theta(w) > 0$ tel que*

$$\left(\frac{1}{\delta(z)}z, \frac{1}{\theta(w)}w\right) \in E.$$

Démonstration. *gt :! Pour chaque z fixé dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, on définit sur $]0,+\infty[$, la fonction f par*

$$f(z,\delta) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\delta}\right)^{p(x)} |\nabla z|^{p(x)} dx - 1.$$

Pour chaque $\delta > 1$, on a

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{p+} \int_\Omega |\nabla z|^{p(x)} dx - 1 \leq f(z,\delta) \leq \left(\frac{1}{\delta}\right)^{p^-} \int_\Omega |\nabla z|^{p(x)} dx - 1.$$

Le cas de $\delta < 1$ donne :

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{p^-} \int_\Omega |\nabla z|^{p(x)} dx - 1 \leq f(z,\delta) \leq \left(\frac{1}{\delta}\right)^{p^+} \int_\Omega |\nabla z|^{p(x)} dx - 1.$$

Des inégalités précédentes, il résulte que :
- $f(z,\delta)$ *tend vers* -1 *lorsque* $\delta \to +\infty$,
- $f(z,\delta)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* $\delta \to 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\delta_z \in]0,+\infty[$ *tel que :*

$$\int_\Omega \frac{1}{\delta_z^{p(x)}} |\nabla z|^{p(x)} dx = 1.$$

Et qu'il existe $\theta_w > 0$ *tel que :*

$$\int_\Omega \frac{1}{\theta_w^{q(x)}} |\nabla w|^{q(x)} dx = 1.$$

Ceci achève la preuve.

Lemme III.6. *Les applications* $z \longmapsto \delta(z)$ *et* $w \longmapsto \theta(w)$ *définies dans le lemme précédent sont de classe* C^1 *de* $\mathcal{U}_{z,\delta_z}$ *dans* $I\!R$ *et de* $\mathcal{V}_{w,\theta_w}$ *dans* $I\!R$.

Démonstration. *Un calcul simple montre que*

$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(z,\delta) = -\frac{1}{\delta} \int_\Omega p(x) \frac{1}{\delta^{p(x)}} |\nabla z|^{p(x)} dx.$$

Substituons δ *par* δ_z*, on obtient :*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \delta}(z,\delta_z) \right| > \frac{p^-}{\delta_z} > 0.$$

Le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'un voisinage de $(z,\delta_z) \in \mathcal{U}_{z,\delta_z} \subset \mathcal{U}$ *et une fonction de classe* C^1 $z \longmapsto \delta(z)$ *de* $\mathcal{U}_{z,\delta_z}$ *dans* $I\!R$ *tel que :*

$$\delta'(z) \cdot \phi = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}(z,\delta_z) \cdot \phi}{\dfrac{\partial f}{\partial \delta}(z,\delta_z)}. \tag{III.2.18}$$

Cette formule reste encore vraie pour $z \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$*, on a : (III.2.18) s'écrit encore :*

$$\delta'(z) \cdot \phi = -\frac{\displaystyle\int_\Omega p(x) \frac{1}{\delta_z^{p(x)}} |\nabla z|^{p(x)-2} \nabla z \cdot \nabla \phi dx}{\displaystyle\frac{1}{\delta_z} \int_\Omega p(x) \frac{1}{\delta_z^{p(x)}} |\nabla z|^{p(x)} dx}. \tag{III.2.19}$$

De la même façon, on obtient :

$$\theta'(w) \cdot \psi = -\frac{\displaystyle\int_\Omega q(x) \frac{1}{\theta_w^{q(x)}} |\nabla w|^{q(x)-2} \nabla w \cdot \nabla \psi dx}{\displaystyle\frac{1}{\theta_w} \int_\Omega q(x) \frac{1}{\theta_w^{q(x)}} |\nabla w|^{q(x)} dx.} \tag{III.2.20}$$

Remarque III.3. *Introduisons la fonctionnelle* $\widetilde{\mathbf{J}}$ *définit dans* $W_0^{1,p(x)} \times W_0^{1,q(x)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par :*

$$\widetilde{\mathbf{J}}(z,w,t) = \mathbf{J}(t^{1/p^+}z, t^{1/q^+}w). \tag{III.2.21}$$

Pour $(z,w) \in X_0(x) \setminus \{(0,0)\}$ *et* $t(z,w)$ *défini dans (III.2.8), on a ;*

$$\widetilde{\mathbf{J}}(z,w,t(z,w)) = \mathcal{J}(z,w). \tag{III.2.22}$$

Lemme III.7. *Soit* $(z_n, w_n) \in E$ *une suite minimisante de* $(III.2.17)$, *alors la suite* (u_n, v_n) *définie par :*

$$u_n = t(z_n,w_n)^{1/p^+} z_n \;\; et \;\; v_n = t(z_n,w_n)^{1/q^+} w_n$$

est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle $\mathbf{J}$, *i.e*

$$\mathbf{J}(u_n, v_n) \leq m, \tag{III.2.23a}$$

$$\mathbf{J}'(u_n, v_n) \to 0, \;\; au\ sens\ de\ la\ norme\ \|.\|_{X_0^*(x)}. \tag{III.2.23b}$$

Démonstration. *Soit les applications :*

$$\begin{array}{rccl} \pi : & W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times E_p \\ & z & \longmapsto & (\pi_1(z), \pi_2(z)) = \left(\delta(z), \dfrac{z}{\delta(z)}\right) \end{array}$$

$$et$$

$$\begin{array}{rccl} \tau : & W_0^{1,q(x)}(\Omega) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times E_q \\ & w & \longmapsto & (\tau_1(w), \tau_2(w)) = \left(\theta(w), \dfrac{w}{\theta(w)}\right) \end{array}.$$

où

$$E_p = \{z \in W_0^{1,p(x)}(\Omega);\; A(z) = 1\}$$

et

$$E_q = \{w \in W_0^{1,q(x)}(\Omega);\; B(w) = 1\}.$$

Désignons par $T_{(z,w)}E$ *l'espace tangent à* E. *Il est connu que* $T_{(z,w)}E = T_z E_p \times T_w E_q$. *De plus, pour tout* $(z,w) \in X_0(x)$, *et pour tout* $(\Phi, \Psi) \in T_{(z,w)}E$, *on a*

$$\mathcal{J}'(z,w)(\Phi,\Psi) = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{J}}}{\partial z}(z,w,t(z,w))(\Phi) + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{J}}}{\partial w}(z,w,t(z,w))(\Psi).$$

Soit $(z_n, w_n) \in E$ *une suite minimisante. Si* $(\phi, \psi) \in X_0(x)$, *alors ;* $(\pi_2'(z_n) \cdot \phi, \tau_2'(w_n) \cdot \psi) \in T_{(z_n,w_n)}E$.
Posons $B_n = (z_n, w_n, t(z_n, w_n))$, *on obtient*

1. $\dfrac{\partial \mathbf{J}}{\partial u}(u_n, v_n)(\phi) = \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{J}}}{\partial z}(B_n)(\pi_2'(z_n) \cdot \phi)$,
2. $\dfrac{\partial \mathbf{J}}{\partial v}(u_n, v_n)(\phi) = \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{J}}}{\partial w}(B_n)(\tau_2'(w_n) \cdot \psi)$,
3. $\mathcal{J}'(z_n, w_n)(\pi_2'(z_n)\cdot\phi, \tau_2'(w_n)\cdot\psi) = \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{J}}}{\partial z}(B_n)(\pi_2'(z_n)\cdot\phi) + \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{J}}}{\partial w}(B_n)(\tau_2'(w_n)\cdot \psi)$.

Par conséquent, pour tout $(\phi, \psi) \in X_0(x)$*, on a*

$$\mathbf{J}'(u_n, v_n)(\phi, \psi) = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial u}(u_n, v_n)(\phi) + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial v}(u_n, v_n)(\psi)$$

qui s'écrit

$$\mathbf{J}'(u_n, v_n)(\phi, \psi) = \mathcal{J}'(z_n, w_n)(\pi_2'(z_n) \cdot \phi, \tau_2'(w_n) \cdot \psi).$$

Le principe variationnel d'Ekeland nous permet de conclure que,

$$|\mathcal{J}'(z_n, w_n)(\pi_2'(z_n) \cdot \phi, \tau_2'(w_n) \cdot \psi)| \leq \frac{1}{n}\|(\pi_2'(z_n)\cdot\phi, \tau_2'(w_n)\cdot\psi)\|_{X_0(x)}, \quad \forall(\phi, \psi) \in X_0(x).$$

Où encore

$$|\mathbf{J}'(u_n, v_n) \cdot (\phi, \psi)| \leq \frac{1}{n}\| \left(\pi_2'(z_n) \cdot \phi, \tau_2'(w_n) \cdot \psi\right) \|_{X_0(x)}, \quad \forall(\phi, \psi) \in X_0(x).$$

Et par suite

$$|\mathbf{J}'(u_n, v_n) \cdot (\phi, \psi)| \leq \frac{1}{n}\left(\|(\pi_2'(z_n) \cdot \phi\|_{1,p(x)} + \|\tau_2'(w_n) \cdot \psi)\|_{1,q(x)}\right). \quad \text{(III.2.24)}$$

En posant $\tilde{\delta}_n = \delta(z_n)$*. Alors, de la définition de* π_2*, on obtient :*

$$\pi_2'(z_n) \cdot \phi = \frac{\phi}{\tilde{\delta}_n} - \frac{z_n \displaystyle\int_\Omega p(x)\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)-2}\nabla z_n \cdot \nabla\phi dx}{\dfrac{1}{\tilde{\delta}_n}\displaystyle\int_\Omega p(x)\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)}dx}.$$

Qui implique que

$$\begin{aligned}
\|\pi_2'(z_n) \cdot \phi\|_{1,p(x)} &\leq \frac{\|\phi\|_{1,p(x)}}{\tilde{\delta}_n} + \frac{\|z_n\|_{1,p(x)}\left|\displaystyle\int_\Omega p(x)\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)-2}\nabla z_n \cdot \nabla\phi dx\right|}{\dfrac{1}{\tilde{\delta}_n}\displaystyle\int_\Omega p(x)\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)}dx} \\
&\leq \frac{\|\phi\|_{1,p(x)}}{\tilde{\delta}_n} + \frac{\left|\displaystyle\int_\Omega p(x)\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)-2}\nabla z_n \cdot \nabla\phi dx\right|}{\displaystyle\int_\Omega p(x)\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)}dx}.
\end{aligned}$$

Appliquons successivement l'inégalité de Hölder sur $L^{p(x)}$ *[27, 28, 19], on trouve*

$$\left|\int_\Omega p(x)\frac{|\nabla z_n|^{p(x)-2}}{\tilde{\delta}_n^{p(x)-2}}\frac{\nabla z_n}{\tilde{\delta}_n}\cdot\frac{\nabla\phi}{\tilde{\delta}_n}dx\right| \begin{aligned}[t] &\leq p+\left|\frac{|\nabla z_n|^{p(x)-1}}{\tilde{\delta}_n^{p(x)-1}}\right|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)}\cdot\frac{\|\phi\|_{1,p(x)}}{\tilde{\delta}_n}\\ &= p^+\cdot\frac{\|\phi\|_{1,p(x)}}{\tilde{\delta}_n}.\end{aligned} \tag{III.2.25a}$$

$$\int_\Omega p(x)\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)}dx \geq p^-\int_\Omega\frac{1}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}|\nabla z_n|^{p(x)}dx \geq p^-. \tag{III.2.25b}$$

Des remarques précédentes, on déduit la nouvelle estimation :

$$||\pi_2'(z_n)\cdot\phi||_{1,p(x)} \leq \left(1+\frac{p+}{p^-}\right)\frac{\|\phi\|_{1,p(x)}}{\tilde{\delta}_n}.$$

Les résultats sur les espaces $L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *(voir [19]), l'identité*

$$\int_\Omega\frac{|\nabla z_n|^{p(x)}}{\tilde{\delta}_n^{p(x)}}dx = 1$$

et l'hypothèse $\displaystyle\int_\Omega|\nabla z_n|^{p(x)}dx = 1$, *donnent*

$$\|z_n\|_{1,p(x)} = \tilde{\delta}_n = 1.$$

Par suite :

$$\|\pi_2'(z_n)\cdot\phi\|_{1,p(x)} \leq \left(1+\frac{p^+}{p^-}\right)\|\phi\|_{1,p(x)}.$$

De même

$$||\tau_2'(w_n)\cdot\psi||_{1,q(x)} \leq \left(1+\frac{q^+}{q^-}\right)\|\psi\|_{1,q(x)}.$$

Et en vertu de (III.2.24), on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}\|\mathbf{J}'(u_n,v_n)\|_{X_0^*(x)} = 0.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.

Lemme III.8. *Supposons que (III.2.4) est vérifiée. Soit* (z_n,w_n) *une suite minimisante de* $\mathcal{J}$ *dans* E. *La suite* $(u_n,v_n) = (t(z_n,w_n)^{1/p^+}z_n, t(z_n,w_n)^{1/q^+}w_n)$ *est bornée dans* $X_0(x)$.

Démonstration. *Puisque* $u_n = t(z_n, w_n)^{1/p^+} z_n$, $v_n = t(z_n, w_n)^{1/q^+} w_n$, *Par la caractérisation de l'équation (III.2.8), Il s'ensuit que*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \int_\Omega |\nabla v_n|^{q(x)} dx - 2\int_\Omega c(x)|u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1} dx = 0. \quad \text{(III.2.26)}$$

D'autre part, comme (z_n, w_n) *est une suite minimisante de la fonctionnelle* $\mathcal{J}(z, w)$, *on a,*

$$m \leq (\alpha+1)\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)} dx + (\beta+1)\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla v_n|^{q(x)} dx - C(u_n, v_n) < m + \frac{1}{n}. \quad \text{(III.2.27)}$$

La combinaison de (III.2.26) et (III.2.27) nous donne :

$$m \leq \int_\Omega \left(\frac{\alpha+1}{p(x)} - 1\right)|\nabla u_n|^{p(x)} dx + \int_\Omega \left(\frac{\beta+1}{q(x)} - 1\right)|\nabla v_n|^{q(x)} dx + C(u_n, v_n) < m + \frac{1}{n}.$$

Mais comme,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx = \int_\Omega |\nabla v_n|^{q(x)} dx = \int_\Omega c(x)|u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1} dx,$$

on aura,

$$m \leq \int_\Omega \frac{\alpha+1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)} dx + \int_\Omega \left(\frac{\beta+1}{q(x)} - 1\right)|\nabla v_n|^{q(x)} dx < m + \frac{1}{n}.$$

Un calcul simple donne

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx < \frac{m+1}{\gamma^+ - 1}.$$

En argumentant de la même façon, on a,

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{q(x)} dx < \frac{m+1}{\gamma^+ - 1}.$$

Ce qui montre que (u_n, v_n) *est bornée dans* $X_0(x)$.

Lemme III.9. *Sous l'hypothèse (III.2.5), le problème (III.2.17) possède au mois une solution.*

Démonstration. *La preuve du lemme se divise en trois étapes.*

- *Etape 1 :* ***Convergence faible de*** (u_n, v_n)
  Soit $(z_n, w_n) \in E$ *une suite maximisante. D'après le lemme (III.7),* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{J}(u_n, v_n) = m$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\mathbf{J}'(u_n, v_n)\|_{X_0^*(x)} = 0$ *et que* (u_n, v_n) *est*

bornée dans $X_0(x)$.
Extrayant, si nécessaire, une sous suite notée encore (u_n, v_n), *alors il existe un couple* $(u^*, v^*) \in X_0(x)$ *tels que*

$$u_n \rightharpoonup u^* \ \ dans \ \ W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

$$v_n \rightharpoonup v^* \ \ dans \ \ W_0^{1,q(x)}(\Omega).$$

- *Etape 2 :* ***La convergence forte***
Dans cette étape, on va montrer la convergence forte de u_n *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *et de* v_n *dans* $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$ *Pour ce faire, on établit que* u_n *et* v_n *sont des sous suites de Cauchy .*
Pour tous $m, \ \ l \in I\!N$

$$\begin{aligned}
& \big[\mathbf{J}'(u_m, v_m) - \mathbf{J}'(u_l, v_l)\big](u_m - u_l, 0) \\
= \ & (\alpha+1)\int_\Omega (|\nabla u_m|^{p(x)-2}\nabla u_m - |\nabla u_l|^{p(x)-2}\nabla u_l)(\nabla u_m - u_l)dx \\
- \ & (\alpha+1)\int_\Omega c(x)\big[|v_m|^{(\beta+1}|u_m|^{\alpha-1}u_m - |v_l|^{(\beta+1}|u_l|^{\alpha-1}u_l\big](u_m - u_l)dx.
\end{aligned}$$

Après avoir fait un réarrangement approprié, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega (|\nabla u_m|^{p(x)-2}\nabla u_m - |\nabla u_l|^{p(x)-2}\nabla u_l)(\nabla u_m - u_l)dx \\
= \ & \frac{1}{\alpha+1}\big[\mathbf{J}'(u_m, v_m) - \mathbf{J}'(u_l, v_l)\big](u_m - u_l, 0)dx \\
+ \ & \int_\Omega c(x)\big[|v_m|^{\beta+1}|u_m|^{\alpha-1}u_m - |v_l|^{\beta+1}|u_l|^{\alpha-1}u_l\big](u_m - u_l)dx.
\end{aligned}$$

On veut monter que,

$$\int_\Omega c(x)\big[|v_m|^{(\beta+1}|u_m|^{\alpha-1}u_m - |v_l|^{(\beta+1}|u_l|^{\alpha-1}u_l\big](u_m - u_l)dx \to 0, \quad m, l \to +\infty. \tag{III.2.28}$$

A cet effet, en vertu de (III.2.28) et la remarques (III.1), on a

$$\begin{aligned}
& \left| \int_\Omega c(x) \left[|v_m|^{\beta+1} |u_m|^{\alpha-1} v_m - |v_l|^{\beta+1} |u_l|^{\alpha-1} u_l \right] (u_m - u_l) dx \right| \\
\leq \; & \int_\Omega c(x) |v_m|^{\beta+1} |u_m|^{\alpha} |u_m - u_l| dx + \int_\Omega c(x) |v_l|^{\beta+1} |u_l|^{\alpha} |u_m - u_l| dx \\
\leq \; & \|c\|_\infty \|v_m\|^{\beta+1}_{L^{\hat{q}}(\Omega)} \|u_m\|^{\alpha}_{L^{\hat{p}}(\Omega)} \|u_m - u_l\|_{L^{\hat{p}}(\Omega)} \\
+ \; & \|c\|_\infty \|v_l\|^{\beta+1}_{L^{\hat{q}}(\Omega)} \|u_l\|^{\alpha}_{L^{\hat{p}}(\Omega)} \|u_m - u_l\|_{L^{\hat{p}}(\Omega)} \\
\leq \; & C \|u_m - u_l\|_{L^{\hat{p}}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{III.2.29}$$

Comme l'injection $W_0^{1.p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\delta(x)}(\Omega)$ *(resp* $W_0^{1.q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\gamma(x)}(\Omega)$*) avec* $\delta(x) < \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}$ *(resp.* $\gamma(x) < \dfrac{Nq(x)}{N - q(x)}$*) est compacte (voir [19]).*
En choisissant $\gamma(x) = \hat{p}$*, il s'ensuit que* u_n *converge fortement vers* u^* *dans* $L^{\hat{p}}(\Omega)$*. Même chose pour* v_n
Par conséquent (u_n, v_n) *est une suite de Cauchy dans* $L^{\hat{p}}(\Omega) \times L^{\hat{q}}(\Omega)$*, et (III.2.29) est vérifiée.*
En outre, selon [27], il existe C_1, C_2, C_3, C_4 *tel que*

$$\langle F(\nabla u_m) - F(\nabla u_l), u_m - u_l \rangle \geq \begin{cases} \qquad\qquad si \quad 1 < p(x) < 2, \\ C_1 \|u_m - u_l\|^2_{1,p(x)}, \\ C_2 \|u_m - u_l\|^{2p_{0,1}/p_{1,1}}_{1,p(x)}, \\ \qquad\qquad si \quad p(x) \geq 2, \\ C_3 \|u_m - u_l\|^{p_{0,2}}_{1,p(x)}, \\ C_4 \|u_m - u_l\|^{p_{1,2}}_{1,p(x)}, \end{cases} \tag{III.2.30}$$

avec $F(\xi) = |\xi|^{p(x)-2} \xi \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $p_{0,j} = \inf_{x \in \Omega_j} p(x)$, $p_{1,j} = \sup_{x \in \Omega_j} p(x)$ $j = 1; 2$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega; \quad 1 < p(x) < 2\}$ *et* $\Omega_2 = \{x \in \Omega; \quad p(x) \geq 2\}$. *En vertu de (III.2.23b), (III.2.28) et (III.2.30), On conclut que* u_n *converge fortement vers* $u*$ *dans* $W_0^{1,p(x)}$ *et par le même argument, on a la convergence forte de* v_n *vers* v^* *dans* $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$.

- *Etape 3 :* (u^*, v^*) ***est solution de (1)***

Via la méthode de la décomposition, on va montrer que $u^* = \bar{r}\bar{z}$ *et* $v^* = \bar{\rho}\bar{w}$*, où* $\bar{z}$ *et* $\bar{w}$ *sont respectivement les limites faibles de* z_n *et de* w_n.
On a $t_n = t(z_n, w_n)$*. Posons* $r_n = t_n^{1/p^+}$ *et* $\rho_n = t_n^{1/q^+}$.
Les estimations (III.2.9) et (III.2.10) montrent que la suite t_n *est bornée dans* $\mathbb{R}$*, on peut extraire une suite notée encore* t_n *converge vers* $\bar{t}$ *i.e* $\bar{t} = \lim_{n\to+\infty} t_n$.
Par suite $r_n \to \bar{t}^{1/p^+}$ *et* $\rho_n \to \bar{t}^{1/q^+}$ *quant* n *tend vers* $+\infty$.
Posons $\bar{r} = \bar{t}^{1/p^+}$ *et* $\bar{\rho} = \bar{t}^{1/q^+}$.
On peut écrire $\dfrac{1}{r_n}u_n - \dfrac{1}{\bar{r}}u^* = \dfrac{1}{r_n\bar{r}}\left[(\bar{r} - r_n)\,u^* + \bar{r}\,(u_n - u^*)\right]$ *qui montre que*

$$\left\| \frac{u_n}{r_n} - \frac{u^*}{\bar{r}} \right\|_{1,p(x)} \to 0, \qquad \textit{lorsque } n \textit{ tend vers } +\infty.$$

Autrement dit, puisque $\dfrac{u_n}{r_n} = z_n$*, on déduit que* z_n *converge fortement vers* $\dfrac{u^*}{\bar{r}}$ *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$*. D'autre part* z_n *converge vers* $\bar{z}$ *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,
On déduit que

$$\bar{z} = \frac{u^*}{\bar{r}}.$$

De la semi continuité inférieurement de la norme on a :

$$\|u^*\|_{1,p(x)} \leq \liminf_n \|u_n\|_{1,p(x)} \leq \limsup_n \|u_n\|_{1,p(x)}.$$

s'écrivant aussi :

$$\|\bar{z}\|_{1,p(x)}\bar{r} \leq \liminf_n r_n\|z_n\| \leq \limsup_n \|u_n\|_{1,p(x)}.$$

Comme $\|z_n\|_{1,p(x)} = 1$ *et* $\|u_n\|_{1,p(x)} \leq \|u_n - u^*\|_{1,p(x)} + \|u^*\|_{1,p(x)}$,
On obtient l'estimation suivante :

$$\|\bar{z}\|_{1,p(x)}\bar{r} \leq \bar{r} \leq \|\bar{z}\|_{1,p(x)}\bar{r}$$

C'est à dire après avoir divisé par $\bar{r} > 0$*, on obtient* $\|\bar{z}\|_{1,p(x)} = 1$*. De la même manière, on obtient* $\|\bar{w}\|_{1,q(x)} = 1$*. On conclut ainsi que* $(\bar{z}, \bar{w})$ *est solution du problème conditionnel* $(III.2.17)$*. Comme* $\|\bar{z}\|_{1,p(x)} = \|\bar{w}\|_{1,q(x)} = 1$*, en utilisant [19], on déduit la seconde partie du théorème (III.3). La preuve est terminée.*

III.2.7 Existence du point critique global

Donnons à présent le résultat d'existence.

Théorème III.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Soient $p, q : \Omega \to I\!R_+^*$ deux fonctions de classe $C_B^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$; $p_-, q_- > 1$. On suppose que*

$$(\alpha+1)\frac{N-p^-}{Np^-} + (\beta+1)\frac{N-q^-}{Nq^-} < 1 \qquad \text{(III.2.31)}$$

et

$$\frac{\alpha+1}{p^+} + \frac{\beta+1}{q^+} - 1 > 0. \qquad \text{(III.2.32)}$$

Alors le système (1) admet une solution non triviale $(u^*, v^*) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times W_0^{1,q(x)}(\Omega)$. De plus, on a les estimations :

$$\|u^*\|_{1,p(x)}^{p^+} = \|v^*\|_{1,q(x)}^{q^+}$$

et

$$\int_\Omega c(x)|u^*|^{\alpha+1}|v^*|^{\beta+1}dx > 0.$$

Avant d'entamer la démonstration du théorème, donnons une remarque :

Remarque III.4. *1. Sous l'hypothèse (III.2.36), on a*

$$\frac{\alpha+1}{p^-} + \frac{\beta+1}{q^-} - 1 > 0. \qquad \text{(III.2.33)}$$

2. Quant $p(x)$ et $q(x)$ sont constants, alors (III.2.36) et (III.2.33) sont réduites à la condition bien connue :

$$1 < \frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q}.$$

Démonstration. *Du théorème (III.3)*
Les lemmes précédents affirment que $(\bar{z}, \bar{w})$ est une solution du problème de minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{J}$.
De la caractérisation du multiplicateur d'Euler-Lagrange, on déduit l'existence d'un couple $(m_1, m_2) \in I\!R^2$ tel que,
$\forall (h,k) \in X_0(x)$,

$$\nabla\mathcal{J}(\bar{z},\bar{w})\cdot(h,k) = m_1\nabla A(\bar{z},\bar{w})\cdot(h,k) + m_2\nabla B(\bar{z},\bar{w})\cdot(h,k). \qquad \text{(III.2.34)}$$

Dans (III.2.34), posons $h = \bar{z}$, $k = \bar{w}$, *on obtient*

$$\mathcal{J}'(\bar{z}, \bar{w})(\bar{z}, \bar{w}) = 0. \tag{III.2.35}$$

La combinaison de (III.2.34) et (III.2.35) donne,

$$\begin{cases} m_1 A^{(1)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) + m_2 B^{(1)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) = 0 \\ m_1 A^{(2)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) + m_2 B^{(2)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) = 0. \end{cases}$$

ici $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ *(resp.* $A^{(2)}$ *et* $B^{(2)}$*) sont les premières dérivées par rapport à* z *(resp.* w*).*
Notons

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) & B^{(1)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) \\ & \\ A^{(2)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) & B^{(2)} \cdot (\bar{z}, \bar{w}) \end{pmatrix} \geq p^- q^- A(\bar{z}) B(\bar{w}) = p^- q^- > 0.$$

Il s'ensuit que

$$m_1 = m_2 = 0.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{J}'(\bar{z}, \bar{w}) = 0,$$

ou encore

$$\mathbf{J}'(\bar{r}\bar{z}, \bar{\rho}\bar{w}) = 0.$$

On conclut que $(u^*, v^*) = (\bar{r}\bar{z}, \bar{\rho}\bar{w})$ *est un point critique de* $\mathbf{J}$.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a présenté un résultat de non existence et d'existence de la solution pour un système elliptique gouverné par l'opérateur $p(x), q(x)-$ Laplacien.
Le résultats de non existence a été établie sous la condition :

$$(\alpha+1)\frac{N-p^+}{Np^+}+(\beta+1)\frac{N-q^+}{Nq^+}\geq 1,$$

et le résultat d'existence quant à lui est obtenu lorsque :

$$(\alpha+1)\frac{N-p^-}{Np^-}+(\beta+1)\frac{N-q^-}{Nq^-}<1.$$

et

$$\frac{\alpha+1}{p^+}+\frac{\beta+1}{q^+}-1>0. \tag{III.2.36}$$

En perspective ; la méthode de sous et sur solution est proposée pour résoudre ce système.

Bibliographie

[1] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for stationary electrheological fluids. *Archive for rational mechanic and analysis*, **3** :213–259, 2002.

[2] K. Adriouch and A. El Hamidi. The nehari manifold for systems of nonlinear elliptic equations. *Nonlinear Analysis*, **6** :2149–2167, 2006.

[3] A. Ambrosetti. R. H. Rabinowitz. Dual variationnel methods in critical point theory and applications. *J. Functional. Anal*, **14** :349–381, 1973.

[4] L. Antonio-Ribeiro de Santana, Y. Bozhkov and W. Castro Ferreiro Jr. Species survival versus eigeinvalues. *Abstract and Applied Analysis*, **2** :115–135, 2004.

[5] S. N. Antontsev an S. I. Shmarev. A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity : existence, uniqueness and localization properties of solutions. *Nolinear Analysis : theory, Methods and Applications*, **60**(3) :515–554, 2005.

[6] Y. Bozhkov, E. Mitidieri. Existence of multiple solutions for quasilinear systems via fibering method. *J. Differential Equations*, **190** :239–267, 2003.

[7] F. E. Browder. Non linear elliptic boundary value problems. *Bull. Amer. Math. Soc*, **69** :862–864, 1963.

[8] K. Brown and T-F. Wu. A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem. *E.J.D.E*, **69** :1–9, 2007.

[9] J. Chabrowski and Y. Fu. existence of solutions for $p(x)$- laplacian problem on a bounded domain. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, **306**(2) :604–618, 2005.

[10] Y. Chen, S. Levine, and m. Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **66**(4) :1383–1406, 2006.

[11] L. DIENING. *Theorical and numerical results for eletrorheological fluids.* PND. Thesis, university of Frieburg, 2000.

[12] L. DIENING, P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ AND M. RŮŽIČKA. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2011.

[13] G. DINCA. F. ISAIA. Generalized pohozeav and pucci-serrin identities and non-existence results for p(x)-laplacian type equations. *Rendiconti del circolo matimatico di palermo*, **59** :1–46, 2010.

[14] P. DRABECK AND S.I. POHOŽAEV. Positive solutions for the p-laplacian : application of the fibering method. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **127**(A) :703–726, 1997.

[15] D. EDMINDS AND J. RÁKOSNIK. Sobolev embedding with variable exponent. *Studia mathematical*, **143**(3) :267–293, 2000.

[16] I. EKELAND. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl*, **47** :323–353, 1974.

[17] X.L. FAN, J. SHEN AND D. ZHA. Sobolev Embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *J.math.Anal.Appl*, **262** :749–760, 2001.

[18] X. L. FAN, S. Y. WANG AND D. ZHAO. Density of $C^{\infty}(\Omega)$ in $W^{1.p(x)}$ with discontinous exponent $p(x)$. *Math. Nachr*, **279**(1-3) :142–149, 2006.

[19] X.L. FAN AND D. ZHAO. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$. *J.Math.Anal.Appl*, **263** :424–446, 2001.

[20] X. FAN. Solutions for $p(x)$-laplacian dirichlet problems with singular coefficients. *Mathematical Analysis and applications*, **312**(1) :464–477, 2005.

[21] M. GALEWSKI. New variation method for $p(x)$-Laplacian equation. *New variation method*, **72**(1) :53–65, 2005.

[22] T. C. HALSEY. Electro-rheological fluids. *Science*, **258** :761–766, 1992.

[23] H. HUDZIK. On generalized orlicz-sobolev space. *Funct. Approximatio Comment. Math*, **4** :37–51, 1976.

[24] H. HUDZIK. A generalization of sobolev spaces.i. *Funct. Approximatio Comment. Math*, **2** :67–73, 1976.

[25] Y.S. IL'YASOV. The pokhozhaev identity and the fibering method. *Diff. Equations*, **38**(10) :1453–1459, 2002.

[26] D.A. KANDILAKIS AND M. MAGIROPOULOS. Existence results for a p-Laplacian problem with competing nonlinear boundary conditions. *E.J.D.E*, **95** :1–6, 2011.

[27] Yun-Ho Kim, L. Wang and C. Zhang. Global bifurcation for a class of degenerate elliptic equations with variable exponents. *J.Math.Anal.Appl*, **371** :624–637, 2010.

[28] O. Kováčik and J. Rákosnik. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$. *Czechoslovak Math. Journal*, **41**(4) :592–618, 1991.

[29] J. Leray et J. L. Lions. Quelques résultats de Višk sur les problèmes non linéairs par les méthodes de Minty-Browder . *Bulletin de la S. M. F*, **93** :97–107, 1965.

[30] M. Minailescu and V. Rodulescu. A mulplicity result for nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. *Procedings of the royal society of london A*, **426** :2625–2641, 2006.

[31] G.J. Minty. Monotone (non linear) operators in hilbert space. *Duk math. J*, **29** :341–346, 1962.

[32] J. Musielak. *Orlicz Spaces and Modular Spaces.* Lecture Notes in Mathematics 1034. Springer-Verlag, 1983.

[33] H. Nakano. *Modulared Semi-Ordered Linear Space.* Maruzen co. Ltd, 1951.

[34] W. Orlicz. Über konjugierte exponentenfolgen. *Studia Math*, **3** :200–211, 1931.

[35] S. I. Pohožaev. *On a constructive method in the calculus of variations.* Dokl. Akad. NaukSSSR. in Russian, 1988.

[36] S.I.Pohožeav. Eigenfunctions of the equation $-\Delta u+\lambda f(u) = 0$. *Soviet Math. Dokl*, **6** :1408–1411, 1965.

[37] S.I. Pohožeav. *Nonlinear variationnal problems Via the Fibering Method.* Steklov mathematical Institute, Russian academy of sciences, Gubkina str.8, 1991.

[38] S. I. Pohožaev. On approch to nonlinear equation. *Dokl.Akad.Nauk.SSSR*, **247** :1327–1331, 1979.

[39] S. I. Pohožaev. On the global fibrering method in variational problems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **219** :281–328, 1997.

[40] P. Pucci, J. Serrin. A general variationnal identity. *Indiana Univ. Math.*, **35**(3) :681–703, 1986.

[41] K. R. Rajogopal, M. Ružička . On the modeling of eletrorheological material. *Mech research Comm*, **23** :401–407, 1996.

[42] M. Ružička. *Eletrorheological Fluids, Modeling and mathematical theory*, volume **1748**. Lecture Notes in Mathemathematics, Springer, 2000.

[43] A. Salvatore. Some multiplicity results for a superlinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **21** :29–39, 2003.

[44] A. Salvatore. Multiple solutions for elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth. *J.Diff. Eq*, **244** :2529–2544, 2008.

[45] S. Samko. Convolution type operators in $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$. *Integral transform. Spec. Funct*, **7** :123–144, 1998.

[46] I. I. Sharapudinov . On the topology of the espace $L^{p(t)}([0,1])$. *Math. Notes*, **26** :796–806, 1979.

[47] F. de Thélin and J.Vélin. Existence and nonexistence of nontrivial solutions for quasilinear elliptic systems. *Rev. Mat. Univ. Complutence Madrid*, **6** :153–154, 1993.

[48] I. V. Tsenov. Generalisation of the problem of best approximation of a function in the espace L^s . *Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ*, **7** :25–37, 1961.

[49] J. Vélin. On an existence result for a class of (p,q)-gradient elliptic systems via a fibering method . *Nonlinear Analysis T.M.A*, **75** :6009–6033, 2012.

[50] J. Vélin. Multiple solutions for a class of (p,q)-gradient elliptic systems via a fibering method. *To appear in Proceeding A of The Royal Society of Edinburgh.*

[51] T-F. Wu. Multiple positive solutions of a nonlinear boundary value problem involving a sign-changing weight. *Nonlinear Analysis : T.M.A*, 74(12) :4223–4233, 2011.

[52] G. Yang and M. Wang. Existence of multiple positive solutions for a p-laplacian system with sign-changing weight. *Computer and Mathematics with applications*, **55**(4) :636–653, 2008.

[53] V. V. Zhikov. Averaging of functionals of calculus of variations and elasticity theory. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR.Seriya Mathematicheskaya, Russian*, **50**(4) :675–710, 1986.